

Juntando esto con la relación entre  $z_{max}$  y  $l$  que dedujimos en la p. 418, obtenemos finalmente

$$\boxed{V_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^{-}(l) = -\frac{4\pi^2}{\Gamma(\frac{1}{4})^4} \frac{\sqrt{\lambda}}{l}} \quad (\text{y } \langle W[C] \rangle = \exp(-iT V_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^{-})).$$

← después de renormalizar

(Una sustracción similar resulta necesaria para obtener resultados finitos en el caso de otros lazos de Wilson. En [Drucker, Gross, Oguri, hep-th/9904191] se mostró que es posible entender esta sustracción a través de la adición de términos de frontera a la acción de la cuerda, en el espíritu de la renormalización holográfica. En conjunto, el lazo de Wilson se acaba calculando entonces no directamente con el área ( $S_{NG}$ ) de la hoja de mundo, sino con una cierta transformación de Legendre.)

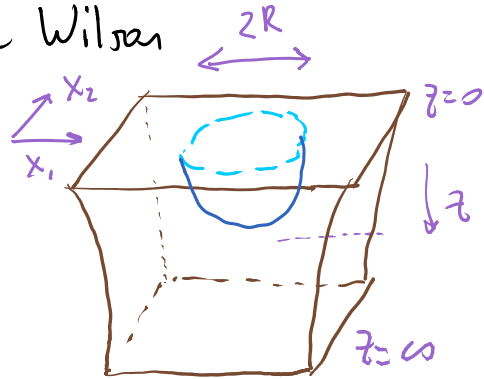
El resultado que arroja la correspondencia para el potencial quark-antiquark tiene la dependencia Coulombiana que esperamos por la invariancia conforme ✓, y predice que cuando  $\lambda \gg 1$  la dependencia perturbativa  $V_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^{-} \propto \lambda$  se reemplaza por  $\sqrt{\lambda}$ .

Esta dependencia es genérica para cualquier lazo de Wilson en el límite  $N_c, \lambda \gg 1$ , porque proviene directamente de la acción de la cuerda,  $\frac{1}{2\pi\alpha_c^2} \int d^2\sigma \sqrt{-\det g_{ab}} \propto \frac{l^2}{l_c^2} = \sqrt{\lambda}$ .

P.ej., en el caso de un lazo de Wilson circular de radio  $R$ , la solución

$$Z(p, \varphi) = \sqrt{R^2 - p^2}$$

↕ coords. polares en plano  $x^1-x^2$



fue encontrada por [Bershtein,

Gorod, Fichten, Malkhina; Drukker, Gross, Ojuri], y

conduce al resultado

$$\langle W_0 \rangle = e^{\sqrt{\lambda}}$$

(Por invariancia conforme, NO puede haber dependencia del radio  $R$  del círculo.)

Esta dependencia del acoplamiento parecía misteriosa hasta que [Erickson, Semenoff y Zarembo] mostraron que en un cálculo perturbativo, al sumar ciertos órdenes infinitos de diagramas de Feynman se obtiene

$$\langle W_0 \rangle \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda/4)^n}{n!(n+1)!} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}) \stackrel{\lambda \gg 1}{\approx} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{\sqrt{\lambda}}}{\lambda^{3/4}}$$

y conjeturaron que los demás diagramas no contribuyen.

Posteriormente [Drukker, Gross] fundamentaron mejor esta propuesta y la extendieron sustancialmente, llegando a argumentar/conjeturar que el cálculo del lazo de Wilson

circulo se puede realizar de manera exacta a través de un cierto modelo matricial cuántico, obteniendo

$$\langle W_0 \rangle = \frac{1}{N_c} L'_{N_c-1} \left( -\frac{\lambda}{4N_c} \right) e^{\lambda/8N_c}$$

polinomio de laguerre  $L'_n(x) \equiv \frac{1}{n!} e^x x^{-n} \left( \frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x} x^{n+m})$

Años después [Pestun] demostró (usando la técnica conocida como "localización") que la propuesta de [Drukker, Gross] es correcta, ¡¡ de modo que se tiene un resultado válido para

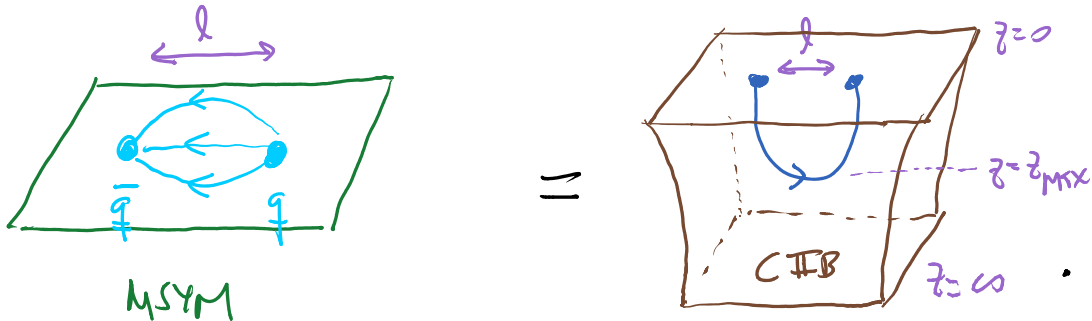
cualquier valor de  $\lambda$  y  $N_c$  !! Cuando  $N_c$  es grande se tiene la expansión   
 ↗ información exacta sobre gravedad cuántica!   
 ↘ ¿pero cómo interpretarla?

$$\langle W_0 \rangle = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}) + \frac{\lambda}{48N_c^2} I_2(\sqrt{\lambda}) + \frac{\lambda^2}{1280N_c^4} I_4(\sqrt{\lambda}) + \dots$$

con lo cual se recupera en particular la propuesta de [Erickson, Semenoff, Zarembo] cuando  $N_c \rightarrow \infty$ . ✓

Vale la pena resaltar que para el cálculo de lazo de Wilson resulta crucial que la teoría dual a M2YM no es simplemente una teoría de gravedad, sino específicamente una teoría de cuerdas. De la receta, y en particular, de nuestro cálculo del lazo de Wilson rectangular, queda claro

que los extremos de la cuerda son directamente duales al quark y el antiquark, mientras que el cuerpo de la cuerda representa el perfil del campo gluónico (y escalar) generado por ellos:



Esta es una implementación muy explícita de la idea de la "cuerda de QCD" como tubo de flujo del campo gluónico (pp. 55-56), en 3 grandes sorpresas:

- La cuerda vive en más dimensiones!
- La cuerda existe incluso en teorías que no confinan!

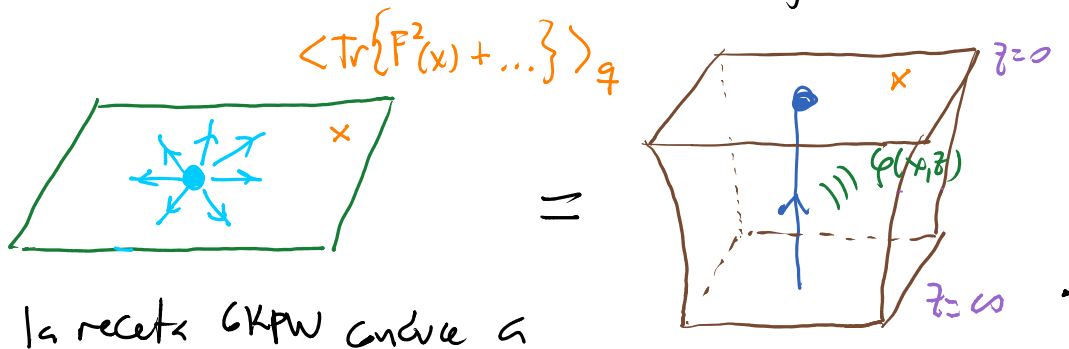
(Una cuerda en Minkowski inevitablemente da lugar a un potencial confinante. Hemos visto que, gracias a la manera en que está curvada AdS, a la cuerda le conviene energéticamente internarse más y más en el bulbo conforme sus extremos se separan, y es por ello que obtuvimos un potencial Coulombiano.)

- La cuerda no es gorda, sino infinitesimalmente delgada!

(Por la conexión UV/IR, la geometría del perfil del campo gravitacional que la cuerda representa se refleja en la profundidad radial  $z \sim d$  que la cuerda alcanza en sus varios puntos. El hecho de que la cuerda tenga la tendencia a descender / caer hacia el interior de AdS expresa entonces el hecho de que, en una CFT, el 'tubo' de flujo no se mantiene colimado, sino que tiende a esparcirse [García, Guijosa, Rulib].)

Es posible extraer el perfil detallado del campo gravitacional (+ escalar) que la cuerda codifica, a través del cálculo de funciones de 1 o más puntos de operadores locales  $\mathcal{O}(x)$  en presencia del quark y/o antiquark (es decir, con la inserción de la línea o el lazo de Wilson correspondiente).

Por ej., para el caso de un quark aislado y estático,



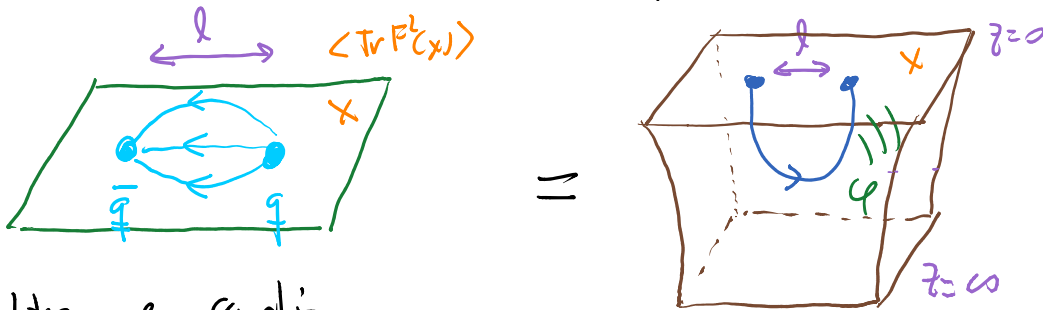
la receta GKPW conduce a

$$\langle \text{Tr} F^2(x) \rangle_q = \langle \text{Tr} F^2(x) \text{Tr} \left[ P e^{i \int_{c_0}^c \dot{x} \cdot A + \dots} \right] \rangle \sim \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^3} \partial_z \varphi(x, z)$$

a partir de lo cual se obtiene el resultado

$$\langle \text{Tr}\{F^2(t, \vec{x}) + \dots\} \rangle_{\bar{q}q} = \frac{\sqrt{\lambda}}{32\pi^2 |\vec{x}|^4}, \quad [\text{Danielsson, Kruczenski, Keski-Vakkuri}]$$

que tal como esperamos, es Coulombiano. En el caso de un par quark-antiquark estático,



se obtiene en cambio

$$\langle \text{Tr}\{F^2(t, \vec{x}) + \dots\} \rangle_{\bar{q}q} \Big|_{|\vec{x}| \gg l} = \frac{15 \Gamma(\frac{1}{4})^4}{8 (2\pi)^5} \frac{\sqrt{\lambda} l^3}{|\vec{x}|^7} \quad [\text{Gaiotto, Gaiotto}]$$

que difiere de la dependencia dipolar usual  $l^2/|\vec{x}|^6$  en electro (por efectos del límite plano, según lo vamos a entender más adelante [Klebanov, Maldacena, Thorne] ✓).

Se ha podido también estudiar el caso de un quark acelerado [Gaiotto, Gaiotto; Athanasiou, Liu, Rajappa, Wulkenhaar], e incluso con trayectoria arbitraria [Mikhailov; Chernicoff, Garcia, Gaiotto; Hotta, Imai, Mueller, Triantafyllopoulos; Chernicoff, Gaiotto, Pedraza], que resulta interesante porque incluye efectos


de representación glúonica (y escalar) en nuestra teoría de grupo fuertemente acoplada, y se encuentran varias características inesperadas [ver 1101.0872].

También es interesante preguntarse cuál es la descripción gravitacional de la obra de Wilson en representaciones de  $SU(N_c)$  distintas a la fundamental,  $\square = \underline{N_c}$  caracterizadas por algún diagrama de Young genérico

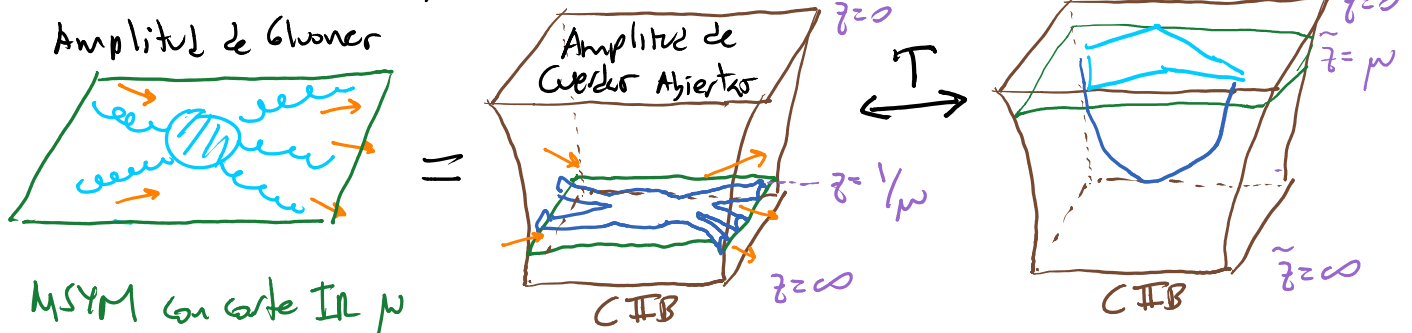
$\leq N_c - 1$  renglones   $n_1$  cajas  
 $n_2$   
... con  $k = n_1 + n_2 + \dots$  cajas en total.

La fuente es entender lo que llamaríamos un k-quark en la representación dada. Una correspondencia notable de la correspondencia es que CMB justamente contiene objetos con las propiedades adecuadas para ser dadas a estos k-quarks: ¡se trata de D3-branes y/o D5-branes con la unidad de flujo eléctrico! [Drukker, Fiol; Hartnoll, Prem Kumar; Yamaguchi; Gomis, Passarini]

Otro tema relacionado, en el que lamentablemente no tenemos tiempo de detenernos, es el cálculo de amplitudes de dispersión de gluones en N=4 SYM. Hemos dicho que en una

CFT, en sentido estricto, no existen partículas ni amplitudes de dispersión, porque no hay ninguna escala de masa, y los modos no masivos dan lugar a divergencias IR. Pero es posible introducir un corte IR  $\mu$  y pensar en amplitudes de gluones como paso intermedio para calcular observables que sí sean finitos cuando  $\mu \rightarrow 0$ . La manera de hacer esto en el lenguaje de gravedad fue descrita por [Alday, Maldacena]: un gluón  D3 corresponde a una cuerda en AdS con ambos extremos en  $\tilde{z} \rightarrow \infty$ , y regularizando con una

D3 de corte en  $\tilde{z} = 1/\mu$ , tenemos entonces



A través de una versión generalizada de dualidad  $T$  (válida solo para  $N_c \rightarrow \infty$  [Beukens, Maldacena]), esto se convierte en el cálculo de un lazo de Wilson poligonal y nulo [Alday, Maldacena], relación que se puede verificar en MSYM y ha resultado muy útil: revela simetrías escondidas y un nuevo entendimiento de las amplitudes.

[Van Raiben 1012.4001, Alday 1012.4003, Dixon 1105.0771, Arkani-Hamed 1312.2007]



### 3. ADS/CFT a Temperatura Finita

Para MSYM en Minkowski,  $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ , al encender una temperatura finita  $T$  (es decir, considerar ya no al vacío, sino un ensamble canónico, descrito por la matriz de densidad térmica  $\rho \propto e^{-\beta H}$ , con  $\beta \equiv T^{-1}$ ), obtenemos un plasma de gluones, escalares y gluinos (AGP), que como mencionamos al principio del curso, sirve como <sup>materia adjunta</sup> modelo de juguete para el plasma de quarks y gluones (QGP) del mundo real.

Este plasma es homogéneo e isotrópico, pero no invariante bajo empujones, y da lugar a un valor esperado para el tensor de energía-momento que, en un marco de referencia donde el plasma está en reposo, toma la forma

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle_T = \text{diag}(\epsilon, p, p, p).$$


$\epsilon$  ← densidad de energía  
 $p$  ← presión

La invariancia conforme implica que  $\epsilon = cT^4$  (por <sup>alguna constante</sup>

análisis dimensional), y además  $p = \varepsilon/3$ , para garantizar que  $\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle = 0$ . (Bajo una transformación de Weyl  $\delta g_{\mu\nu} = \delta\omega g_{\mu\nu}$ , el cambio en la función de partición es  $\delta Z = \delta g_{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g_{\mu\nu}} Z \propto \delta\omega g_{\mu\nu} \langle T^{\mu\nu} \rangle \propto \langle T_{\mu}^{\mu} \rangle$ , que debe anularse si la teoría es invariante de Weyl. Este es el caso si  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ , aunque más en general hay una anomalía.)

Según lo que vimos en el capítulo anterior, con esta información nos basta para determinar el fondo de gravedad dual al plasma de esta CFT: usando (p. 405)

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{4L^3}{16\pi G_N^{(5)}} g_{\mu\nu}^{(4)}(x) = \frac{N_c^2}{8\pi^2 L^3} 4L^3 g_{\mu\nu}^{(4)}(x) = \frac{N_c^2}{2\pi^2} g_{\mu\nu}^{(4)}(x),$$



escribimos (p. 404)  $ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left( g_{\mu\nu}(x, z) dx^\mu dx^\nu + dz^2 \right)$ ,

$$\text{con } g_{\mu\nu}(x, z) = \eta_{\mu\nu} + z^2 g_{\mu\nu}^{(2)}(x) + z^4 \frac{2\pi^2}{N_c^2} cT^4 \text{diag}(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\ + z^4 \log(z^2) h_{\mu\nu}^{(4)}(x) + z^6 g_{\mu\nu}^{(6)}(x) + \dots,$$

y determinamos los coeficientes  $g_{\mu\nu}^{(n \neq 4)}$  y  $h_{\mu\nu}^{(4)}$  resolviendo

la ecuación de Einstein (con constante cosmológica  $\Lambda = -6/L^2$ ).

El resultado es

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left[ - \frac{\left(1 - \frac{z^4}{4z_h^4}\right)^2}{\left(1 + \frac{z^4}{4z_h^4}\right)} dt^2 + \left(1 + \frac{z^4}{4z_h^4}\right) d\vec{x}^2 + dz^2 \right],$$

con

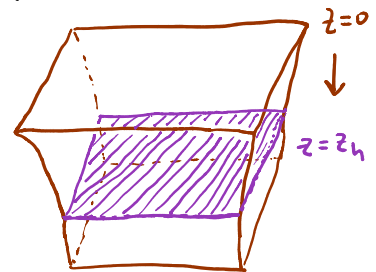
$$\frac{1}{4z_h^4} \equiv \frac{2\pi^2}{3N_c^2} c T^4.$$

← Nota que no hay término logarítmico  
( $h_{\mu\nu}^{(4)} = 0$  porque con  $J_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  no hay anomalía de Weyl)

Esta métrica tiene un horizonte de eventos en  $z = \sqrt{2} z_h$  (donde  $g_{tt} = 0$ ). Podemos ponerla en una forma más reconocible si redefinimos la coordenada radial

$$z \rightarrow z' \equiv \frac{z}{\sqrt{1 + \frac{z^4}{z_h^4}}}.$$

← No confundir de Fefferman-Graham



Omitiendo la prima en  $z'$ , esto conduce a

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left( - \left(1 - \frac{z^4}{z_h^4}\right) dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{\left(1 - \frac{z^4}{z_h^4}\right)} \right),$$

que es el agujero negro de Schwarzschild anti-de Sitter (Schw-AdS). Para ser más preciso, el horizonte tiene

topología  $\mathbb{R}^2 \times S^5$ , así que en realidad se trata de una 3-brana negra Schw-AdS, también conocida como el agujero negro plano Schw-AdS (que puede pensarse como el límite donde el agujero negro de Schw-AdS usual, con horizonte esférico  $S^3$ , se vuelve grande, de modo que no depende de las coordenadas  $\vec{x}$  en la unión de Poincaré).

Si hacemos una rotación de Wick en esta métrica,  $-dt^2 \rightarrow dt_E^2$  y examinamos la región cercana a  $z=z_h$ ,

$$z \equiv z_h - \frac{r^2}{4} \quad \text{con } r^2 \ll z_h,$$

(donde estamos definiendo  $r$  de tal modo que  $\frac{dz^2}{1-z^4/z_h^4} \propto dr^2$ ),

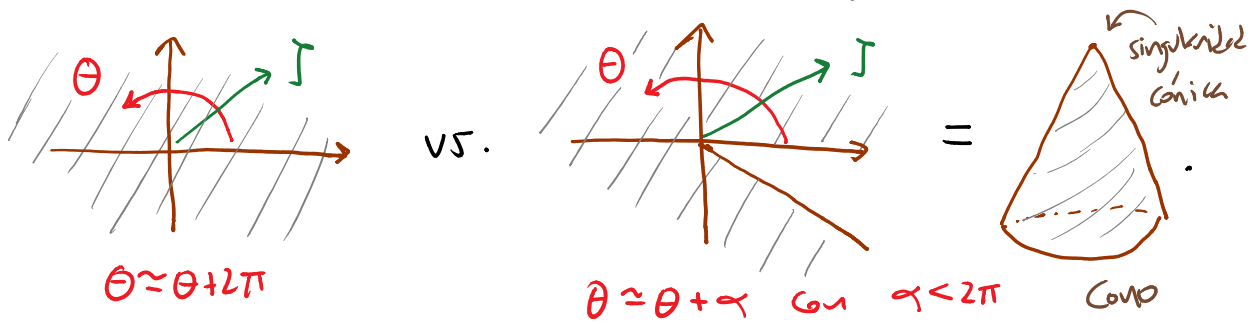
obtenemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{L^2}{z_h^2} \left[ \frac{r^2}{z_h} dt_E^2 + \frac{z_h}{4} dr^2 + d\vec{x}^2 \right] \\ &= \frac{L^2}{z_h^2} \left[ \frac{z_h}{4} \left( \frac{4r^2}{z_h} dt_E^2 + dr^2 \right) + d\vec{x}^2 \right]. \end{aligned}$$

geometría plana  $\rightarrow r^2 d\theta^2 + dr^2$  con  $\theta \equiv \frac{2t_E}{z_h}$ .

Vemos aquí que el lugar  $r=0$  ( $z=z_h$ ) donde estaba el

horizonte de la versión lorentziana de la geometría es ahora simplemente el origen de un sistema de coordenadas polares en  $\mathbb{R}^2$  ( $\times \mathbb{R}^3 \times S^5$ ). Pero para que esta métrica euclídea no sea singular en  $J=0$ , necesitamos entonces tener la identificación periódica  $\theta \simeq \theta + 2\pi$ , pero de otro modo habría un singulo de déficit (o superávit):



Estamos obligados entonces a identificar

$$t_E \simeq t_E + \pi z_h \quad ,$$

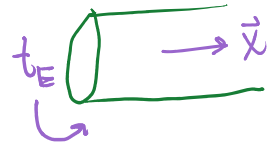
tanto en el lado de AdS como en la CFT. Esto último no nos sorprende: sabemos que en una teoría de campo  $(3+1)$ -dimensional, la función de partición térmica

$$Z = \text{Tr} \left( e^{-\beta H} \right) = \sum_i \langle E_i | e^{-\beta H} | E_i \rangle = \sum_i e^{-\beta E_i}$$

$$= \int \mathcal{D}\Phi(\vec{x}) \underbrace{\langle \Phi(\vec{x}) | e^{-\beta H} | \Phi(\vec{x}) \rangle}_{\substack{\text{base donde el campo tiene} \\ \text{un perfil definido (análoga a } |\vec{x}\rangle)} = \text{evolución durante intervalo temporal } -i\beta, \text{ de} \\ \text{estado inicial } |\Phi(\vec{x})\rangle \text{ al mismo estado final}$$

$$= \int \mathcal{D}\Phi(t_E, \vec{x}) e^{-S_E[\Phi]}$$

$t_E \approx t_E + \beta$



con  $\Phi(t_E + \beta, \vec{x}) = \pm \Phi(t_E, \vec{x})$  si  $\Phi$  es  $\begin{matrix} \text{bosónico} \\ \text{fermiónico} \end{matrix}$ .

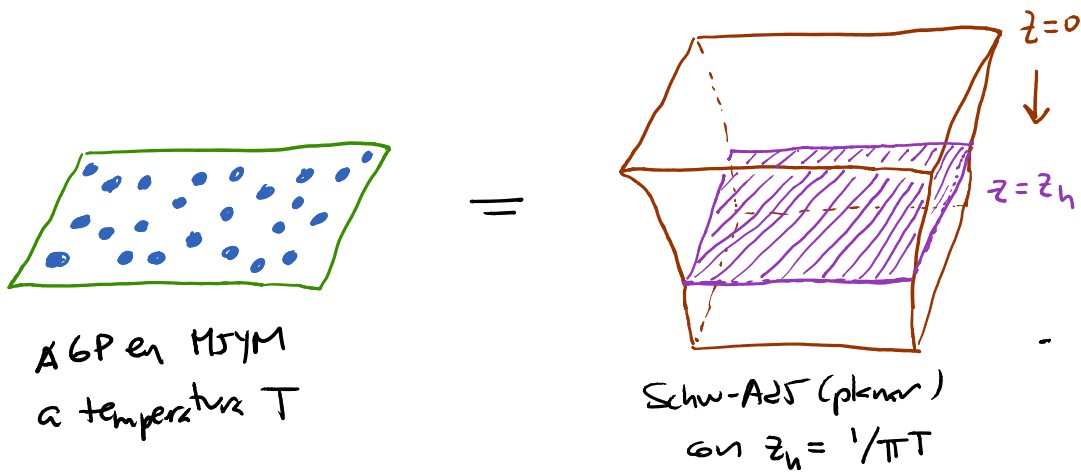
↑ [ver p.ej. Polchinski vol. 1, Apéndice A]

Así que el hecho de que  $t_E$  esté obligado a ser periódico es justo lo que esperamos como resultado de la temperatura finita. A partir de la periodicidad específica que arrojó el cálculo de arriba podemos deducir que  $\beta = \pi z_h$ .

En otras palabras, el anterior es un método (un atajo) para determinar la temperatura de Hawking ( $\leftrightarrow$  gravedad superficial  $K_S$ , p. 139) del agujero negro,

$$T = \frac{1}{\pi z_h}$$

que identificamos con la temperatura del plasma:



Pero antes (p. 431) habíamos dicho que

$$\frac{1}{4z_h^4} \equiv \frac{2\pi^2}{3N_c^2} c T^4,$$

así que podemos concluir que  $c = \frac{3}{8}\pi^2 N_c^2$ , es decir, en presencia del plasma tenemos

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \text{diag}(\varepsilon, p, p, p)$$

$$\text{con } \varepsilon = \frac{3\pi^2}{8} N_c^2 T^4, \quad p = \frac{\pi^2}{8} N_c^2 T^4.$$

Esto es entonces una predicción de la correspondencia por la densidad de energía del plasma térmico de MSYM en el régimen de acoplamiento fuerte ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) y muchos colores ( $N_c \rightarrow \infty$ ).

Vale la pena resaltar que llegamos exactamente a este mismo fondo dual (y predicción para  $\epsilon, p$ ) si regresamos antes del límite de Maldacena y excitamos ligeramente a las  $N_c$  D3-branas, sabiendo que ello equivale a considerar la

3-brana negra casi-extremal (p. 162) factor de ennegrecimiento (blackening factor)

$$ds^2 = H(r)^{-1/2} \left( -f(r) dt^2 + d\vec{x}^2 \right) + H(r)^{1/2} \left( \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_5^2 \right),$$

con  $H(r) \equiv 1 + J \left( \frac{L}{r} \right)^4$ ,  $f(r) \equiv 1 - \left( \frac{r_h}{r} \right)^4$ ,  
parámetros de no extremalidad, no confundir con  $J$  de pp. 409-10

$$L^4 \equiv r_h^4 \frac{J}{1-J^2}$$

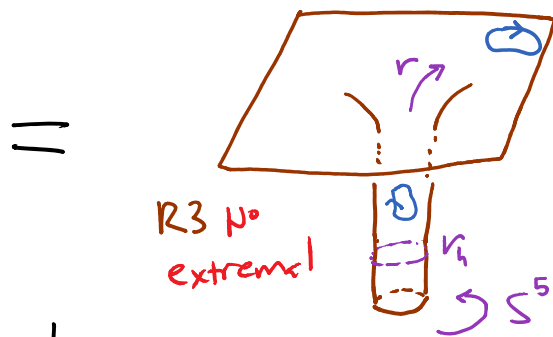
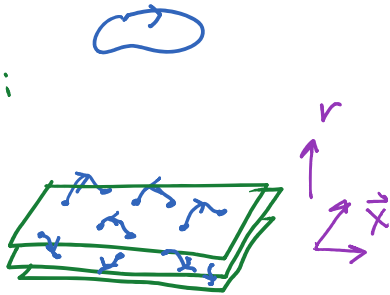
(relación para 3-brana negra no extremal general)

y  $L^4 \gg r_h^4$  ( $\Leftrightarrow 1-J^2 \ll J$ , condición de casi-extremalidad):

Espacio Minkowski

+  $N_c$  D3

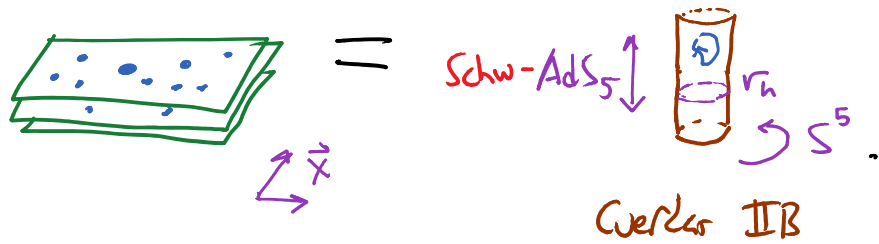
con  $\epsilon$  uniforme



↓ Límite de Maldacena  
 $r, r_h \ll L$  ( $J \rightarrow 1$ )



Plasma de  
 MSYM  $SU(N_c)$   
 en Minkowski  
 3+1



Además de la densidad de energía y la presión del XGP,  
 la correspondencia predice también la entropía, a partir de  
 la entropía de Bekenstein-Hawking del agujero negro

(p. 120),  $S = S_{BH} \equiv \frac{A_h}{4G_N^{(5)}}$  ← área del horizonte (contando  $S^5$ )  
 ←  $S^5$  YA está también en cuenta así:  $\frac{1}{G_N^{(5)}} = \frac{L^5 \Omega_5}{G_N^{(10)}}$

A partir de la métrica  $ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left( -f(z) dt^2 + d\vec{x}^2 + \frac{dz^2}{f(z)} \right)$   
 sabemos que  $\uparrow 1 - \frac{z^4}{z_h^4}$

$A_h = \int_{z=z_h} d^3x \sqrt{\gamma} = \int d^3x \sqrt{\left(\frac{L^2}{z_h^2}\right)^3} = \frac{L^3}{z_h^3} V_3$ ,  
 ← métrica inducida ← t fijo, z = z\_h      ←  $\int d^3x$

y de la p. 365 tenemos  $\frac{1}{4G_N^{(5)}} = \frac{N_c^2}{2\pi L^3}$ , así que

$S = \left(\frac{L^3}{z_h^3} V_3\right) \left(\frac{N_c^2}{2\pi L^3}\right) = \frac{\pi^2}{2} N_c^2 T^3 V_3$ .  
 ←  $\pi^{-3} T^{-3}$  (p. 434)

En otras palabras, la densidad de entropía del plasma es

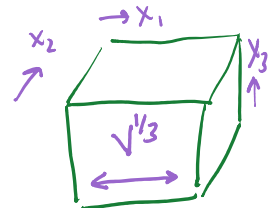
$$S = \frac{\pi^2}{2} N_c^2 T^3 .$$

Notamos que  $\epsilon, p, S$ , además de tener la dependencia correcta de la temperatura (determinada por análisis dimensional en la CFT), escala como  $N_c^2$ , es decir, como el número de grados de libertad asociados a los campos matriciales  $A_\mu, \Phi^e, \psi^f$  de  $\mathcal{N}=4$  SYM en el límite  $N_c \rightarrow \infty$ .

Es interesante comparar el coeficiente numérico con el resultado para  $\mathcal{N}=4$  SYM libre ( $\lambda=0, N_c \rightarrow \infty$ )

[ver Guber, Klebanov, Peet]. Para poder entrar limpiamente los modos con distinto momento, conviene considerar al plasma en una caja cúbica de lado  $(V_3)^{1/3}$ , de modo que los momentos están discretizados,

$$\vec{p} = \frac{2\pi \vec{n}}{(V_3)^{1/3}} \quad \text{con } \vec{n} \in \mathbb{Z}^3 .$$



Para partículas sin masa, la energía correspondiente es  $p^0 = |\vec{p}|$ ,

así que la función de partición en el caso de  $N_{bos}$  grados de libertad bosónicos y  $N_{fer}$  fermiónicos es

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} = \prod_{\vec{n}} \left( \frac{1}{1 - q^{|\vec{n}|}} \right)^{N_{bos}} \left( 1 + q^{|\vec{n}|} \right)^{N_{fer}},$$

$\swarrow 1/T$   
 $\underbrace{\text{si } |\vec{n}|=1}$

con  $q \equiv \exp(-\beta 2\pi/V_3^{1/3})$ .  $1 + q^{|\vec{n}|} + q^{2|\vec{n}|} + q^{3|\vec{n}|} + \dots$

En el caso de M5YM,

$$N_{fer} = N_{bos} = \underbrace{(2+6)}_{A_m} \underbrace{(N_c^2 - 1)}_{\Phi^e} \xrightarrow{N_c \rightarrow \infty} 8N_c^2.$$

Las fórmulas usuales de mecánica estadística

$$F = -T \ln Z, \quad E = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z, \quad S = (E - F)/T,$$

conducen entonces a

$$\begin{aligned} E &= \frac{\pi^2}{30} \left( N_{bos} + \frac{7}{8} N_{fer} \right) T^4 V_3 = \frac{\pi^2}{16} N_{bos} T^4 V_3 \\ &= \frac{\pi^2}{2} N_c^2 T^4 V_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y } S &= \frac{2\pi^2}{45} \left( N_{bos} + \frac{7}{8} N_{fer} \right) T^3 V_3 = \frac{\pi^2}{12} N_{bos} T^3 V_3 \\ &= \frac{2\pi^2}{3} N_c^2 T^3 V_3. \end{aligned}$$

Las densidades correspondientes son

$$\mathcal{E} = \frac{\pi^2}{2} N_c^2 T^4, \quad \mathcal{S} = \frac{2\pi^2}{3} N_c^2 T^3,$$

así que comparando con los resultados de gravedad que obtuvimos en las pp. 435 y 437 vemos que la predicción de la correspondencia es que

$$\mathcal{E}(\lambda=\infty) = \frac{3}{4} \mathcal{E}(\lambda=0), \quad \mathcal{S}(\lambda=\infty) = \frac{3}{4} \mathcal{S}(\lambda=0).$$

(Aquí hemos hecho la comparación entre AdS y la CFT en el ensemble canónico, igualando las temperaturas

$T_{\text{AdS}} = T_{\text{CFT}}$ . Alternativamente, podríamos hacerla en

el ensemble microcanónico, igualando las energías

$\mathcal{E}_{\text{AdS}} = \mathcal{E}_{\text{CFT}}$ , lo cual equivale a  $T_{\text{AdS}}^4 = \frac{4}{3} T_{\text{CFT}}^4$ , y

conduce a

$$\mathcal{S}(\lambda=\infty) = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} \mathcal{S}(\lambda=0),$$

que fue el resultado reportado en [Gubser, Klebanov, Peet].)

Una manera de poner a prueba esta predicción de que