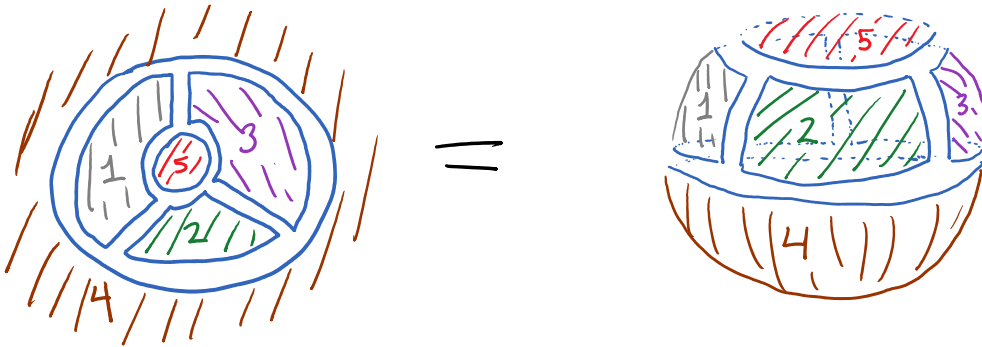
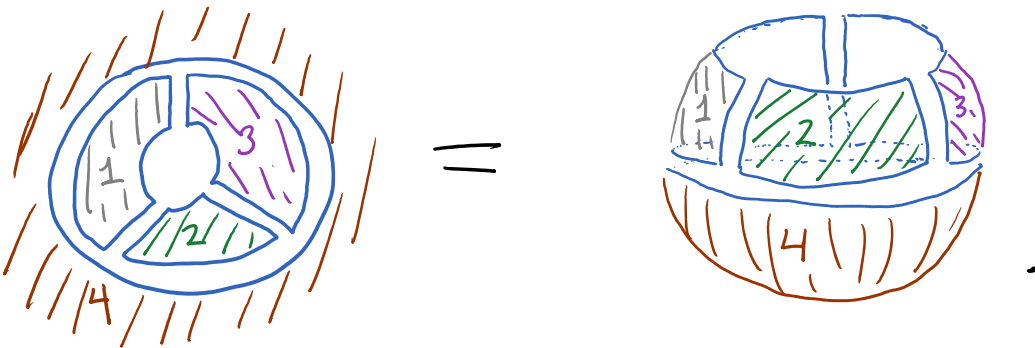


Faltan caras, es decir, que tienen bordes.

P.ej., los 2 primeros diagramas recién mencionados corresponden a



vs.



Cada reemplazo de 1 línea de gluón por 1 línea de quark agrega un borde a la superficie ( $\leftrightarrow$  desaparece una cara) y disminuye por 1 el exponente de  $N_c$ .

La dependencia entonces sigue siendo

$$N_c^{\chi} \lambda^{L-1},$$

donde ahora el número de Euler  $\chi \equiv V - A + C$  es

$$\chi = 2 - 2m - b.$$

número de  
manijas

número de bordes

Vemos entonces en total generalidad que los diagramas en los de quarks están suprimidos, a menos que en lugar del límite de 't Hooft,

$N_c \rightarrow \infty$  con  $\lambda$  y  $N_f$  fijos, tomamos el "límite de Veneziano",

$N_c \rightarrow \infty$  con  $\lambda$  fijo y  $N_f \ll N_c$ .

En términos de la hipotética teoría de cuerdas, la aparición de superficies con bordes indica que la inclusión de quarks, o más en general, de campos en la representación fundamental de  $SU(N_c)$ , corresponde a una teoría de cuerdas donde existen cuerdas abiertas además de cuerdas cerradas:

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} g_c^{-\chi} A_{m,b}(l_c)$$

cuerdas se pueden romper además de dividirse

$$= \text{verda cerrada} \quad \text{verda abierta} \quad \text{verda abierta} \quad + \dots$$

$$g_c^{-2} A_{0,0}(l_c) \quad g_c^{-1} A_{0,1}(l_c) \quad g_c^0 A_{0,2}(l_c)$$

$$g_c^0 A_{1,0}(l_c) \quad g_c^1 A_{1,1}(l_c)$$

(Es posible hacer otras generalizaciones. P.ej., si el grupo de norma es  $SO(N_c)$  en lugar de  $SU(N_c)$ , entonces los campos son reales, los propagadores no tienen flechas e incluyen

$$c \text{---} c' = c \text{---} c' + c \text{---} c'$$

y esto da lugar a superficies no orientables, como el plano proyectivo o la botella de Klein, características de una teoría de cuerdas no orientada.)

Hasta ahora solo hemos analizado explícitamente diagramas de vacío, pero podemos igualmente examinar el comportamiento de funciones de correlación de  $n$  puntos.

Podríamos calcular, como es habitual, correladores de los campos básicos  $A_\mu(x)$  y  $\psi(x)$ , pero los resultados son dependientes de nuestra elección de norma. Toda la información física puede extraerse de las funciones de correlación de operadores invariantes de norma. Estos son necesariamente operadores compuestos.

Las posibilidades más sencillas son del tipo

$$M(x) \propto \bar{\psi}(x)\psi(x), \bar{\psi}(x)D_\mu\psi(x), \bar{\psi}(x)F_{\mu\nu}D_\mu\psi(x), \text{ etc.},$$

que al actuar sobre el vacío crean mesones; o

$$G(x) \propto \text{Tr} [F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)], \text{Tr} [F_{\mu\nu}(x)D_\lambda F_{\rho\sigma}(x)], \text{ etc.},$$

que al actuar sobre el vacío crean gluones.

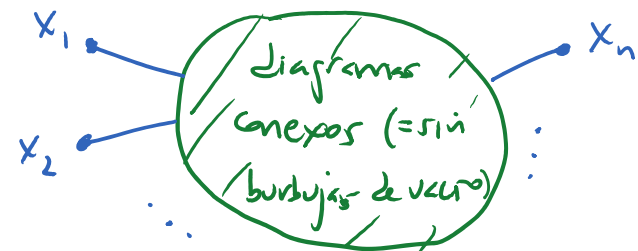
El operador local e invariante de norma más general puede escribirse como una suma sobre productos de

estos  $M(x)$ 's y  $G(x)$ 's.

Antes de proceder, vale la pena recordar que en cualquier teoría de campos (p.ej., escalar), al realizar el cálculo de correladores de alguno de los campos básicos  $\varphi(x)$ , resulta útil definir al campo renormalizado

$$\varphi_{\text{desnudo}}(x) \rightarrow \varphi_{\text{renorm}}(x) \equiv \frac{\varphi_{\text{desnudo}}(x)}{\sqrt{Z_\varphi}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{"constante de"} \\ \text{renormalización de} \\ \text{la función de onda"} \end{array}$$

de tal modo que  $Z_\varphi$  ayude a absorber las divergencias UV en los correladores,

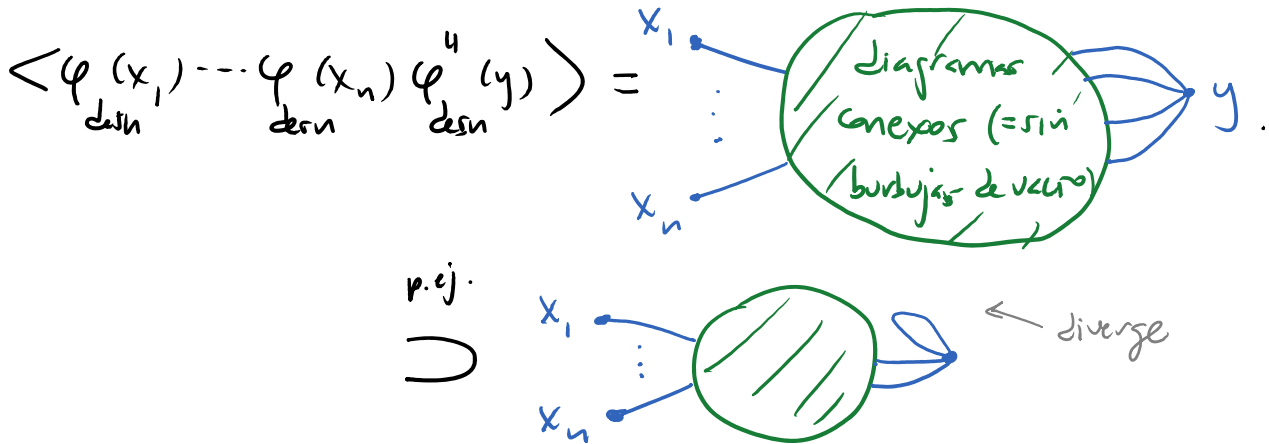
$$\langle 0 | T \{ \hat{\varphi}_{\text{desnudo}}(x_1) \dots \hat{\varphi}_{\text{desnudo}}(x_n) \} | 0 \rangle = \underbrace{\langle \varphi_{\text{desnudo}}(x_1) \dots \varphi_{\text{desnudo}}(x_n) \rangle}_{\text{Diagramas conexos (= sin burbujas de vacío)}}$$


Y de manera similar, al calcular correladores de operadores compuestos, como p.ej.,  $\varphi^4(x)$ , es útil definir una versión renormalizada del operador,

$$\varphi_{\text{ren}}^4(x) \equiv \frac{\varphi_{\text{desnudo}}^4(x)}{\sqrt{Z_{\varphi^4}}} \quad \left( \begin{array}{l} + \text{contribuciones de otros} \\ \text{operadores con igual o} \\ \text{menor dimensión que } \varphi^4 \end{array} \right)$$

$\swarrow \neq (Z_\varphi)^4$

para ayudar a absorber las divergencias UV adicionales en los correladores,



En otros palabras, se requiere cierto cuidado para que un operador como  $\varphi^4(x) \sim \lim_{y,z,w \rightarrow x} \varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)\varphi(w)$  esté bien definida [ver p.ej. Collins, capítulo 6]. Por esta razón, la dimensión  $\Delta$  (dependencia de la escala energética  $\mu$ ) de un operador compuesto en general NO puede inferirse ingenuamente a partir de la del campo básico.

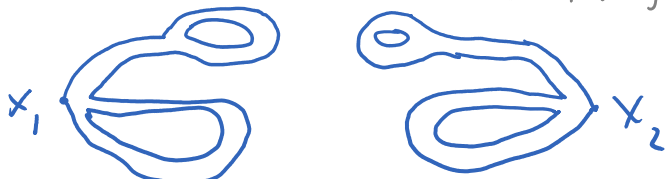
Consideremos ahora correladores de los operadores de glublos  $G(x)$ , como p.ej.

$$\text{Tr}(F^2(x)) = \underbrace{x \text{ [diagrama 1]} + x \text{ [diagrama 2]} + x \text{ [diagrama 3]}}_{\partial A \partial A + A A \partial A + A A A A}$$

$$= x \left[ \text{diagram 1} \right] + x \left[ \text{diagram 2} \right] + x \left[ \text{diagram 3} \right]$$

↑ enfocémonos en este pez para ser concreto

Podemos ver que  $\langle G(x_1) G(x_2) \rangle$  incluye diagramas disconexos (= "conexos" pero no completamente conexos) como



$$\ll \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^{3 \cdot 2} \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^{1 \cdot 2} N_c^{3 \cdot 2}$$

$$= N_c^2 \lambda^4$$

sin incluir posible factor por punto externo

y (completamente) conexos como



$$\ll \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^3 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^0 N_c^3 = N_c^0 \lambda^3$$

Es un hecho genérico que para  $N_c \gg 1$ , los diagramas conexos están suprimidos. La manera más fácil de deducir esto es notar que, si normalizáramos

$$G(x) \rightarrow \frac{N_c}{\lambda} G(x),$$

los puntos externos contribuyan justo el mismo

factor  $N_c/\lambda$  que los vértices de interacción, así que el conteo es idéntico al que vimos para amplitudes de vacío. Sabemos que cada "burbuja de vacío" plena es proporcional a  $N_c^2$ , así que la contribución dominante proviene de los diagramas con el máximo número de burbujas posible, es decir, del diagrama totalmente desconexo:

$$\begin{aligned}
 N_c^n \langle G_1(x_1) \cdots G_n(x_n) \rangle &= N_c^n \underbrace{\langle G_1(x_1) \rangle \cdots \langle G_n(x_n) \rangle}_{\propto N_c^{2n} \sim n \text{ burbujas de vacío}} \\
 &\quad \uparrow \text{ de factor de normalización } \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^n \\
 &+ N_c^n \underbrace{\langle G_1(x_1) G_2(x_2) \rangle_{\text{conexo}} \langle G_3(x_3) \rangle \cdots \langle G_n(x_n) \rangle}_{\propto N_c^{2(n-1)} \sim n-1 \text{ burbujas de vacío}} \\
 &+ \dots + N_c^n \underbrace{\langle G_1(x_1) G_2(x_2) \cdots G_n(x_n) \rangle_{\text{conexo}}}_{\propto N_c^2 \sim 1 \text{ burbujas de vacío}}.
 \end{aligned}$$

Este resultado se conoce como factorización para  $N_c$  grande. Aprendamos entonces que (SIN  $\frac{N_c}{\lambda}$  en frente)



$$\langle G_1(x_1) \cdots G_n(x_n) \rangle \simeq \langle G_1(x_1) \rangle \cdots \langle G_n(x_n) \rangle \propto N_c^n$$

y

$$\langle G_1(x_1) \cdots G_n(x_n) \rangle_{\text{conexo}} \propto N_c^{2-n}.$$

El caso  $n=2$  en particular nos dice que

$$\langle G(x_1)G(x_2) \rangle_{\text{conexo}} \propto N_c^0 \quad (\text{p.ej.}, x_1 \text{---} \text{---} x_2),$$

es decir, nuestros operadores están normalizados de modo tal que en el límite  $N_c \rightarrow \infty$  tienen una amplitud finita de crear una glubla a partir del vacío. Esta normalización resulta conveniente, y con ella tenemos

$$\langle G_1(x_1)G_2(x_2)G_3(x_3) \rangle_{\text{conexo}} \propto \frac{1}{N_c}, \quad \text{justo como a esta celda:}$$

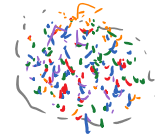
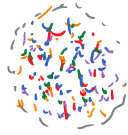
$$\text{---} \leftrightarrow \text{---} \propto g_c = 1/N_c$$

$$\langle G_1(x_1)G_2(x_2)G_3(x_3)G_4(x_4) \rangle_{\text{conexo}} \propto \frac{1}{N_c^2}, \quad \text{etc.},$$

lo cual significa físicamente que las glublas No interactúan entre sí en el límite  $N_c \rightarrow \infty$ , y cuando

$N_c \gg 1$  están débilmente acopladas entre sí,

con acoplamiento  $1/N_c$ . Es importante notar que esta notable simplificación del límite de  $N_c$  grande se presenta (o al menos, los diagramas sugieren que se



presentes) a pesar de que YM/QCD en sí mismos No esté débilmente acoplada (como vimos, la constante de acoplamiento es  $\lambda$ , que crece con la energía y se vuelve grande para  $\mu \approx \Lambda_{QCD}$ ), y los gluones sí interactúan fuertemente para formar a una glueball. Es solo la interacción entre distintos gluones que se vuelve débil.

16: 09/10/20

En otras palabras, aun cuando la teoría es interactuante, y p.ej. los operadores compuestos  $G(x)$  tienen en general una "dimensión anómala"  $\Delta - \Delta_0$  (es decir, una dependencia no obvia de la escala energética,  $\mu$ ), al orden más bajo en la expansión en  $1/N_c$  los  $G_2(x)$  se comportan como campos libres, y podemos reconocer limpiamente que

$$G(x) \text{ (p.ej. } \text{Tr}(F^2(x))) \iff \text{crea } \perp \text{ glueball}$$

$$G_1(x)G_2(x) \text{ (p.ej. } (\text{Tr}(F^2(x)))^2) \iff \text{crea } 2 \text{ glueballs, etc.}$$

tal como si  $G(x)$  fueran  $\phi(x)$  de Klein-Gordon  
 dimensión  $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$

Cuando  $N_c$  es grande pero finito, los operadores  $G(x)$  se comportan como campos débilmente interactuantes,

y no crean ya por tanto únicamente estados de 1 gluón (el operador que crea exactamente a 1 gluón sería del tipo  $G(x) + \frac{1}{N_c} G(x)G(x) + \dots$ ).

16: 01/09/16

De manera similar, es fácil mostrar que los operadores de mesones, con la normalización

$$M(x) \equiv \sqrt{N_c} \bar{\Psi}(x) \psi(x), \quad \sqrt{N_c} \bar{\Psi}(x) F_{\mu\nu}^a(x) D_\mu \psi(x), \text{ etc.},$$

↑ elegida para que  $\langle M(x_1) M(x_2) \rangle_{\text{conexo}} \sim N_c^0$

tienen correladores que también se factorizan para  $N_c$  grande,

$$\langle M_1(x_1) \dots M_n(x_n) \rangle = \underbrace{\langle M_1(x_1) \rangle \dots \langle M_n(x_n) \rangle}_{\sim N_c^{n/2}}$$

$$+ \underbrace{\langle M_1(x_1) M_2(x_2) \rangle_{\text{conexo}} \langle M_3(x_3) \rangle \dots \langle M_n(x_n) \rangle}_{N_c^{n/2-1}} + \dots,$$

$$\langle M_1(x_1) \dots M_n(x_n) \rangle_{\text{conexo}} \sim N_c^{1-\frac{n}{2}}.$$

En otras palabras, los mesones también se vuelven libres para  $N_c \rightarrow \infty$ , e interacción débilmente cuando  $N_c \gg 1$ ,

con acoplamiento  $\frac{1}{\sqrt{N_c}}$ . Justo como  
 cerda abierta:  $\} \leftrightarrow \} \propto \sqrt{N_c} \sim \frac{1}{\sqrt{N_c}}$

Se puede mostrar además que

$$\langle G_1(x_1) \dots G_n(x_n) M_1(y_1) \dots M_m(y_m) \rangle_{\text{Gnexo}} \propto N_c^{1-n-\frac{m}{2}},$$

lo cual implica que los mesones también interactúan débilmente con las gluóns.

A diferencia de las gluóns y mesones, que son creador por operadores con un número finito de campos básicos, los bariones son por definición estados ligados de  $N_c$  quarks con índices de color totalmente antisimetrizados, creador por operadores como

$$B(x) \equiv \epsilon^{c_1 c_2 \dots c_{N_c}} \psi_{c_1}(x) \psi_{c_2}(x) \dots \psi_{c_{N_c}}(x) \quad \begin{array}{l} \text{singlete} \\ \text{de color} \end{array}$$

(que son fermiónicos para  $N_c$  impar, bosónicos para  $N_c$  par).

Esto implica que los bariones se vuelven infinitamente pesados en el límite  $N_c \rightarrow \infty$ , con energía  $E \propto N_c$ , y solo son visibles entonces como solitones construidos a partir de los campos mesónicos. Su energía es  $E \propto (1/\sqrt{N_c})^2 \sim (\text{acoplamiento entre mesones})^{-2}$ , usual para solitones.

- Para entender mejor el régimen de acoplamiento fuerte y la conexión con una teoría de cuerdas, nos conviene cambiar a una prima todavía más lejana de QCD.

Mantendremos al grupo de norma  $SU(N_c)$ , y por tanto al **campo gluónico**  $(A_\mu^a(x))_{c\bar{c}'}$ ,  $c, \bar{c}' = 1, \dots, N_c$ .

No incluiremos a los quarks  $(\psi(x))_c$ ;

pero sí a algunos campos de materia inusual:

- + **6 campos escalares reales sin masa** en la representación adjunta de  $SU(N_c)$ ,

$$(\Phi^e(x))_{c\bar{c}'} = \Phi_{\mathbf{I}}^e(x) t_{c\bar{c}'}^{\mathbf{I}} \quad \text{on } \begin{array}{l} e=1,2,\dots,6 \\ \mathbf{I}=1,\dots,N_c^2-1 \end{array}$$

$\uparrow$   $c, \bar{c}' = 1, \dots, N_c$   $\uparrow$

(o, equivalentemente, 3 campos escalares complejos

$$X \equiv \Phi^1 + i\Phi^2, \quad Y \equiv \Phi^3 + i\Phi^4, \quad Z \equiv \Phi^5 + i\Phi^6)$$

- + **4 espinores de Weyl izquierdos sin masa** en la representación adjunta de  $SU(N_c)$ ,

$$(\psi^f(x))_{c\bar{c}'} = \psi_{\mathbf{I}}^f(x) t_{c\bar{c}'}^{\mathbf{I}} \quad \text{on } f=1,2,3,4.$$

Recordemos que un espinor de Dirac  $\psi$  en 3+1 dimensiones se puede descomponer en espinores de Weyl izquierdo (= con quiralidad negativa) y derecho (= con quiralidad positiva),

$$\psi = \psi_I + \psi_D$$

$$\psi_I \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi, \quad \psi_D \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi,$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \end{matrix} \quad (\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

que transforman por separado bajo el grupo de Lorentz restringido ( $\equiv$  rotaciones + empujones).

En la base de Weyl se tiene

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \sigma^\mu \equiv (1, \vec{\sigma}) \\ \bar{\sigma}^\mu \equiv (1, -\vec{\sigma}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Notación de

van der Waerden

y por tanto

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_I \\ \psi_D \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad \alpha = 1, 2.$$

Con estas definiciones, es fácil mostrar que  
 $\psi_{\text{I}}^* = (\lambda_{\alpha})^*$  transformas como  $i\sigma^2 \psi_{\text{D}} = \epsilon_{\alpha\beta} \bar{\chi}^{\beta}$   
 $\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}$   $\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(y en sentido inverso,  $\psi_{\text{D}}^* = (\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^* \equiv \chi^{\alpha}$  transformas igual que  $i\sigma^2 \psi_{\text{I}} \equiv \epsilon^{\alpha\beta} \lambda_{\beta}$ ), así que podemos reescribir cualquier teoría puramente en términos de espinores de Weyl izquierdos, o puramente en términos de espinores derechos. Esto es lo que estamos haciendo en la prima de QCD que nos interesa, donde nuestros 4 campos de Weyl izquierdos son equivalentes a 2 campos de Dirac.

Al tener 6 campos  $\Phi^e$  con las mismas propiedades, es natural exigir que nuestra teoría sea invariante bajo transformaciones que los mezclen,  $\Phi^e(x) \rightarrow R^{ee'} \Phi^{e'}(x)$ , donde  $R$  es una matriz de rotación  $\in \text{SO}(6)$ . Similarmemente, podemos exigir invariancia bajo rotaciones  $\text{SU}(4)$  de los 4 campos fermiónicos entre sí,  $\psi^f(x) \rightarrow R^{ff'} \psi^{f'}(x)$ .  
 Y aprovechando que (los 2 álgebras de Lie correspondientes a)

estos 2 grupos son isomorfos (as),  $so(6) \simeq su(4)$   
 (relación similar a  $so(3) \simeq su(2)$ ), podemos identificar  
 las rotaciones de los  $\Phi^e$  con las de los  $\psi^f$ , es decir,  
 exigir que nuestra teoría tenga a (una sola copia de)  
 $so(6) \simeq su(4)$  como simetría interna global, con  $\Phi^e$  en la  
 representación fundamental de  $so(6)$  ( $\leftrightarrow$  antisimétrica  $\Phi^{ff'}$   
 de  $su(4)$ ) y  $\psi^f$  en la rep espinorial de  $so(6)$  ( $\leftrightarrow$  fundamental  
 de  $su(4)$ ).

Para implementar la invariancia local  $SU(N_c)$ , usaremos  
 como es habitual a la derivada covariante  $D_\mu \equiv \partial_\mu + i A_\mu$ ,  
 donde es importante que  $A_\mu$  sea una matriz en la rep.  
 en la cual transforman nuestros campos de materia, la adjunta:

$$D_\mu \Phi^e \equiv (\partial_\mu + i t_{adj}^I A_\mu^I) \Phi_K^e t_{c\bar{c}'}^K = \partial_\mu \Phi^e + i [A_\mu, \Phi^e]$$

$(t_{adj}^I)_{JK} = i f^{IJK}$

$A_\mu^I \Phi_K^e i f^{IJK} t_{c\bar{c}'}^J$

y lo mismo para los fermiones,

$$D_\mu \psi^f = \partial_\mu \psi^f + i [A_\mu, \psi^f].$$



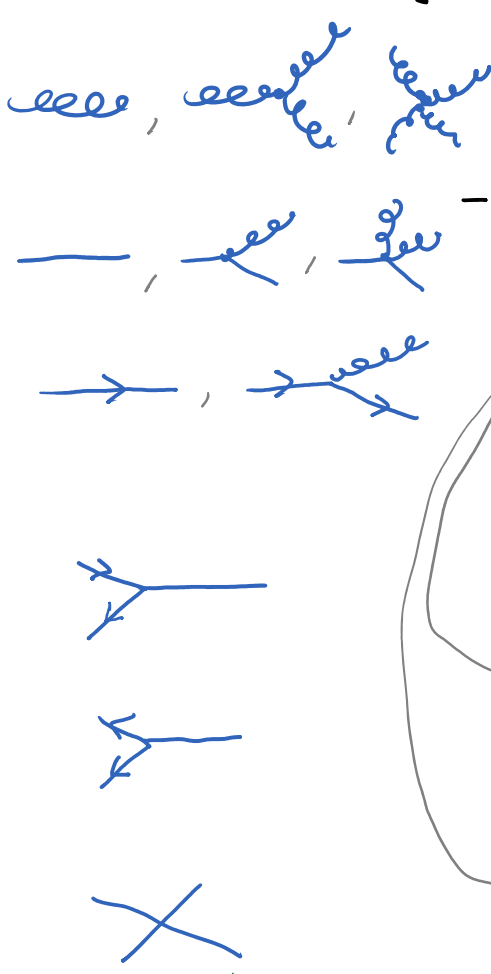
Apliquemos a los campos  $A_\mu, \Phi^e, \psi^f$  en vértices  
 ámbros y vértices elegidos en Wick's para preservar  
 las simetrías de interés, obteniendo la teoría conocida como

Yang-Mills con  $\mathcal{N}=4$  supersimetrías (SYM  $\mathcal{N}=4$ )  
 ó Yang-Mills máximamente supersimétrica (MSYM):

normalizado sin  $g_{YM}$  a dentro presente en YM y QED

$$\mathcal{L}_{MSYM} = \text{Tr} \left\{ -\frac{1}{2g_{YM}^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\Theta_{YM}}{8\pi^2} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \sum_e D_\mu \Phi^e D^\mu \Phi^e - \sum_f i \bar{\psi}^f \sigma^\mu D_\mu \psi^f \right.$$

$\tilde{F} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}$



-  $\sum_e D_\mu \Phi^e D^\mu \Phi^e - \sum_f i \bar{\psi}^f \sigma^\mu D_\mu \psi^f$

Veremos también rescalar  
 $\Phi^e \rightarrow \Phi^e/g_{YM}, \psi^f \rightarrow \psi^f/g_{YM}$

$$\left. \begin{aligned} &+ \sum_{e, f, f'} g_{YM} C_{ff'}^e \psi^f [\Phi^e, \psi^{f'}] \\ &+ \sum_{e, f, f'} g_{YM} \bar{C}_{ff'}^e \bar{\psi}^f [\Phi^e, \bar{\psi}^{f'}] \\ &+ \frac{g_{YM}^2}{2} \sum_{e, e'} [\Phi^e, \Phi^{e'}]^2 \end{aligned} \right\}$$

LF: 13/10/20

donde  $\theta_{YM}$  es el ángulo teta (zeta) o de instantones (que multiplica una derivada total, pero es relevante en configuraciones topológicamente no triviales), y los  $C_{ff'}^e, \bar{C}_{ff'}^e$  son coeficientes de Clebsch-Gordan, relacionados con las matrices de Dirac  $\gamma_{ff'}^e$  para  $SO(6) \simeq SU(4)$ , necesarios para formar un escalar bajo esta simetría interna.

Es importante no dejar que el nombre esotérico de SYM  $N=4$  ó MSYM nos haga perder de vista el hecho de que se trata simplemente de una teoría de campos más (con ciertas propiedades especiales que nos serán útiles y resaltaré en breve).

La manera más fácil/compacta de recordar su acción es notando que puede entenderse como un reescrito de Super-Yang-Mills con supersimetría  $N=1$  (SYM  $N=1$ ) en  $d+1$  dimensiones

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g_{YM}^2} \text{Tr} \left\{ \underbrace{F_{MN} F^{MN}}_{\substack{\uparrow \\ \text{gluón} \\ \text{(campo de norma)}}} - i \bar{\Psi} \Gamma^M D_M \underbrace{\Psi}_{\substack{\uparrow \\ \text{gluino} \\ \text{(normino)}}}} \right\},$$

$\downarrow$  rep. adjunta

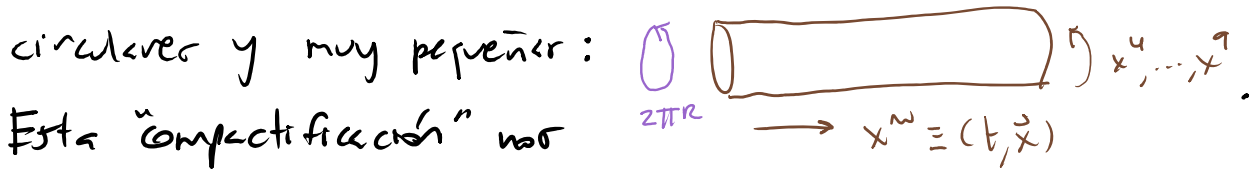
$M, N = 0, 1, \dots, d$ ,

donde  $\Gamma^M$  son las matrices de Dirac en  $9+1$  dim,

$\Psi$  es un espinor de Majorana-Weyl en  $9+1$  dim

(con  $2^{D/2+1-1-1} = 16$  componentes reales), y debemos suponer que las direcciones  $M = 4, 5, \dots, 9$  son

circulares y muy pequeñas:



1) Cada campo no escalar bajo  $SO(9,1)$  se descompone en

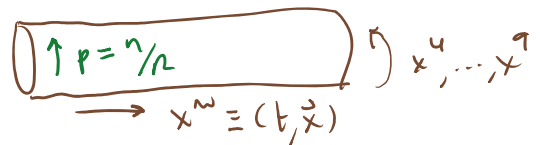
varios campos bajo el grupo de Lorentz  $SO(3,1)$ , relevante para un observador que solo detecta las direcciones grandes  $x^M$ . Concretamente,  $A_M = (A_\mu, \Phi^e)$ ,

y

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha^1 \\ \psi_\alpha^2 \\ \psi_\alpha^3 \\ \psi_\alpha^4 \end{pmatrix}$$

6 campos escalares  $\uparrow$   
 $\leftarrow$  4 espinores de Weyl izquierdos  $(\alpha=1,2)$

2) Cada uno de los campos resultantes se descompone en una torre infinita de modos de KK, en este caso, modos de Fourier a lo largo de las dimensiones ocultas:



P.ej,  $\Phi^e(x^M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_{(n)}^e(x^M) \exp[i p_n^{e'} x^{e'}]$  con  $p_n^{e'} \equiv \frac{n e'}{R}$ ,

cuya masa en 3+1 es  $m_n^2 \equiv -p_\mu p^\mu = -\cancel{p_\mu p^\mu} + \sum_{e'=1}^6 \left(\frac{n e'}{R}\right)^2$ .

Para  $R \rightarrow 0$ , solo los modos que son constantes a lo largo de las dimensiones compactas ( $p_{e'} = \frac{n e'}{R} = 0$ ) tienen masas finitas y sobreviven, hecho conocido como reducción dimensional.

En particular, dado que

$$F_{MN} \equiv \partial_M A_N - \partial_N A_M + i [A_M, A_N]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{\mu e} = \partial_\mu \Phi_e - \cancel{\partial_e A_\mu} + i [A_\mu, \Phi_e] = D_\mu \Phi_e \\ F_{ee'} = \cancel{\partial_e \Phi_{e'}} - \cancel{\partial_{e'} \Phi_e} + i [\Phi_e, \Phi_{e'}], \end{cases}$$

tenemos

$$\text{Tr}(F_{MN} F^{MN}) = \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + 2 \underbrace{\text{Tr}(F_{\mu e} F^{\mu e})}_{(\Phi_\mu \Phi_e)^2} + \underbrace{\text{Tr}(F_{ee'} F^{ee'})}_{[\Phi_e, \Phi_{e'}]^2}.$$

Los fermiones restantes también salen (y  $C_{ff'}^e \leftrightarrow \Gamma^e$ ).

El término de energía potencial en M5YM,

$$- \sum_{e, e'} \text{Tr}([\Phi_e, \Phi_{e'}][\Phi^e, \Phi^{e'}]),$$