Tarea 6.

1. Obtener las componentes del elemento de matriz dipolar eléctrico $\vec{\wp}_{1s2p} = e\vec{r}_{1s2p}$ entre los estados $1s$ y $2p$ en hidrógeno atómico. ¿Cuál es la vida media del estado $2p$ en hidrógeno?

2. La transición entre los estados $5s_{1/2}$ y $5p_{3/2}$ en rubidio atómico ocurre para una longitud de onda de 780.2 nm. Calcular el ancho Doppler en megahertz a temperatura ambiente y a 200 μK, para los isótopos ^{85}Rb y ^{87}Rb. ¿Cómo se compara este ancho con el natural debido a una vida media de 26.63 ns?

3. El átomo de dos niveles de energía. Considerar un "átomo" con solo dos niveles de energía a y b. El estado a es el de mayor energía. La diferencia en energías entre los dos niveles es $\omega_{ab} = (E_a - E_b)/\hbar$. Este átomo se encuentra en presencia de una onda electromagnética de frecuencia angular ω. Se propone una función de onda para el sistema de la forma:

$$\psi = C_a(t)\exp\left(-iE_a t/\hbar\right)\phi_a + C_b(t)\exp\left(-iE_b t/\hbar\right)\phi_b$$

a) Escribir el sistema de ecuaciones para los coeficientes C_a y C_b en la aproximación dipolar eléctrica. Suponer que el elemento de matriz dipolar eléctrica sólo tiene elementos fuera de la diagonal, esto es:

$$\begin{aligned} \wp_{aa} &= \wp_{bb} &= 0 \\ \wp_{ab} &= \wp_{ba} &= \wp \neq 0 \end{aligned}$$

de tal manera que el término de interacción en el Hamiltoniano es $\mathcal{V}_{ab} = -\wp E_0 \cos\omega t$.

b) Descomponer este término oscilante en el tiempo en exponenciales complejas. Demostrar que si se desprecian los términos que giran a altas frecuencias (aproximación de onda rotatoria) el sistema de ecuaciones resultante es:

$$\begin{aligned} \dot{C}_a &= \frac{i}{2}\wp\frac{E_0}{\hbar}\exp\left[i(\omega_{ab}-\omega)t\right]C_b \\ \dot{C}_b &= \frac{i}{2}\wp\frac{E_0}{\hbar}\exp\left[-i(\omega_{ab}-\omega)t\right]C_a \end{aligned}$$

c) Despejar C_b de la primera ecuación, tomar su derivada temporal y sustituirla en la segunda. Obtener los valores de μ para los cuales $\exp(i\mu t)$ es una solución de este sistema.

d) Obtener la solución para un átomo que inicialmente ($t = 0$) se encuentra en el estado b. Demostrar que la probabilidad de encontrar al sistema en el tiempo t en el estado excitado a está dada por

$$|C_a(t)|^2 = \frac{\Omega^2 sen^2 \left[\frac{1}{2} t \sqrt{\Delta^2 + \Omega^2}\right]}{\Delta^2 + \Omega^2}$$

donde la frecuencia Ω (frecuencia de Rabi) es:

$$\Omega = \frac{\wp E_0}{\hbar}$$

y $\Delta = \omega_{ab} - \omega$ es la desintonía.

e) Considerar el caso de resonancia ($\Delta = 0$) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al átomo en el estado a después de un tiempo $\tau = (\pi\hbar/\wp E_0)$.