Tarea 1.

1. Usar la definición en mecánica clásica de momento angular $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$, para escribir las componentes rectangulares del operador cuántico de momento angular. Demostrar que estas componentes se pueden escribir en términos de las coordenadas angulares esféricas como:

$$\begin{aligned} \ell_x &= i\hbar \left(\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \\ \ell_y &= -i\hbar \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \\ \ell_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned}$$

2. Demostrar que las funciones radiales $R_{10}(r)$, y $R_{32}(r)$ de la tabla de las notas son solución de la ecuación radial del átomo de hidrógeno (utilizar $\mu = m_e$).

3. (a) ¿Qué valores de momento angular orbital son permitidos para el átomo de hidrógeno con $n = 2$? Hacer un diagrama de los niveles de energía incluyendo estructura fina (usar la ecuación 2.82 de las notas que se reproduce a continuación).

$$\Delta E(n, j) = \frac{Z^2 \alpha^2 |E_n|}{n^2} \left[\frac{3}{4} - \frac{n}{j + 1/2} \right]$$

(b) Empleando un valor de espín nuclear de $I = 1/2$ para el protón, ¿qué valores puede tomar el momento angular total F en cada uno de los estados del inciso (a)?

4. ¿Cómo se modifican los niveles de energía para el muonio (formado por un protón y un muón)? Hacer un diagrama de niveles de energía para $n = 1$ y 2 incluyendo estructura fina (no es necesario incluir estructura hiperfina). Con esta información, ¿de qué longitud de onda es la radiación que resulta de la transición $2p \rightarrow 1s$ que observaron en el experimento reciente¹ en el que midieron el radio del protón?

5. Calcular el valor esperado del radio electrónico para un átomo de hidrógeno en el orbital $3d$. Calcular el valor esperado de $1/r^3$ en el orbital $2p$ del átomo de hidrógeno.

¹R. Pohl, *et al.*, Nature **466**, 213 (2010).