

$$= \int d^d x' d^d z' P_{\Delta}(x', z'; x) F_J(x', z')$$

Usando la relación que tenemos en las pp. 391-392,

$$Y_{\Delta}(x', z'; x, z) \xrightarrow{z \rightarrow \epsilon} \frac{\epsilon^{\Delta}}{2\Delta - d} P_{\Delta}(x', z'; x),$$

encontramos entonces que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \epsilon} \phi(x, z) &= \int d^d x' d^d z' \frac{\epsilon^{\Delta}}{2\Delta - d} P_{\Delta}(x', z'; x) F_J(x', z') \\ &= \frac{\epsilon^{\Delta}}{2\Delta - d} \langle \sigma(x) \rangle_J, \end{aligned}$$

tal como prometimos.

Conocer la función de 1 punto en presencia de fuentes

equivale a conocer todos los correladores:

$$\begin{aligned} \langle \sigma(x) \rangle_J &= \left\langle \sigma(x) e^{\int d^d x' \sigma(x') J(x')} \right\rangle \\ &= \langle \sigma(x) \rangle + \int d^d x_1 \langle \sigma(x) \sigma(x_1) \rangle J(x_1) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^d x_1 d^d x_2 \langle \sigma(x) \sigma(x_1) \sigma(x_2) \rangle J(x_1) J(x_2) + \dots, \end{aligned}$$

de modo que

$$\langle \sigma(x) \sigma(x_1) \dots \sigma(x_n) \rangle = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \left[\langle \sigma(x) \rangle_J \right]_{J=0}.$$

La fórmula $\langle \tilde{O}(x) \rangle_J = (2\Delta - d) V(x)$ nos permite entonces deducir cualquier correlador SIN necesidad de calcular la acción en la capa de masa $S[\phi^d]$. (Por esta razón, es también muy útil para el análisis de la renormalización holográfica [ver Skenderis, hep-th/0209067; Skenderis, Papadimitriou, hep-th/0404176].)

[26:17/11/12]

En la expansión asintótica

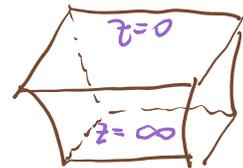
$$\phi(x, z) \xrightarrow{z \rightarrow \epsilon} \epsilon^{d-\Delta} (J(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)) + \epsilon^{\Delta} (V(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)),$$

$\langle \tilde{O}(x) \rangle_J$ depende de J
 y del estado

aquí se necesitan además \uparrow
 un término $\log \epsilon$ cuando $\Delta \in \mathbb{Z}$

el hecho de que haya en un principio 2 coeficientes $J(x)$ y $V(x)$ independientes refleja la existencia de 2 soluciones independientes para la ecuación de movimiento (que es de 2do. orden). Hemos visto que, en la versión eulideana de AdS/CFT, al imponer $J(x)$ como condición de frontera en $z \rightarrow 0$ ($z \rightarrow \epsilon$) y el requisito de que la solución sea regular en $z \rightarrow \infty$, $\phi(x, z)$, y por tanto $V(x)$, queda determinada por completo.

Esto es justo lo que esperamos en la CFT: al trabajar en \mathbb{R}^4 en lugar de $\mathbb{R}^{3,1}$, el operador de evolución en el tiempo $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-HT}$ proyecta sobre el vacío, y la única razón por la que podríamos tener $\langle O \rangle \neq 0$ es entonces la presencia de una fuente externa J . Tiene sentido por tanto que $\langle O \rangle$ quede determinado completamente una vez que conocemos J . Si hacemos una rotación de Wick de vuelta al caso lorentziano, las condiciones de frontera en $z \rightarrow \infty$ que heredamos del cálculo euclidiano implican que estamos calculando todavía correladores en el vacío ordenados en el tiempo, así que, de nuevo, $\langle O \rangle$ está determinado por J .



Pero en la versión lorentziana es consistente también tener comportamientos distintos en el horizonte de Poincaré $z \rightarrow \infty$, lo cual equivale a decir que el comportamiento en $z \rightarrow 0$ no normalizable especificado por $J(x)$, y el sí normalizable especificado por $V(x)$, pueden considerarse como datos independientes: debemos especificar ambos por separado para estar considerando un cálculo específico.

El punto es que, como dijimos en la p. 359, excitar a los modos normalizables corresponde a cambiar el estado en el que nos encontramos. Desde el punto de vista de la teoría de campos, en un estado distinto al vacío podemos tener $\langle \mathcal{O} \rangle \neq 0$ incluso en ausencia de una fuente externa.

En resumen, el comportamiento no normalizable $\phi \xrightarrow{z \rightarrow \epsilon} \epsilon^{d-\Delta} J(x)$ define a la teoría (corrección por $\int d^d x \mathcal{O} J$), mientras que la parte normalizable $\epsilon^\Delta V(x)$ especifica el estado en el que calculamos a los correladores en esa teoría (tal que $\langle \mathcal{O} \rangle = (2\Delta-d)V(x)$). Esto es simplemente una formulación más precisa de lo que ya habíamos afirmado en la p. 363.

Un ejemplo concreto es la expansión de la métrica en coordenadas de Fefferman-Graham ($g_{z\bar{w}} = 0$, $g_{z\bar{z}} = L^2/z^2$):

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} \left(g_{\mu\nu}(x, \bar{z}) dx^\mu dx^\nu + dz^2 \right),$$

$$g_{\mu\nu}(x, \bar{z}) = \underbrace{g_{\mu\nu}(x)}_{\text{modo no normalizable}} + z^2 g_{\mu\nu}^{(2)}(x) + \dots$$

modo no normalizable
 $z^{d-\Delta}$ con $\Delta = d$

$$+ z^d \underbrace{g_{\mu\nu}^{(d)}(x)}_{\text{modo normalizable}} + z^d \log(z^2) h_{\mu\nu}^{(d)}(x) + \dots,$$

modo normalizable z^Δ con $\Delta = d$

incluye $\eta_{\mu\nu}$ + deformación (fuente de $T_{\mu\nu}$)

donde $g_{\mu\nu}(x)$ es la fuente externa (total) para el operador dual $T_{\mu\nu}$, es decir, la métrica de la CFT.

Dada una elección de $g_{\mu\nu}(x)$, se puede mostrar que las eqs. de movimiento (ec. de Einstein) determinan $h_{\mu\nu}^{(d)}(x)$

(que resulta estar relacionada con la anomalía conforme) y todos los coeficientes $g_{\mu\nu}^{(n)}(x)$ EXCEPTO $g_{\mu\nu}^{(d)}(x)$. Para $\mathcal{L} = \text{de Weyl} = \text{de traza}$

este último, solo exigimos que sea conservado y sin traza, es decir, $\nabla^\mu g_{\mu\nu}^{(d)}(x) = 0$, $g_{\mu\nu}^{(d)\mu} = 0$ \mathcal{L} si $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$
 construido con $g_{\mu\nu}(x)$ índice subido con $g^{\mu\nu}(x)$

Esto no es casual: éstas son justamente las propiedades genéricas que posee el valor esperado $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ que debe estar asociado al coeficiente $g_{\mu\nu}^{(d)}$ del modo normalizable en la métrica. La relación exacta es

$$\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{ren}}{\delta g^{\mu\nu}(x)} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}(x)} (S_E + S_{ct})$$

Einstein contra términos

$$= \frac{d \cdot L^{d-1}}{16\pi G_N} \left[g_{\mu\nu}^{(d)}(x) + X_{\mu\nu}^{(d)}(x) \right],$$

$\mathcal{L} = 0$ si $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

proviene de S_{ct} de renormalización holográfica
 donde $X_{\mu\nu}^{(2)} = 0$ si d es impar, y para d par se
 define a partir de $g_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}^{(n<d)}$ [de Haro, Skenderis,
 Solodukhin]. P.ej.,

$$X_{\mu\nu}^{(4)} = -\frac{1}{8} g_{\mu\nu} \left[(g_{\alpha}^{(2)})^2 - g_{\alpha}^{(2)\beta} g_{\beta}^{(2)\alpha} \right] - \frac{1}{2} g_{\mu}^{(2)\alpha} g_{\alpha\nu}^{(2)} \\ + \frac{1}{4} g_{\mu\nu}^{(2)} g_{\alpha}^{(2)\alpha} \quad (\text{con índices subidos por } g^{\mu\nu}).$$

Aprendemos entonces que basta con conocer la métrica
 $g_{\mu\nu}(x)$ de la CFT y el valor esperado $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ para poder
 reconstruir por completo la métrica del fondo asintóticamente

AdS que es dual a la teoría en cuestión en el estado dado.

(Salvo por el hecho de que puede haber obstrucciones para
 extender los coordenados de Fefferman-Graham a todo el
 bulk.) Aplica un enunciado análogo para los otros campos
 $\phi(x) \leftrightarrow \mathcal{O}(x)$.

Es importante tener presente que los campos en el
 bulk en general están descritos por ecuaciones acopladas,
 así que es posible p.ej. que al encender una fuente para
 un operador \mathcal{O} además existiendo también a un campo ϕ'
 dual a otro operador \mathcal{O}' .

Vale la pena enfatizar que en la receta de GKPW,

$$Z_{\text{CFT}}[J] \equiv \int \mathcal{D}\Delta_{\mathcal{N}} \dots e^{iS_{\text{CFT}} + i \int d^d x \mathcal{O}(x) J(x)} = Z_{\mathcal{N}_{\text{CFT}}}[\phi_0 = J] \simeq e^{iS_{\text{STG}}[\phi_0^{\text{cl}}]},$$

$$\phi \xrightarrow{z \rightarrow 0} z^{\Delta} \phi_0$$

además de añadir correcciones en nuestra CFT original (p.ej., MSYM), adquirimos la habilidad de cambiar de teoría, con el sencillo recurso de no apagar la fuente. (Esto fue justo lo que hicimos en el caso donde cambiamos la métrica $g_{\mu\nu}(x)$.) Obtenemos entonces un nuevo ejemplo de la dualidad normal/gravedad, donde la teoría de campo está definida por la acción deformada

$S_{\text{CFT}} \rightarrow S_{\text{QFT}} = S_{\text{CFT}} + \int d^d x J(x) \mathcal{O}(x)$. Normalmente nos interesaría tomar una fuente constante, $J(x) = \lambda = \text{acoplamiento}$.

Podemos notar que $\phi(x, z) \xrightarrow{z \rightarrow 0} z^{\Delta} \phi_0(x) \rightarrow \begin{cases} 0 & \Delta < d \\ \text{finito} & \Delta = d \\ \infty & \Delta > d \end{cases}$, que tiene perfecto sentido para el UV de la QFT, donde sabemos que $\begin{cases} \Delta < d & \mathcal{O} \text{ relevante (QFT} \xrightarrow{\text{UV}} \text{CFT)} \\ \Delta = d & \mathcal{O} \text{ marginal (QFT} \rightleftharpoons \text{CFT)} \\ \Delta > d & \mathcal{O} \text{ irrelevante (QFT} \not\rightarrow \text{CFT)} \end{cases}$.

Se conocen ejemplos explícitos con deformaciones de MSYM que son marginales (p.ej. Lunin, Maldicena) y relevantes, con flujo que en el IR es conforme (p.ej. Freedman, Gubser, Pilch, Warner) o confinante (p.ej. Polchinski, Strassler), en acuerdo con QFT.

Ahora que ya entendamos cómo calcular del lado de gravedad los correladores de operadores locales en HSYM, recordamos que las teorías de norma tienen además un muy importante conjunto de operadores no locales.

Sabemos que el campo electromagnético se acopla a la línea de mundo $x^\mu(\tau)$ de una carga puntual a través de

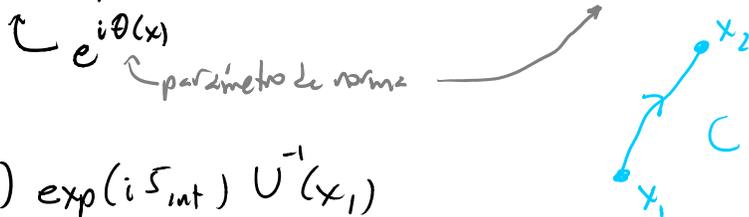
$$\exp(iS_{int}) = \exp\left[i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau))\right],$$

$\int dx^\mu \quad \uparrow \equiv g A_\mu^{\text{canónico}} \quad \leftarrow \text{carga}$

que bajo una transformación de norma

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu(x) = U(x) (A_\mu(x) - i \partial_\mu) U^{-1}(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x)$$

se convierte en



$$\begin{aligned} \exp(iS'_{int}) &= U(x_2) \exp(iS_{int}) U^{-1}(x_1) \\ &= e^{i\theta(x_2)} \exp\left[i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau))\right] e^{-i\theta(x_1)}. \end{aligned}$$

Similarmente, un campo de norma no abeliano se acopla a la línea de mundo de una fuente puntual a través de

$$\exp(iS_{int}) = \mathcal{P} \exp\left[i \int_C d\tau \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau))\right]$$

$\uparrow \text{orden de camino (path ordering)} \quad \uparrow \equiv A_\mu^I t_{CE}^I \quad \leftarrow g_{YM} A_\mu^{\text{canónico}}$

$$= 1 + i \int_C dt \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau))$$

$$+ \frac{i^2}{2} \int_C dt \int_C d\tilde{t} \dot{x}^\mu(\tau) \dot{x}^\nu(\tilde{t}) \mathcal{P} \left\{ A_\mu(x(\tau)) A_\nu(x(\tilde{t})) \right\} + \dots$$

\equiv ordenar tal que el parámetro τ avanza de derecha a izquierda

$$= \begin{cases} A_\mu(x(\tau)) A_\nu(x(\tilde{t})) & \text{si } \tau > \tilde{t} \\ A_\nu(x(\tilde{t})) A_\mu(x(\tau)) & \text{si } \tilde{t} > \tau \end{cases}$$

donde t^I son los generadores del grupo de normas, en la representación que corresponde a la fuente (p.ej., rep fundamental si la fuente es un partícula). Dado que especificamos su trayectoria clásicamente, se trata de una fase infinitamente pequeña.

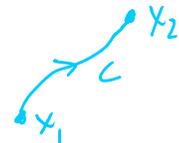
En general, el valor de esta fase depende de la curva C , y no sólo de la ubicación de los extremos x_1 y x_2 .

Bajo una transformación de normas con el elemento del grupo $U(x) = \exp(it^I \theta^I(x))$, transformamos de acuerdo con

$$\exp(iS_{int}) = U(x_2) \exp(iS_{int}) U^{-1}(x_1).$$

Esta fase se conoce como una línea de Wilson,

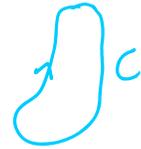
$$W[C] \equiv \mathcal{P} \exp \left[i \int_C dt \dot{x}^\mu(\tau) A_\mu(x(\tau)) \right],$$



y vemos entonces que al identificar $x_1 = x_2$ y tomar la traza obtenemos un operador no local invariante de normas,

$$W[C] \equiv \text{Tr} \left\{ P \exp \left[i \int_C dx^\mu \tilde{x}^\nu(x) A_\nu(x(x)) \right] \right\},$$

que se conoce como un loop de Wilson.



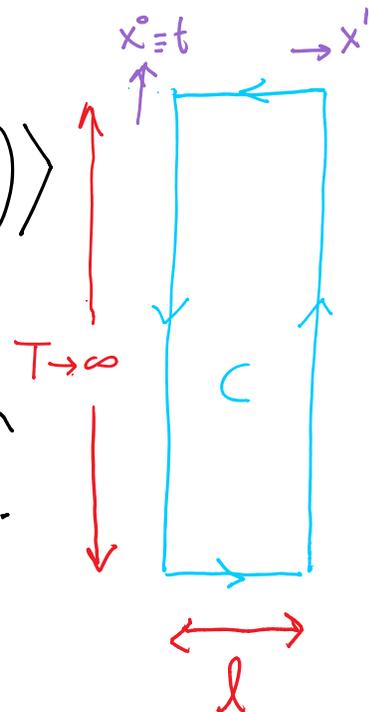
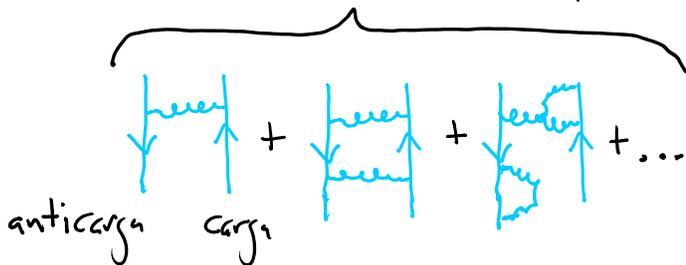
Esta es una clase muy importante de operadores. Los loops de Wilson y sus productos forman de hecho una basis completa de operadores para YM puro (es decir, el sector del campo gauge $A_\mu(x)$ únicamente).

Sus valores esperados en el vacío (vev) nos sirven para identificar la fase en la que se encuentra la teoría.

P.ej., si elegimos un contorno rectangular infinitamente largo en la dirección temporal, el vev

$$\langle W(l, T) \rangle = \left\langle \text{Tr} \left(P \exp \left[i \int_C dx^\mu \tilde{x}^\nu(x) A_\nu(x(x)) \right] \right) \right\rangle$$

$$\sim \langle 1 + A^0 + A^2 + \dots \rangle$$



contiene la información sobre la energía potencial entre la carga (determinada por la representación del grupo de norma a que tenemos la traza) y la anticarga correspondiente (en la rep conjugada):

$$\langle W(l, T) \rangle_{T \rightarrow \infty} = \exp(-iT V(l))$$

Si tenemos la representación fundamental, esto es el potencial quark-antiquark, que en la fase confinante de YM (p. 54) esperamos que escale linealmente:

$$V_{\overline{q}q}(l) = \sigma l \text{ para el grande (región no perturbativa).}$$

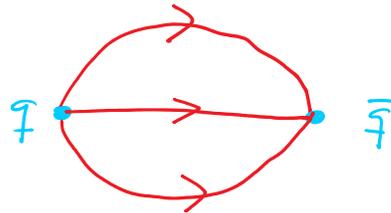
↑ tensión del 'tubo de flujo' o 'cuerda de QCD'



↑ muchísimos gluones autointeractuando

Por otra parte, para distancias pequeñas en YM (región perturbativa) esperamos el comportamiento Coulombiano (p. 55)

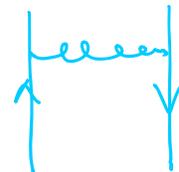
$$V_{\overline{q}q}(l) \sim \frac{g_{YM}^2 N_c}{l} = \frac{\lambda}{l}$$



asociado al diagrama de Feynman

donde el quark y antiquark intercambian

1 solo gluón.



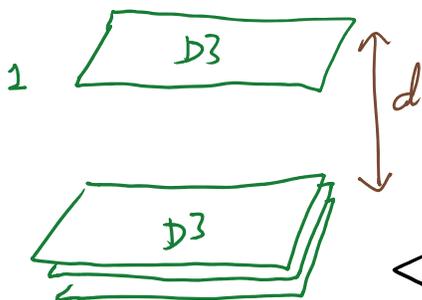
Sabemos que MSYM en $\mathbb{R}^{3,1}$ no confina, y por invariancia conforme (\Leftrightarrow análisis dimensional) debe tener un potencial quark-antiquark Coulombiano,

$$V_{\bar{q}q}(l) = \frac{f(\lambda, N_c)}{\lambda} \quad \leftarrow = \lambda \text{ para } \lambda \ll 1$$

Hemos dicho que MSYM no tiene quarks dinámicos; pero este potencial se refiere a quarks externos, es decir fuentes puntuales e infinitamente masivos del campo gluónico en la representación fundamental, que agregamos a mano.

¿Cómo podríamos calcular este potencial (o lazos de Wilson más generales) en el lenguaje de CFTB que nos aporta la correspondencia? Para obtener un objeto que transforme en la rep fundamental de $SU(N_c)$, podemos regresar antes del límite de Maldacena y empezar con $N_c + 1$ D3-branas, de las cuales separamos una:

una:



Esto se logra (p. 191) encendiendo un vev para alguno de los Φ^i ,

$$\langle \Phi^i \rangle = d \delta_9^i \text{diag}(\underbrace{0, 0, 0, \dots, 1}_{N_c}),$$

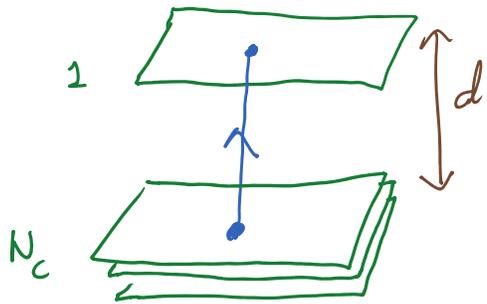
y corresponde a romper $U(N_c+1) \rightarrow U(N_c) \times U(1)$.

El estado excitado de este sistema descrito por una cuerda que se extiende de la D3 solitaria a alguna de las

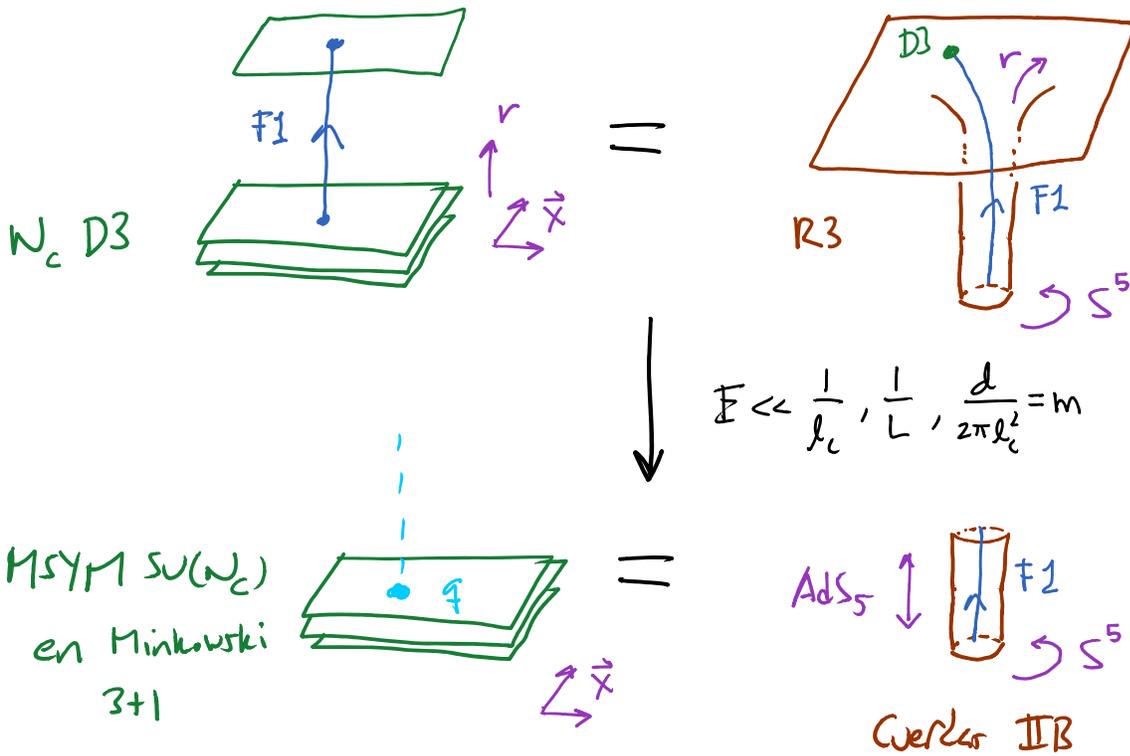
otras D3 tiene masa $m = \frac{d}{2\pi\alpha'}$ y es análogo a un bosón W.

El punto de interés para nosotros es que transforme

en la rep fundamental de $U(N_c)$ (o anti fundamental si la cuerda tiene la orientación opuesta).

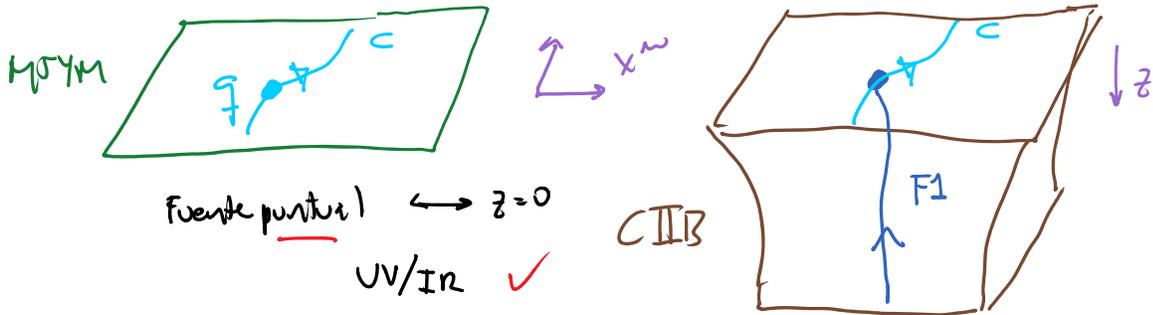


Si ahora tomamos el límite de Maldacena,



Aprendemos entonces que [Maldacena; Rey, Yee]

* Insertar un quark externo en M^2 con trayectoria C (fuente de A_m en rep fund.) = Insertar un aerón infinito en $CIIB$, cuyo extremo en ∂AdS_5 traza la curva C



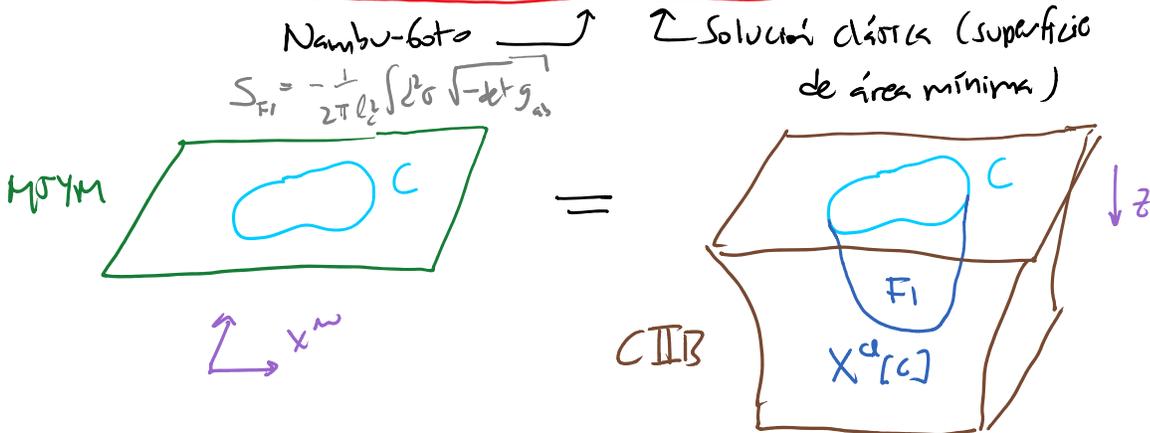
Como consecuencia de esto, tenemos

$$\langle W[C] \rangle = \int DA_{\mu} \dots e^{iS_{M^2}} W[C] = \int Dh_{mn} \dots e^{iS_{CIIB}} \int D\chi^m e^{iS_{F1}[\chi]}$$

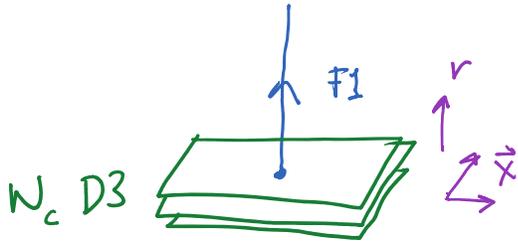
\downarrow
 trayectoria de la aerón \downarrow acción de la aerón
 $\chi(z=0) = C$

que en el límite $N_c \gg 1, \lambda \gg 1$ se simplifica a

* $\langle W[C] \rangle \simeq \exp(iS_{F1}[\chi^d[C]])$



Un punto importante es que el extremo de una cuerda



fundamental, además de acoplarse como carga puntual al campo de norma $A_M(x)$

sobre las D3-branas, es también una fuente puntual para el campo escalar Φ^e en la dirección específica x^{3+e}

(transversal a las D3) en la que apunta la cuerda. Una manera de entender el origen de este acoplamiento es notar que bajo dualidad T (p.171) a lo largo de x^4, \dots, x^9 las D3s se convierten en D5s y los Φ^e se convierten en los componentes $M=3+e$ del campo de norma 10-dim $A_M(x)$.

Así que, después de tomar el límite de Maldacena, concluimos que la cuerda infinita en AdS, apuntando

en la dirección cartesiana Ω_e en la S^5 ($\sum \Omega_i^2 = 1$)

quark en dirección Ω_e en S^5



MSYM $SU(N_c)$

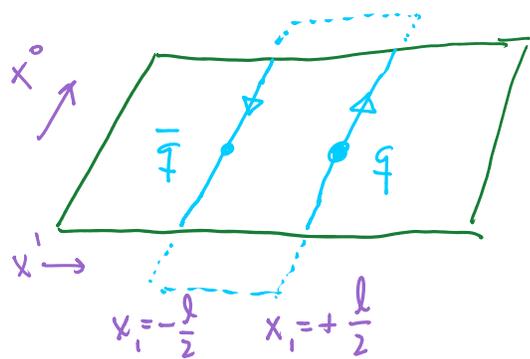
es dual a un quark que es a la vez fuente

de $A_M(x)$ y $\Phi^e(x)$, y corresponde por tanto a la invención del

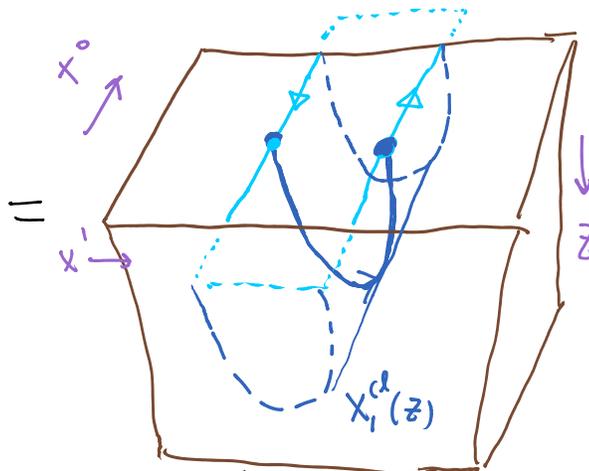
lazo de Wilson generalizado [Maldacena; Drukker, Gross, Ooguri]

$$W[C] \equiv \text{Tr} \left(\mathcal{P} \exp \left[i \int_C dt \left\{ \partial_t x^\mu A_\mu(x(\tau)) + (\partial_t x^I \Omega_e(\tau) \Phi^e(x(\tau))) \right\} \right] \right).$$

Aplicaremos esta receta al ejemplo concreto del cálculo del potencial quark-antiquark a partir de un lazo de Wilson rectangular:



↑ interacción $q\bar{q}$ involucra intercambio de gluones y escalares



$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + dx^2 + dz^2)$$

Eligiendo la norma $\tau=t$, $\sigma=z$ sobre la hoja de mundo $X_1(t, z) = X_1(z)$, la métrica inducida es $\equiv X'^2$

$$g_{tt} = \underbrace{\frac{\partial X^m}{t} \frac{\partial X^n}{t} G_{mn}}_{\equiv \dot{X}^2} = -\frac{L^2}{z^2}, \quad g_{tz} = \underbrace{\frac{\partial X^m}{t} \frac{\partial X^n}{z} G_{mn}}_{\dot{X} \cdot X'}, \quad g_{zz} = \underbrace{\frac{\partial X^m}{z} \frac{\partial X^n}{z} G_{mn}}_{\equiv X'^2} = \frac{L^2}{z^2} (1 + X_1'^2),$$

y la acción de Nambu-Goto es entonces

$$S_{NG}[X] = -\frac{1}{2\pi\alpha_c} \int dt dz \sqrt{-\det g_{ab}} = -\frac{1}{2\pi\alpha_c} \int dt dz \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}$$

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & X'^2 \end{pmatrix}$$

este coef. válido aproximación de punto silla con $\lambda \gg 1$

$$= -\frac{L^2}{2\pi\alpha_c} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dz}{z^2} \sqrt{1 + X_1'^2} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} T \int_{-T/2}^{T/2} \frac{dz}{z^2} \sqrt{1 + X_1'^2}$$

La ecuación de movimiento para $X_1(z)$ es entonces \leftarrow omitir el

$$\partial_z \left(\frac{X_1'}{z^2 \sqrt{1+X_1'^2}} \right) = 0,$$

donde vemos que, al no contener S_{NS} dependencias explícitas de X_1 , la densidad de momento canónico conjugado

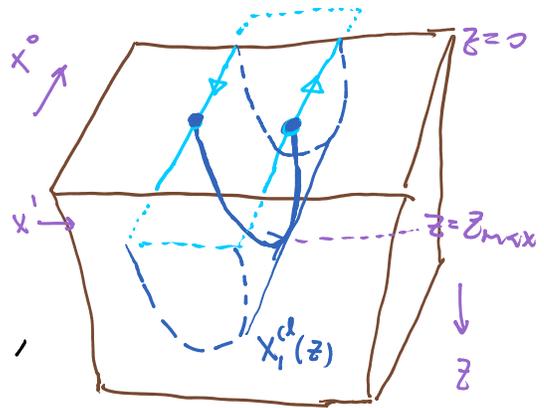
$$\Pi \equiv -\frac{\partial \mathcal{L}_{NS}}{\partial X_1'} \equiv \frac{X_1'}{z^2 \sqrt{1+X_1'^2}} = \text{cte.}$$

De aquí podemos despejar $X_1' = \pm \frac{\Pi z^2}{\sqrt{1-\Pi^2 z^4}}$, \leftarrow mitad izquierda/derecha de la cuerda

que según vemos diverge en

$$z = z_{\max} \equiv \frac{1}{\sqrt{\Pi}}.$$

Este es el punto donde la cuerda da la vuelta de regreso hacia ∂AdS_5 , que por simetría ocurre en $X_1 = 0$.



La solución se puede reescribir entonces como

$$\frac{\partial X_1}{\partial z} = \pm \frac{z^2}{\sqrt{z_{\max}^4 - z^4}}$$

y por tanto (usando $X_1(z=z_{\max})=0$, $X_1(z=0) = \pm \frac{l}{2}$)

$$\frac{l}{2} = \int_0^{z_{\max}} dz \frac{\partial X_1}{\partial z} = \int_0^{z_{\max}} dz \frac{z^2}{\sqrt{z_{\max}^4 - z^4}}.$$

Esta ecuación determina el punto de máxima profundidad de la cuerda, z_{\max} , como función de la separación l del quark y el antiquark, que es también la separación de los extremos de la cuerda. Definiendo $J \equiv z/z_{\max}$, la relación es

$$\frac{l}{2} = z_{\max} \underbrace{\int_0^1 \frac{J^2}{\sqrt{1-J^4}}}_{\frac{\sqrt{2}\pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2}}$$

$l \leftarrow z_{\max}$ es
constante en UV/IR
y es isométrica
 $(x^w, z) \rightarrow (sx^w, sz)$ ✓

Al sustituir la solución $X_1' = \pm \frac{z^2}{\sqrt{z_{\max}^4 - z^4}}$ en la acción, obtenemos

$$S_{NG} = -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} T \int \frac{dz}{z^2} \sqrt{1+X_1'^2} = -T \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} 2 \int_0^{z_{\max}} dz \frac{z_{\max}^2}{z^2 \sqrt{z_{\max}^4 - z^4}},$$

integral que es claramente divergente ↖ permitid derecha e izquierda

en el límite de integración inferior, $z=0$. Esto no debe sorprendernos: S_{NG} calcula el área de la hoja de mundo de la cuerda, que, además de ser proporcional

a $T \rightarrow \infty$, es infinita en la región cercana a la frontera de AdS. Esto va de la mano de que el propio lazo de Wilson $\langle W[C] \rangle$ que se supone que estamos calculando tiene divergencia UV.

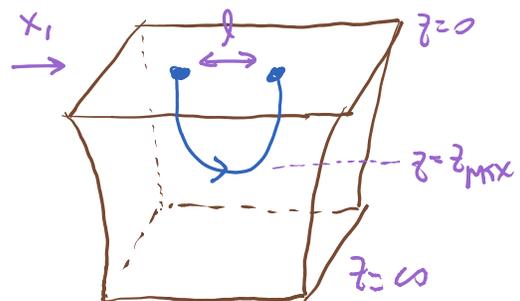
Es útil entender el origen físico de esta divergencia desde una perspectiva ligeramente distinta. Nuestro principal interés en este cálculo es que, según la correspondencia, nos permitirá obtener el potencial quark-antiquark, es decir, la energía de ligadura entre estas 2 fuentes externas del campo cuántico. A partir de S_{NG} , la energía de la cuerda está dada por

$$E = \int d\tau \left(\pi_{x_1} \dot{x}_1 - \mathcal{L}_{NG} \right)$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial \dot{x}_1} & -\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{1}{z^2} \sqrt{1 - \dot{x}_1^2 + \dot{x}_1'^2} \end{matrix}$$

que en nuestra situación estática ($\dot{x}_1 = 0$) coincide con (menos) el Lagrangiano,

$$E(l) = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} 2 \int_0^{z_{max}} d\tau \frac{z_{max}^2}{z^2 \sqrt{z_{max}^4 - z^4}}$$

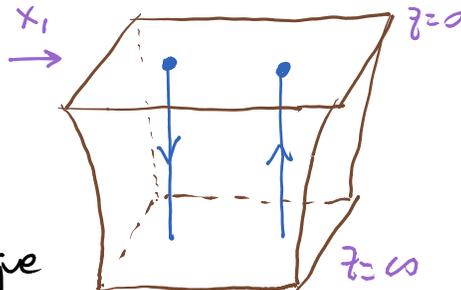


Si regularizamos omitiendo como antes la porción UV $0 \leq z < \epsilon$,

venmos que

$$E(l) = 2 \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0) = 2 \frac{1}{2\pi l_c^2} \frac{L^2}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0)$$

$$z_{\max} \rightarrow \infty \quad E(l \rightarrow \infty) = 2 \frac{1}{2\pi l_c^2} \int_{\epsilon}^{\infty} dz \frac{L^2}{z^2}$$



Es decir, la divergencia se debe a que

$E(l)$ incluye la energía de 2 cerdas estáticas rotuladas, que corresponde a la energía (masa) del quark y el antiquark desligados.

Lo que nos interesa, el potencial quark-antiquark, es por definición la energía de ligado entre el quark y el antiquark,

$$\begin{aligned} V_{\bar{q}q}(l) &= E(l) - E_{\bar{q}} - E_q = E(l) - 2m_{\bar{q}} \quad \leftarrow \text{IMPORTANTE: independiente de } l \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} 2 \left\{ \int_0^{z_{\max}} dz \frac{z_{\max}^2}{z^2 \sqrt{z_{\max}^4 - z^4}} - \int_0^{\infty} dz \frac{1}{z^2} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} 2 \left\{ \int_0^{z_{\max}} \frac{dz}{z^2} \left(\frac{z_{\max}^2}{\sqrt{z_{\max}^4 - z^4}} - 1 \right) - \int_{z_{\max}}^{\infty} \frac{dz}{z^2} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \frac{2}{z_{\max}} \left\{ \int_0^1 \frac{dy}{y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^4}} - 1 \right) - 1 \right\} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{-\frac{\sqrt{2} \pi^{3/2}}{\Gamma(1/4)^2}} \end{aligned}$$