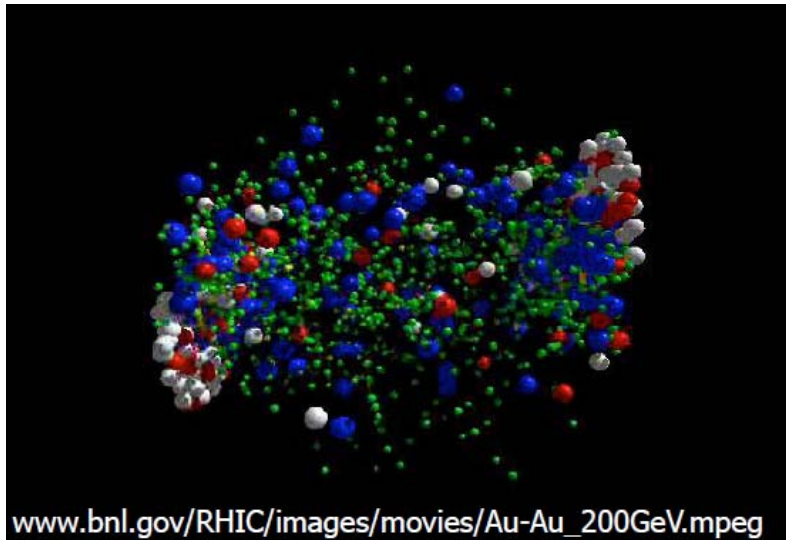


y después del choque los detectores registran miles de hadrones, leptones, etc. (alrededor de 5,000 en RHIC, y 12,000 en LHC).



Las mediciones permiten deducir que en una etapa intermedia se logran densidades de energía suficientemente altas para alcanzar el desconfinamiento ( $\sim 5 \text{ GeV}/\text{fm}^3$  en RHIC,  $\sim 15 \text{ GeV}/\text{fm}^3$  en LHC), de modo que durante un tiempo muy breve ( $\sim 10^{-22} \text{ s}$ ) y en una región espacial muy pequeña ( $\sim 10^{-14} \text{ m}$ ) se tiene un plasma de quarks y gluones, a una temperatura  $T \sim (1-2)T_c$  en RHIC, y un poco más alta en LHC (donde quizás eventualmente se alcance  $T \sim 5T_c$ ).

Después de su producción y thermalización inicial, el QGP se expande rápidamente y se enfría hasta  $T \sim T_c$ , como resultado de lo cual "hadroniza".

L9: 01/10/20

El estudio de esta nueva fase de la materia es interesante porque nos enseña más sobre las propiedades de QCD, y también porque representa el estado primordial de la materia en el universo, alrededor de  $10^{-12}$  segundos después del Big Bang.

Diversas mediciones experimentales (p.ej., la pérdida significativa de energía de quarks pesados en el plasma) indican que, contrario a lo que muchos esperaban, el QGP producido en RHIC y LHC está fuertemente acoplado (como de hecho parece lógico, dado que  $T \sim T_c \sim \Lambda_{\text{QCD}}$ ).

En resumen, hemos visto que QCD es una teoría de norma no abeliana que en muchas situaciones de interés está fuertemente acoplada. (En el contexto de física más allá del Modelo Estándar se pueden encontrar otros ejemplos, como las teorías de "technicolor" que intentan proveer una alternativa al Higgs.)

L4: 25/08/16

En este régimen, la expansión perturbativa es inútil.

Los cálculos en la red (euclidianos) son útiles para

determinar propiedades estáticas (p.ej., el espectro de hadrones, la entropía del QGP sin número bariónico neto); pero No dinámicas (p.ej., amplitudes de dispersión, o la viscosidad del QGP). Para estos últimos casos podemos intentar formular modelos fenomenológicos ("adivinar y cruzar los dedos"-p.ej., hacer cálculos perturbativos), o cambiarnos a alguna teoría distinta (pero, esperamos, similar), un modelo de juguete, donde de algún modo sí podemos hacer cálculos no perturbativos de primeros principios.

Los 2 enfoques pueden ser informativos, y en cierta manera, complementarios. En este curso nos interesa por supuesto el segundo camino: utilizando a la correspondencia norma-gravedad, estudiaremos a algunas primas de QCD que son interesantes en sí mismas desde el punto de vista teórico, y en algunos casos constituyen modelos de juguete de QCD que, como veremos, ya nos han enseñado varias lecciones cualitativas (e incluso semicuantitativas) sobre la interacción fuerte.

## \* ALGUNAS PRIMAS DE QCD

- La simplificación más obvia es considerar a 'QCD' SIN quarks ( $N_s=0$ ), es decir, a Yang-Mills con grupo de norma  $SU(3)$ . Esta es una teoría interesante donde todavía se tiene libertad asintótica y confinamiento. Desafortunadamente, entenderla resulta tan complicado como entender a QCD, porque no existe ningún parámetro pequeño con respecto al cual podemos hacer una expansión en serie de potencias.
- Otra generalización que a primera vista pareciera complicarnos la vida pero acaba siendo muy útil, es tomar a Yang-Mills (con o sin quarks) con grupo de norma  $SU(N_c > 3)$ , es decir, con un mayor número de colores. Esto sigue preservando la libertad asintótica y el confinamiento. Surge entonces una posibilidad interesante, sugerida por 't Hooft en 1974: podemos tomar

↙ acoplamiento de 't Hooft

$$N_c \rightarrow \infty \quad \text{con} \quad \lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N_c \text{ fija} \quad (\text{y } N_s \text{ fija}).$$

Si bien esto implica que  $g_{\text{YM}}^2 \rightarrow 0$ , la teoría no se vuelve libre — como veremos en breve, la amplitud para que un gluón con color dado interactúe tiende a cero, pero hay gluones de  $\mathcal{O}(N_c^2)$  colores distintos, y la amplitud de interactuar con algún de ellos es finita y  $\propto \lambda$ . En particular, la función beta sigue siendo finita (y negativa):

$$\frac{\partial \alpha_{\text{YM}}}{\partial(\ln \mu)} = -\frac{1}{3} (11N_c - 2N_s) \frac{\alpha_{\text{YM}}^2}{2\pi} \quad \text{y} \quad \alpha_{\text{YM}} = \frac{g_{\text{YM}}^2}{4\pi} = \frac{\lambda}{4\pi N_c}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial(\ln \mu)} = -\frac{11}{3} \frac{\lambda^2}{8\pi^2} + \dots,$$

así que aún en el límite  $N_c \rightarrow \infty$  tenemos todavía libertad asintótica y confinamiento.

Lo novedoso es que ahora sí tenemos a  $1/N_c$  como parámetro pequeño, así que al menos para  $N_c \gg 1$  podemos intentar describir

$$SU(N_c) \simeq SU(\infty) + \mathcal{O}(1/N_c^2)$$

¿Pero acaso  $3 \gg 1$ ?

Correcciones podrían ser pequeñas incluso para  $N_c=3$

Cálculos en QCD en la red (donde  $N_c$  se puede ajustar a 4, 5, 6, 7, ...) muestran que para algunas cantidades físicas,  $N_c = \infty$  de hecho no es una mala aproximación al caso de interés  $N_c = 3$  [ver p.ej. artículos de revisión 1307.3638, 0912.3339].

Dado que el número de grados de libertad de gluones escala como  $N_c^2$ , y el de quarks solo como  $N_c \cdot N_f$ , para  $N_c \gg N_f$  esperamos que los gluones dominen la dinámica, así que por un rato ignoraremos a los quarks, concentrándonos entonces en YM, en lugar de QCD.

Como vimos, bajo transformaciones  $SU(N_c)$  globales, el campo de norma transforma en la rep. adjunta,

$$[A_{\mu}^{(x)}]_{cc'} \rightarrow [A'_{\mu}{}^{(x)}]_{cc'} = \left[ \exp(i\theta^I t^I) \right]_{cc''} [A_{\mu}^{(x)}]_{c''c'''} \left[ \exp(-i\theta^J t^J) \right]_{c'''c'}$$

ignoramos término  $\partial_{\mu}$  porque  $\theta^I = \text{cte.}$  aquí

o lo que es lo mismo,

$$[A'_N(x)]_{c'c'} = \left[ \exp(i\theta^I t^I) \right]_{c''c''} \left[ \exp(-i\theta^J t^J) \right]_{c''c''}^T [A_N(x)]_{c''c''}.$$

Vemos entonces que el primer índice de  $[A_N]_{c'c'}$  transforma en la rep. fundamental ( $\underline{N}_c$ ), mientras que el segundo índice transforma en otra rep.

$N_c$ -dimensional cuyos generadores son  $-(t^I)^T = -(t^I)^*$ .

(Es fácil verificar que

$$[t^I, t^J] = i f^{IJK} t^K \iff [-(t^I)^T, -(t^J)^T] = i f^{IJK} (t^K)^T.)$$

Esta es la llamada representación antifundamental

( $\bar{N}_c$ ), y es justo la misma en que transformamos

$$\bar{\Psi}_c \equiv \Psi_c^\dagger \gamma^0 \rightarrow \Psi_{c'}^\dagger \gamma^0 \left[ \exp(-i\theta^I t^I) \right]_{c'c}.$$

↑ operador que aniquila antiquarks (y crea quarks)

Frecuentemente denotaremos entonces al campo gluónico

como  $[A_N(x)]_{c\bar{c}'}$ , para enfatizar que uno de los índices es de color y el otro de anticolor (es

por esto que hablamos de un gluón verde-anticolor, etc.).

Queremos ahora examinar en cierto detalle los factores de  $N_c$  y  $g_{YM}^2$  (o  $N_c$  y  $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c$ ) en la expansión perturbativa de YM.

Como vimos, en la normalización habitual ("canónica") para el campo gluónico, tenemos  $D_\mu \equiv \partial_\mu + i g_{YM} A_\mu$  y

$$S_{YM} \sim \int d^4x \left\{ \text{Tr}(\partial A \partial A) + g_{YM} \text{Tr}(A A \partial A) + g_{YM}^2 \text{Tr}(A A A A) \right\}.$$

Pero el análisis nos resultará más fácil si usamos

$$(A_\mu)_{\text{aquí}} \equiv g_{YM} (A_\mu)_{\text{usual}}, \quad \text{de modo que}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + i A_\mu \quad \text{y}$$

$$S_{YM} \sim \underbrace{\frac{1}{g_{YM}^2}}_{\equiv \frac{N_c}{\lambda}} \left\{ \text{Tr}(\partial A \partial A) + \text{Tr}(A A \partial A) + \text{Tr}(A A A A) \right\}.$$

trazos darán factores de  $N_c$

El propagador (función de 2 ptos.) toma entonces la forma

$$\langle A_{c\bar{c}'}^\mu(x) A_{d\bar{d}'}^\nu(0) \rangle = \begin{array}{c} \mu \\ c\bar{c}' \end{array} \begin{array}{c} \times \\ \bullet \end{array} \text{---} \begin{array}{c} \circ \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \nu \\ d\bar{d}' \end{array}$$



$\propto \frac{\lambda}{N_c} \frac{\eta^{\mu\nu}}{x^2} \left( \underbrace{\delta_{cd} \delta_{\bar{c}'\bar{d}'}}_{\text{dice que el gluón al propagarse}} - \frac{1}{N_c} \underbrace{\delta_{c\bar{c}'} \delta_{d\bar{d}'}}_{\text{presente porque}} \right)$

$\leftarrow S_{YM}^2$ , porque propagador es inverso de  $\mathcal{L}$  libre

Transformada de Fourier de  $1/p^2$

No cambia su color/anticolor

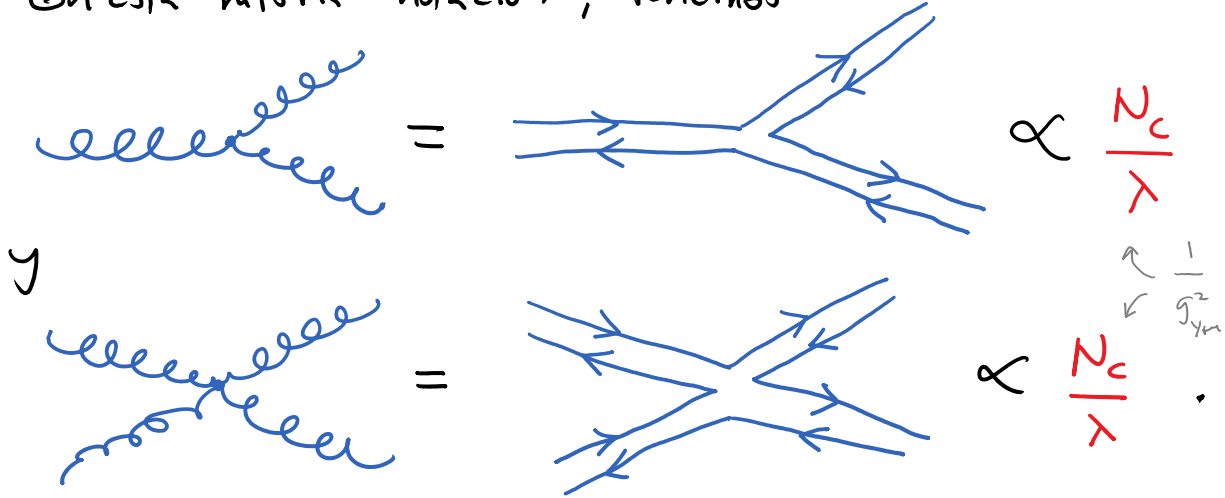
presente porque  $\text{Tr}(A_\mu) = A_\mu^I \text{Tr}(t^I) = 0$ ,  
dado que el grupo es  $SU(N_c)$  y no  $U(N_c)$

Una manera muy útil de seguirle la pista a esta estructura de color es en la notación de doble línea inventada por 't Hooft:

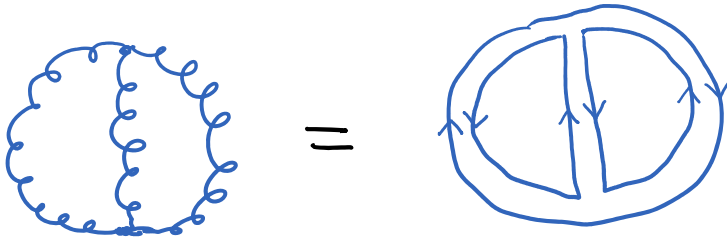
$c \bar{c}' \underbrace{\text{wavy line}}_{\sim \text{gluon}} \bar{d}' \equiv \underbrace{c \rightarrow d}_{\sim \text{quark}} - \frac{1}{N_c} \underbrace{c \rightarrow \bar{c}'}_{\sim \text{antiquark}} \bar{d}'$

En lo que sigue estudiaremos solo la contribución dominante a cada amplitud cuando  $N_c \gg 1$ , así que podemos ignorar el segundo término (aunque por supuesto tendríamos que incluirlo de vuelta si queremos calcular contribuciones subdominantes). En otras palabras, la diferencia entre  $SU(N_c)$  y  $U(N_c)$  se vuelve imperceptible cuando  $N_c \rightarrow \infty$ .

En esta misma notación, tenemos



Con estas reglas, podemos calcular la dependencia de  $N_c$  y  $\lambda$  de cualquier diagrama. Consideremos primero algunos de los diagramas que contribuyen a la amplitud de vacío (función de cero puntos, o "burbujas de vacío") :



$$= \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^3 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^2 (N_c)^3 = N_c^2 \lambda^2$$

por 3 propagadores  $\nearrow$   $\left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^3$   
 por 2 vértices  $\nearrow$   $\left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^2$   
 por 3 lazos "de quark":  
 elecciones de color que  
 quedan sin determinar,  
 donde debemos entonces sumar sobre  
 $N_c$  opciones ( $\leftrightarrow$  factor de  $N_c$  por trazo)

$$= \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^6 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^4 N_c^4 = N_c^2 \lambda^2$$

$\leftarrow$  omitiremos flechas

$$= \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^8 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^5 N_c^5 = N_c^2 \lambda^3$$

Todos estos son diagramas planares: pueden dibujarse en una hoja sin cruzar líneas. Para ellos, a  $L$  lazos, se obtiene  $\propto N_c^2 \lambda^{L-1}$ .

Existen también diagramas No planares, como p.ej.,

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} = \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^6 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^4 N_c^2 = N_c^0 \lambda^2.$$

Notar que esto es distinto a

$$\text{Diagram 3} = \text{Diagram 4} = \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^6 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^4 N_c^4 = N_c^2 \lambda^2,$$

que sí es planar — a pesar de que la diferencia reside solo en el flujo del color y por tanto no es visible en la notación estándar. Otro ejemplo es

$$\text{Diagram 5} \supset \text{Diagram 6} = \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^9 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^6 N_c^3 = N_c^0 \lambda^3,$$

vs.

$$\text{Diagram 7} \cup \text{Diagram 8} = \left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^9 \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^6 N_c^1 = N_c^{-2} \lambda^3.$$

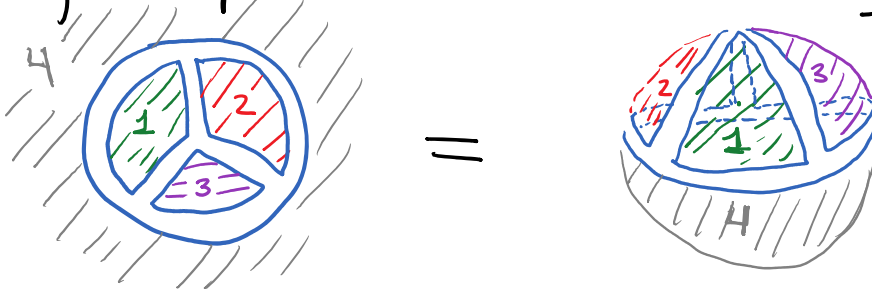
en ejemplos anteriores debíamos también haber indicado inclusión en lugar de igual

Todos estos diagramas están suprimidos por factores adicionales de  $1/N_c^2$  con respecto a los diagramas planares.

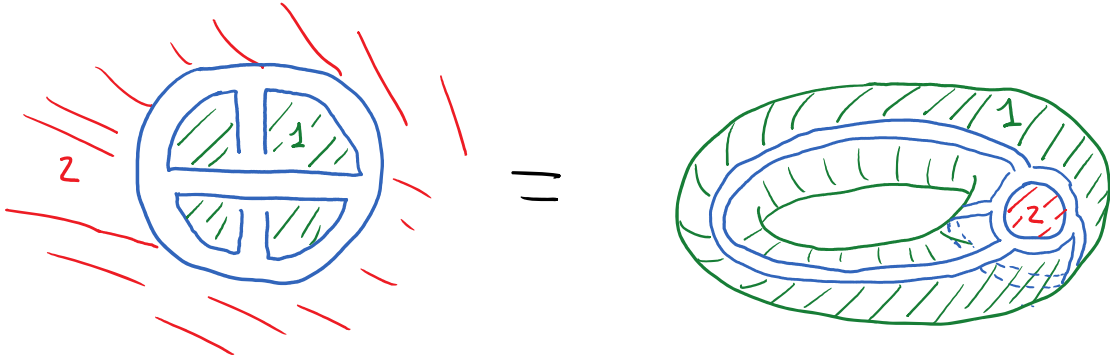
Aprendemos entonces que el límite de 't Hooft,  $N_c \rightarrow \infty$  con  $\lambda \equiv g_{YM}^2 N_c$  fija simplifica la teoría porque elimina todos los diagramas no planares. Por esta razón,  $N_c$  grande es sinónimo del "límite planar".

Sucede algo interesante si rellenamos los agujeros de los diagramas de doble línea, es decir, si interpretamos cada "lazo de quark" (incluyendo al lazo exterior, agregando el punto en infinito) como la cara de una superficie.

Los diagramas planares se convierten en esferas:



Los no planares se convierten en toros o superficies con más manijas:



Un diagrama con  $V$  vértices (= vértices del poliedro que representa a la superficie),  $A$  aristas (= aristas del poliedro asociado a la superficie) y  $C$  lazos "de quark" (= caras del mismo poliedro) es proporcional a

$$\left(\frac{\lambda}{N_c}\right)^A \left(\frac{N_c}{\lambda}\right)^V N_c^C = \underbrace{N_c^{V-A+C}}_{N_c^\chi} \lambda^{A-V},$$

donde  $\chi \equiv V - A + C$  es el número de Euler de la superficie asociada al diagrama.  $\chi$  es un invariante topológico de la superficie (NO depende del tipo de poliedro en que la representemos), que puede reescribirse como

$$\chi = 2 - 2m, \quad \text{con } m \text{ el número de manijas.}$$

Esto es otra manera de explicar por qué los

Diagramas no planares (que corresponden a  $m \geq 1$ )

están suprimidos.

LS: 06/10/20

En los diagramas de vacío que estamos considerando hasta ahora, todas las propagaciones representan a partículas virtuales, y podemos por tanto deducir que el número de lazos en un diagrama (es decir, de momentos sin determinar, que deben ser integrados) es

✓ vértices: delta de Dirac que conservan el momento

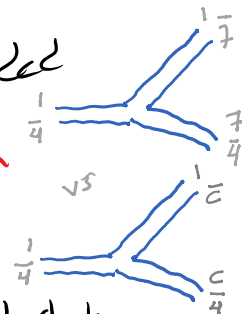
$$L = A - V + 1$$

propagaciones: ↗  
número de partículas virtuales  
(↔ integrales sobre momento)

↖ delta de Dirac que implementa conservación del momento total del diagrama (que en este caso es  $\delta^{(4)}(0) = VT$ )

La dependencia que tenemos del acoplamiento de 't Hooft es entonces  $\lambda^{A-V} = \lambda^{L-1}$ , justo como encontramos en los ejemplos. Así que en verdad

es  $\lambda$  y no  $g_{YM}^2$  quien controla la expansión perturbativa, que es válida solo para  $\lambda \ll 1$ .



Concluimos entonces que la expansión perturbativa para la amplitud de vacío tiene la forma

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N_c}\right)^{-x} \sum_{L=0}^{\infty} \lambda^{L-1} C_{m,L} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{N_c}\right)^{-x} A_m(\lambda),$$

$m$  superficies ("género")  
 $-x = 2m - 2$   
 $L = 0$  lazos  
 $C_{m,L}$  cte. independiente de  $\lambda$  y  $N_c$

donde cada  $A_m(\lambda)$  se calcula con diagramas dibujados sobre superficies (sin border) de distinto "género":

$$A = \underbrace{\text{diagrama esfera}}_{N_c^{-2} A_0(\lambda)} + \underbrace{\text{diagrama toro}}_{N_c^0 A_1(\lambda)} + \underbrace{\text{diagrama toro con 2 agujeros}}_{N_c^{-2} A_2(\lambda)} + \dots$$

Curiosamente, ¡¡ esto tiene exactamente la misma forma que la expansión perturbativa para la amplitud de vacío en una teoría de cuerdas cerradas con acoplamiento de cuerdas  $g_c = 1/N_c$  !! Como veremos,

$$A = \sum_{m=0}^{\infty} g_c^{-x} A_m(l_c)$$

longitud de cuerdas  
 diagramas de Feynman para cuerdas

$$= \underbrace{\text{diagrama esfera}}_{g_c^{-2} A_0(l_c)} + \underbrace{\text{diagrama toro}}_{g_c^0 A_1(l_c)} + \underbrace{\text{diagrama toro con 2 agujeros}}_{g_c^{-2} A_2(l_c)} + \dots$$

cuerdas se pueden partir en dos

LS: 30/02/16



Por supuesto, este análisis sencero sugiere una conexión con alguna teoría de cuerdas, puesto que en YM no tenemos verdaderas superficies.

- Para  $\lambda \ll 1$ , la expansión perturbativa es válida, y sabemos que dominan los diagramas con pocos vértices, que distan mucho de parecer superficies suaves porque tienen hoyos muy grandes.
- Para  $\lambda \gg 1$ , la expansión perturbativa es inútil, y NO sabemos bien qué pasa. Pero ingenuamente, esperamos que dominen los diagramas con muchos vértices, con lo cual uno podría especular que quizás los hoyos se acaban llenando para dar verdaderas superficies.

En caso de que esto fuera cierto, la expansión que se hace en la hipotética teoría de cuerdas en potencias de  $\alpha' \equiv l_c^2 \equiv \frac{1}{2\pi T_F}$  ↙ tensión de la cuerda podría estar asociada a la expansión en YM en potencias de  $1/\lambda$  (porque mayor  $\alpha' \leftrightarrow$  menor  $T_F \leftrightarrow$  hojas de mundo de la cuerda fluctúa más

↔ superficie es menos suave

↔ loops más grandes en diagramas YM ↔ menor  $\lambda$ ).

Vislumbremos entonces la intrigante posibilidad de que, al menos para  $N_c \gg 1$  y  $\lambda \gg 1$ , YM pueda quizás reformularse como una teoría de cuerdas cerradas débilmente acopladas, con acoplamiento  $g_c \sim 1/N_c$ .

Vale la pena resaltar que el argumento de 't Hooft que hemos presentado aplica no solo para YM, sino para cualquier teoría (confinante o no)

con campos puramente en la rep. adjunta de  $U(N_c)$  ó  $SU(N_c)$ , con acoplamientos que puedan ser eliminados de la acción salvo por un factor común al frente (que llamaremos  $\frac{1}{g_{YM}^2} \equiv N_c/\lambda$ ).

Por supuesto, incluso si la conexión superior con cuerdas no es solo una casualidad, el argumento no nos dice cuál es la teoría de cuerdas involucrada.

Como veremos más adelante, la correspondencia norma-gravedad hace todo esto muy preciso.

Habiendo ya analizado a YM para  $N_c$  grande, una inquietud natural es preguntar qué ocurre cuando agregamos quarks para volver a QCD. Sabemos que el lagrangiano correspondiente es

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\bar{\Psi}, \mathbb{D}_m \Psi) = \bar{\Psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu + iA_\mu) - m] \Psi, \quad \uparrow \text{ es una normalización}$$

así que si reescalamos

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi_{\text{nuevo}}(x) \equiv \sqrt{\frac{\lambda}{N_c}} \Psi_{\text{usual}}(x),$$

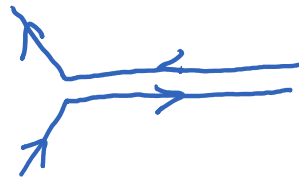
logramos tener

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \frac{N_c}{\lambda} \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \mathbb{D}_m - m) \Psi,$$

con lo cual el propagador del quark es de orden  $\lambda/N_c$ ,

tal como el del gluón,

y el vértice quark-gluón



es de orden  $N_c/\lambda$ , tal como los vértices cúbico y cuártico del gluón.

La única novedad es que ahora pueden aparecer en los diagramas propagadores de quark, que portan un solo índice de color.

P.ej., además de

$$\mathcal{L} \left( \left( \frac{\lambda}{N_c} \right)^9 \left( \frac{N_c}{\lambda} \right)^6 N_c^5 = N_c^2 \lambda^3 \right),$$

podemos tener

$$\mathcal{L} \left( \left( \frac{\lambda}{N_c} \right)^9 \left( \frac{N_c}{\lambda} \right)^6 N_c^4 = N_c^1 \lambda^3 \right),$$

$$\mathcal{L} \left( \left( \frac{\lambda}{N_c} \right)^9 \left( \frac{N_c}{\lambda} \right)^6 N_c^4 = N_c^1 \lambda^3 \right),$$

ó

$$\mathcal{L} \left( \left( \frac{\lambda}{N_c} \right)^9 \left( \frac{N_c}{\lambda} \right)^6 N_c^4 = N_c^1 \lambda^3 \right),$$

que son subdominantes por un factor de  $1/N_c$  con respecto al diagrama con puros gluones.

Maís en general, los diagramas con verdes líneas de parte corresponden a superficies a las que les