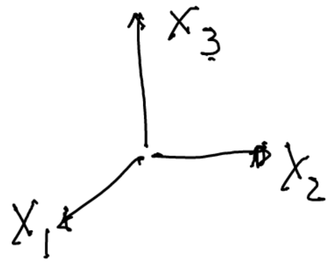
$\boxed{\text{SUSY}}$ y SUGRA

en 4d:

$$\bar{X} = (X_0, X_1, X_2, X_3) = X^a$$



evento
$$\bar{P} = (t, X_1, X_2, X_3)$$

coordenadas conmutan

$$X_1 X_2 = X_2 X_1 \quad \text{etc.}$$

SUPERESPACIO

$$Z^A = (X^a, \underbrace{\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}_{\text{variables de Grassman, no conmutan.}})$$

$a = 0, 1, 2, 3$

$\alpha = 1, 2$

$\dot{\alpha} = 1, 2$

- variedad 8 dimensional con

$$X^a X^b = X^b X^a \rightarrow [X^a, X^b] = 0$$

$$\theta_\alpha \theta_\beta = -\theta_\alpha \theta_\beta \rightarrow \{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = 0$$

$$X^a \theta_\alpha - \theta_\alpha X^a = 0 \qquad [X^a, \theta_\alpha] = 0$$

SUPERVARIEDAD

• Se puede definir cálculo en supervariedades.

[super derivada, super integral,
super derivada covariante
super digramas de Feynman ...etc]

• Nosotros vamos a ver solo un poquito del supermundo. Orientado a aplicaciones a QFT y Gravedad (cuerdas)

• Curso muy técnico, no "flashy" or "exciting".

Pero SUSY esta en la base de todo

CUERDAS → $\boxed{\text{SUPERCUERDAS}}$

* Para que y porque SUSY?

(motivación)

1) SYMMETRIAS de la NATURAEZA

2) Problema jerarquia

3) materia oscura

4) unificacion de constants

problemes con el modelo estandard → teoria efectiva.

---

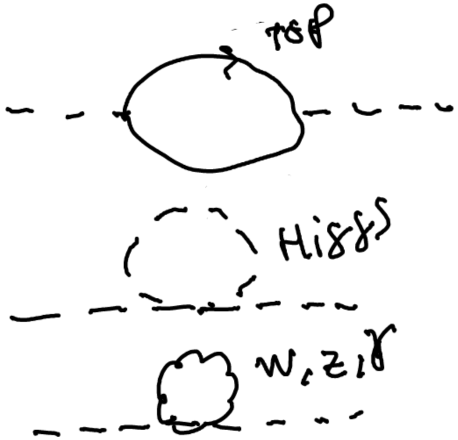
2) $M_{ew} = 10^2$ Gev $\qquad M_{Pl} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \simeq 10^{19}$ Gev

a) 15 órdenes de magnitud entre M_{ew} y M_{Pl}: feo pero quizás no muy importante

b) "Naturalness" (es esta diferencia estable bajo correccions cuánticas?)

escala efectiva Λ_{eff}

$$\Rightarrow \quad M^2_{Higgs} \sim M^2_{H0} - \# \, \Lambda^2_{eff}$$



$$\Lambda_{eff} \sim M_{Pl}$$

$$M^2_{Higgs} \sim$$

$$(10^2 \, GeV)^2 \sim M^2_{tree} - \# \, (10^{19} \, GeV)^2$$

con SUSY

$$M^2_{Higgs} \sim M^2_{tree} + 0$$

~~SUSY~~

$$M^2_{Higgs} \sim M^2_{tree} - \Lambda^2_{\cancel{SUSY}}$$

2) Materia oscura

3) unificación constantes de acoplo

I). Simetrías

QFT : QM + relatividad

objeto fundamental : campo cuántico , excitaciones = partículas.

simetrías : transformación que se puede hacer a un sistema físico que no cambia los observables.

- espacio tiempo $\quad x^\mu \to x'^\mu(x^\nu) \quad \nu, \mu = 0,1,2,3.$

  ejemplo : rotaciones , translaciones Lorentz y Poincaré

- simetrías internas

$$\phi^a(x) \to M^a_b\, \phi^b(x)$$

M^a_b constante
$\Rightarrow$ simetría global

$M^a_b(x)$
$\Rightarrow$ simetría local.

importancia: • etiquetan y clasifican partículas ~ "definen" a la partícula

Emily Noether: simetría global → cantidad conservada

ej. spin. $\frac{1}{2}$, 1, 0. transformación bajo el grupo de Lorentz

• determinan posibles interacciones

• rompimiento de simetrías origen de importantes fenómenos físicos.

cuales son las simetrías mas generales que puede tener una QFT en 4 dims?

- Coleman - Mandula. 1967

simetria interna $\otimes$ Poincaré $[M, P]$

1971 Ramond, Neveu, Schwarz, Gervais, Sakita $[M, M]$

susy en 2d, cuerdas $[T, T]$

- Haag Lopuzanski Sohnius 1975

No! La simetria mas general de una QFT puede incluir tambien generadores fermionicos

Q_α^A $\bar{Q}_{\dot\alpha}^A$

$(0, 1/2)$ $(1/2, 0)$

SUSY

Fin de "Motivación" Listos ??

Notación y revisión

conmutador $[A,B] = AB - BA$

anti conmutador $\{A,B\} = AB + BA$

Poincaré (simetrías de relatividad especial)

$$x^\mu \to x'^\mu = \underbrace{\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu}_{\text{Lorentz}} + \underbrace{a^\mu}_{\text{Traslaciones}}$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \qquad [M^{\mu\nu}, P^\sigma] = i\left(P^\mu \eta^{\nu\sigma} - P^\nu \eta^{\mu\sigma}\right)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\left(M^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} + M^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma} - M^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - M^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}\right)$$

$M^{\mu\nu}$: $\epsilon_{imn} M^{mn}$ M^{0i}

rotations boosts

J_i K_i

$A_i \sim J_i + i K_i$ satisfy SU(2) algebra

$B_i \sim J_i - i K_i$ " " "

- $SO(3,1) \simeq SU(2) \oplus SU(2)$
- $SO(3,1) \simeq SL(2,\mathbb{C})$ homeomorphic

Representaciones bajo $SL(2,\mathbb{C})$

Sea $N_\alpha^{\ \beta}$ matriz compleja 2×2 $(\alpha,\beta = 1,2)$

con $\det N = 1$

$\Rightarrow \quad N \in SL(2,\mathbb{C})$

La matriz N, su complejo conjugado N^*, su transpuesta inversa $(N^T)^{-1}$ y su conjugada hermítica inversa $(N^+)^{-1}$, todas representan $SL(2,\mathbb{C})$.

Representan la acción del grupo de Lorentz en espinores de 2 componentes

Representación fundamental $(\frac{1}{2}, 0)$

L - Weyl spinor

$$\boxed{\psi'_\alpha = N_\alpha^{\ \beta}\,\psi_\beta}$$

$\alpha, \beta = (1, 2)$

Representacion conjugada $(0, \frac{1}{2})$

R - Weyl spinor

$$\boxed{\bar{\chi}'_{\dot\alpha} = N^{*\ \dot\beta}_{\alpha}\,\bar{\chi}_{\dot\beta}}$$

rep. fundamental ψ_α y conjugada $\bar{\chi}_{\dot\alpha}$ son los representaciones basicas de $SL(2,\mathbb{C})$ y el grupo de Lorentz.

* Spinores como objetos básicos en relatividad especial

ψ_α y $\bar{\chi}_{\dot\alpha}$ son rep. independientes

rep con indices arriba (contravariantes) no son objetos independientes

$$\psi'^{\alpha} = \psi^{\beta}(N^{-1})_{\beta}^{\ \alpha} \qquad \bar{\chi}'^{\dot\alpha} = \bar{\chi}^{\dot\beta}(N^{*-1})_{\dot\beta}^{\ \dot\alpha}$$

métrica $\qquad \eta = (1,-1,-1,-1)$ $\qquad \eta_{\mu\nu}$ es invariante bajo $SO(3,1)$

el análogo en $SL(2,\mathbb{C})$ es

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}$$

$\epsilon^{\alpha\beta}$ es invariante bajo $SL(2,\mathbb{C})$ y lo podemos usar como métrica.

$$\epsilon'^{\alpha\beta} = \epsilon^{\rho\sigma} N_\rho{}^\alpha N_\sigma{}^\beta$$
$$= \epsilon^{\alpha\beta} \det N$$
$$= \epsilon^{\alpha\beta}$$

$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta$$
$$\bar\chi^{\dot\alpha} = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\chi_{\dot\beta}$$

$\Rightarrow$ ψ^α, $\bar\chi^{\dot\alpha}$ no son indep de ψ_β, $\bar\chi_{\dot\beta}$

Pero ojo, la "métrica" es antisimétrica

$$\Rightarrow \quad \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta \neq \epsilon^{\beta\alpha}\psi_\beta$$

Para evitar errores, es conveniente siempre escribir ϵ a la izq. del espinor sobre el que actúa y contraer índices vecinos

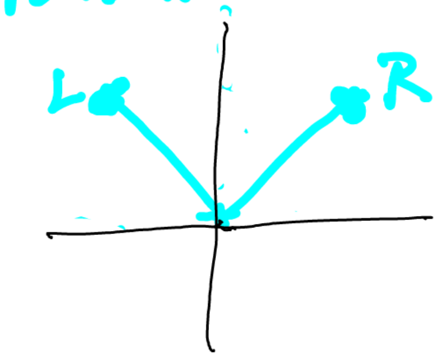
$$\psi^\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta \qquad\qquad \psi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta$$

producto de espinores de Weyl

$$\boxed{\chi\psi := \chi^{\alpha}\psi_{\alpha}}$$

$$\boxed{\bar{\chi}\bar{\psi} := \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}}$$

nemonics



productos de espinores

$$\chi\psi = \chi^{\alpha}\psi_{\alpha} = -\chi_{\alpha}\psi^{\alpha} = \psi_{\alpha}\chi^{\alpha} = \psi\chi$$

notar q' ~~los~~ las componentes de los espinores son variables de Grassman, anticommutan

$\psi_{\alpha} \quad \alpha = 1, 2$

$$\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1 = 2\psi_1\psi_2$$

Resumen

indices $SO(3,1)$ $\mu = 0,1,2,3$

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$$

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$$

$\vec{\sigma} \,\hat{=}\, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

aparte : espinores de Dirac
(2 Weyl)

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}$$

espinores de Majorana
(1 Weyl)

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} = \Psi_M^C$$

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \qquad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$

Todo lo visto hasta ahora es conocido

Poincare

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\sigma] = i\left(P^\mu \eta^{\nu\sigma} - P^\nu \eta^{\mu\sigma}\right)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\left(M^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho} + \ldots\ldots\right)$$

Internal

$$[T^i, T^j] = f^{kij}\, T_k$$

SUSY !!

Poincare, internal y

- $[Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = i(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\, Q_\beta$

$$[Q_\alpha, P^\mu] = 0 = [P^\mu, \bar{Q}^{\dot\alpha}]$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0 = \{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\}$$

- $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu$

$$[Q_\alpha, T_i] = 0 \quad \text{(exepto R symmetry)}$$

"Supersimetría transforma bosones $\longleftrightarrow$ fermiones"

de donde sale eso?

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} = \frac{i}{4}\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu\right)_\alpha^{\ \beta}$$

Tomar con $M^{12} \equiv J_z$

$$[Q_\alpha, J_z] = (\sigma^{12})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta$$

$$\Rightarrow \quad [Q_1, J_z] = \frac{1}{2} Q_1$$

$$[Q_2, J_z] = \frac{1}{2} Q_2$$

$\Rightarrow$ tomar un eigenestado de spin $|A\rangle$ con spin S

$$J_z Q_1 |A\rangle = Q_1 J_z |A\rangle - \frac{1}{2} Q_1 |A\rangle$$

$$J_z \underbrace{Q_1 |A\rangle}_{|A'\rangle} = \left(S - \frac{1}{2}\right) \underbrace{Q_1 |A\rangle}_{|A'\rangle}$$

$$J_z |\hat{\tilde{A}}\rangle = (s-\tfrac{1}{2})|\hat{\tilde{A}}\rangle$$

$\Rightarrow$ el efecto de Q_1 es de bajar el spin por $\frac{1}{2}$

similarmente

$\Rightarrow$ el efecto de $\overline{Q}_1$ es de subir el spin $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad |B\rangle \longleftrightarrow |F\rangle$$

Que pasa si aplico $Q\overline{Q}$

$\Rightarrow \quad |B\rangle \longrightarrow |B\rangle$ pero trasladado!

$$\{ Q_\alpha , \bar{Q}_{\dot\beta} \} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu$$

$$Q_\alpha \bar{Q}_{\dot\beta} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} \underline{P_\mu} - \bar{Q}_{\dot\beta} Q_\alpha$$

$\Rightarrow \quad Q\bar{Q} |A\rangle \to |A\rangle$ pero <u>"trasladado."</u>

Trasladado <u>en que espacio</u> ?

Para entender esta pregunta, recordar la conexion entre especies y grupos (cosets)

- ej. $\quad G = U(1) \qquad g = e^{i\alpha q} \qquad \alpha \in [0, 2\pi]$

$\Rightarrow$ variedad $\quad M_{U(1)} = S^1$

• ej. $G = SU(2)$ $\quad g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ $\quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

donde α y β son complejos

es decir

$$\alpha = x_1 + i x_2$$
$$\beta = x_3 + i x_4$$

$$\Rightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \underline{1}$$

$$\Rightarrow M_{SU(2)} = S^3$$

En general, coset G/H $\quad g \in G$ se identifica con $g \cdot h \ \forall h \in H$

• ej $G = U_1(1) \times U_2(1)$ $\quad g = e^{i\alpha_1 q_1 + i\alpha_2 q_2}$

$H = U_1(1)$ $\quad h = e^{i\alpha_1 q_1}$

$$g \cdot h = e^{i(\alpha_1+\beta)q_1 + i\alpha_2 q_2} = e^{i\alpha_1 q_1 + i\alpha_2 q_2} = g$$

$\Rightarrow$ solo α_2 contiene informacion

$$\Rightarrow \quad \frac{U_1(1) \times U_2(1)}{U_1(1)} = U_2(1)$$

- Minkowski = Poincare / Lorentz $= (w^{\mu\nu}, a^{\mu}) / (w^{\mu\nu})$

$= (a^{\mu})$ translations

Super Poincare / Lorentz $= \dfrac{(w^{\mu\nu}, a^{\mu}, \theta^{\alpha}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})}{(w^{\mu\nu})}$ Minkowski

$$g = \exp(i(w^{\mu\nu}M_{\mu\nu} + a^{\mu}P_{\mu} + \theta^{\alpha}Q_{\alpha} + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}))$$

$\Rightarrow$ translations in

$(a^{\mu}, \theta^{\alpha}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$

SUPER SPACE

$$Z^{A} = (x^{\mu}, \theta^{\alpha}, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}})$$

θ^{α}, $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ are Grassman variables