Tarea 11.

1. Demostrar que la energía cinética de un gas de electrones libres a cero absoluto es:

$$E_c = \frac{3}{5} N \epsilon_F$$

Donde ϵ_F es la energía de Fermi. Obtener expresiones para la presión $p = -\partial E/\partial V$ y el módulo de compresibilidad volumétrica $B = -V(\partial p/\partial V)$. Estimar la contribución a B de los electrones de conducción en potasio y comparar la respuesta con el resultado de una medición experimental de $B = 0.37 \times 10^{10}\ Nm^{-2}$.

2. Considerar una cadena unidimensional de N átomos idénticos separados por una distancia a. La teoría de electrones casi libres predice que cerca de la frontera de la primera zona de Brillouin el primer término de la expansión de Fourier del potencial periódico de la red $V = V_1 \cos(2\pi x/a)$ es el único que contribuye y que la función de onda se puede escribir de manera aproximada como:

$$\psi = \alpha \exp i(kx) + \beta \exp i(k - 2\pi/a)x$$

Demostrar que esta es una función de Bloch. Sustituir esta función de onda en la ecuación de Schroedinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi = \mathcal{E}\psi$$

Multiplicar la ecuación resultante (a) por $\exp(-ikx)$ e integrar sobre toda la cadena, y (b) por $\exp[-i(k - 2p/a)x]$ e integrar sobre toda la cadena. Si se pide que las dos ecuaciones resultantes tengan solución no-trivial para α y β demostrar que la energía $\mathcal{E}$ para esta función de onda se puede escribir como:

$$\mathcal{E} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2 \pi}{ma}\left\{\left(\frac{\pi}{a} - k\right) \pm \left[\left(\frac{\pi}{a} - k\right)^2 + \left(\frac{amV_1}{2\pi\hbar^2}\right)^2\right]^{1/2}\right\}$$

¿Cuál es el valor de la brecha de energía para $k = \pi/a$? Demostrar que la forma de la curva de dispersión para k lejos de la frontera de la primera zona es la de la partícula libre.

3. Considerar una cadena circular de N átomos separados una distancia a.

(a) Empleando funciones de onda tipo Bloch demostrar que los valores permitidos de k están dados por la condición:

$$k = \frac{2\pi s}{L} = \frac{2\pi s}{Na}$$

con $s = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ N-1$.

(b) Emplear la aproximación de enlace apretado con interacción entre primeros vecinos para los electrones π en benceno. Demostrar que los niveles de energía son:

$$\begin{aligned} E_1 &= -\alpha - 2\gamma \\ E_2 &= -\alpha - \gamma \\ E_3 &= -\alpha + \gamma \\ E_4 &= -\alpha + 2\gamma \end{aligned}$$

donde el segundo y el tercer nivel son doblemente degenerados.

4. Encontrar en los valores reportados en tablas tres elementos con coeficiente de Hall negativos. ¿Cuántos electrones de valencia tienen esos metales? ¿Por qué son positivos los portadores de carga?

5. Calcular la densidad de portadores de carga en GaSb a $T = 300$ K si a esa temperatura la energía de brecha $E_g = 0.68$ eV, y además $m_e^*/m_e = 0.047$ y $m_h^*/m_e = 0.06$.