

3. Supercuerdas

Las 4 teorías de cuerdas bosónicas (donde $X^\mu(\sigma)$ son los únicos grados de libertad) tienen algunos problemas:

- Taquión ϕ (¿Escoger otro vacío? ¿Tal vez fondo dilatónico en $D=2$?)

- $D=26$ (¿Compactificar?)

- $\not\exists$ fermiones (¿Mecanismos no perturbativo?)

Ver p.ej. David, Minwalla, Núñez 0107165

Englert, Haurt, Taronna 0106235)

La situación mejora si generalizamos a teorías de supercuerdas, que incorporan Bosones \longleftrightarrow Fermiones
Supersimetría

Es posible describir estas teorías a través de 3 formalismos distintos pero equivalentes:

① Green-Schwarz (Supercuerda) — Ver GSW cap. 5

Agregan $\Theta^A_\alpha(\sigma)$ — espinor(es) en espaciotiempo
— escalar en hoja de mundo

\Rightarrow SUS1 en espaciotiempo manifiesta ✓

Solo puede cuantizarse en norma del cono de luz ✗

② Ramond-Neveu-Schwarz (Cuerda con espín)

Agregar $\Psi^{\mu}(\sigma)$ — vector en espaciotiempo
— espinor en hoja de mundo

Se puede cuantizar de manera covariante bajo Poincaré ✓

SUSY en espaciotiempo no manifiesta ✗

③ Berkovits (Espinor puro) — ver hep-th/0209059

0302.147
0902.1552
0910.2254

Combina lo mejor de ① y ②

Permite cuantización covariante bajo Súper-Poincaré ✓

Formalismo aún en etapa de desarrollo ✗

Estudiaremos solo RNS (más sencillo).

No basta con agregar $\Psi^{\mu}(\sigma)$: para desacoplar nuevos modos con norma negativa (asociados a $\bar{\Psi}^0(\sigma)$), necesitamos invariancia local

mayor en hoja de mundo — **supersimetría**.

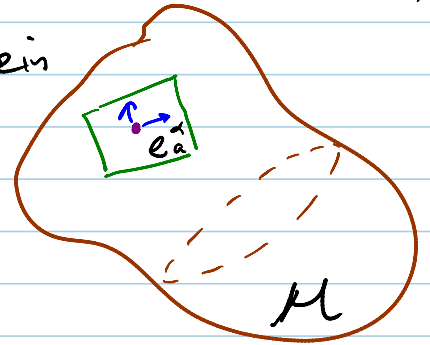
Como 'superparejas' de $X^{\mu}(\sigma)$ y $g_{ab}(\sigma)$, agregamos entonces D espinores de Majorana $\Psi^{\mu}(\sigma) = \begin{pmatrix} \psi_{+}(\sigma) \\ \psi_{-}(\sigma) \end{pmatrix}$

y 1 gravitino (vector x espinor Majorana) $\chi_a = \begin{pmatrix} \chi_a^+ \\ \chi_a^- \end{pmatrix}$

Recordar que para definir espinor en espacio curvo (en este caso, hoja de mundo M con métrica intrínseca $g_{ab}(\sigma)$),

es necesario utilizar muchas-patas o vielbein

(en este caso dos-patas o zweibein):



elección de base ortogonal para

espacio tangente en cada punto de la variedad,

$e_a^\alpha(\sigma)$ ← etiqueta de vector $\alpha=0,1$
← índice vectorial $a=0,1$

$$e_a^\alpha(\sigma) e_b^\beta(\sigma) g^{ab}(\sigma) = \eta^{\alpha\beta} \iff \eta_{\alpha\beta} e_a^\alpha(\sigma) e_b^\beta(\sigma) = g_{ab}(\sigma)$$

Podemos entonces considerar a e_a^α en vez de g_{ab} como variable básica. La libertad de redefinir base localmente,

$$e_a^\alpha(\sigma) \rightarrow e_a'^{\alpha}(\sigma) = L_{\beta}^{\alpha}(\sigma) e_a^{\beta}(\sigma)$$

← matriz de Lorentz

constituye una simetría local adicional $SO(d-1,1)$

($d=2$ aquí) que garantiza que no hemos añadido grados de libertad a nuestra descripción.

$\Psi^M(\sigma)$ y $\chi_a(\sigma)$ son espinores precisamente bajo este grupo de Lorentz local: definiendo matrices de Dirac

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = -2\eta^{\alpha\beta}, \text{ bajo transformaciones}$$

infinitesimales) $L^\alpha_\beta(\sigma) = \delta^\alpha_\beta + \theta^{\alpha\beta}(\sigma)$ (con $\theta_{\alpha\beta} = -\theta_{\beta\alpha}$, $|\theta_{\alpha\beta}| \ll 1$)

tenemos

$$\delta\Psi(\sigma) = \frac{i}{2} \underbrace{\frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]}_{\text{generador} \equiv S^{\alpha\beta}} \underbrace{\theta_{\alpha\beta}(\sigma)}_{\text{parámetro}} \Psi(\sigma)$$

Para poder escribir término cinético invariante bajo esta simetría local, necesitamos definir derivada covariante

$$\nabla_a \Psi = \partial_a \Psi + \frac{1}{8} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \omega_a^{\alpha\beta} \Psi$$

donde $\omega_a^{\alpha\beta}(\sigma) = \frac{1}{2} e^{b\alpha} \partial_a e_b^\beta + \dots$ es la conexión de espín (campo de norma $SO(d-1,1)$) determinada por el requisito

$$\nabla_a e_b^\alpha = \partial_a e_b^\alpha + \omega_a^{\alpha\beta} e_b^\beta - \Gamma_{ab}^c e_c^\alpha = 0.$$

Tomando 'base de Majorana' para álgebra de Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Rightarrow iS^{\alpha\beta} \in \mathbb{R})$$

el hecho de que $\Psi^m = \begin{pmatrix} \psi_+^m \\ \psi_-^m \end{pmatrix}$ y $\chi_a = \begin{pmatrix} \chi_a^+ \\ \chi_a^- \end{pmatrix}$ son

espinores de Majorana significa simplemente que ψ_{\pm}^m y χ_a^{\pm} son reales.

Notar que en esta base la matriz de paridad ($\sim \gamma^5$) es

$$\gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ así que las componentes}$$

individuales $\psi_+^m, \psi_-^m, \chi_a^+, \chi_a^-$ son espinores

de Majorana-Weyl (lo cual no es posible en 3+1 dim).

Con estas definiciones podemos escribir finalmente acción para cuerda RNS (en fondo plano):

$$S[X, \Psi, e, \chi] = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\alpha'} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \right. \\ \left. - i \bar{\Psi}^m \gamma^a \nabla_a \Psi^\nu \eta_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \bar{\chi}_a \gamma^b \gamma^a \Psi^m \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \bar{\Psi}^m \Psi^\nu \eta_{\mu\nu} \bar{\chi}_a \gamma^b \gamma^a \chi_b \right\}, \quad [\text{ver GSW1 4.3.5}]$$

con $\gamma^a(\sigma) \equiv e_a^\alpha(\sigma) \gamma^\alpha$ ($\Rightarrow \{\gamma^a, \gamma^b\} = -2g^{ab}$) y $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$

Notar que no aparecen derivadas de e_a^α ó χ_a
 (los términos cinéticos correspondientes serían
 respectivamente $\int d^2\sigma \sqrt{g} \mathcal{R}$, invariante topológico,
 y $i \bar{\chi}_a \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} \nabla_b \chi_c = 0$ por antisimetrización),
 así que estos campos son no dinámicos.

S es invariante bajo

1) Poincaré en espaciotiempo (simetría global en hoja de mundo)

$$X^{\tilde{\mu}}(\sigma) = \Lambda^{\tilde{\mu}}{}_{\nu} X^{\nu}(\sigma) + a^{\tilde{\mu}}, \quad \bar{\Psi}^{\tilde{\mu}}(\sigma) = \Lambda^{\tilde{\mu}}{}_{\nu} \bar{\Psi}^{\nu}(\sigma)$$

2) Difeo en hoja de mundo (local)

$$\sigma^a \rightarrow \sigma'^a(\sigma), \quad X^{\tilde{\mu}}(\sigma') = X^{\tilde{\mu}}(\sigma), \quad e_a^{\alpha}(\sigma') = \frac{\partial \sigma^b}{\partial \sigma'^a} e_b^{\alpha}(\sigma),$$

$$\bar{\Psi}^{\tilde{\mu}}(\sigma') = \bar{\Psi}^{\tilde{\mu}}(\sigma), \quad \chi'_a(\sigma') = \frac{\partial \sigma^b}{\partial \sigma'^a} \chi_b(\sigma)$$

3) Weyl (local)

$$\delta e_a^{\alpha}(\sigma) = \lambda(\sigma) e_a^{\alpha}(\sigma), \quad \delta X^{\tilde{\mu}}(\sigma) = 0,$$

$$\delta \bar{\Psi}^{\tilde{\mu}}(\sigma) = -\frac{1}{2} \lambda(\sigma) \bar{\Psi}^{\tilde{\mu}}(\sigma), \quad \delta \chi_a(\sigma) = \frac{1}{2} \lambda(\sigma) \chi_a(\sigma)$$

4) Lorentz en hoja de mundo (local)

$$\delta e_a^\alpha(\sigma) = \underbrace{\epsilon^\alpha_\beta}_{\theta^\alpha_\beta(\sigma)} e_a^\beta(\sigma), \quad \delta X^{\tilde{m}}(\sigma) = 0,$$

$$\delta \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma) = \frac{1}{2} \epsilon(\sigma) \gamma^0 \gamma^1 \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma), \quad \delta \chi_a(\sigma) = \frac{1}{2} \epsilon(\sigma) \gamma^0 \gamma^1 \chi_a(\sigma)$$

5) Supersimetría en hoja de mundo \equiv Superdiffeos (local)

$$\delta X^{\tilde{m}}(\sigma) = \sqrt{2\alpha'} \bar{\epsilon}(\sigma) \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma)$$

$$\delta \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma) = -i \gamma^{\hat{a}}(\sigma) \epsilon(\sigma) \left[\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \partial_a X^{\tilde{m}}(\sigma) - \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma) \chi_a(\sigma) \right]$$

$$\delta e_a^\alpha(\sigma) = -2i \bar{\epsilon}(\sigma) \gamma^\alpha \chi_a(\sigma)$$

$$\delta \chi_a(\sigma) = \nabla_a \epsilon(\sigma)$$

donde parámetro infinitesimal $\epsilon(\sigma)$ es un espinor de Majorana (es decir, tiene componentes reales $\epsilon_+(\sigma), \epsilon_-(\sigma)$)

6) SuperWeyl (local)

$$\delta \chi_a(\sigma) = i \gamma_a(\sigma) \eta(\sigma), \quad \delta X^{\tilde{m}}(\sigma) = \delta e_a^\alpha(\sigma) = \delta \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma) = 0$$

espinor Majorana \rightarrow (usar identidad $\gamma^a \gamma^b \gamma_a = 0$ en 2 dim)

S describe gravedad 'superconforme' en 2 dimensiones acoplada a campos escalares $X^M(\sigma)$ y espinorales $\bar{\Psi}^{\tilde{M}}(\sigma)$.

Al igual que en la cuerda bosónica, podemos eliminar redundancia (de manera covariante bajo Poincaré en espaciotiempo) imponiendo condiciones sobre campos no dinámicos:

- 4 simetrías bosónicas locales (2 difeos, 1 Weyl, 1 Lorentz) nos permiten fijar $e_a^\alpha(\sigma) = \delta_a^\alpha$ ($\leftrightarrow g_{ab}(\sigma) = \eta_{ab}$)
- 4 simetrías fermiónicas locales (2 ϵ 's, 2 η 's) nos permiten fijar $\chi_a(\sigma) = 0$

Esta es la norma superplana (Si no usamos Weyl ni superWeyl podemos fijar norma superconforme $e_a^\alpha(\sigma) = e^{\lambda(\sigma)} \delta_a^\alpha$, $\chi_a(\sigma) = t_a(\sigma) \eta(\sigma)$.)

El análisis aquí es local - globalmente puede haber módulos y supermódulos, así como vectores y espinores de Killing conformes.

En la norma superplana la acción se reduce a

$$S[X, \Psi] = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \left\{ \frac{1}{2\alpha'} \partial^a X^\mu \partial_a X_\mu - i \bar{\Psi}^\mu \gamma^a \partial_a \Psi_\mu \right\},$$

que debe ser suplementada con ecs. de mov. para campos no dinámicos,

$$T_{ab} \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = - \left(\frac{1}{\alpha'} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + i \bar{\Psi}^\mu \gamma_{(a} \partial_{b)} \Psi_\mu - \text{traza} \right) = 0$$

$$J_a \equiv -\frac{\pi}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \chi^a} = \frac{1}{2} \gamma^b \gamma_a \bar{\Psi}^\mu \partial_b X_\mu = 0$$

↑
super corriente

[25/04/06]

Las ecs. de mov. para X^μ y Ψ^μ en la norma superplana son

$$\partial^a \partial_a X^\mu = 0 \Rightarrow X^\mu(\sigma) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{modos izquierdos}}}{X^\mu(\tau+\sigma)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derechos}}}{\tilde{X}^\mu(\tau-\sigma)}$$

$$\gamma^a \partial_a \bar{\Psi}^\mu = i \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\tau + \partial_\sigma \\ \partial_\tau + \partial_\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_+^\mu \\ \Psi_-^\mu \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{\Psi}^\mu(\sigma) = \begin{pmatrix} \Psi_+^\mu(\tau-\sigma) \\ \Psi_-^\mu(\tau+\sigma) \end{pmatrix}$$

Después de rotación de Wick $\tau = \sigma^0 \rightarrow \sigma^2 = i\tau$
y pasando a coords complejas habituales

$$\begin{aligned} w \equiv \sigma^2 + i\sigma^1 &= i(\tau + \sigma) & z &= e^w \\ \bar{w} \equiv \sigma^2 - i\sigma^1 &= i(\tau - \sigma) & \bar{z} &= e^{\bar{w}} \end{aligned}$$

tenemos

$$S_{\text{RNS}} = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi^\mu \bar{\partial} \psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu \partial \tilde{\psi}_\mu \right)$$

$$\left(\text{donde } \psi^\mu(z) \equiv \frac{z^{-1/2}}{\sqrt{2}} \psi_+^\mu(\tau + \sigma), \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \equiv \frac{\bar{z}^{-1/2}}{\sqrt{2}} \psi_-^\mu(\tau - \sigma) \right),$$

con constricciones

$$T(z) \equiv T_{z\bar{z}}(z) = -\frac{1}{\alpha'} \partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2} \psi^\mu \partial \psi_\mu = 0$$

$$J(z) \equiv J_z(z) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \psi^\mu \partial X_\mu = 0$$

$$\tilde{T}(\bar{z}) \equiv \tilde{T}_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} X^\mu \bar{\partial} X_\mu - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{\psi}_\mu = 0$$

$$\tilde{J}(\bar{z}) \equiv \tilde{J}_{\bar{z}}(\bar{z}) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} X_\mu = 0$$

$$\left(\text{Weyl} \Rightarrow T^a_a = 0, \text{ Super Weyl} \Rightarrow \gamma^a J_a = 0 \right)$$

$S_{\text{res}}[X, \psi]$ posee simetría residual bajo

1) Transformaciones conformes (Difeo Analítico = Weyl)

$$z \rightarrow z' = z'(z), \quad X'^{\sim}(\bar{z}', \bar{z}') = X^{\sim}(z, \bar{z}),$$

$$\psi'^{\sim}(z') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{-1/2} \psi^{\sim}(z) \quad \leftarrow \text{campo primario con } h = \frac{1}{2}, \tilde{h} = 0$$

$$\tilde{\psi}'^{\sim}(\bar{z}') = \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{-1/2} \tilde{\psi}^{\sim}(\bar{z}) \quad \leftarrow \text{campo primario con } h = 0, \tilde{h} = \frac{1}{2}$$

Sabemos que estas transformaciones son generadas por tensor de energía momento $T(z), \tilde{T}(\bar{z})$

($j_f(z) = i f(z) T(z)$ es corriente de Noether asociada a $z \rightarrow z' = z + \epsilon f(z)$).

2) Transformaciones superconformes (Superdifeo analítico = Weyl = Super Weyl)

$$\delta X^{\sim}(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \in \left[\eta(z) \psi^{\sim}(z) + \eta(z)^* \tilde{\psi}^{\sim}(\bar{z}) \right]$$

$$\delta \psi^{\sim}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \in \eta(z) \partial X^{\sim}(z)$$

$$\delta \tilde{\psi}^{\sim}(\bar{z}) = -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \in \eta(z)^* \bar{\partial} X^{\sim}(\bar{z})$$

con $\eta(z)$ anti conmutativo

que son generadas por supercorrientes $J(z)$, $\tilde{J}(\bar{z})$
($j_\eta(z) = \eta(z) J(z)$ es la corriente de Noether).

S_{RNS} es una teoría de campo superconforme.

Podemos calcular propagador para $\psi(z)$:

$$0 = \int \mathcal{D}\psi \frac{\delta}{\delta \psi(z)} \left[e^{-\frac{1}{4\pi} \int d^2z \psi \cdot \bar{\partial} \psi} \psi^\nu(z') \right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \langle \bar{\partial} \psi^\mu(z) \psi^\nu(z') \rangle + \eta^{\mu\nu} \delta^{(2)}(z-z') \langle 1 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \psi^\mu(z) \psi^\nu(z') \rangle = \frac{\eta^{\mu\nu}}{z-z'} \langle 1 \rangle$$

y de manera similar $\langle \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \tilde{\psi}^\nu(\bar{z}') \rangle = \frac{\eta^{\mu\nu}}{\bar{z}-\bar{z}'} \langle 1 \rangle$ omitir

Definimos \therefore orden normal conforme

$$:\psi^\mu(z) \psi^\nu(z') : \equiv \psi^\mu(z) \psi^\nu(z') - \eta^{\mu\nu} \frac{1}{z-z'}$$

$$:\tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \tilde{\psi}^\nu(\bar{z}') : \equiv \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \tilde{\psi}^\nu(\bar{z}') - \eta^{\mu\nu} \frac{1}{\bar{z}-\bar{z}'}$$

Usando $T^\psi(z) = -\frac{1}{2} : \psi^\mu \partial_\mu \psi(z) :$ podemos calcular EPO

$$\begin{aligned}
 T^\psi(z) T^\psi(z') &= \frac{1}{4} : \psi^\mu \partial_\mu \psi(z) \psi^\nu \partial'_\nu \psi(z') : + \text{términos con} \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left[-\frac{\eta^{\mu\nu}}{z-z'} \partial \partial' \left(\frac{\eta_{\mu\nu}}{z-z'} \right) + \partial \left(\frac{\delta_\mu^\nu}{z-z'} \right) \partial' \left(\frac{\delta_\nu^\mu}{z-z'} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2(z-z')^4} \underbrace{\frac{D}{2}(z-1)}_{c^\psi = \frac{D}{2}} + \frac{2}{(z-z')^2} T^\psi(z') + \frac{1}{z-z'} \partial T^\psi(z') + \dots
 \end{aligned}$$

De manera similar, tomando el tensor de energía-momento completo, $T(z) = T^x(z) + T^\psi(z)$ podemos deducir que

$$T(z) T(0) = \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2} T(0) + \frac{1}{z} \partial T(0) + \dots$$

$$T(z) J(0) = \frac{3}{2z^2} J(0) + \frac{1}{z} \partial J(0) + \dots \quad \leftarrow J(z) \text{ es operador primario con } h = \frac{3}{2}$$

$$J(z) J(0) = \frac{2c}{3z^2} + \frac{2}{z} T(0) + \dots$$

$$\text{con } c = c^x + c^\psi = D + \frac{D}{2} = \frac{3D}{2}.$$

Otra novedad es que al fijar la norma en integral de trayectoria

$$\int \frac{Dg_{ab} DX_a DX^m D\Psi^m}{\text{Dif} \times \text{Weyl} \times \text{SDif} \times \text{SWeyl}} e^{-S[X, \Psi, g, \chi]}$$

necesitamos fantasmas adicionales: además de

$$Dg_{ab} = J D\lambda^a D\lambda^b \quad \text{con } J = \det \left(\frac{\delta g_{zz}}{\delta \lambda^z} \right) \det \left(\frac{\delta g_{\bar{z}\bar{z}}}{\delta \lambda^{\bar{z}}} \right) \\ \text{Dif} \quad \text{Weyl} \\ = \det \nabla_z \det \nabla_{\bar{z}}$$

que representamos con campos anticommutativos b y c , tenemos ahora [ver GSW 4.4, ó D'Hoker & Phong, Rev. Mod. Phys 60, 917]

$$DX_a = J' D\epsilon D\eta \quad \text{con } J' = \left[\det \left(\frac{\delta X_a}{\delta \epsilon} \right) \right]^{-1} \\ \text{SDif} \quad \text{SWeyl} \\ = \left[\det \nabla_z \det \nabla_{\bar{z}} \right]^{-1}$$

que representamos con campos commutativos β y γ .

La acción resultante para fantasmas (en norma supersus) es

$$S_f = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left(\underbrace{b \bar{\partial} c + \beta \bar{\partial} \gamma}_{\text{ghosts}} + \underbrace{\tilde{b} \partial \tilde{c} + \tilde{\beta} \partial \tilde{\gamma}}_{\text{ghosts}} \right)$$

que son 2 teorías superconformes adicionales, con

$$h_c = -1 (\leftrightarrow \xi), \quad h_b = 2 (\leftrightarrow T), \quad h_\gamma = -\frac{1}{2} (\leftrightarrow G), \quad h_\beta = \frac{3}{2} (\leftrightarrow J)$$

$$\langle b(z) c(z') \rangle = \frac{1}{z-z'} \quad , \quad \langle \beta(z) \gamma(z') \rangle = -\frac{1}{z-z'} \quad ,$$

$$T^f = -(\partial b) c - 2b \partial c - \frac{1}{2}(\partial \beta) \gamma - \frac{3}{2} \beta \partial \gamma$$

$$J^f = (\partial \beta) c + \frac{3}{2} \beta \partial c - 2b \gamma$$

(con expresiones análogas para la teoría anticommutativa),
de donde $c^{b,c} = -26$, $c^{\beta,\gamma} = +11$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c^{TOT} &= c^X + c^\psi + c^{b,c} + c^{\beta,\gamma} \\ &= D + \frac{D}{2} - 26 + 11 \\ &= \frac{3}{2} D - 15 \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $D=10$ es la dimensión crítica para la supercuerda, donde $c^{TOT} = 0$ y \therefore anomalía de Weyl se cancela.

(si $D \neq 10$ —supercuerda no crítica— podemos fijar norma superconforme, pero modos de Weyl y superWeyl son dinámicos \rightarrow acción de superLiouville.)

Analizamos ahora las posibles condiciones de borde, primero en el caso de la supercuerda cerrada.

Sabemos ya que los campos con 'espín' entero deben ser periódicos:

$$X^{\mu}(\sigma+2\pi, \tau) = X^{\mu}(\sigma, \tau) \quad \forall \mu \text{ es la única}$$

condición covariante bajo Poincaré,

y la periodicidad de los fantasmas

c y b se debe a su conexión con reparametrizaciones y deformaciones de la métrica, respectivamente.

Pero los nuevos campos, que tienen espín semientero, permiten 2 condiciones de borde distintas:

$$\psi^{\mu}(\sigma+2\pi, \tau) = +\psi^{\mu}(\sigma, \tau) \quad \forall \mu \quad \text{Ramond}$$

(preservan SUSY)

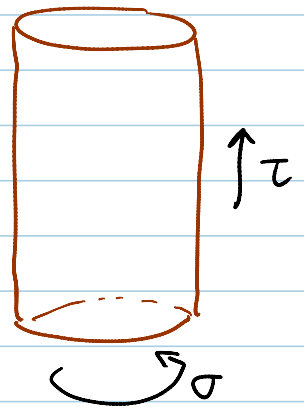
$$\psi^{\mu}(\sigma+2\pi, \tau) = -\psi^{\mu}(\sigma, \tau) \quad \forall \mu \quad \text{Neveu-Schwarz}$$

(rompen SUSY)

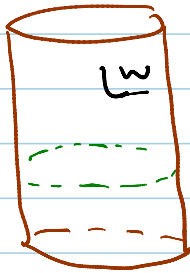
Conviene expresar el signo en la forma

$$e^{2\pi i \Delta}, \quad \text{con} \quad \Delta = \begin{cases} 0 & R \\ 1/2 & NS \end{cases} . \quad (\text{Solo existen estas}$$

2 posibilidades porque $S \sim \int d^2z \psi \bar{\partial} \psi$ debe ser univaluada.)

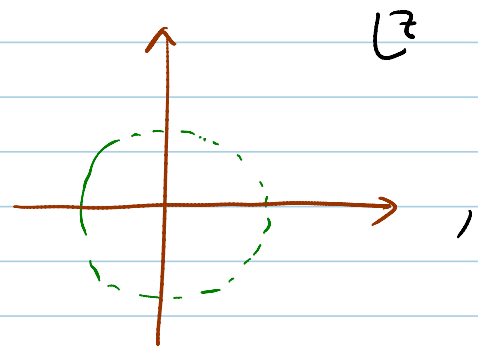


Pasando al plano



$$w = i(\tau + \sigma) \\ \equiv \sigma^2 + i\sigma^1$$

$$z = e^w$$



Dado que $\psi_{\text{plano}}^w(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-1/2} \psi_{\text{cil}}(w)$, las 2 opciones son

$$\psi^w(e^{2\pi i} z) = -\psi^w(z) \quad \mathbb{R} \leftarrow \exists \text{ corte:}$$

$$\psi^w(e^{2\pi i} z) = +\psi^w(z) \quad \mathbb{N}_S$$

Más adelante veremos que para obtener teoría de supercuerdas consistente necesitamos de hecho emplear

ambas condiciones de borde, que definen entonces

Z distintos "sectores" de una misma teoría de cuerdas.

En cada sector, los superfantasmas γ y β deben satisfacer las mismas condiciones de borde que ψ^m

(porque γ está asociado al espinor ϵ que relaciona X^m con ψ^m).

Tomando en cuenta a los modos derechos $\tilde{\psi}^{\mu}(\bar{z})$,
tenemos entonces 4 sectores para la cuerda cerrada:

$$\text{NS-NS}, \quad \text{R-R}, \quad \text{NS-R}, \quad \text{R-NS}$$

$$(\Delta, \tilde{\Delta}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (0, 0) \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Para cuerda abierta,

$\delta S_{\text{RNS}} \Rightarrow$ término de borde $\frac{1}{2\pi} \int d\tau (\psi^{\mu} \delta \psi_{\mu} - \tilde{\psi}^{\mu} \delta \tilde{\psi}_{\mu}) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}$,
que se anula si $\psi^{\mu} \Big|_{\sigma=0} = \pm \tilde{\psi}^{\mu} \Big|_{\sigma=0} \quad \forall \tau$.

Podemos escribir esto en la forma

$$\psi_{\text{cil}}^{\mu}(0, \tau) = e^{2\pi i \Delta} \tilde{\psi}_{\text{cil}}^{\mu}(0, \tau), \quad \psi_{\text{cil}}^{\mu}(\pi, \tau) = e^{2\pi i \Delta'} \tilde{\psi}_{\text{cil}}^{\mu}(\pi, \tau).$$

Pero siempre podemos redefinir $\tilde{\psi}_{\text{cil}}^{\mu} \rightarrow e^{-2\pi i \Delta'} \tilde{\psi}_{\text{cil}}^{\mu}$,

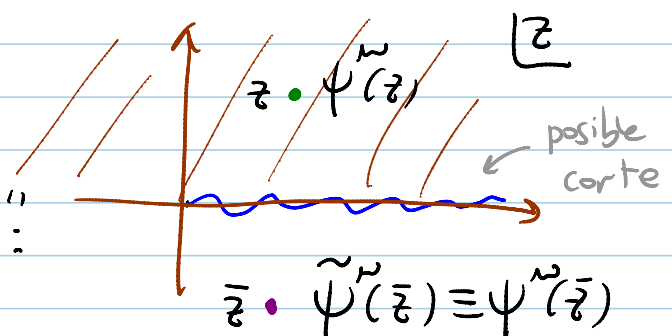
así que basta considerar $\Delta' = 0$.

Hay \therefore 2 sectores: $\Delta = \begin{cases} 0 & \text{R} \\ \frac{1}{2} & \text{NS} \end{cases}$

Pasando del cilindro al

plano, podemos implementar

nuevamente "truco de duplicación":



Obtenemos entonces $\psi^{\sim}(z)$ definido en todo el plano,
que satisfaga $\psi^{\sim}(e^{2\pi i} z) = -e^{2\pi i \Delta} \psi^{\sim}(z)$ con $\Delta = \begin{cases} 0 & n \\ 1/2 & ns \end{cases}$.

12/04/06

Habiendo entendido condiciones de borde, podemos
escribir desarrollo en modos

$$\psi^{\sim}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \Delta} \frac{\psi_r^{\sim}}{z^{r+1/2}} \quad \tilde{\psi}^{\sim}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \tilde{\Delta}} \frac{\tilde{\psi}_r^{\sim}}{z^{r+1/2}},$$

que (como consecuencia de EPO $\psi^{\sim}(z) \psi^{\vee}(z) = \frac{\eta^{m\nu}}{z} + \dots$)
satisfacen

$$\{\psi_r^{\sim}, \psi_s^{\vee}\} = \eta^{m\nu} \delta_{r,-s} = \{\tilde{\psi}_r^{\sim}, \tilde{\psi}_s^{\vee}\}$$

Desarrollando también

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^{\mu} \partial X_{\mu} : - \frac{1}{2} : \psi^{\sim} \partial \psi_{\sim} : = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}},$$

↑ orden normal conforme ↗

$$J(z) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \psi^{\sim} \partial X_{\sim} = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \Delta} \frac{G_r}{z^{r+3/2}}$$

obtenemos

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{m-n}^{\mu} \alpha_{\mu n} + \frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \Delta} (2r-m) \psi_{m-r}^{\sim} \psi_{\mu r}^{\sim} + \delta_{m,0} A_{\Delta}^{\psi, \psi}$$

↖ orden normal de operadores ↗

$$G_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{\mu} \psi_{\mu r-n}$$

constante
de orden ↗

que satisfacen **álgebra superconforme** (o super Virasoro)

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m,-n}$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{12} (4r^2 - 1) \delta_{r,-s}$$

$$[L_m, G_r] = \frac{m-2r}{2} G_{m+r}$$

(que se puede obtener a partir de EPOs TT, JJ, TJ).

La constante de orden $A_{\Delta}^{x,\downarrow}$ se puede calcular de

la manera que vimos en cuerdas bosónicas (p.ej. comparando

:: vs. ::, ó usando $[L_1, L_{-1}] = 2L_0$).

Vale la pena memorizar el resultado general:

Cada	bosón	periódico	-1/24
		antiperiódico	+1/48
	fermión	periódico	+1/24
		antiperiódico	-1/48

Contribuye

al Hamiltoniano H (en w), y L_0 (en z) difiere por $+\frac{c}{24}$

(recordar que $H = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c+\tilde{c}}{24}$ por derivada Schwarziana).

De acuerdo con esto, en L_0^x y $L_0^{b,c}$ tenemos constantes de orden

$$A^x = -\frac{D}{24} + \frac{D}{24} = 0 \quad \checkmark$$

(como vimos en cuerda bosónica)

$$A^{b,c} = +\frac{2}{24} + \frac{-26}{24} = -1 \quad \checkmark$$

Para L_0^ψ tenemos

$$A_\Delta^\psi = A_\Delta^{x,\psi} = \begin{cases} \frac{D}{24} + \frac{D/2}{24} = \frac{D}{16} = \frac{5}{8} & R \quad (\Delta=0) \\ -\frac{D}{48} + \frac{D/2}{24} = 0 & NS \quad (\Delta=\frac{1}{2}) \end{cases}$$

Por último, en $L_0^{\beta,\gamma}$ aparece

$$A_\Delta^{\beta,\gamma} = \begin{cases} -\frac{2}{24} + \frac{11}{24} = +\frac{3}{8} & R \\ +\frac{2}{48} + \frac{11}{24} = +\frac{1}{2} & NS \end{cases}$$

En conjunto tenemos entonces

$$A_\Delta^{\text{TOT}} = A_\Delta^{x,\psi} + A^{b,c} + A_\Delta^{\beta,\gamma} = \begin{cases} 0 & R \\ -\frac{1}{2} & NS \end{cases}$$

← por sus 1
y $\epsilon^{\text{TOT}} = 0$

Podemos proceder ahora a construir espacio de Hilbert e identificar en él estados físicos.

α_n^m como antes. ¿ ψ_r^m ?

• NS: tenemos $\{\psi_r^\mu, \psi_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r,-s}$ $r, s = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots$

Definimos $|0\rangle_{NS}$ tal que

$$\psi_r^\mu |0\rangle_{NS} = 0 \quad \forall \mu, \forall r > 0$$

Estados excitados son entonces

$$\psi_{-r_1}^{\mu_1} \dots \psi_{-r_n}^{\mu_n} |0\rangle_{NS}, \text{ con } \binom{\mu_i}{r_i} \neq \binom{\mu_j}{r_j} \quad \forall i \neq j$$

Todos tienen espín entero desde el punto de vista de espaciotiempo 10 dim, y son \therefore bosónicos.

• R: tenemos $\{\psi_r^\mu, \psi_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r,-s}$ $r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Si $|0\rangle_R$ satisface

$$\psi_r^\mu |0\rangle_R = 0 \quad \forall \mu, \forall r > 0$$

entonces $|0\rangle'_R \equiv \psi_0^\mu |0\rangle_R$ también (porque $\{\psi_{r>0}^\nu, \psi_0^\mu\} = 0$).

El estado base en este sector es \therefore degenerado.

Notar que $\{\psi_0^\mu, \psi_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$ es equivalente a

álgebra de Dirac $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ con $\Gamma^\mu \equiv \sqrt{2} \psi_0^\mu$.

Los estados base forman \therefore representación de álgebra de Dirac, es decir, constituyen un espinor de $SO(9,1)$!

Definiendo

$$b_0^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^0 + \Gamma^1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^0 + \psi_0^1), \quad b_0 \equiv \frac{1}{2}(-\Gamma^0 + \Gamma^1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi_0^0 + \psi_0^1),$$

$$b_1^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^2 + i\Gamma^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^2 + i\psi_0^3), \quad b_1 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^2 - i\Gamma^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^2 - i\psi_0^3),$$

$$b_2^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^4 + i\Gamma^5) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^4 + i\psi_0^5), \quad b_2 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^4 - i\Gamma^5) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^4 - i\psi_0^5),$$

$$b_3^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^6 + i\Gamma^7) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^6 + i\psi_0^7), \quad b_3 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^6 - i\Gamma^7) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^6 - i\psi_0^7),$$

$$b_4^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^8 + i\Gamma^9) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^8 + i\psi_0^9), \quad b_4 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^8 - i\Gamma^9) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^8 - i\psi_0^9)$$

tenemos $\{b_\alpha, b_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}$, $\{b_\alpha, b_\beta\} = 0 = \{b_\alpha^\dagger, b_\beta^\dagger\} \quad \forall \alpha, \beta = 0, \dots, 4$

5 pares de operadores creación/aniquilación fermiónicos

Definiendo vacío $|\Omega\rangle$ tal que $b_\alpha |\Omega\rangle = 0 \quad \forall \alpha$,

obtenemos un total de $2^5 = 32$ estados actuando (0 ó 1 vez)

con operadores de creación b_α^\dagger .

(Más en general, espinor de Dirac tiene $2^{D/2}$ componentes en cualquier dimensión par.)

Denotaremos $|S\rangle_R \equiv |S_0, S_1, S_2, S_3, S_4\rangle_R$ al estado

que se obtiene $\begin{cases} \text{actuando} \\ \text{no actuando} \end{cases}$ con b_α^\dagger sobre $|\Omega\rangle$ si $S_\alpha = \begin{cases} +1/2 \\ -1/2 \end{cases}$.

(P.ej., $|\Omega\rangle = |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_R$, $b_2^\dagger b_4^\dagger |\Omega\rangle = |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle_R$)

La notación refleja propiedades de transformación bajo Lorentz: el teorema de Noether da

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}+\Delta} [\psi_r^\mu, \psi_{-r}^\nu]$$

como (contribución fermiónica a) generadores de Lorentz, que actuando sobre esta base $|S\rangle_R$ se reduce a

$$\Sigma_0^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} [\psi_0^\mu, \psi_0^\nu] = -\frac{i}{4} [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] \quad \checkmark$$

Tanto $\Sigma^{\mu\nu}$ como $\Sigma_0^{\mu\nu}$ satisfacen álgebra $so(9,1)$:

$$i[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\sigma\rho}] = \eta^{\nu\sigma} \Sigma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\rho} \Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \Sigma^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho} \Sigma^{\mu\sigma}$$

Un conjunto de generadores simultáneamente diagonalizados ("generadores de Cartan") es \therefore

$$S^\alpha \equiv i \delta_{\alpha,0} \sum_{2\alpha, 2\alpha+1} \quad \alpha = 0, 1, \dots, 4$$

\leftarrow para que S^0 sea hermitico

que actuando sobre estados base se reduce a

$$S_0^\alpha = i^{\delta_{\alpha,0}} \sum_0^{2\alpha, 2\alpha+1} = b_\alpha^\dagger b_\alpha - \frac{1}{2} \quad ,$$

de tal forma que

$$S^\alpha |s\rangle_R = s_\alpha |s\rangle_R \quad S_\alpha = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow |s\rangle_R \text{ es } \underline{\text{espinor}}$$

Los operadores de creación $(-1)^{\delta_{\alpha,0}} \psi_{-r}^{2\alpha} \pm i(\mp i)^{\delta_{\alpha,0}} \psi_{-r}^{2\alpha+1}$

($r > 0$) cambian el autovalor de

$$S^\alpha = S_0^\alpha + i^{\delta_{\alpha,0}} \left(-\frac{i}{2}\right) \sum_{r \neq 0} [\psi_r^{2\alpha}, \psi_{-r}^{2\alpha+1}]$$

por un entero, así que todos los estados

en el sector R tienen espin semientero desde el punto de vista lo dim, y son fermiónicos.

Recordar que (en dimensión par) representación de

Dirac es reducible: la matriz de quiralidad

$\Gamma \equiv \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^q$ (análoga a γ^5) satisface

$$\Gamma^2 = +1, \quad \{\Gamma, \Gamma^\mu\} = 0 \quad \text{y} \quad \therefore \quad [\Gamma, \Sigma^{\mu\nu}] = 0.$$

Dado que $\Gamma = 32 S_0^0 S_0^1 S_0^2 S_0^3 S_0^4$, tenemos

$\Gamma |s\rangle_R = \pm |s\rangle_R$ si el número de $s_\alpha = -\frac{1}{2}$ es par/impar,

lo cual expresa descomposición $\underline{32} = \underline{16} + \underline{16}'$
Dirac $\left\{ \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{Cubyl} \end{array} \right\}$

Es posible generalizar Γ a todo el espectro:

$$\{\Gamma, \Gamma^\omega\} = 0 \longrightarrow \{(-1)^F, \psi_{-r}^\omega\} = 0,$$

donde $F \equiv S^0 + S^1 + S^2 + S^3 + S^4 - \frac{1}{2} - \Delta \pmod{2}$

es el número fermiónico (en la hoja de mundo).

Con esta definición, en el sector Ramond ($\Delta=0$)

$$(-1)^F |s\rangle_R = (-1)^{s_0 + \dots + s_4 - \frac{1}{2}} |s\rangle_R = |s'\rangle_R \Gamma_{s's} \quad \checkmark,$$

y $\psi_{-r_1}^{\omega_1} \dots \psi_{-r_n}^{\omega_n} |s\rangle_R$ tiene $F = n + s_0 + \dots + s_4 - \frac{1}{2}$,

mientras que en el sector Neveu-Schwarz ($\Delta = \frac{1}{2}$)

$$(-1)^F |0\rangle_{NS} = -|0\rangle_{NS} \quad \text{y} \quad \psi_{-r_1}^{\omega_1} \dots \psi_{-r_n}^{\omega_n} |0\rangle_{NS} \text{ tiene } F = n - 1.$$

Como veremos más adelante, contribución $-\frac{1}{2} - \Delta$ a F proviene de estado base de superfermiones β, γ (así que F es en realidad 'número espinorial').

102/05/06

Conociendo ya el espacio de Hilbert completo, estamos listos para determinar estados físicos.

En 'cuantización covariante antigua' ignoramos

b, c, β, γ (que supuestos están en su estado base)

excepto por su contribución a la constante de orden A_{Δ}^{TOT} .

Las condiciones de estado físico son entonces

$$L_{n>0}^{x,\psi} |fís\rangle = 0$$

$$(L_0^{x,\psi} - A_{\Delta}^{x,\psi} + A_{\Delta}^{\text{TOT}}) |fís\rangle = 0$$

$$(\leftrightarrow L_0^{\text{TOT}} |fís\rangle = 0)$$

$$G_{r>0} |fís\rangle = 0$$

junto con la relación de equivalencia para estados espurios
(+ físicos = nulos) $L_{-n} |\chi\rangle \cong 0, G_{-r} |\chi\rangle \cong 0 \quad \forall n, r > 0.$

Sabemos que $A_{\Delta}^{\text{TOT}} = -\Delta,$

$$L_0^{x,\psi} - A_{\Delta}^{x,\psi} = \underbrace{\frac{1}{2} \alpha_0^2}_{\equiv N^x} + \underbrace{\sum_{n>0} \alpha_{-n}^{\mu} \alpha_{n\mu}}_{\equiv N^x} + \underbrace{\sum_{n>0} r \psi_{-r}^{\mu} \psi_{r\mu}}_{\equiv N^{\psi}} \equiv L_0,$$

Cuerda — Cerrada: $\alpha p^2 / 4$
— Abierta: αp^2

$$\underbrace{\underbrace{\equiv N^x}_{\text{Cuerda}} + \underbrace{\equiv N^{\psi}}_{\text{Cuerda}}}_{\equiv N^{x,\psi}} \equiv N$$

$$G_{\pm 1/2} = \alpha_{0\mu} \psi_{\pm 1/2}^{\mu} + \dots \quad (\text{sector NS}),$$

$$G_0 = \alpha_{0\mu} \psi_0^{\mu} + \dots \quad (\text{sector R}).$$

Espectro de Supercuerda Abierta

-NS: $A_{1/2}^{\text{TOT}} = -1/2 \Rightarrow (L_0 + A_{1/2}^{\text{TOT}}) |f\rangle = 0$

es condición de capa de masa

$$m^2 = \frac{N - 1/2}{\alpha'}$$

$$N = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

• Nivel N=0: $|0, k\rangle_{NS}$ con $m^2 = -k^2 = -1/2\alpha'$

Taquión $\phi(x) \in NS_-$ ↖ autovalor de $(-1)^F$

• Nivel N=1/2: $\sum_{\mu} \psi_{-1/2}^{\mu} |0, k\rangle_{NS}$ con $m^2 = -k^2 = 0$

$$G_{1/2} \sum_{\mu} \psi_{-1/2}^{\mu} |0, k\rangle_{NS} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{\mu} k^{\mu} |0, k\rangle_{NS} = 0 \Rightarrow \sum_{\mu} k^{\mu} = 0$$

$$G_{-1/2} |0, k\rangle_{NS} = \sqrt{2\alpha'} k_{\mu} \psi_{-1/2}^{\mu} |0, k\rangle_{NS} \text{ nulo} \Rightarrow \sum_{\mu} k_{\mu} \approx \sum_{\mu} k_{\mu} + \lambda k_{\mu}$$

Bosón de Norma $A_{\mu}(x) \in NS_+$

En marco donde $k_\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$, todo estado físico es equivalente a combinación lineal

$$\sum_i \psi_{-1/2}^i |0; k\rangle_{NS} \quad i=2,3,\dots,9 \quad - \underline{8}_V \text{ de } SO(8).$$

• Nivel N=1 : $(\sum_\mu \alpha_{-1}^\mu + \sum_{\mu\nu} \psi_{-1/2}^\mu \psi_{-1/2}^\nu) |0; k\rangle_{NS}$ $m^2 = -k^2 = +\frac{1}{2\alpha'}$

...

$\in NS_-$,

etc.

- R : $A_0^{\text{TOT}} = 0 \Rightarrow (L_0 + A_0^{\text{TOT}}) |f\rangle = 0$

resulta en $m^2 = \frac{N}{\alpha'}$ $N = 0, 1, 2, \dots$

• Nivel 0 : $u_s |S; k\rangle_R$ con $m^2 = -k^2 = 0$

Normino $\lambda_s(x)$

$$\underbrace{G_0}_{\sqrt{2\alpha'} p_\mu \psi_0^\mu} u_s |S; k\rangle_R = \sqrt{\alpha'} k_\mu \Gamma_{s's}^\mu u_s |S'; k\rangle_R = 0 \Rightarrow \boxed{k_\mu \Gamma_{s's}^\mu u_s = 0}$$

$\partial \lambda(x) = 0 \Leftrightarrow$ i Ec. de Dirac!

(De hecho Dirac $G_0 = 0 \Rightarrow$ Klein-Gordon $L_0 = G_0^2 = 0$.)

En marco donde $k_\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$, operador de Dirac es

$$k_0 \Gamma^0 + k_1 \Gamma^1 = k \Gamma^0 (1 - \Gamma^0 \Gamma^1) = k \Gamma^0 (1 - 2S_0^1),$$

así que solo son físicos estados con $S_0 = +\frac{1}{2}$.

$$\text{Bajo } \text{So}(9,1) \supset \text{So}(1,1) \times \text{So}(8)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ S^{\pm} & S^0 & S^1, \dots, S^4 \end{array}$$

tenemos descomposición

$$\underline{16} = \left(+\frac{1}{2}, \underline{8}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \underline{8}'\right) \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ |S_1, S_2, S_3, S_4\rangle \text{ con} \\ \# \text{ impar de } -\frac{1}{2}'s \end{array}$$

$$\underline{16}' = \left(+\frac{1}{2}, \underline{8}'\right) + \left(-\frac{1}{2}, \underline{8}\right) \quad \begin{array}{l} \swarrow \\ |S_1, S_2, S_3, S_4\rangle \text{ con} \\ \# \text{ par de } -\frac{1}{2}'s \end{array}$$

Sobreviven 2

espinores de $\text{So}(8)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{8} \text{ con } (-1)^F = +1 \quad \in R_+ \\ \underline{8}' \text{ con } (-1)^F = -1 \quad \in R_- \end{array} \right.$$

• Nivel $N=1$: $\left(\sum_{\omega} \alpha_{-\omega}^{\omega} + \sum_{\omega} \psi_{-\omega}^{\omega}\right) |S\rangle_R$ con $m^2 = -k^2 = \frac{1}{\alpha'}$

$\in R_+ \cup R_-$,

etc.

Espectro de Supercuerda Cerrada

2 copias de cuerda abierta (con $p \rightarrow p/2$),
sujetas a condición de empataamiento de niveles

$$(L_0^{\text{TOT}} - \tilde{L}_0^{\text{TOT}}) | \text{fís} \rangle = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{4}{\alpha'} (N - \Delta) = \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - \tilde{\Delta})$$

(donde hemos usado $A_{\Delta}^{\text{TOT}} = -\Delta$, $\tilde{A}_{\tilde{\Delta}}^{\text{TOT}} = -\tilde{\Delta}$).

Recordando que

$$R \quad (\Delta=0) \Rightarrow \begin{cases} N = 0, 1, 2, \dots \\ (-1)^F = \pm 1, \pm 1, \pm 1, \dots \end{cases}$$

y

$$NS \quad (\Delta = \frac{1}{2}) \Rightarrow \begin{cases} N = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ (-1)^F = -1, +1, -1, +1, \dots \end{cases}$$

veamos que NS_+ ($N - \Delta$ semientero) solo puede
empataarse con NS_- .

Entendemos también que los estados en los
sectores (NS, NS) y (R, R) son bosónicos ($s_{\alpha} \in \mathbb{Z}$),
mientras que (NS, R) y (R, NS) son fermiónicos ($s_{\alpha} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$).

$$- \underline{(NS_-, NS_-)} : \quad m^2 = \frac{4}{\alpha'} \left(N - \frac{1}{2}\right), \quad N = \tilde{N} = 0, 1, 2, \dots$$

$$\bullet \underline{\text{Nivel } N=0} : \quad |0, 0; k\rangle_{NS-NS} \quad m^2 = -k^2 = -2/\alpha'$$

Taquión $\phi(x)$

Niveles $N \geq 1$ tienen $m^2 > 0$

En los 9 sectores restantes, el nivel más bajo

corresponde a estados con $m^2 = 0$:

$$- \underline{(NS_+, NS_+)} : \quad \sum_{\mu\nu} \Psi_{-1/2}^\mu \tilde{\Psi}_{-1/2}^\nu |0, 0; k\rangle_{NS-NS}$$

$$G_{1/2} = \tilde{G}_{1/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} k^\nu = 0$$

$$G_{-1/2} \tilde{G}_{-1/2} |0, 0; k\rangle_{NS-NS} \text{ n.u.b.} \Rightarrow \quad \varepsilon_{\mu\nu} \cong \varepsilon_{\mu\nu} + k_\mu \zeta_\nu + \zeta_\mu k_\nu$$

$$(\text{c/ } k \cdot \zeta = k \cdot \xi = 0)$$

$\therefore (10-2)^2$ estados físicos, que en términos de representaciones irreducibles de $SO(8)$ son

$$\alpha_{-v} \times \theta_{-v} = \frac{1}{(0)} + \frac{28}{[2]} + \frac{35}{(2)}$$

Dilatón Antisimétrico gravitón
 $\phi(x)$ $B_{\mu\nu}(x)$ $h_{\mu\nu}(x)$

$$-(R_+, R_+) : \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} (C \Gamma^{\mu_1} \Gamma^{\mu_2} \dots \Gamma^{\mu_n}) |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n}}$

donde $C \equiv \Gamma^0 \Gamma^3 \Gamma^5 \Gamma^7 \Gamma^9$ matriz de conjugación de carga

satisface $C \Gamma^\mu C^{-1} = -\Gamma^{\mu T}$, $(C \Gamma^0) \Gamma^\mu (C \Gamma^0)^{-1} = \Gamma^{\mu*}$

$$\Rightarrow u^T C \text{ transforma como } \bar{u} \equiv u^\dagger \Gamma^0.$$

A partir de 2 espinores u, \tilde{u} se pueden \therefore formar
tensores linealmente independientes

$$\tilde{u}^T C \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} u \quad n=0, 1, \dots, 5,$$

pero los casos con n par (\Rightarrow # impar de Γ 's) dan
cero si u, \tilde{u} tienen la misma quiralidad [ver Polchinski, Vol II,
Apéndice B.1], como es el caso en este sector.

Tenemos entonces solo estados con $n=1, 3, 5$.

En términos de representaciones de $SO(9,1)$:

$$\underline{16} \times \underline{16} = \underline{10} + \underline{120} + \underline{126}$$

[1] [3] [5]₊ ← rep autodual,

Campos $G_{\mu\nu}(x)$ $G_{\mu\nu\lambda}(x)$ $G_{\mu\nu\lambda\rho}^+(x)$

Antisimétricos

La definición de auto dualidad es como sigue.

Dado un tensor totalmente antisimétrico

$T_{\mu_1 \dots \mu_n}$ en D dimensiones, su dual de Hodge es

$$*T_{\mu_1 \dots \mu_{D-n}} \equiv \frac{\sqrt{-G}}{n!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{D-n}}^{\nu_1 \dots \nu_n} T_{\nu_1 \dots \nu_n}$$

$\epsilon_{012 \dots D-1} = +1$ Levi-Civita

(Para $F_{\mu\nu}$ en $D=4$, $F_{\mu\nu} \rightarrow *F_{\mu\nu}$ es la transformación $(\vec{E}, \vec{B}) \rightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$, y las ecs. de Maxwell son $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \partial_{[\mu} *F_{\nu\lambda]} = 0$, $\partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$.)

Si D es par y $n = D/2$, podemos entonces descomponer de manera covariante

$$T_{\mu_1 \dots D/2} \equiv T_{\mu_1 \dots D/2}^+ + T_{\mu_1 \dots D/2}^-$$

$$\text{con } T_{\mu_1 \dots D/2}^\pm = \pm * T_{\mu_1 \dots D/2}^\pm \quad \begin{array}{l} \text{autodual} \\ \text{antiautodual} \end{array}$$

En nuestro caso tenemos $D=10$ y

$$G_{\mu_1 \dots \mu_5}^+ = + * G_{\mu_1 \dots \mu_5}^+$$

Condiciones de estado físico $G_0 = 0 = \tilde{G}_0$

$$\Rightarrow k_{[\mu} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \underbrace{\Gamma^{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n] \mu}}_{(-1)^n (\Gamma^{\mu \mu_1 \dots \mu_n} - n \eta^{\mu [\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n]})} = 0 = k_{\mu} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \underbrace{\Gamma^{\mu \mu_1 \dots \mu_n}}_{\Gamma^{\mu \mu_1 \dots \mu_n} + n \eta^{\mu [\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n]}}$$

$$\Leftrightarrow k_{[\mu} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n]} = 0 = k^{\mu_1} \epsilon_{[\mu_1 \dots \mu_n]}$$

$$\Leftrightarrow \partial_{[\mu} G_{\mu_1 \dots \mu_n]}(x) = 0 = \partial_{[\mu} * G_{\mu_1 \dots \mu_n]} /$$

¡ que son las ecs. de Maxwell para intensidad de campo generalizada $G_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$! Podemos definir campo de

de norma asociado $C_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}(x) \approx C_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}(x) + \partial_{[\mu_1} \lambda_{\mu_2 \dots \mu_{n-1}]}(x)$

tal que $G_{\mu_1 \dots \mu_n}(x) = (n+1) \partial_{[\mu} C_{\mu_1 \dots \mu_n]}(x)$.

Los estados físicos no masivos en este sector son entonces

$$\underline{8} \times \underline{8} = \underline{1} + \underline{28} + \underline{35}_+ \leftarrow \text{reps de } SO(8)$$

$$[0] \quad [2] \quad [4]_+$$

Campos de
Norma R-R

$$C(x) \quad C_{\mu\nu}(x) \quad C_{\mu\nu\lambda\rho}^+(x)$$

04/05/06

- (R_-, R_-) : estados $\sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} (C \Gamma^{\mu_1, \dots, \mu_n})_{\tilde{s}s} |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R}$

con $n=1, 3, 5$, que son reps irreducibles en producto

$$\underline{16}' \times \underline{16}' = \underline{10} + \underline{120} + \underline{126} \quad \leftarrow \text{reps de } \text{So}(9,1),$$

$$[1] \quad [3] \quad [5]_-$$

de los cuales son físicos

$$\underline{8}' \times \underline{8}' = \underline{1} + \underline{28} + \underline{35} \quad \leftarrow \text{reps de } \text{So}(8)$$

$$[0] \quad [2] \quad [4]_-$$

Campos de

Norma R-R

$$\hat{C}(x) \quad \hat{C}_{\mu\nu}(x) \quad C_{\mu\nu\lambda\rho}^-(x)$$

- (R_+, R_-) : estados $\sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} (C \Gamma^{\mu_1, \dots, \mu_n})_{\tilde{s}s} |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R}$

con $n=0, 2, 4$, que figuran en producto

$$\underline{16} \times \underline{16}' = \underline{1} + \underline{45} + \underline{210} \quad \leftarrow \text{reps de } \text{So}(9,1),$$

$$[0] \quad [2] \quad [4]$$

de los cuales son físicos

$$\underline{8} \times \underline{8}' = \underline{8}_v + \underline{56}_t \quad \leftarrow \text{reps de } \text{So}(8)$$

$$[1] \quad [3]$$

Campos de

Norma R-R

$$C_{\mu}(x) \quad C_{\mu\nu\lambda}(x)$$

- (R_-, R_+) : igual, con $n=0, 2, 4$

\Rightarrow estados físicos $\underline{\mathcal{B}}' \times \underline{\mathcal{B}} = \underline{\mathcal{B}}_V + \underline{\mathcal{B}}_t$

Campos de Norma R-R $\hat{C}_N(x)$ $\hat{C}_{NVA}(x)$

- (NS_+, R_+) : estados $E_{N\tilde{S}} \Psi_{-1/2}^N |0, \tilde{S}; k\rangle_{NS-R}$

que se pueden separar de manera covariante en

$$U_{\tilde{S}'}(\Gamma_N)_{\tilde{S}\tilde{S}'} \Psi_{-1/2}^N |0, \tilde{S}; k\rangle_{NS-R} \quad (\text{i.e., } E_{N\tilde{S}} = U_{\tilde{S}'}(\Gamma_N)_{\tilde{S}\tilde{S}'})$$

y $U_{N\tilde{S}} \Psi_{-1/2}^N |0, \tilde{S}; k\rangle_{NS-R}$ con $\Gamma_{\tilde{S}'\tilde{S}}^N U_{N\tilde{S}} = 0$,

lo cual corresponde a descomposición

$$\underline{10} \times \underline{16} = \underline{16} + \underline{144} \quad \leftarrow \text{reps de } so(9,1).$$

condiciones de estado físico

$$G_{1/2} = 0 = \tilde{G}_0 \Rightarrow k^N E_{N\tilde{S}} = 0 = k_N \Gamma_{\tilde{S}'\tilde{S}}^N E_{N\tilde{S}},$$

$$G_{-1/2} |0, \tilde{S}; k\rangle_{NS-R} \approx 0 \Rightarrow E_{N\tilde{S}} \approx E_{N\tilde{S}} + k_N J_{\tilde{S}}$$

seleccionan

$$\underline{\mathcal{B}}_V \times \underline{\mathcal{B}} = \underline{\mathcal{B}}' + \underline{\mathcal{B}} \quad \leftarrow \text{reps de } so(8)$$

$$\lambda_{\tilde{S}'}(x) \quad \chi_{N\tilde{S}}(x)$$

Dilatino Gravitino

Notar que relación de equivalencia

$$E_{\mu\tilde{s}} \simeq E_{\mu\tilde{s}} + k_{\mu} \int \tilde{s}$$

(que es consecuencia de existencia de estado nulo)

es expresión de invariancia de norma en espaciotiempo

$$\chi_{\mu\tilde{s}}(x) \simeq \chi_{\mu\tilde{s}}(x) + \partial_{\mu} \int \tilde{s}(x)$$

↑ parámetro fermiónico

! Supersimetría local en espaciotiempo!!

- (R₊, NS₊) : igual, con $\tilde{s} \rightarrow s$

Estados físicos $\underline{8} \times \underline{8}_v = \underline{8}' + \underline{56}$

$$\hat{\lambda}_s(x) \quad \hat{\chi}_{\mu s}(x)$$

- (NS₊, R₋) : igual a (NS₊, R₊), con $\tilde{s} \rightarrow \tilde{s}'$

Estados físicos $\underline{8}_v \times \underline{8}' = \underline{8} + \underline{56}'$

$$\lambda_s(x) \quad \chi_{\mu s'}(x)$$

- (R₋, NS₊) : igual, con $\tilde{s}' \rightarrow s'$

Estados físicos $\underline{8}' \times \underline{8}_v = \underline{8} + \underline{56}'$

$$\hat{\lambda}_s(x) \quad \hat{\chi}_{\mu s'}(x)$$

Operadores de Vértice

$$-NS: \quad \psi_r^{\sim} \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-1/2} \psi^{\sim}(z) \quad r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$$

El estado $|\Psi_1\rangle$ que corresponde a $\bar{O}=1$ satisface

$$\psi_r^{\sim} |\Psi_1\rangle \leftrightarrow \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-1/2} \underbrace{\psi^{\sim}(z) \cdot 1}_{\psi^{\sim}(0) + z \partial \psi^{\sim}(0) + \dots}$$

$$= 0 \quad \forall r > 0$$

$$\Rightarrow |\Psi_1\rangle = |0\rangle_{NS}$$

De la misma manera vemos que

$$\psi_{-r}^{\sim} |0\rangle_{NS} \leftrightarrow \frac{1}{(r-1/2)!} \partial^{r-1/2} \psi^{\sim}(0) \quad \forall r > 0,$$

$$\text{y } \psi_{-r_1}^{\sim} \dots \psi_{-r_n}^{\sim} |0\rangle_{NS} \leftrightarrow \text{producto en orden normal.}$$

$$\text{P.ej. } \sum_n \psi_{-1/2}^{\sim} |0; k\rangle_{NS} \leftrightarrow \sum_n \psi^{\sim} e^{ik \cdot X}$$

Notar que con $k^2=0$ este vértice tiene $h=1/2$.

Como veremos más adelante, para obtener $h=1$ hace falta contribución de superfantasmas.

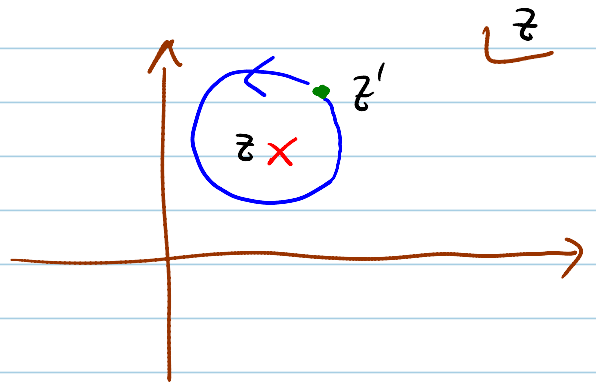
hace falta contribución de superfantemas.

Como hubiéramos esperado, todos estos vértices $V_{NS}(z)$ tienen espín entero bajo $SO(9,1)$, y satisfacen

$$V_{NS}(z) \psi^{\mu}(z') \sim \underbrace{\partial^{r_1 - 1/2} \psi^{\mu_1}(z) \cdots \psi^{\mu_n}(z')} + \dots$$

$$\sim \partial^{r_1 - 1/2} \left(\frac{1}{z - z'} \right) \dots + \dots$$

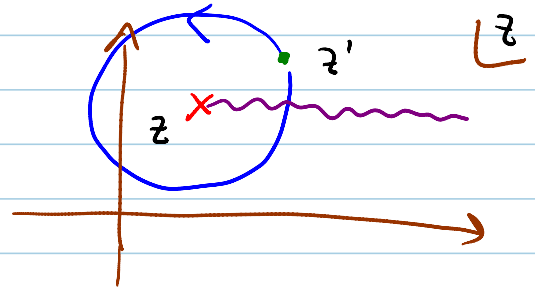
de donde vemos que $\psi^{\mu}(z')$ es periódico al rodear $V_{NS}(z)$.



La inserción de $V_{NS}(z)$ no cambia \therefore las condiciones de periodicidad para $\psi^{\mu}(z')$ alrededor del origen, lo cual refleja el hecho de que la emisión/absorción de un bosón no cambia la estadística del estado inicial.

- R: Los vértices $V_R(z)$ deben tener espín semientero bajo $SO(9,1)$, y satisfacen

$$V_R(z) \psi^{\sim}(z') \sim \frac{1}{\sqrt{z-z'}} \dots ,$$



de tal manera que $\psi^{\sim}(z')$ sea antiperiódico al rodear a $V_R(z')$, como corresponde al hecho de que emisión/absorción de un fermión sí cambia bosón \rightarrow fermión y fermión \rightarrow bosón.

Es imposible construir semejante $V_R(z)$ usando solo ψ y sus derivadas!

Se requiere bosonizar ψ^{\sim} : curiosamente,

en 2 dimensiones un par de espinores Majorana-Weyl

ψ, ψ' (p.ej. ψ^2, ψ^3) resultan ser equivalentes

a (la parte analítica de) un escalar φ !

Definiendo
$$\psi(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi(z) + i\psi'(z)) ,$$

$$\bar{\psi}(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi(z) - i\psi'(z)) ,$$

tenemos EPOs

$$\psi(z) \bar{\psi}(z') = \frac{1}{z-z'} + \dots \quad (\text{como } b \text{ y } c) ,$$

$$\Psi(z)\Psi(z') \sim z-z' \quad , \quad \bar{\Psi}(z)\bar{\Psi}(z') \sim z-z' \quad .$$

Por otro lado, usando $\varphi(z)\varphi(z') = -\ln(z-z') + \dots$:

(con $\varphi(z)$ la parte analítica de un campo escalar,)

tenemos

$$:e^{+i\varphi(z)} : :e^{-i\varphi(z')} : = \frac{1}{z-z'} + \dots \quad ,$$

$$:e^{+i\varphi(z)} : :e^{+i\varphi(z')} : = z-z' + \dots \quad ,$$

$$:e^{-i\varphi(z)} : :e^{-i\varphi(z')} : = z-z' + \dots$$

Podemos \therefore identificar

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(z) \simeq e^{+i\varphi(z)} \leftarrow \text{Pesos conformes} \\ \bar{\Psi}(z) \simeq e^{-i\varphi(z)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} h = \frac{1}{2} = h_{\Psi} = h_{\bar{\Psi}} \quad \checkmark \\ \text{(recordar que } :e^{ik \cdot X} : \\ \text{tiene } h = \frac{k^2}{2} \frac{\alpha'}{2} \text{)} \end{array}$$

$$\text{Carga central } c_{\Psi, \bar{\Psi}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = c^{\varphi} \quad \checkmark$$

$$\text{Además, } \langle \varphi(z)\varphi(z') \rangle = -\ln(z-z')$$

$$\Rightarrow \underset{|z|=|z'|}{[\hat{\varphi}(z), \hat{\varphi}(z')]} = \pm i\pi \quad ,$$

y usando Campbell-Baker-Hausdorff tenemos \therefore

$$:e^{+i\hat{\varphi}(z)}: :e^{+i\hat{\varphi}(z')} = \exp\left(-[\hat{\varphi}(z), \hat{\varphi}(z')]\right) :e^{+i\hat{\varphi}(z')} : :e^{+i\hat{\varphi}(z)} :$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{-1}$ ✓

Comparando EPOs

$$:e^{+i\varphi(z)}: :e^{-i\varphi(-z)}: = \frac{1}{z-(-z)} :e^{+i\varphi(z)-i\varphi(-z)}:$$

$$= \frac{1}{2z} + i\partial\varphi(0) + 2z \underbrace{\left(-\frac{1}{2} : \partial\varphi\partial\varphi(0) : \right)}_{T^\varphi(0)} + \dots$$

y

$$\psi(z)\bar{\psi}(-z) = \frac{1}{z-(-z)} + : \psi(z)\bar{\psi}(-z) :$$

$$= \frac{1}{2z} + : \psi\bar{\psi}(0) : + 2z \underbrace{\left(-\frac{1}{2} : \psi\partial\bar{\psi}(0) + \bar{\psi}\partial\psi(0) : \right)}_{T^{\psi,\bar{\psi}}(0) = T^{\psi,\psi'}(0)} + \dots$$

concluimos en particular que

$$: \psi\bar{\psi}(z) : \simeq i\partial\varphi(z) \quad \text{y} \quad T^{\psi,\bar{\psi}}(z) \simeq T^\varphi(z)$$



Corriente de Noether asociada a $\delta\varphi(z) = \epsilon$

Corriente de Noether asociada a $\delta\psi(z) = +i\epsilon\psi(z)$, $\delta\bar{\psi}(z) = -i\epsilon\bar{\psi}(z)$.

Considerando todas las FPOs posibles podemos establecer equivalencia entre todos los operadores locales formados con $\psi, \bar{\psi}$ y sus derivadas y todos los operadores locales formados con $:e^{i\eta\phi}: (\eta \in \mathbb{Z})$ y sus derivadas.

Las funciones de correlación en ambas teorías son analíticas (meromorfas) y poseen las mismas singularidades, \therefore deben ser idénticas.

En nuestro caso, para bosonizar $\psi^{\tilde{w}}(z)$ agrupamos

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (+\psi^0 + \psi^1), \quad \bar{\psi}_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (-\psi^0 + \psi^1) \\ \psi_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^2 + i\psi^3), \quad \bar{\psi}_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^2 - i\psi^3) \\ \vdots \\ \psi_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^8 + i\psi^9), \quad \bar{\psi}_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^8 - i\psi^9) \end{array} \right.$$

(notar que modos cero de $\psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha$ en sector R son respectivamente b_α^+, b_α^-), y definimos

$$\psi_\alpha(z) \simeq e^{+i\varphi_\alpha(z)}, \quad \bar{\psi}_\alpha(z) \simeq e^{-i\varphi_\alpha(z)} \quad \alpha=0,1,\dots,4$$

(Sutilera: para que $e^{\pm i\varphi_\alpha}$ anticomute con $e^{\pm i\varphi_\beta} \forall \alpha, \beta$,
debemos agregar 'cociclos' C_α tales que

$$\{C_\alpha, C_\beta\} = 0 \quad \forall \alpha \neq \beta, \quad C_\alpha^2 = 1.$$
)

Consideremos ahora operadores $:e^{\pm i\varphi_\alpha/2}:$, que satisfacen

$$:e^{-\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z)}: :e^{+i\varphi_\alpha(z')} = \frac{1}{\sqrt{z-z'}} :e^{+\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z')} + \dots$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Psi_\alpha(z')}$
↑ corte!

$$:e^{+\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z)}: :e^{-i\varphi_\alpha(z')} = \frac{1}{\sqrt{z-z'}} :e^{-\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z')} + \dots$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{\Psi}_\alpha(z')}$

Usándolos podemos formar el producto

$$J_s(z) \equiv : \exp \left[i \sum_\alpha s_\alpha \varphi_\alpha(z) \right] : \quad \text{Campo de espín,}$$

que produce el corte deseado en $\Psi^w \forall w$, y

resulta ser además espines de $so(9,1)$ con

autovector S_α bajo generador de Lorentz

$$S_\alpha = i \delta_{\alpha,0} \oint_{2\pi i} \frac{dz}{z} J^{2\alpha, 2\alpha+1}(z) = i \delta_{\alpha,0} \oint_{2\pi i} \frac{dz}{z} : \underbrace{\Psi_\alpha \bar{\Psi}_\alpha(z)}_{\delta_{\alpha,0} i \partial \varphi_\alpha(z)} :$$

$$= -\frac{i}{2} : \psi^{2\alpha} \psi^{2\alpha+1} - \psi^{2\alpha+1} \psi^{2\alpha} : \approx (-i) \delta_{\alpha,0} i \partial \varphi_\alpha(z).$$

Concluimos entonces que

$$|S\rangle_n \equiv |S_0, S_1, \dots, S_4\rangle_n \longleftrightarrow \mathcal{J}_S(z) \equiv \exp\left[i \sum_{\alpha} S_{\alpha} \varphi_{\alpha}(z)\right]:$$

10/05/06

El único problema que queda por resolver es que $:e^{\pm \frac{i}{2} \varphi_{\alpha}}:$ tiene $h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$, por lo que

$$\mathcal{J}_S(z) \text{ tiene } h = 5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \neq 1.$$

Este problema se soluciona al incorporar la contribución de los superfantasmas. En particular, V_R debe producir también un corte en β, γ . Hace falta entonces "bosonizar" a β, γ , para lo cual se requieren 3 campos:

• 1 bosón $\phi(z)$ con $\langle \phi(z) \phi(z') \rangle = -\ln(z-z')$ y

$$T^{\phi} = -\frac{1}{2} : \partial \phi \partial \phi : = -\partial^2 \phi \quad \Rightarrow \quad c^{\phi} = 1 + 12v^2 = 13$$

proviene de término $\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} R v \phi$

en acción (\leftrightarrow fondo dilatónico

lineal), con $v = -1$.

$:e^{n\phi}:$ tiene $h = -\frac{1}{2} n^2 - n$. contribución de término adicional en T^{ϕ} .

• 2 fermiones $\eta(z), \zeta(z)$, con

$$\eta(z)\zeta(z') = \frac{1}{z-z'} + \dots,$$

$$\eta(z)\eta(z') \sim z-z' \sim \zeta(z)\zeta(z') \quad (\text{como sistema } b,c),$$

$$T^{\eta,\zeta} = -:\eta\partial\zeta: \Rightarrow h_\eta = 1, h_\zeta = 0, c^{\eta,\zeta} = -2$$

Notar que $c^\phi + c^{\eta,\zeta} = 13 - 2 = 11 = c^{\beta,\gamma}$ ✓

Reproducimos entonces todas las EPOS si identificamos

$$\beta(z) \simeq e^{-\phi(z)} \partial\zeta(z), \quad \gamma(z) \simeq e^{+\phi(z)} \eta(z)$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow $\leftarrow h=1$
 $h=3/2$ $h=-\frac{(-1)^2}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$ $h=0+1=1$ $h=-\frac{1}{2}$ $h=-\frac{1}{2}(1)^2 - (1) = -\frac{3}{2}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{h=3/2}$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{h=-1/2}$

Esto implica en particular que $T^{\beta,\gamma} \simeq T^{\phi,\eta,\zeta}$ ✓

$$\underbrace{-:\beta\gamma(z):}_{\text{corriente asociada a}} \simeq \underbrace{-\partial\phi(z)}_{\text{corriente asociada a } \phi(z) \rightarrow \phi(z) + a}$$

$$\beta(z) \rightarrow e^{-i\theta} \beta(z), \quad \gamma(z) \rightarrow e^{i\theta} \gamma(z) \quad (\text{anómala si } \chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} R \neq 0)$$

$$\uparrow \text{ carga } -1 \quad \uparrow \text{ carga } +1 \quad e^{n\phi} \text{ tiene carga } n \quad \checkmark$$

"número de fantasmas"

Para completar operadores de vértice, quisiéramos ahora determinar operadores $O_{NS}(z)$, $O_R(z)$ que corresponden respectivamente a

$$|0\rangle_{NS} \quad \text{tal que} \quad \beta_{r \geq \frac{1}{2}} |0\rangle_{NS} = 0 = \gamma_{r \geq \frac{1}{2}} |0\rangle_{NS} \quad \text{y}$$

$$|0\rangle_R \quad \text{tal que} \quad \beta_{r \geq 0} |0\rangle_R = 0 = \gamma_{r \geq 1} |0\rangle_R \quad .$$

($|0\rangle_R$ es la contraparte de $|\downarrow\rangle$, que satisfacía $b_{n \geq 0} |\downarrow\rangle = 0 = c_{n \geq 1} |\downarrow\rangle$.)

Bajo el mapeo estado \leftrightarrow operador, estas condiciones se traducen en

$$\oint_{\frac{2\pi i}{i}} \frac{dz}{2\pi i} z^{r+1/2} \beta(z) O_{NS}(0) = 0 = \oint_{\frac{2\pi i}{i}} \frac{dz}{2\pi i} z^{r-3/2} \gamma(z) O_{NS}(0) \quad \text{y}$$

$\uparrow_{r \geq 1/2} \qquad \qquad \qquad \uparrow_{r \geq 1/2}$

$$\oint_{\frac{2\pi i}{i}} \frac{dz}{2\pi i} z^{r+1/2} \beta(z) O_R(0) = 0 = \oint_{\frac{2\pi i}{i}} \frac{dz}{2\pi i} z^{r-3/2} \gamma(z) O_R(0) \quad ,$$

$\uparrow_{r \geq 0} \qquad \qquad \qquad \uparrow_{r \geq 1}$

es decir, $\beta(z) O_{NS}(0) \sim z^{-1}$, $\gamma(z) O_{NS}(0) \sim z$,
 $\beta(z) O_R(0) \sim z^{-1/2}$, $\gamma(z) O_R(0) \sim z^{1/2}$.
↖ corte esperado ↗

Claramente $O_{NS}, O_R \neq 1$. De hecho, ningún producto de β, γ y sus derivadas reproduce estas EPOs.

Pero en descripción 'bosonizada' podemos ver que

$$O_{NS}(z) \simeq e^{-\phi(z)} \quad \text{y} \quad O_R(z) \simeq e^{-\phi(z)/2}.$$

Este resultado nos sirve para finalmente entender 2 temas que habíamos dejado pendientes.

Primero, la contribución del vacío $|0\rangle_{NS}^{\beta, \gamma}$ ó $|0\rangle_R^{\beta, \gamma}$ al número "fermiónico" (en realidad, espinorial) en la hoja de mundo,

$$F \equiv \underbrace{S^0 + S^1 + S^2 + S^3 + S^4}_{\text{contribución de } \psi^m} \underbrace{-\frac{1}{2} - \Delta}_{\text{según prometimos, contribución de } \beta, \gamma} \pmod{2}$$

$$\Rightarrow \{(-1)^F, \psi_{-r}^m\} = 0 \quad \Rightarrow \{(-1)^F, \beta_{-r}\} = 0 = \{(-1)^F, \gamma_{-r}\}$$

La definición natural de $F^{\beta, \gamma}$ que logra esto es

$$F_{\Delta}^{\beta, \gamma} \equiv - \left[\sum_{r>0} (\beta_{-r} \gamma_r + \gamma_{-r} \beta_r) + \delta_{\Delta, 0} \gamma_0 \beta_0 \right] = - \oint \frac{dz}{2\pi i} \circ \beta \gamma(z) \circ$$

(no confundir con "operador de número" $N_{\Delta}^{\beta, \gamma} \equiv \sum_{r \in \mathbb{Z} + \Delta} r \circ \beta_{-r} \gamma_r \circ$).

Pero comparando $\langle X(z)Y(z') \rangle = : \beta(z)Y(z') : + (z-z')^{-1}$
 $= : \beta(z)Y(z') : + (z'/z)^{1/2} (z-z')^{-1}$

tenemos $: \beta Y(z) : = - : \beta Y(z) : \approx -\partial\phi(z)$ corriente de número de fantasma,

de modo que $O_{NS} = : e^{-\phi} :$ tiene $F_{\Delta=1/2}^{\beta, \gamma} = \eta_f = -1 = -\frac{1}{2} - \Delta$ ✓

mientras que $O_R = : e^{-\phi/2} :$ tiene $F_{\Delta=0}^{\beta, \gamma} = \eta_f = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \Delta$. ✓

Segundo, los pesos conformes de estos operadores son

respectivamente $h_{NS} = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{1}{2}$

y $h_R = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$,

que justo completan a $V_{NS}^{X, \psi}$ ($h = \frac{1}{2}$ en capa de masa) y $V_R^{X, \psi}$ ($h = \frac{5}{8}$ en capa de masa) para tener $h_{tot} = 1$. ✓

P.ej.,

$$\sum_{\omega} \psi_{-\frac{1}{2}}^{\omega} |0; k\rangle_{NS}^{\psi, X} |0\rangle_{NS}^{\beta, \gamma} \longleftrightarrow V_{NS}^{(-1)}(z) \equiv \sum_{\omega} \psi^{\omega} e^{ik \cdot X} e^{-\phi}(z) :$$

omitimos

$$h = \frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{4} k^2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$u_s |s; k\rangle_R^{\psi, X} |0\rangle_R^{\beta, \gamma} \longleftrightarrow V_R^{(-\frac{1}{2})}(z) \equiv u_s : \psi_s e^{ik \cdot X} e^{-\phi/2}(z) :$$

$$h = 5 \times \frac{1}{8} + \frac{\alpha'}{4} k^2 + \frac{3}{8} = 1$$

Incorporando la parte de modos derechos, obtenemos así vértices $V_i(z, \bar{z})$ con $(h, \bar{h}) = (1, 1)$, que usamos para construir invariantes conformes

$$V_i \equiv g_c N_i \int d^2z V_i(z, \bar{z})$$

que se insertan en integral funcional para calcular amplitudes de dispersión.

Recordar que si incluimos vacío de fantasmas

$|\downarrow\rangle \leftrightarrow c(z)$ ($h = -1$) obtenemos vértices fijos

$g_c N_i c(z) \tilde{c}(\bar{z}) V_i(z, \bar{z})$ que también son invariantes

conformes (y se usan para eliminar redundancia asociada a vectores de Killing conformes \leftrightarrow modos cero de $c(z)$ y $\tilde{c}(\bar{z})$).

Así como la existencia de fantasmas (fermiónicos) da lugar a estas 2 versiones alternativas de los vértices, la existencia de superfantasmas (bosónicos) permite escribir los vértices de la

supercuerda en un número infinito de distintas versiones o "cuadros" (que resultan útiles para eliminar redundancia debida a espinores de Killing conformes \leftrightarrow modos cero de $\mathcal{Y}(z)$ y $\tilde{\mathcal{Y}}(\bar{z})$). Los vértices en distinto cuadro difieren en su número de fantasmas

$$n_f \equiv - \oint \frac{dz}{2\pi i} : \beta \mathcal{Y}(z) : \simeq - \oint \frac{dz}{2\pi i} \partial \phi(z),$$

es decir, utilizan $e^{n_f \phi}$ con distintos valores de n_f .

P.ej., en lugar de

$$\epsilon_{\tilde{m}} \psi_{-1/2}^{\tilde{m}} |0; k\rangle_{NS} \longleftrightarrow V_{NS}^{(-1)}(z) = \epsilon_{\tilde{m}} : \psi^{\tilde{m}} e^{ik \cdot X} e^{-\phi} :$$

podemos usar su pariente superconforme

$$G_{-1/2} \epsilon_{\tilde{m}} \psi_{-1/2}^{\tilde{m}} |0; k\rangle_{NS} \longleftrightarrow V_{NS}^{(0)}(z) = \left\{ G_{-1/2}, V_{NS}^{(-1)} \right\} \\ = \epsilon_{\tilde{m}} : \left(i \partial X^{\tilde{m}} + \frac{\alpha'}{2} k \cdot \psi \psi^{\tilde{m}} \right) e^{ik \cdot X} :$$

que (si $\epsilon \cdot k = 0$) también tiene peso conforme $h=1$, y puede \therefore integrarse para obtener $V^{(0)} = \int dz V^{(0)}(z)$ invariante.

(Si implementamos supersimetría en 2dim geométricamente generalizando hoja de mundo \rightarrow super-hoja de mundo,
 $(z, \bar{z}) \rightarrow (z, \bar{z}; \theta, \bar{\theta})$
coords. fermiónicas)

entonces $V_{NS}^{(-1)}$ y $V_{NS}^{(0)}$ forman parte de un solo
'super campo'

$$V(z, \theta) = V_{NS}^{(-1)}(z) + \theta V_{NS}^{(0)}(z),$$

de tal forma que $V_{NS}^{(-1)}(z) = V(z, \theta=0)$ es vértice fijo,
 mientras que $V_{NS}^{(0)}(z) = \int d\theta V(z, \theta).$

De manera similar, a $u_s |s; k\rangle_R$ puede asociársele

$$V_R^{(-1/2)}(z) = u_s : \mathcal{D}_s e^{ik \cdot X} e^{-\phi/2} : \quad \text{"wadro } -1/2 \text{" } \acute{o}$$

$$V_R^{(+1/2)}(z) = u_s (\Gamma_\mu)_{ss'} : \mathcal{D}_{s'} (i\partial X^\mu + \frac{\alpha'}{2} k \cdot \psi \psi^\mu) e^{ik \cdot X} e^{+\phi/2} : ,$$

"wadro + 1/2"

que (si $k_\mu \Gamma^\mu u = 0$) tiene también $h=1$.

Más en general, a partir de $V^{(n_f)}$ se puede obtener

$$V_{(0)}^{(n_f+1)} \equiv [Q_{\text{BRST}}, \sum V_{(0)}^{(n_f)}] = \{Q_{\text{BRST}}, \zeta(0)\} V_{(0)}^{(n_f)}$$

$\{Q_{\text{BRST}}, \zeta(z)\}$ es el operador de cambio de retrato.

[Ver Polchinski Sec. 12.5 ; Friedan, Martinec, Shenker NPB 271 (1986), 93.]

La existencia de vértices en diferentes cuadros se vuelve importante al calcular amplitudes de dispersión, porque

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} V_1^{(n_1)} V_2^{(n_2)} \dots \propto \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_0 e^{\phi_0 \chi} e^{n_1 \phi_0} e^{n_2 \phi_0} \dots$$

incluye $-\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} Q\phi$

\Rightarrow amplitud bien definida solo si

$$\sum_i n_i = n_1 + n_2 + \dots = -\chi = -2 + 2g + b + c \quad (= \sum_i \tilde{n}_i).$$

P.ej., en esfera ($\chi = 2$), para amplitud de 4 puntos

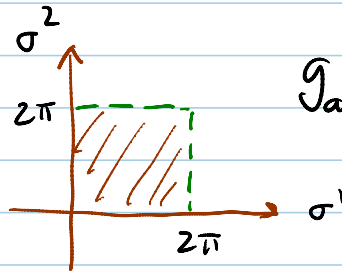
usamos vértices izquierdos $V_{NS}^{(-1)} V_{NS}^{(-1)} V_{NS}^{(0)} V_{NS}^{(0)}$,

$$V_R^{(-1/2)} V_R^{(-1/2)} V_{NS}^{(-1)} V_{NS}^{(0)}, \text{ etc.}$$

11/05/06

Invariancia Modular

Recordar que en toro T^2



$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 + \tau_2^2 \end{pmatrix}$$

\exists difeos grandes (no conectados a la identidad) que forman grupo modular $SL(2, \mathbb{Z})$, generado por

$$T: \left\{ \begin{array}{l} \sigma^1 \rightarrow \tilde{\sigma}_1 = \sigma^1 - \sigma^2 \\ \sigma^2 \rightarrow \tilde{\sigma}_2 = \sigma^2 \end{array} \right. \Rightarrow \tau \approx \tau + 1 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{array}} \right\} \tau \approx \tilde{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

$$S: \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}^1 = \sigma^2 \\ \tilde{\sigma}^2 = -\sigma^1 \end{array} \right. \Rightarrow \tau \approx -\frac{1}{\tau} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \tilde{\sigma}^1 \\ \tilde{\sigma}^2 \end{array}} \right\} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

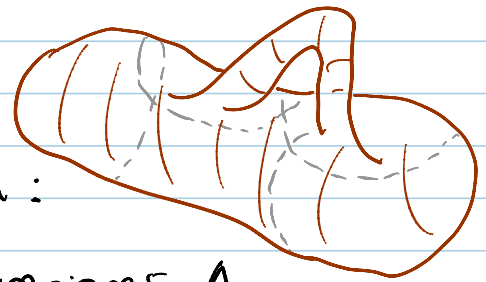
Invariancia modular juega un papel clave en finitud UV y, más importante aún, unitariedad de la teoría.

Al calcular amplitudes de supercuerdas en T^2 , debemos elegir "condiciones de borde" para $\psi^M(\sigma^1, \sigma^2)$ a lo largo de σ^1 y σ^2 .

(Más en general, en variedad M debemos especificar estructura de espín:

relación entre $\psi_{(A)}^{(s)}$ en distintas regiones A .

[Ver GSW Vol. II, sec. 12.1])



\exists 4 opciones : $\overset{\sigma^1}{(+)} \overset{\sigma^2}{(+)}$, $(+-)$, $(--)$, $(-+)$

$\underbrace{\hspace{10em}}_R \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{NS}$

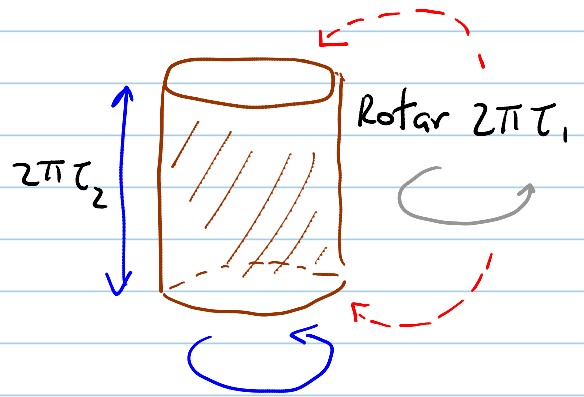
Bajo transformaciones modulares,

$$\begin{aligned}
 S, T : \quad & (++) \rightarrow (++) & (--) \rightarrow (--) , (-+) \\
 & & (+-) \rightarrow (-+) , (+-) \\
 & & (-+) \rightarrow (+-) , (--)
 \end{aligned}$$

Así que, p.ej., si incluimos $(+-)$ entonces debemos incluir también $(-+)$ y $(--)$ para que amplitudes a 1 lazo tengan oportunidad de ser invariantes modulares. Notar en particular que necesariamente incluiremos al menos un sector R izquierdo (y uno derecho).

Analizaremos ahora el requisito de invariancia modular más de cerca ...

Recordar que amplitud de cero puntos en $T^2(\tau)$ se puede calcular a través de una traza en formalismo Hamiltoniano:



$$\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)} = \text{Tr}_{H_\perp} \left[(\pm 1)^F e^{-2\pi\tau_2 \hat{H} + 2\pi\tau_1 i \hat{P}} \right] \equiv \mathcal{Z}(\tau)$$

Dependiendo de si campos fermiónicos son $\begin{cases} \text{antiperiódicos} \\ \text{periódicos} \end{cases}$ en dirección σ^2

Usar solo $D-2$ osciladores transversales X^i y ψ^i (los otros 2 se cancelan con b, c y β, γ)

$$= (q\bar{q})^{-c/24} \text{Tr}_{H_\perp} \left[(\pm 1)^F q^{L_0} \bar{q}^{\tilde{L}_0} \right], \quad q \equiv e^{2\pi i \tau}$$

Contribución de $\psi^i(\sigma)$ con distintas estructuras de espín es

$$\mathcal{Z}_{(++)}^\psi(\tau) = \text{Tr}_R \left[(-1)^F q^{H^\psi} \right], \quad \mathcal{Z}_{(+-)}^\psi(\tau) = \text{Tr}_R \left[q^{H^\psi} \right],$$

$$\mathcal{Z}_{(-+)}^\psi(\tau) = \text{Tr}_{NS} \left[(-1)^F q^{H^\psi} \right], \quad \mathcal{Z}_{(--)}^\psi(\tau) = \text{Tr}_{NS} \left[q^{H^\psi} \right],$$

donde $H^\psi \equiv \sum_{r>0} r \psi_{-r}^i \psi_r^i + \frac{1}{3} \quad R \leftarrow (D-2) (+1/24)$
 $\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -\frac{1}{6} \quad \quad NS \leftarrow (D-2) (-1/48)$

Tenemos entonces

$$Z_{(- -)}^{\Psi} = q^{-1/6} \left[\prod_{r=1/2}^{\infty} (1+q^r) \right]^8 = \underbrace{\left\{ q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) \right\}^{-4}}_{\equiv \eta(\tau)^{-4}} \underbrace{\left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) (1+q^{n-1/2})^2 \right\}^4}_{\equiv \Theta_3(0|\tau)^4}$$

Eta de
Dedekind

Función Theta
de Jacobi

$$Z_{(- +)}^{\Psi} = -q^{-1/6} \left[\prod_{r=1/2}^{\infty} (1-q^r) \right]^8 = -\eta(\tau)^{-4} \underbrace{\left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) (1-q^{n-1/2})^2 \right\}^4}_{\equiv \Theta_4(0|\tau)^4}$$

par $(-1)^F$

$$Z_{(+ -)}^{\Psi} = q^{1/3} \left[\prod_{r=0}^{\infty} (1+q^r) \right]^8 = \eta(\tau)^{-4} \underbrace{\left\{ q^{1/8} (1+i) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) (1+q^n)^2 \right\}^4}_{\equiv \Theta_2(0|\tau)^4}$$

$$Z_{(++)}^{\Psi} = -q^{1/3} \left[\prod_{r=0}^{\infty} (1-q^r) \right]^8 = -\eta(\tau)^{-4} \underbrace{\left\{ q^{1/8} (1-i) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) (1-q^n)^2 \right\}^4}_{\equiv \Theta_1(0|\tau)^4}$$

par $(-1)^F$

¿Cómo combinar para obtener invariancia modular?

Usando $\eta(\tau+1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau)$, $\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau)$,

$$\theta_3(0|\tau+1) = \theta_4(0|\tau), \quad \theta_3(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \theta_3(0|\tau),$$

$$\theta_4(0|\tau+1) = \theta_3(0|\tau), \quad \theta_4(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \theta_2(0|\tau),$$

$$\theta_2(0|\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \theta_2(0|\tau), \quad \theta_2(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \theta_4(0|\tau),$$

$$\theta_1(0|\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \theta_1(0|\tau), \quad \theta_1(0|-1/\tau) = -i(-i\tau)^{1/2} \theta_1(0|\tau),$$

se puede verificar que es invariante la combinación

$$\begin{aligned} Z_{TOT}^{\psi}(\tau) &\equiv \frac{1}{2} \left(Z_{(-)}^{\psi} + Z_{(-+)}^{\psi} - Z_{(+)}^{\psi} \pm Z_{(++)}^{\psi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \eta(\tau)^{-4} \left(\theta_3(0|\tau)^4 - \theta_4(0|\tau)^4 - \theta_2(0|\tau)^4 \mp \theta_1(0|\tau)^4 \right) \end{aligned}$$

(En realidad

$$Z_{TOT}^{\psi}(\tau+1) = e^{4\pi i/3} Z_{TOT}^{\psi}(\tau), \quad Z_{TOT}^{\psi}(-1/\tau) = Z_{TOT}^{\psi}(\tau),$$

pero la fase se cancela al multiplicar por contribución

$$\text{de modos derechos } Z_{TOT}^{\psi}(\bar{\tau}) = \left(Z_{TOT}^{\psi}(\tau) \right)^* .$$

Recordar que amplitud total es el toro

$$M_{T^2}^{(0)} \equiv \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_F \frac{d^2\tau}{4(\text{Im}\tau)^2} Z_{\text{TOT}}^X(\tau, \bar{\tau}) Z_{\text{TOT}}^\Psi(\tau) \tilde{Z}_{\text{TOT}}^\Psi(\bar{\tau})$$

se puede interpretar como suma sobre amplitud a un lazo para cada partícula en el espectro de la teoría libre:

$$M_{T^2}^{(0)} \sim \sum_i M_{S^1}^{(0)}(m_i^2) = \sum_i (-1)^{F_i} \int_0^\infty \frac{dT}{2T} (2\pi T)^{-5} e^{-m_i^2 T/2}$$

número fermiónico
en el espaciotiempo

Vemos entonces que

$$\begin{aligned} Z_{\text{TOT}}^\Psi(\tau) &= \frac{1}{2} (Z_{(- -)}^\Psi + Z_{(- +)}^\Psi - Z_{(+ -)}^\Psi + Z_{(+ +)}^\Psi) \\ &= \text{Tr}_{NS} \left[\rho^H \frac{1}{2} (1 + (-1)^F) \right] - \text{Tr}_R \left[\rho^H \frac{1}{2} (1 \pm (-1)^F) \right] \end{aligned}$$

Proyección Gliozzi-Scherk-Olive (GSO) \Rightarrow


$$NS_+ : |0; k\rangle_{NS}, \epsilon_{\mu\nu} \psi_{-1/2}^\mu |0; k\rangle_{NS}, (\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu + \epsilon_{\mu\nu} \psi_{-1/2}^\mu \psi_{-1/2}^\nu) |0; k\rangle_{NS}, \dots$$

$$R_\pm : u_s |s; k\rangle_R \text{ con } \Gamma u = \pm u, \dots$$

Si bien esta da invariancia modular, no es la única posibilidad. P.ej., también funciona

$$Z_{\text{TOT}}^{\psi}(\tau) = Z_{(++)}^{\psi} = -\eta(\tau)^{-4} \Theta_1(0|\tau)^4 = \text{Tr}_R \left[\eta^{\text{H}\psi} (-1)^F \right].$$

Pero la teoría No puede contener solo R_+ y R_- ,

porque EPO $V_R V_R \sim V_{NS} \Rightarrow$ interacción  NS

Una teoría de cuerdas consistente, además de ser invariante modular, debe poseer interacciones bien definidas: las EPOs deben

- Cerrar ($\Delta: NS \times NS = NS = R \times R$, $NS \times R = R = R \times NS$;
 $(-1)^F: + \times + = + = - \times -$, $+ \times - = - = - \times +$)

y

- ser univaluadas (P.ej., en $R_+ \times R_- = NS_-$ tenemos

$$\begin{aligned} &: e^{-\phi/2} e^{i/2 \varphi_0} e^{i/2 \varphi_1} \dots e^{i/2 \varphi_4} (z) : e^{-\phi/2} e^{i/2 \varphi_0} e^{i/2 \varphi_1} \dots e^{i/2 \varphi_3} e^{-i/2 \varphi_4} (0) : \\ &= \underbrace{z^{-1/4} z^{1/4} z^{-1/4} z^{1/4} z^{-1/4} z^{1/4}}_{\sqrt{z}} : e^{-\phi} e^{i\varphi_0} e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} e^{i\varphi_3} (0) : + \dots \end{aligned}$$

\sqrt{z} corte que debe ser compensado por corte en modos derechos

Lo mismo sucede en $R_+ \times NS_-$ y $R_- \times NS_-$, pero no en los demás productos.)

Las proyecciones G_{SO} que encontramos arriba dan lugar a 2 teorías que satisfacen estos requisitos:

- II B: incluir sectores con $(-1)^F = +1$, $(-1)^{\tilde{F}} = +1$,
es decir, $(NS_+, NS_+) \mid (R_+, R_+) \mid (R_+, NS_+) \mid (NS_+, R_+)$
 $m^2 = 0$: $\varphi \quad B_{(2)} \quad h_{\mu\nu} \mid C_{(0)} \quad C_{(2)} \quad C_{(4)}^+ \mid \chi_{NS}^1 \quad \lambda_S^1 \mid \chi_{NS}^2 \quad \lambda_S^2$
rep de $SO(8)$: $\underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35} \mid \underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35}_+ \mid \underline{56} \quad \underline{8}' \mid \underline{56} \quad \underline{8}'$

- II A: incluir sectores con $(-1)^F = +1$, $(-1)^{\tilde{F}} = \begin{cases} +1 & NS \\ -1 & R \end{cases}$,
es decir, $(NS_+, NS_+) \mid (R_+, R_-) \mid (R_+, NS_+) \mid (NS_+, R_-)$
 $m^2 = 0$: $\varphi \quad B_{(2)} \quad h_{\mu\nu} \mid C_{(1)} \quad C_{(3)} \mid \chi_{NS}^1 \quad \lambda_S^1 \mid \chi_{NS}^2 \quad \lambda_S^2$
rep de $SO(8)$: $\underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35} \mid \underline{8}_V \quad \underline{56}_6 \mid \underline{56} \quad \underline{8}' \mid \underline{56}' \quad \underline{8}$

¡Ninguna de estas 2 teorías tiene tachión! ✓

(\Rightarrow Fondo $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\Phi = \Phi_0$, $B_{(2)} = \dots = 0$ es estable.)

Ambas teorías incluyen bosones y fermiones ✓

Notar que paridad en espaciotiempo

$$P: X^i \rightarrow -X^i, \quad \psi^i \rightarrow -\psi^i \quad \forall i=1, \dots, 9$$

$$\Rightarrow \Gamma^i \rightarrow -\Gamma^i, \quad \Gamma \rightarrow -\Gamma \quad \text{y } \therefore \underline{8} \leftrightarrow \underline{8}', \quad \underline{56} \leftrightarrow \underline{56}'$$

de modo que IIA es invariante bajo P (no quiral)
 IIB no invariante bajo P (quiral)

(Vemos también que la proyección G_{50}

$$(-1)^F = (-1)^{\tilde{F}} = \begin{cases} +1 & \text{NS} \\ -1 & \text{R} \end{cases} \text{ da teoría equivalente a IIB,}$$

$$\text{y } (-1)^F = \begin{cases} +1 & \text{NS} \\ -1 & \text{R} \end{cases}, \quad (-1)^{\tilde{F}} = +1 \text{ es equivalente a IIA.}$$

118/05/06

Ambas teorías incluyen 2 gravitinos χ^1, χ^2 ,

con sus correspondientes invariancias de norma

$$\chi^A(x) \simeq \chi^A(x) + \partial_\mu \zeta^A(x) \quad A=1,2$$

↖ parámetro espinorial

que, por consistencia, deben reflejar simetrías de las teorías en conjunto.

↔ ¡ 2 supersimetrías locales en espaciotiempo!

Teorías con supersimetría $N=2$ en $D=10$

(por eso denominamos a estas teorías 'tipo II').

Las corrientes asociadas son

$$j_s(z) = e^{-\phi/2} \mathcal{J}_s(z) \quad h = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1 \quad \checkmark$$

$$\text{y } \tilde{j}_s(\bar{z}) = e^{-\tilde{\phi}/2} \tilde{\mathcal{J}}_s(\bar{z}) \quad \tilde{h} = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1, \quad \checkmark$$

y las cargas correspondientes

$$Q_s^1 \equiv Q_s \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} j_s(z), \quad Q_s^2 \equiv \tilde{Q}_s \equiv \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \tilde{j}_s(\bar{z})$$

transforman como espinores bajo $SO(9,1)$:

son 32 **supercargas** $\left\{ \begin{array}{l} \underline{16} + \underline{16}' \text{ en II A} \\ \underline{16} + \underline{16} \text{ en II B} \end{array} \right.$

que satisfacen **superalgebra** $\{Q, Q\} \sim P_\mu \Gamma^\mu$

y convierten $|bosón\rangle \leftrightarrow |fermión\rangle$

Se puede verificar que el espectro de ambas teorías es supersimétrico observando que

$$\int_{\text{tor}} \Psi_{(2)} = \frac{1}{2} \eta(\tau)^{-4} \left(\underbrace{\Theta_3(0|\tau)^4 - \Theta_4(0|\tau)^4 - \Theta_2(0|\tau)^4}_{=0 \text{ por identidad 'abstrusa' de Jacobi}} \pm \underbrace{\Theta_1(0|\tau)^4}_{=0 \text{ por modo cero } \int \Psi_0 = 0} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{T^2}^{(2)} = \sum_i \mathcal{M}_S^{(2)}(m_i^2) = 0$$

Es decir, después de proyección GSO, por cada bosón con masa m_i^2 existe un fermión con la misma masa:

$\alpha' m^2 =$	1	—	⋮	—	⋮
	$\frac{1}{2}$	////		////	
	0	—		—	
	$-\frac{1}{2}$	///		///	
		NS		R	

P.ej., con $m^2=0$ hay $\left. \begin{array}{l} 128 \text{ estados bosónicos} \\ 128 \text{ estados fermiónicos} \end{array} \right\} \underline{256} = 2^8$.

Multiplete de Supergravedad $N=2$ en $D=10$

Esto es justo como corresponde a representación no masiva de superálgebra $N=2$ en $D=10$: yendo al marco donde $k_m = (k, k, 0, 0, \dots)$ se puede ver que la mitad de las 32 supercargas aniquilan a los estados, y la otra mitad forman 8 pares de operadores de creación/aniquilación fermiónicos.

(En general, con n supercargas se obtiene rep. no masiva con $2^{n/4}$ estados, y rep. masiva con $2^{n/2}$ estados. [Ver p.ej. Polchinski Vol. II Apéndice B])

Existe otra manera de lograr invariancia modular: pidiéndola no para los modos izquierdos y derechos por separado, sino para su producto.

Esto da lugar a otras 2 teorías 'consistentes', que resultan de una proyección GSO diagonal:

- OB : Sectores con $\Delta = \tilde{\Delta}$, $(-1)^F = (-1)^{\tilde{F}}$

es decir, $(NS_+, NS_+) \mid (NS_-, NS_-) \mid (R_+, R_+) \mid (R_-, R_-)$

$m^2 \leq 0$: $\varphi, B_{(2)}, h_{\mu\nu} \mid \emptyset \mid C_{(0)}^-, C_{(2)}^-, C_{(4)}^+ \mid C_{(0)}^+, C_{(2)}^+, C_{(4)}^-$

rep de $so(d)$: $\underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35} \mid \underline{1} \mid \underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35}_+ \mid \underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35}_-$
($d=8 \text{ ó } 9$)

- OA : Sectores con $\Delta = \tilde{\Delta}$, $(-1)^F = \begin{cases} (-1)^{\tilde{F}} NS \\ -(-1)^{\tilde{F}} R \end{cases}$

es decir, $(NS_+, NS_+) \mid (NS_-, NS_-) \mid (R_+, R_-) \mid (R_-, R_+)$

$m^2 \leq 0$: $\varphi, B_{\mu\nu}, h_{\mu\nu} \mid \emptyset \mid C_{(1)}^-, C_{(3)}^- \mid C_{(1)}^+, C_{(3)}^+$

rep de $so(d)$: $\underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35} \mid \underline{1} \mid \underline{8}_v \quad \underline{56}_t \mid \underline{8}_v \quad \underline{56}_t$
($d=8 \text{ ó } 9$)

En estos casos la amplitud τ en un lazo involucra

$$\int_{\text{tor}} \psi, \tilde{\psi} \quad Z_{\text{tor}}(\tau) = \frac{1}{2} |\eta(\tau)|^{-8} \left(|\theta_3(0|\tau)|^8 + |\theta_4(0|\tau)|^8 + |\theta_2(0|\tau)|^8 \pm |\theta_1(0|\tau)|^8 \right)$$

que es $\neq 0$ (teoría evidentemente no es supersimétrica)
pero invariante modular.

En estas teorías \nexists fermiones, y espectro incluye taquión,
 \therefore parecen tan poco interesantes como cuerda bosónica.

Quizás estas teorías se vuelven estables en ciertos fondos no triviales [ver p.ej. Klebanov-Tseytlin hep-th/9811035].

Es posible entenderlas como proyecciones de IIB/A bajo número fermiónico en espaciotiempo $(-1)^F$ [Bergman, Gaberdiel 9906055].

se ha postulado además que OA es equivalente ('dual') a IIA en cierto fondo no supersimétrico

[Costa-Gutperle, 0012072], y que también indica decaimiento OA en fondo plano \rightarrow IIA en fondo plano

[Gutperle-Strominger, 0104136; Adams-Polchinski-Silverstein, 0108075]

¿Teorías con cuerdas abiertas? Recordar $C \rightarrow D$: teoría consistente incluye necesariamente cuerdas cerradas.

Hemos visto que invariancia modular requiere proyección GSO para sector de cuerdas cerradas.

Para tener interacciones bien definidas, sector de

Cuerdas abiertas debe incluir también proyección GSO:

$$\begin{array}{l}
 \text{--- I (abierto) : } \quad NS_+ \quad R_+ \quad \leftarrow \text{(elegimos } R_+ \text{ en vez de } \\
 \quad \quad \quad m^2=0 : \quad A_M \quad \eta_s \quad R_- \text{ por la conexión con} \\
 \text{rep de } SO(8) : \quad \underline{8}_v \quad \underline{8} \quad \text{II B que necesitaremos} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{más abajo)}
 \end{array}$$

$16 = 2^4$ estados \leftrightarrow rep no masiva de SUSY $N=1$ en $D=10$

\therefore sector de cuerdas cerradas debe poseer solo SUSY $N=1$, y en particular, 1 solo gravitino.

La única manera de proyectar IIA ó IIB a $N=1$ reteniendo invariancia bajo Poincaré es

$\text{II B} / \Omega$: cuerdas "II B" no orientadas \equiv I (cerrada)

$$\begin{array}{l}
 \uparrow \text{paridad en} \\
 \text{hoja de mundo : } z \leftrightarrow \bar{z} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n^{\tilde{}} \leftrightarrow \tilde{\alpha}_n^{\tilde{}} \\ \psi_r^{\tilde{}} \leftrightarrow \tilde{\psi}_r^{\tilde{}} \\ \sigma \leftrightarrow 2\pi - \sigma \\ \tilde{d}_s \leftrightarrow \tilde{\tilde{d}}_s \end{array} \right.
 \end{array}$$

Proyección retiene estados con $\Omega = +1$.

En (NS_+, NS_+) y (R_+, R_+) sobreviven

$$\varphi \quad \cancel{B_{\mu\nu}} \quad h_{\mu\nu} \quad \cancel{C_{(0)}} \quad C_{(2)} \quad \cancel{C_{(4)}^+}$$

Sobrevive además combinación lineal $(NS_+, R_+) + (R_+, NS_+)$:

$$\lambda_{s'} \equiv \lambda_{s'}^1 + \lambda_{s'}^2 \quad \chi_{\mu s} \equiv \chi_{\mu s}^1 + \chi_{\mu s}^2$$

En conjunto tenemos $\underline{1}$ $\underline{35}$ $\underline{28}$ $\underline{56}$ y $\underline{8}'$ de $so(8)$:

Multiplete de Supergravedad $N=1$ en $D=10$

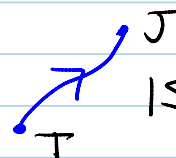
(64 bosones + 64 fermiones)

1 supercarga $Q_s \equiv Q_s^1 + Q_s^2$

Por consistencia cuerda abierta también debe ser no orientada

Recordar que en sector de cuerda abierta

$$\Omega: \begin{matrix} z \leftrightarrow -\bar{z} \\ \sigma \quad \pi-\sigma \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_n^{\mu} \leftrightarrow (-1)^n \alpha_n^{\mu} \\ \psi_r^{\mu} \leftrightarrow (-1)^r \psi_r^{\mu} \end{cases}$$

y al agregar índices de Chan-Paton,  $1 \leq I, J \leq N$,

tenemos $\Omega: |IJ\rangle \leftrightarrow |JI\rangle$, ó

$$\Omega: |IJ\rangle \leftrightarrow M_{JJ'} |J'I'\rangle M_{I'I}^{-1} \text{ con } M \equiv i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{N/2} \\ -\mathbb{1}_{N/2} & 0 \end{pmatrix},$$

a partir de lo cual obtenemos grupo de norma

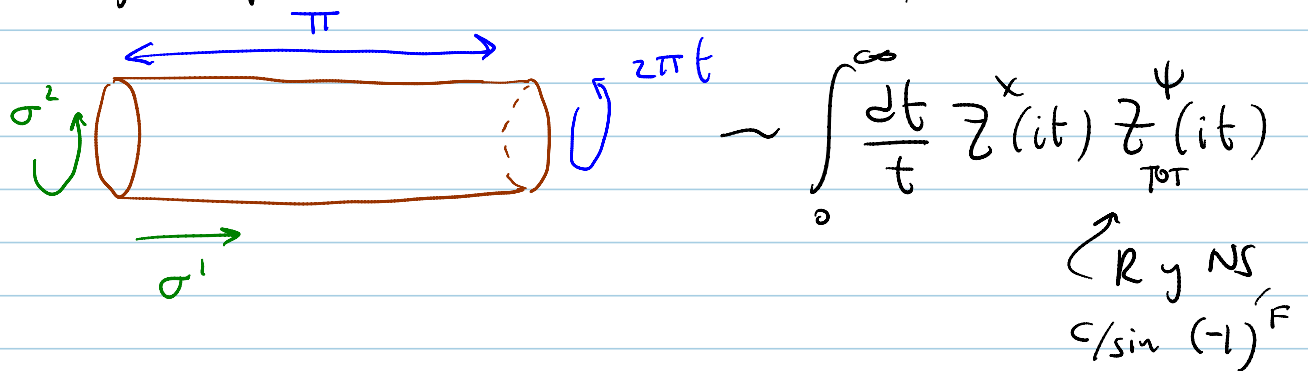
$SO(N)$ ó $Sp(N/2)$.

Pero de esta familia infinita de teorías

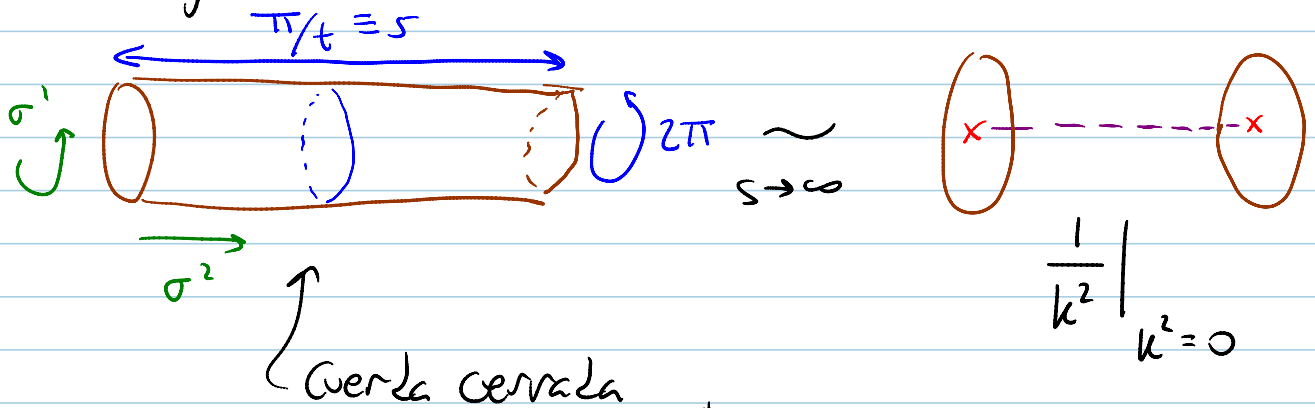
¡solo 1 resulta ser consistente!

Para cuerdas abiertas, el requisito de ausencia de renacuajos juega un papel análogo al de invariancia modular para cuerdas cerradas:

al igual que en la cuerda bosónica,



contiene divergencia en límite $t \rightarrow 0$, debido a renacuajo de estados no masivos de cuerda cerrada,



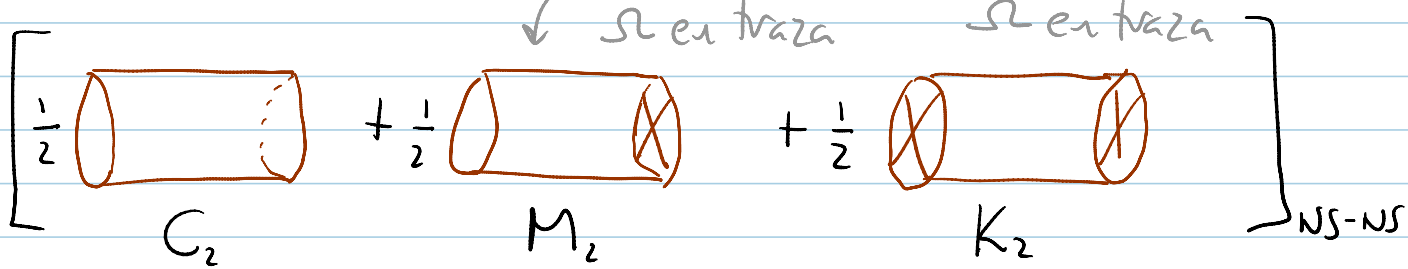
NS-NS : términos en $\text{Tr}_{TOT}^\Psi \sin(-1)^F$ en traza

R-R : términos en $\text{Tr}_{TOT}^\Psi \cos(-1)^F$ en traza

Esta divergencia se traduce en anomalías tanto en inv. superconforme (2-dim) como en inv. de norma (10-dim).

Sabemos que la existencia de un renacuajo (vértice de 1 pata en la acción efectiva) es una señal de que el fondo no resuelve las ecs. de mov., por lo que corrección al fondo que logre satisfacer ecs. de mov. eliminará renacuajo y divergencia. Pero en este caso, ecs. de mov. son inconsistentes y no tienen solución (p.ej., renacuajo RR se traduce en término $\mu \int d^{10}x C_{01\dots 9}$ en acción efectiva, cuya variación $\Rightarrow \mu = 0$), así que el renacuajo debe simplemente estar ausente — es decir, debe cancelarse de alguna manera.

Sorprendentemente, 'cilindro' con Ω en traza 'toro' con Ω en traza



$\left[\frac{1}{2} C_2 + \frac{1}{2} M_2 + \frac{1}{2} K_2 \right]_{NS-NS}$

$$= (N^2 \pm 2 \cdot 32N + 32^2) \frac{1}{8\pi (8\pi^2 \alpha')^5} \int_0^\infty ds [16 + O(e^{-s})]$$

\uparrow para $Sp(N/2)$
 $SO(N)$

[Ver Polchinski Vol. II, Sec. 10.8]

(El signo relativo aparece porque en el caso

$$SO(N) \text{ hay } \begin{cases} \frac{1}{2} N(N+1) \text{ estados con } \Omega = +1 \\ \frac{1}{2} N(N-1) \text{ estados con } \Omega = -1 \end{cases}$$

$\xrightarrow{+N}$ como factor total, mientras que en

$$Sp(N/2) \text{ hay } \begin{cases} \frac{1}{2} N(N-1) \text{ estados con } \Omega = +1 \\ \frac{1}{2} N(N+1) \text{ estados con } \Omega = -1 \end{cases}$$

$\xrightarrow{-N}$ como factor total.)

La contribución del sector $R-R$,

$$\left[\frac{1}{2} \text{ (cylinder)} + \frac{1}{2} \text{ (cylinder)} + \frac{1}{2} \text{ (cylinder)} \right]_{R-R}$$

tiene la misma magnitud pero el signo opuesto.

ii Ambos renacuajos se cancelan solo para $SO(32)!!$

(En la cuerda bosónica ocurre cancelación

similar para $SO(9192)$)

$\curvearrowright 2^{13}$

$\curvearrowright 2^5$

Solo teoría $SO(32)$ es consistente : teoría tipo I

127/05/06

Teorías Heteróticas

Aprovechando que los modos izquierdos y derechos de la cuerda cerrada son independientes, podemos usar

/ Modos Izquierdos de Cuerda Bosónica Orientada
 / Modos Derechos de Supercuerda Orientada

para construir teoría superconforme $(0,1)$, con

Campos	(c, \tilde{c})
$X^\mu(z); \tilde{X}^\mu(\bar{z}), \tilde{\Psi}^\mu(\bar{z}) \quad \mu=0, \dots, 9 \Rightarrow (10, 15)$	
espinores $\lambda^A(z) \quad A=1, \dots, 32 \Rightarrow (16, 0)$	
$b(z), c(z); \tilde{b}(\bar{z}), \tilde{c}(\bar{z}), \hat{\beta}(\bar{z}), \tilde{\gamma}(\bar{z}) \Rightarrow (-26, -15)$	
	$(0, 0)$ ✓

donde $\lambda^A(z) \xleftrightarrow{\text{Bosonización}} \chi^k(z) \quad k=10, \dots, 25.$

La acción y constricciones son

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \lambda^A \bar{\partial} \lambda^A + \tilde{\Psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{\Psi}_\mu \right)$$

$$T = -\frac{1}{\alpha'} \partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2} \partial \lambda^A \partial \lambda_A$$

$$\tilde{T} = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} \tilde{X}^\mu \bar{\partial} \tilde{X}_\mu - \frac{1}{2} \bar{\partial} \tilde{\Psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{\Psi}_\mu$$

$$\tilde{J} = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\Psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{X}_\mu$$

(Notar que λ^A y $\tilde{\psi}^m$ tienen la misma acción, pero diferentes constricciones.)

Simetría global en hoja de mundo es $SO(9,1) \times SO(32)$.

Notar que, a diferencia de la cuerda abierta con factores de Chan-Paton, obtenemos aquí simetría interna no abeliana con carga esparcida por toda la cuerda, no únicamente en los extremos.

La 'condición de borde' más general para λ^A es

$$\lambda^A(\sigma+2\pi, \sigma^2) = M^{AB} \lambda^B(\sigma^1, \sigma^2)$$

↑ matriz $O(32)$

Se conocen 9 elecciones distintas de M^{AB} y proyección GSO que dan lugar a teorías consistentes (con invariancia modular e interacciones bien definidas). De estas, solo 2 son supersimétricas. Las 7 restantes son análogas a teorías Tipo 0, excepto por una que no tiene taquión y posee grupo de norma $SO(16) \times SO(16)$. [Ver Polchinski Vol. II, Cap. 11]

① Teoría Heterótica $SO(32)$

Para $\tilde{\Psi}^{\omega}(\bar{z})$, imponemos $(-1)^{\tilde{F}} = +1$

\tilde{NS}	$\tilde{\Psi}_{-\frac{1}{2}}^{\omega}(0; k)_{\tilde{NS}}$	∞
\tilde{R}	$ \tilde{S}; k\rangle_{\tilde{R}}$	∞

estados con $m^2 = 0$

Para $\lambda^A(z)$ escogemos la misma periodicidad $\forall A$,

encontrando \therefore 2 sectores

\tilde{NS}	$M = -1$
\tilde{R}	$M = +1$

Definiendo un operador de número fermiónico F que incluya a todos los λ^A , imponemos $(-1)^F = +1$

Las constantes de orden en $L_0^{X, \lambda} + L_0^{b, c}$ son \therefore

\tilde{NS}	$8(-\frac{1}{24}) + 32(-\frac{1}{48}) = -1$
\tilde{R}	$8(-\frac{1}{24}) + 32(+\frac{1}{24}) = +1$

Los niveles izquierdos más bajos son \therefore

• Nivel $N=0$: $|0; k\rangle_{\tilde{NS}}$ $m^2 = -\frac{4}{\alpha'}$ Taquión

Tiene $(-1)^F = +1$ porque en este caso $\nexists \beta, \gamma$

PERO no se puede empatar con ningún nivel derecho.

• Nivel $N=1/2$: $\lambda_{-1/2}^A |0; k\rangle \quad m^2 = -2/\alpha'$

Tiene $(-1)^F = -1$ y es \therefore eliminado por proyección GSO

• Nivel $N=1$: $\alpha_{-1}^M |0; k\rangle_{NS} \quad \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B |0; k\rangle_{NS} \quad m^2 = 0$

rep $SO(8) \times SO(32)$: $(\underline{8}_v, \underline{1}) \quad (\underline{1}, \underline{496})$

Tienen $(-1)^F = +1$ ✓

$\begin{matrix} \nearrow \\ \frac{32 \times 31}{2} \end{matrix}$

rep. adjunta
de $SO(32)$

Es posible empatarlos con niveles derechos no masivos ✓

Al combinar con los modos derechos, vemos entonces que los campos sin masa de esta teoría son

$\left[(\underline{8}_v, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{496}) \right] (\underline{8}_v + \underline{8})$

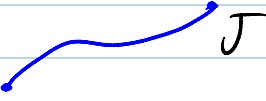
$\nwarrow \tilde{NS}_+ \quad \swarrow \tilde{R}_+$

$= (\underline{1}, \underline{1}) + (\underline{28}, \underline{1}) + (\underline{35}, \underline{1}) + (\underline{56}, \underline{1}) + (\underline{8}', \underline{1})$ Multiplete de $SU(8)$
 $N=1$

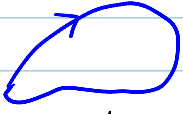
+ $(\underline{8}_v, \underline{496}) + (\underline{8}, \underline{496})$ Multiplete Vectorial (SYM)
en rep. adjunta de $SO(32)$

¡ Notar que estos son los mismos campos que la teoría Tipo I ! (\because ambas teorías tienen la misma acción a bajas energías.)

Pero niveles con $m^2 > 0$ son diferentes. En particular,

I:  2 cargas vectoriales 32

\Rightarrow todos los estados $|\dots; I, J\rangle$ pertenecen a reps. tensoriales de $so(32)$: $[2]$ y (2)
496 528

H0:  carga distribuida $\leftrightarrow \lambda_{-r}^A$ $r \in \mathbb{Z} + \Delta$
 $\lambda_{(2)}^A$

\Rightarrow se pueden encontrar estados en representaciones arbitrarias de $so(32)$

(p.ej., \exists espinores de $so(32)$ con $m^2 = +4/\alpha'$)

② Teoría Heterótica $E_8 \times E_8$

Dividimos $\lambda^A(z)$ en 2 grupos $\begin{cases} A = 1, \dots, 16 \\ A' = 17, \dots, 32 \end{cases}$

con 'condiciones de borde' independientes, y

consideramos 8 sectores $(\begin{smallmatrix} NS & NS' & \tilde{NS} \\ R & R' & \tilde{R} \end{smallmatrix})$ con

proyección GSO $(-1)^F = (-1)^{F'} = (-1)^{\tilde{F}} = 0$.

Los niveles derechos son como antes: $\underline{8}_v + \underline{8}$ con $m^2 = 0$.

Los niveles izquierdos son:

- $NS - NS'$ (constante de orden -1 , como antes)

• Nivel $N=1$ es el primero que puede empatarse ($m^2 = 0$):

$$\alpha_{-1}^N |0\rangle_{NS, NS'} \quad \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B |0\rangle_{NS, NS'} \quad \lambda_{-1/2}^{A'} \lambda_{-1/2}^{B'} |0\rangle_{NS, NS'}$$

$$(\underline{8}_v, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{120}, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{1}, \underline{120}) \text{ de } SO(8) \times SO(16) \times SO(16)$$

\uparrow $\frac{16 \times 15}{2}$ rep adjunta de $SO(16)$

- $R - R'$ (constante de orden $+1$, como antes)

No da estados sin masa

- R-NS' (constante de orden $8(-\frac{1}{24}) + 16(\frac{1}{24}) + 16(-\frac{1}{48}) = 0$)

• Nivel N=0 : $m^2 = 0$

De manera similar a lo que sucedió para el vacío R en la supercuerda, la existencia de los modos cero λ_0^A implica que estados en este sector son

$$|\sigma, 0; k\rangle_{R-NS'}, \quad \text{con } \sigma_\alpha = \pm \frac{1}{2} \quad \alpha = 1, \dots, 8$$

y que transforman como espinos de $SO(16)$

De estos $2^8 = 256$ estados, la mitad sobreviven

proyección GSO $(-1)^F = +1$: $2^8 = \underline{128} + \cancel{128}'$

así que estados físicos pertenecen a $(\underline{1}, \underline{128}, \underline{1})$.

- NS-R' De manera similar, $(\underline{1}, \underline{1}, \underline{128})$.

Combinando con $\underline{8}_V$ de modos derechos, se obtienen

campos de norma en $\underline{120} + \underline{128}$ de cada $SO(16)$

adjunta \uparrow \uparrow espinorial

$\underbrace{\hspace{10em}}$
rep. adjunta $\underline{248}$ de E_8 !

\therefore Grupo de Norma es $E_8 \times E_8$

Solo el subgrupo $SO(16) \times SO(16)$ es manifiesto en esta presentación de la teoría.

Los generadores adicionales que están en E_8 pero no en $SO(16)$ son espinores

$$\exp \left[i \sum_{\alpha=1}^8 \sigma_{\alpha} X^{\alpha+9}(\tau) \right], \quad \exp \left[i \sum_{\alpha=9}^{16} \sigma_{\alpha} X^{\alpha+9}(\tau) \right]$$

↑ bosonización de $\lambda^{2\alpha-1}, \lambda^{2\alpha}$ ↓

con $\sigma_{\alpha} = \pm 1/2$ (y número par de $-1/2$'s)

Los estados con $m^2 = 0$ son:

$$(\underline{1}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{28}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{35}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{56}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{8}', \underline{1}, \underline{1})$$

Multiplete de SUPER $N=1$

$$+ (\underline{8}_v, \underline{248}, \underline{1}) + (\underline{8}, \underline{248}, \underline{1}) + (\underline{8}_v, \underline{1}, \underline{248}) + (\underline{8}, \underline{1}, \underline{248})$$

Multiplete Vectorial (SYM) $E_8 \times E_8$