

donde  $f^{JKL}$  <sup>← totalmente antisimétrico</sup> son las constantes de estructura de  $SU(3)$ , las cuales codifican la regla de multiplicación de las  $U \in SU(3)$  (recorden el caso de  $SU(2)$ :  $[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}] = i\epsilon^{ijk} \frac{\sigma^k}{2}$ )

Es decir, ↖ ctes. de estructura

$$A_{\mu}^I \rightarrow A'^I_{\mu} = A_{\mu}^I + f^{IJK} A_{\mu}^J \theta^K - \frac{1}{g_f} \partial_{\mu} \theta^I.$$

El último término nos es familiar (porque aparece ya en QED), y está ausente si  $\theta^I(x) = \text{cte}$ .

El segundo término claramente se debe a que nuestro grupo de norma es no abeliano, y nos dice que  $A_{\mu}^I$  ( $I=1, \dots, 8$ ) transforma en la representación adjunta de  $SU(3)$  ( $\equiv \underline{8}$ ).

En efecto, esta representación se define como

$$[t_{\text{adj}}^I]_{JK} \equiv i f^{JIK} \quad J, K = 1, \dots, 8,$$

así que un objeto  $A^I$  en ella transforma como

$$A^I \rightarrow A'^I = \left[ \exp(i\theta^L t_{\text{adj}}^L) \right]_{IJ} A^J$$

$$\cong A^I + i \theta^L \underbrace{[t_{\alpha\beta}^L]_{IJ}}_{if^{IJL} = -if^{I JL}} A^J \quad \checkmark$$

L3: 29/09/20

A partir de  $A_\mu(x)$  podemos definir también  
la intensidad de campo

$$F_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{ig_f} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_f \underbrace{[A_\mu, A_\nu]}_{\neq 0 \text{ en general}}$$

que se puede expresar por tanto como

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^I(x) t^I,$$

donde

$$F_{\mu\nu}^I(x) = \partial_\mu A_\nu^I - \partial_\nu A_\mu^I - g_f f^{IJK} A_\mu^J A_\nu^K.$$

L3: 23/08/16

Es fácil verificar que la intensidad de campo transforma de acuerdo con

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \exp(i\theta^I(x) t^I) F_{\mu\nu}(x) \exp(-i\theta^J(x) t^J),$$

o lo que es lo mismo,

$$F_{\mu\nu}^I \rightarrow F'^I_{\mu\nu} + f^{IJK} F_{\mu\nu}^J \theta^K + \mathcal{O}(\theta^2)$$

(representación adjunta), de modo que en el caso no abeliano NO es invariante de norma.

Tampoco lo es el escalar de Lorentz

$$F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \rightarrow \exp(i\theta^I(x) t^I) F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \exp(-i\theta^J(x) t^J),$$

pero SÍ su traza

$$\text{Tr}(F^2(x)) \rightarrow \text{Tr}(U(x) F^2(x) U^{-1}(x)) = \text{Tr}(F^2(x))$$

$$\underbrace{\equiv [F_{\mu\nu}(x)]_{cc'} [F^{\mu\nu}(x)]_{c'c}}_{\text{por ciclicidad de la traza}}$$

Considerando solo al campo gluónico, la teoría más sencilla que podemos escribir está dada entonces por la acción de Yang-Mills (-Shaw)

$$S_{\text{YM}}[A] \equiv \int d^4x \mathcal{L}_{\text{YM}}(A_\mu(x), \partial_\mu A_\nu(x)) = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[ F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \right] \right).$$

tomando normalización  
 $\text{Tr}(t^I t^J) = \frac{1}{2} \delta^{IJ}$   
 ↑ fundamental

Es importante notar que, a pesar de ser la generalización natural del lagrangiano de Maxwell  $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ,  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$  contiene términos cúbicos y cuárticos y NO es por tanto una teoría libre: a diferencia de los fotones, los

gluones asociados al campo de Yang-Mills  $A_\mu(x) \equiv A_\mu^I(x) t^I$  interactúan entre sí. Como hemos visto, esto es consecuencia directa de la existencia de la invariancia local no abeliana!

El lagrangiano para los quarks libres sería el de Dirac,

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\Psi, \bar{\Psi}, \partial_\mu \Psi) = \bar{\Psi}_c^{(s)} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m^{(s)}) \Psi_c^{(s)}$$

(que es invariante bajo transformaciones globales  $SU(3)$ ,  $\Theta^I(x) = \text{cte.}$ ), y al igual que en el caso abeliano, podemos acoplar la materia al campo de norma reemplazando  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ , procedimiento conocido como "acoplamiento mínimo".

En conjunto tenemos entonces la acción de QCD

$$S_{\text{QCD}} = \int d^4x \left[ \mathcal{L}_{\text{YM}}(A_\mu, \partial_\mu A_\nu) + \mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\Psi, \bar{\Psi}, D_\mu \Psi) \right],$$

es decir,

$$S_{\text{QCD}} = \int d^4x \left[ -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \bar{\Psi}^{(s)} (i\gamma^\mu D_\mu - m^{(s)}) \Psi^{(s)} \right]$$

o más explícitamente,

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig_f [A_\mu, A_\nu], \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + ig_f A_\mu(x)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} = & -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \right. \\ & + 2ig_f (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) [A^\mu, A^\nu] \\ & \left. - g_f^2 [A_\mu, A_\nu] [A^\mu, A^\nu] \right\} \\ & + \bar{\Psi}^{(s)} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m^{(s)}) \Psi^{(s)} - ig_f \bar{\Psi}^{(s)} \gamma^\mu A_\mu \Psi^{(s)}. \end{aligned}$$

Vale la pena resaltar que, al ser QCD una teoría no quiral, es decir, donde los espinores de Weyl con quiralidad izquierda/derecha

$$\Psi_{\frac{D}{I}}(x) \equiv \frac{1}{2} (1 \mp \gamma^5) \Psi(x), \quad \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

transforman de igual manera bajo el grupo de norma,

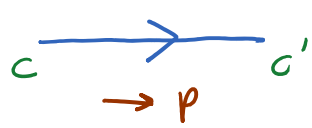
No hay ningún obstáculo para agregar términos de masa  $m\bar{\Psi}\Psi = m\bar{\Psi}_I\Psi_D + m\bar{\Psi}_D\Psi_I$ .

(A diferencia p.ej. de lo que sucede en la teoría electrodébil, que es una teoría quiral porque las transformaciones débiles  $SU(2)_I$  actúan sobre  $\Psi_I$  pero no sobre  $\Psi_D$ , y  $m \neq 0$  solo en presencia del Higgs.)

Ahora que conocemos la forma explícita de  $\mathcal{L}_{QCD}$ , confirmamos que  $g_f$  en verdad juega el papel de constante de acoplamiento fuerte: es la magnitud de la carga fuerte que controla la intensidad con que los quarks se acoplan a los gluones, y también la intensidad con que los gluones se acoplan entre sí (como ya habíamos anticipado). Este mismo número  $g_f$  es el que figura ya en la acción de Yang-Mills (cuando no tenemos todavía quarks), y por esta razón es habitual denotarlo igualmente como  $g_{YM}$ .

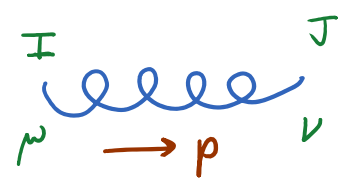
Las reglas de Feynman para QCD se pueden leer en forma detallada a partir de  $\mathcal{L}_{QCD}$ , y son (después de fijar la norma de manera covariante bajo Lorentz y en la "norma de Feynman"  $\xi=1$ ):

Propagador del quark



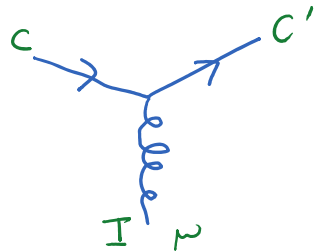
$$= \frac{i(-\gamma^\mu p_\mu + m) \delta_{cc'}}{p^2 + m^2}$$

Propagador del gluón



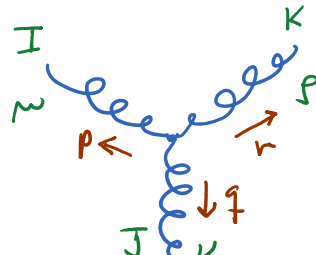
$$= \frac{-i \delta^{IJ} \eta_{\mu\nu}}{p^2}$$

Vértice  
quark-gluón



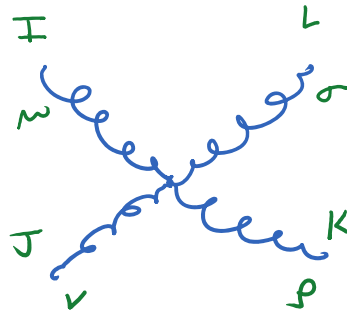
$$= -ig_{YM} \gamma^\mu t_{cc'}^I$$

Vértice cúbico  
del gluón



$$= -g_{YM} f^{IJK} \left[ (\not{q} - \not{r})_\mu \eta_{\nu\rho} + (r - p)_\nu \eta_{\rho\mu} + (p - \not{q})_\rho \eta_{\mu\nu} \right]$$

Vértice cuártico  
del gluón



$$= -ig_{YM}^2 \left[ f^{IJM} f^{KLM} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) + f^{IKM} f^{LJM} (\eta_{\mu\sigma} \eta_{\rho\nu} - \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma}) + f^{ILM} f^{JKM} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho} \eta_{\sigma\nu}) \right]$$

El procedimiento para fijar la norma de manera covariante en el caso no abeliano involucra además a los llamados "fantasmas de Faddeev-Popov"  $C^I(x), \bar{C}^I(x)$ , que son campos auxiliares que están acoplados a

los gluones de tal manera que su efecto en los lazos es cancelar la propagación de las polarizaciones no físicas en los lazos de gluones. Esquemáticamente,

Diagrammatic equation:  $\text{Loop of ghost lines} + \text{Loop of unphysical gluon polarizations} = \text{Loop of physical gluon polarizations}$ .

Labels: *covariante*  $A_\mu$ , *fantasma*  $c, \bar{c}$ , *físico*  $A_\perp$ .

los fantasmas dan lugar a 2 ingredientes más en los diagramas de Feynman:

Propagador del fantasma

$$= \frac{i\delta^{IJ}}{p^2}$$

Vértice fantasma-gluón

$$= -g_{YM} f^{IJK} \frac{p_M}{p^2}$$

Con estas reglas es posible hacer todo tipo de cálculos perturbativos, y en particular, deducir la función beta para la constante de acoplamiento,

$$\beta(g_{YM}) \equiv \mu \frac{\partial g_{YM}}{\partial \mu} = -\frac{1}{3} (11N_c - 2N_s) \frac{g_{YM}^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g_{YM}^5),$$



o lo que es lo mismo,

$$\beta(\alpha_{YM}) \equiv \frac{\partial \alpha_{YM}}{\partial(\ln \mu)} = -\frac{1}{3} \underbrace{(11N_c - 2N_s)}_{\equiv b_0} \frac{\alpha_{YM}^2}{2\pi} + \mathcal{O}(\alpha_{YM}^3),$$

donde  $\alpha_{YM} \equiv \frac{g_{YM}^2}{4\pi} \equiv \alpha_f$ , y para mayor generalidad

hemos escrito el resultado para un número de

colores  $N_c$  ( $\leftrightarrow$  grupo de norma  $SU(N_c)$ ) y

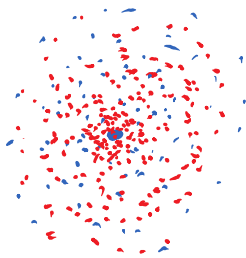
sabores  $N_s$  arbitrario.

$\uparrow N_c^2 - 1$  generadores

La propiedad más importante de este resultado es que, para  $11N_c > 2N_s$  (y en particular, en QCD con  $N_c=3$  y  $N_s \leq 16$ ),  $\beta(\alpha_{YM}) < 0$ , es decir

la constante de acoplamiento decrece con la energía ( $\leftrightarrow$  aumenta con la distancia).

Si miramos de cerca el signo en frente del término con  $N_s$ , vemos que en realidad los quarks virtuales tienen el mismo efecto sobre la



carga fuerte que los electrones virtuales sobre la carga eléctrica: la "apantallamiento",

es decir, hacen que decrezca a distancia

mayores ( $\Leftrightarrow$  energías más bajas).

Pero el término en  $N_c$  tiene el signo contrario, así que los gluones tienen el efecto opuesto: "antiapantalla" a la carga fuerte, es decir, hacen que aumente a distancias mayores ( $\Leftrightarrow$  energías menores).

Integrando la función beta, encontramos que

$$\alpha_{YM}(\mu) = \frac{\alpha_{YM}(\mu_{ref})}{1 + \frac{1}{6\pi} (11N_c - 2N_s) \alpha_{YM}(\mu_{ref}) \ln(\mu/\mu_{ref})}$$

↑  
energía de referencia

Según esta fórmula,  $\alpha_{YM}(\mu) \rightarrow 0$  logaritmicamente a altas energías, fenómeno conocido como libertad asintótica (cuyo descubrimiento resultó en un premio Nobel para Gross, Wilczek y Politzer - y no para 't Hooft, quien encontró el resultado antes pero no lo publicó). Esto implica que la expansión perturbativa es una muy buena aproximación a altas energías, y también, que QCD es una teoría de campos interactiva que está perfectamente definida a distancias

arbitrariamente pequeñas: en completa es el UV.

Por supuesto, la otra cara de la moneda es que  $\alpha_{YM}(\mu)$  aumenta a bajas energías, y, si pudiéramos creerle a la fórmula de arriba, de hecho sería divergente a una energía finita

$$\mu_{div} \equiv \mu_{ref} \exp\left(-\frac{6\pi}{(11N_c - 2N_f)\alpha_{YM}(\mu_{ref})}\right).$$

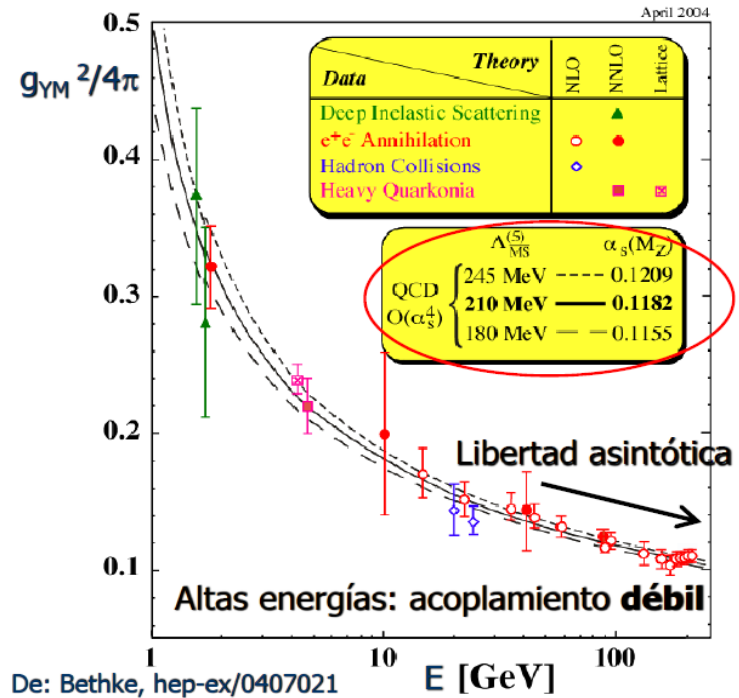
Naturalmente, no podemos creer literalmente en esta divergencia, pero  $\mu_{div}$  sí representa una escala energética característica de QCD, alrededor de y por debajo de la cual la interacción fuerte se vuelve fuertemente acoplada. Es habitual llamarle  $\Lambda_{QCD} \equiv \mu_{div}$ , y reescribir la evolución de la cte. de acoplamiento en términos de ella,

$$\alpha_{YM}(\mu) = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}(11N_c - 2N_f) \ln(\mu/\Lambda_{QCD})}$$

Los datos experimentales permiten comprobar que  $\alpha_{YM}$  en verdad "corre" de este modo, y deducir que  $\Lambda_{QCD} \approx 200 \text{ MeV}$ . (Se denomina "transmutación dimensional" a esta aparición de un parámetro

característico con dimensiones,  $\Lambda_{QCD}$ , a partir de lo que en la teoría clásica era una constante adimensional,  $g_{YM}$ .)

Para  $\mu \lesssim \Lambda_{QCD}$  ( $\Leftrightarrow$  distancias  $l \gtrsim 5 \times 10^{-15} \text{ m}$ ), la interacción fuerte se vuelve muy intensa y la expansión perturbativa no es válida. El efecto de las interacciones es tan drástico que experimentalmente no observamos nunca a los ingredientes básicos de la teoría, quarks y gluones, de manera aislada ( $\Leftrightarrow$  estado asintótico  $\Leftrightarrow$  polar en correladores). Lo que observamos son solo combinaciones NEUTRAS



bajo la fuerza fuerte, que llamamos hadrones:  
 mesones (quark-anti quark con colores opuestos),  
 bariones ( $N_c$  quarks con colores distintos),  
 glublas (combinación de gluones con colores opuestos),  
 y posibles variantes exóticas (pentaquarks, etc.).  
 A esta obligación de los quarks y gluones de armar  
 combinaciones neutras de color se le llama

### confinamiento.

(A pesar de ser en conjunto neutros, los hadrones  
 pueden todavía interactuar a través de una fuerza fuerte  
residual, análoga a la fuerza de van der Waals entre  
 átomos o moléculas.)

El confinamiento es un hecho experimental, pero no se  
 ha demostrado rigurosamente de forma analítica.

En la región de acoplamiento fuerte, prácticamente  
 la única herramienta teórica que tenemos para estudiar  
 sistemáticamente a la interacción fuerte es a  
 través de cálculos numéricos en un espaciotiempo

Discretizado y acotado (para tener un número grande pero finito de variables dinámicas), empresa conocida como QCD en la red (lattice QCD en inglés, que es la especialidad de Wolfgang Bietenholz del ICN-UNAM). Este método ha logrado predecir exitosamente las masas de muchos hadrones a partir de primeros principios en QCD, y ha verificado también la existencia del confinamiento. Da muchos resultados muy valiosos, pero no tanta intuición.

La idea básica del confinamiento se puede entender considerando al campo gluónico  $A_\mu(x)$  acoplado únicamente a un quark y un antiquark tan pesados que es posible tratarlos simplemente como fuentes puntuales clásicas de  $A_\mu(x)$  en la representación fundamental (y antifundamental).

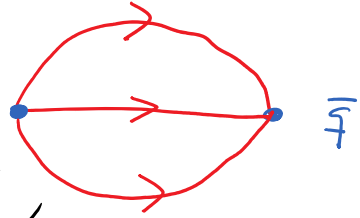
Los cálculos de la energía de este sistema permiten deducir el potencial quark-antiquark (describible que más adelante definiremos de manera más precisa), que resulta ser lineal para separaciones  $l \gtrsim 10^{-15}$  m,

$$V_{\bar{q}q}(l) \approx \sigma l \quad \text{con } \sigma \sim 0.2 \text{ GeV}^2,$$

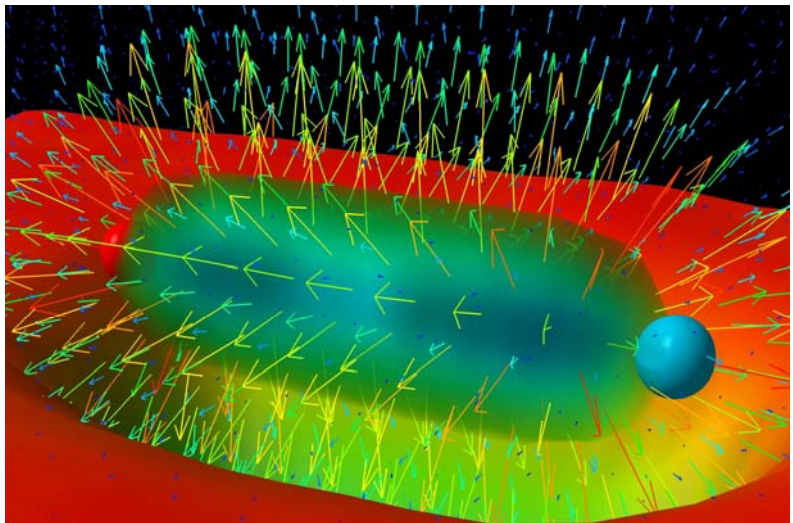
y Cambiamos para separaciones pequeñas,

$$V_{\bar{q}q}(l) \sim \frac{\alpha_{YM}}{l} \quad l \lesssim 10^{-16} \text{ m} .$$

La explicación intuitiva es que a distancia pequeña las líneas del campo  $q$  gluónico forman el patrón dipolar usual, pero a distancia grande, el hecho de que los gluones interactúan fuertemente entre sí hace que las líneas de campo formen un tubo de diámetro constante e independiente de  $l$ .



Este "tubo de flujo cromoelectromagnético" o "cuerda de QCD" es directamente visible en cálculos de QCD en la retícula de la densidad de energía entre el quark y el antiquark.



[www.physics.adelaide.edu.au/theory/staff/leijnweder/VisualQCD/Nobel](http://www.physics.adelaide.edu.au/theory/staff/leijnweder/VisualQCD/Nobel)

El parámetro  $\sigma$  que aparece en  $V_{\bar{q}q}(l)$  representa precisamente la tensión (energía por unidad de longitud) de este tubo de flujo o cuerda de QCD, y la razón por la cual no podemos aislar al quark es que al separarlo del antiquark nos cuesta energía crear más cuerda, y costaría una energía infinita lograr que  $l \rightarrow \infty$ . (Si incluimos de vuelta quarks con masas finitas, en cierto punto se vuelve energéticamente favorable crear un par quark-antiquark en lugar de seguir estirando la cuerda. En ese momento la cuerda se rompe, pero terminamos con 2 pares quark-antiquark:



Esto sugiere que en algunas circunstancias podría ser una buena aproximación modelar a un mesón como un quark y un antiquark conectados por una liga o cuerda delgada con tensión  $\sigma$ . Este modelo fenomenológico basado en la cuerda de QCD reproduce correctamente el llamado comportamiento





"de Regge" en el espectro experimental de hadrones,

$$J = \alpha' m^2 + \alpha_0 \quad \text{con} \quad \alpha' \equiv \frac{1}{2\pi\sigma} \quad \begin{array}{l} \text{pendiente} \\ \text{de Regge} \end{array}$$

↖ momento angular

Este fue de hecho el origen histórico de la teoría de cuerdas, alrededor de 1970, como un candidato a describir la fuerza fuerte, anterior a la formulación de QCD ( $\sim 1973$ ). En la era post-QCD, la teoría de cuerdas parecía haber fracasado como teoría de la interacción fuerte, y en el periodo  $\sim 1975-95$  se le estudió como candidata a una teoría cuántica de la gravedad y el resto de las interacciones (con una tensión de la cuerda mucho mayor,  $\sigma \sim m_{\text{Planck}}^2 \sim 10^{26} \text{ GeV}^2$  en lugar de  $\sim \Lambda_{\text{QCD}}^2$ ).

Con el descubrimiento de la correspondencia holográfica, la teoría de cuerdas ha vuelto entonces a sus orígenes, como herramienta para entender a algunas generalizaciones de QCD. Y las décadas anteriores ciertamente No fueron una pérdida de tiempo, porque muchos de los ingredientes explorados en esos años (como dimensiones adicionales

y "branos") han resultado absolutamente cruciales.

Regresando a nuestra discusión de las propiedades de QCD, es importante tener presente que el acoplamiento fuerte es necesario, aunque No suficiente, para tener confinamiento.

Imaginemos que calentamos un gas de hadrones (o el vacío, creando a los hadrones). Conforme la temperatura aumenta, disminuye el acoplamiento  $\alpha_{\text{YM}}(T)$ . Esperaríamos entonces que a una temperatura suficientemente alta, el acoplamiento no sea ya suficientemente alto como para inducir confinamiento. Es decir, debemos tener una transición a una fase desconfiada (donde los quarks y gluones no están ya obligados a encontrarse dentro de combinaciones neutras de color), que llamamos el

Plasma de Quarks y Gluones (QGP).

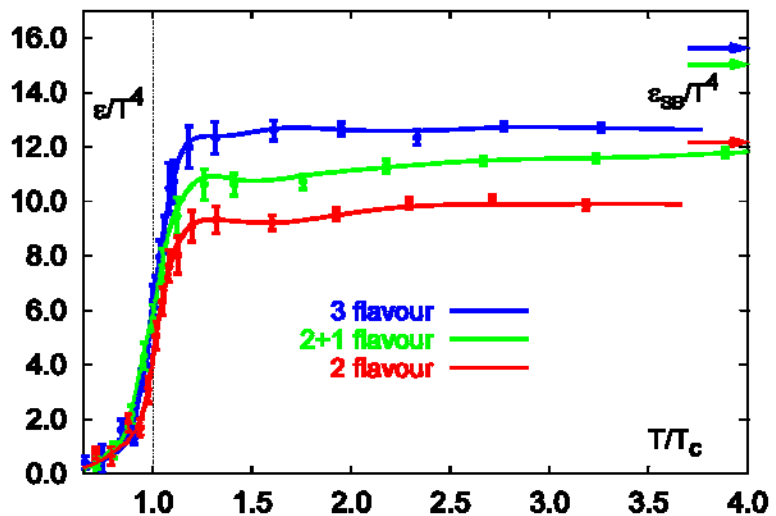
Adivinando, estimaríamos que la temperatura de desconfiamento debería ser

$$T_c \sim \Lambda_{\text{QCD}} \approx 200 \text{ MeV} ,$$

o en otras palabras, ¡  $2 \times 10^{12}$  grados Kelvin !

Cálculos en la red de la confirmación, con  $T_c \approx 160 - 190 \text{ MeV}$ .

Para un gas ideal,  
la densidad de energía  
 $\epsilon \propto T^4$ , y  $\epsilon/T^4$  es  
proporcional al número  
de especies de partículas,  
es decir, de grados de



de: F. Karsch, hep-lat/0106019

libertad. La gráfica muestra  
entonces un aumento drástico y repentino de grados de  
libertad alrededor de  $T \sim T_c$ , que pasan a ser de

$\mathcal{O}(N_c^0)$  (esencialmente 3 piones)  
a  $\mathcal{O}(N_c^2)$  ( $2 \times 8 = 16$  gluones +  $2 \times 2 \times 3 \times N_c = 24 - 36$  quarks).  
partículas / antipartículas  
↑ ↑ ↑ ↑  
espín ↑ ↑ ↑ ↑  
↑ ↑ ↑ ↑  
color ↑ ↑ ↑ ↑

En la gráfica se observa además que para  $T_c < T \lesssim 4T_c$   
la densidad de energía se comporta como la de un gas  
ideal, pero con un coeficiente que es  $\sim 0.80$  del del  
gas ideal (Stefan-Boltzmann). Esto resulta ser  
aproximadamente cierto también para la entropía y  
la presión, y solía considerarse como una indicación

de que, para  $T \gtrsim T_c$ , el QGP podría ser modelado aproximadamente como un gas ideal: las interacciones solo daban una corrección del 20%.

Increíblemente, desde la década pasada el QGP pudo ser generado experimentalmente en colisiones de iones pesados relativistas, primero en el acelerador RHIC, en E.U.A. (con colisiones de núcleos de oro, analizados por los detectores STAR, PHENIX, PHOBOS y BRAHMS), y más recientemente en el LHC, en CERN (con colisiones principalmente de núcleos de plomo, analizados por los detectores ALICE, CMS y ATLAS).

En estos experimentos colisionan  $\sim 400$  nucleones en una energía de 100 GeV/nucleón en RHIC,  $\sim 3$  TeV/nucleón en LHC,

