

así que

valor esperado al vacío de la CFT

funcional generatriz

$$\langle \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}(k) \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}(k') \rangle_{\epsilon} = (2\pi)^4 \frac{\delta}{\delta \tilde{J}(-k)} (2\pi)^4 \frac{\delta}{\delta \tilde{J}(-k')} \left\langle e^{-\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}(p) \tilde{J}(-p)} \right\rangle_{\epsilon} \Big|_{\tilde{J}=0}$$

espera por conservación de momento

omitiremos

$$= - (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+k') \frac{c L^3 \epsilon^{3-2\Delta}}{K_{\Delta-2}(k'\epsilon)} \partial_z \left[z^2 K_{\Delta-2}(k'z) \right]_{z=\epsilon}$$

$Z_{CFT}^{\epsilon}[\tilde{J}] = Z_{AdS}^{\epsilon}[\tilde{J}] = e^{-S_{\epsilon}[\phi^{cl}]}$

Necesitamos ahora la expansión asintótica de la función modificada de Bessel para argumento pequeño. Los detalles son distintos dependiendo de si el orden $\nu = \Delta - 2$ es entero o no. El caso entero es el que más nos interesa (hemos visto que Δ para todos los operadores duales a campo bosónicos de superA es entero), y para el se tiene

$$K_n(\gamma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(-\frac{\gamma^2}{4}\right)^m$$

$\leftarrow \text{Tr}(\Phi^{e_1} \Phi^{e_2} \dots \Phi^{e_n})$
y sus descendientes superconformes
 $\Delta = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
 & - \ln\left(\frac{\mathcal{J}}{2}\right) \left(-\frac{\mathcal{J}}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! (n+m)!} \left(\frac{\mathcal{J}^2}{4}\right)^m \\
 & + \frac{1}{2} \left(-\frac{\mathcal{J}}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \psi(m+1) + \psi(n+m+1) \right\} \frac{1}{m! (n+m)!} \left(\frac{\mathcal{J}^2}{4}\right)^m.
 \end{aligned}$$

$\psi(x) \equiv \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ función digamma

La mayor parte de esta información no será necesaria para nuestros propósitos, así que nos basta con escribir

$$K_n(\mathcal{J}) = \mathcal{J}^{-n} (a_0 + a_1 \mathcal{J}^2 + a_2 \mathcal{J}^4 + \dots) + \mathcal{J}^n \ln(\mathcal{J}) (b_0 + b_1 \mathcal{J}^2 + b_2 \mathcal{J}^4 + \dots),$$

$$\text{donde } a_0 = 2^{n-1} (n-1)! \quad , \quad b_0 = -\frac{1}{(-2)^n n!}.$$

Veremos entonces que

$$\begin{aligned}
 \partial_{\mathcal{J}} (\mathcal{J}^2 K_n) &= \mathcal{J}^{-n+1} \left[(-n+2) a_0 + (-n+4) a_1 \mathcal{J}^2 + \dots \right] \\
 &+ \mathcal{J}^{n+1} \ln(\mathcal{J}) \left[(n+2) b_0 + (n+4) b_1 \mathcal{J}^2 + \dots \right] \\
 &+ \mathcal{J}^{n+1} \left[b_0 + b_1 \mathcal{J}^2 + \dots \right].
 \end{aligned}$$

Usando esta expansión y la de K_n misma, se puede mostrar que (omitiendo la delta de Dirac $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(k+k')$)

$$\left\langle \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}(k) \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}(-k) \right\rangle_{\epsilon} = - \frac{c' \epsilon^{4-2\Delta}}{\epsilon k K_{\Delta-2}(k\epsilon)} \partial_{\mathcal{J}} \left[\mathcal{J}^2 K_{\Delta^2}(\mathcal{J}) \right]_{\mathcal{J}=k\epsilon}$$

$$= \frac{C'}{\epsilon^{2\Delta-4}} \left\{ -2 + (\Delta-2)(1 + c_2 \epsilon^2 k^2 + c_4 \epsilon^4 k^4 + \dots) - 2(\Delta-2) \frac{b_0}{a_0} \epsilon^{2(\Delta-2)} k^{2(\Delta-2)} \ln(k\epsilon) (1 + d_2 \epsilon^2 k^2 + \dots) \right\}$$

25: 15/11/16

(donde los coeficientes c_j, d_j son combinaciones sencillas de los a_j, b_j). Es decir,

$$\langle \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}(k) \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}(-k) \rangle_{\epsilon} = C' \left\{ \underbrace{\frac{\Delta-4 + (\Delta-2)(c_2 \epsilon^2 k^2 + \dots + c_{2\Delta-6} \epsilon^{2\Delta-6} k^{2\Delta-6})}{\epsilon^{2\Delta-4}}}_{\text{términos que divergen como potencias cuando } \epsilon \rightarrow 0} - 2(\Delta-2) \frac{b_0}{a_0} k^{2(\Delta-2)} \ln(k\epsilon) \leftarrow \begin{array}{l} \text{divergencia UV} \\ \text{logarítmica} \end{array} + \underbrace{\text{términos que se anulan cuando } \epsilon \rightarrow 0}_{\text{}} \right\},$$

de donde podemos usar $\Delta-2$

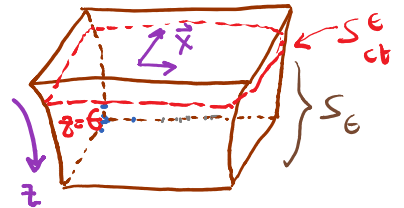
$$\frac{2n b_0}{a_0} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n-2} (n-1)!^2} = \frac{(-1)^{\Delta-1}}{2^{2\Delta-6} (\Delta-3)!^2}.$$

El punto importante aquí es que los términos que divergen al retirar el corte UV $\Lambda \sim 1/\epsilon \rightarrow \infty$, incluyendo la divergencia logarítmica $k^{2(\Delta-2)} \ln \epsilon$, son analíticos en k . Al transformar de vuelta al espacio

de posiciones, tenemos $k^{2m} \rightarrow \square^m \delta^{(4)}(x-x')$, así que estos términos solo contribuirán al correlador $\langle \tilde{O}_A(x) \tilde{O}_A(x') \rangle$ en puntos coincidentes. Por esta razón, se les conoce como términos de contacto. Este es justamente el tipo de términos que sí pueden ser eliminados/modificados por los contratérminos locales que uno agrega (separa) en el Lagrangiano de la teoría de campos, como parte del proceso de renormalización. Tales contratérminos involucran a los campos básicos de la CFT y/o a sus derivadas, y es por ello que solo pueden dar lugar a vértices que son polinómicos en los momentos.

Interesantemente, del lado de gravedad se puede mostrar que las divergencias UV se cancelan si uno agrega a la acción regularizada en el bulk $S_\epsilon[\phi]$ contratérminos definidos solo en la frontera $\partial_\epsilon \text{AdS}_5$ (es decir, en la superficie de corte $z=\epsilon$), construido con el campo ϕ , sus derivadas, y la métrica inducida

$\eta_{\mu\nu}$ en caso Lorentziano
 $\gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{L^2}{\epsilon^2} \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ sobre $\partial_\epsilon AdS_5$:



$$S_{ct}^\epsilon \equiv c \int_{z=\epsilon} d^4x \sqrt{\gamma} \left\{ \left(\frac{4-\Delta}{2}\right) \phi^2 + \frac{1}{2(2\Delta-6)} \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \dots \right\}$$

"contratérminos"

Escrita de esta forma, queda claro que S_{ct}^ϵ es invariante bajo difeos en 4 dimensiones. La acción total $S_\epsilon + S_{ct}^\epsilon$ da lugar a las mismas ecuaciones de movimiento que S_ϵ , pero no tiene divergencias IR (UV en la CFT) cuando se le evalúa en la capa de masa en el límite $\epsilon \rightarrow 0$. A este procedimiento se le conoce como renormalización holográfica [ver artículo de revisión de Skenderis, hep-th/0209067, y hep-th/0404176].

Concluimos entonces que, en el resultado que tenemos para la función de 2 puntos en la p. 383, es solo el término No analítico $k^{2(\Delta-2)} \ln k$ (que es finito cuando $\epsilon \rightarrow 0$) el que da el resultado físico (=renormalizado) en la teoría original ya sin corte UV:

$$\langle \tilde{\mathcal{O}}_\Delta(k) \tilde{\mathcal{O}}_\Delta(-k) \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (2\pi)^8 \frac{\delta}{\delta \tilde{J}(-k)} \frac{\delta}{\delta \hat{J}(k)} \left(e^{-S_\epsilon[\phi^d] - S_{ct}^\epsilon[\phi^d]} \right)_{\tilde{J}=0}$$

$$\langle \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}(k) \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}(-k) \rangle = c' \frac{(-1)^{\Delta-1}}{2^{2\Delta-6} (\Delta-3)!^2} k^{2(\Delta-2)} \ln k,$$

Esto resulta ser (ver MAG00) la transformada de Fourier de

$$\langle \mathcal{O}_{\Delta}(x_1) \mathcal{O}_{\Delta}(x_2) \rangle = \frac{c''}{(x_1 - x_2)^{2\Delta}},$$

que tiene justamente la forma esperada en una CFT (p. 369) para el correlador de 2 puntos de un operador con dimensión Δ [Gubser, Klebanov, Polyakov; Witten]. ✓

En el caso de los operadores duales al dilatación, al gravitón y sus superparejas (donde sabemos que Δ , y por tanto el correlador de 2 puntos, no recibe correcciones), es posible identificar en detalle todas las constantes de normalización (empezando por la del término de interacción entre ϕ y \mathcal{O} en S_{D_3}) y verificar que el resultado coincide perfectamente con el de M5M [ver, p.ej., Gubser, Klebanov, Polyakov; Freedman, Mathur, Matusis, Rastelli; D'Hoker, Freedman, Skiba].

Con esto tenemos entonces más evidencia a favor de la correspondencia, y en particular, la primera comprobación de la receta GKPW para correladores.

Pero las funciones de 2 puntos todavía nos mantienen al nivel donde la teoría en el lado de gravedad es libre (\leftrightarrow acción cuadrática $\leftrightarrow g_c \rightarrow 0$), lo cual en la teoría de norma quiere decir que estamos en el límite estricto $N_c \rightarrow \infty$.

Resulta por tanto interesante analizar las funciones de corrección de $n \geq 3$ puntos, que reflejan el efecto de las interacciones entre los distintos estados de ambas teorías. De la p.89 sabemos que (para operadores de glublos normalizados de tal forma que su función de 2 puntos es independiente de N_c)

$$\langle \sigma_1(x_1) \dots \sigma_n(x_n) \rangle_{\text{GNOXO}} \propto N_c^{2-n}.$$

Para $n=3$, en una CFT tenemos

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1(x_1) \sigma_2(x_2) \sigma_3(x_3) \rangle &= \langle \sigma_1(x_1) \rangle \langle \sigma_2(x_2) \sigma_3(x_3) \rangle \\ &+ \dots \\ &+ \langle \sigma_1(x_1) \sigma_2(x_2) \sigma_3(x_3) \rangle_{\text{GNOXO}} \propto N_c^{-1}, \end{aligned}$$

(se anula para $N_c = \infty$, pero queremos ver su valor para $1 \ll N_c < \infty$)

porque $\langle \hat{\sigma}_j(x) \rangle = 0$ (p. 368).

La receta GKPW nos dice que ($\mu \ll \lambda, N_c \gg 1$)

$$\langle \sigma_1(x_1) \sigma_2(x_2) \sigma_3(x_3) \rangle = - \frac{\delta}{\delta J_1(x_1)} \frac{\delta}{\delta J_2(x_2)} \frac{\delta}{\delta J_3(x_3)} \left(\mathcal{Z}_{\text{CFT}}[J_1, J_2, J_3] \right)_{J_j=0},$$

$$= - \frac{\delta}{\delta J_1(x_1)} \frac{\delta}{\delta J_2(x_2)} \frac{\delta}{\delta J_3(x_3)} \left(e^{-S_{\text{SIB}}[\phi_1^{\text{cl}}[J_1], \phi_2^{\text{cl}}[J_2], \phi_3^{\text{cl}}[J_3]]} \right)_{J_j=0},$$

así que necesitaremos el término $\propto \phi_1 \phi_2 \phi_3$ en S_{SIB} .
 ← posiblemente con derivadas

Tomemos como ejemplo el caso de 3 campos escalares

ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 con masas m_j , duals a operadores $\hat{\sigma}_j$ con

dimensiones $\Delta_j = 2 + \sqrt{4 + m_j^2 L^2}$, y con acción acoplamiento $\neq g_c$

$$S = \int d^2z d^4x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 ((\partial \phi_j)^2 + m_j^2 \phi_j^2) + g \phi_1 \phi_2 \phi_3 \right\}.$$

↑ normalización canónica

En la normalización convencional de SUBNA, ≠ canónica los campos ϕ_j

serían dimensionales, y tendríamos enfrente un factor

común de $1/G_N^{(5)} \propto N_c^2$ (p. 365), con ninguna otra

constante de acoplamiento en el integrando. Al pasar a la

normalización canónica por los ϕ_j , $\phi_{\text{SUBNA}} \propto \sqrt{G_N^{(5)}} \phi_{\text{canónico}}$,

entonces tenemos que $\frac{\phi_{\text{SUBNA}}^3}{G_N^{(5)}} \propto \sqrt{G_N^{(5)}} \phi_{\text{canónico}}^3$, por lo

que el acoplamiento cúbico es $g \propto \sqrt{G_N^{(5)}} \propto N_c^{-1}$ (de modo que la teoría efectivamente se vuelve libre por $N_c \rightarrow \infty$, como esperamos).

Como primer paso, en principio tendríamos ahora que resolver las ecu. de movimiento no lineales

$$(\square - m_1^2) \phi_1 = g \phi_2 \phi_3, \text{ etc. ,}$$

cosa que por supuesto no podemos hacer de manera exacta. Pero dado que $g \propto 1/N_c$ es pequeño, es natural trabajar en una expansión perturbativa en potencias de g , escribiendo

omitir el \leftarrow

$$\phi_1(x, z) = \phi_1^{(0)}(x, z)$$

soluciones a ecu. libres

\rightarrow

$$\equiv \phi_1^{(4)}(x, z)$$

$$+ g \int d^4z' d^4x' \sqrt{g} \underbrace{\mathcal{D}_{\Delta_1}(x, z; x', z')}_{\text{Propagador bulk-bulk (bulk-to-bulk)}}$$

Propagador bulk-bulk (bulk-to-bulk)

$$\text{tal que } (\square_{x, z} - m_1^2) \mathcal{D}_{\Delta_1} = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta(z-z') \delta^{(4)}(x-x')$$

\uparrow Función de Green solución normalizable

\leftarrow

$$\equiv \phi_1^{(2)}(x, z)$$

+ términos de orden g^2 (donde habría que tomar en cuenta además interacciones cuárticas en $S_{SII\beta}$),

y expresiones similares para ϕ_2 y ϕ_3 .

De la p. 378 sabemos que para satisfacer las condiciones de frontera

$$\phi_j(x, z) \xrightarrow{z \rightarrow \epsilon} \epsilon^{4-\Delta_j} J_j(x)$$

podemos escribir

$$\phi_j(x, z) = \int d^4 x' P_{\Delta}(x-x'; z) J_j(x'),$$

donde P_{Δ} es el propagador bulto-frontera (p. 379)

$$P_{\Delta}(x-x'; z, 0) = \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{\Delta/2} \Gamma(\Delta - \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{z^2 + (x-x')^2} \right)^{\Delta}$$

← solución homogénea
• (no función de Green)

Para ser más precisos, habríamos dicho que esta expresión se convierte en $z^{4-\Delta} \delta^{(4)}(x-x')$ cuando $z \rightarrow 0$, no cuando $z \rightarrow \epsilon$, así que, estrictamente, para imponer de manera correcta las condiciones de frontera en $z = \epsilon$ necesitaríamos el propagador bulto-frontera que llamemos $P_{\Delta}(x-x'; z, \epsilon)$ en la p. 378 (y que solo conocer en espacio de momentos). La diferencia entre ambos objetos resulta ser importante

para la función de 2 puntos [Freedman, Mathur, Matusis, Rastelli], pero no para correladores de $n \geq 3$ puntos, porque los integrales correspondientes tienen una dependencia de ϵ más benigna.)

Aunque en realidad no vamos a necesitar la forma explícita del propagador bulk-bulk, se puede mostrar (ver MAG00) que

$$G_{\Delta}(x, z; x', z') = C_{\Delta} \zeta^{-\Delta} F_1\left(\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta+1}{2}; \Delta+1-\frac{d}{2}; \frac{1}{\zeta^{\Delta}}\right),$$

↑ función hipergeométrica $\propto \zeta^{-\Delta}$ para $\zeta \rightarrow \infty$

con

$$C_{\Delta} = \frac{z^{-\Delta} \Gamma(\Delta)}{(2\Delta-d) \pi^{d/2} \Gamma(\Delta - \frac{d}{2})}, \quad \zeta \equiv \frac{z^2 + z'^2 + (x-x')^2}{2zz'}$$

← "distancia correl"
(calculada en $\mathbb{R}^{4,1} \supset \text{AdS}_5$)

(de tal forma que la distancia geodésica $d \equiv \int ds$ entre (x, z) y (x', z') está dada por $\cosh d = \zeta$). Puede

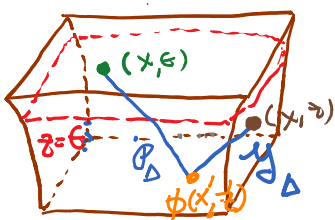
mostrarse también que la relación de G_{Δ} con el propagador bulk-frontera es

$$P_{\Delta}(x', z'; x) = \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{2\Delta-d}{\Delta}\right) z^{\Delta-d} \sqrt{\gamma} n \cdot \partial_z G_{\Delta}(x, z; x', z')$$

vector unitario normal a ∂AdS_5 , $n^m = (0, \frac{z}{L})$

↑ métrica inducida en ∂AdS_5 , $\gamma_{\mu\nu} = \frac{L^2}{z^2} \delta_{\mu\nu}$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{2\Delta-d}{\Delta}\right) z^{\Delta-d} \left(\frac{L}{z}\right)^d \left(\frac{z}{L}\right) \partial_z G_{\Delta}(x, z; x', z')$$



$\propto z^{\Delta}$ porque G_{Δ} tiene
 $\propto z$ compartimiento
 \uparrow si $x \neq x'$ normalizable

$$= \lim_{z \rightarrow 0} L^{\frac{d-1}{2}} \frac{(2\Delta - d)}{z^{\frac{d-1}{2}}} y_{\Delta}(x, z; x', z')$$

(lo cual puede verificarse usando la identidad de Green

$$\int_V d^d x \sqrt{g} \{ \overset{\text{se cancelan}}{\phi(\square - m^2)\psi} - \psi(\square - m^2)\phi \}$$

$$= \int_V d^d x \sqrt{g} \{ \phi n \cdot \partial \psi - \psi n \cdot \partial \phi \}$$

con $V = \text{AdS}_{d+1}$, $\phi = y_{\Delta}$, $\psi = \rho_{\Delta}$).

Ya con la solución para ϕ_j^{cl} en mano, podemos proceder al siguiente paso: sustituir en la acción. Después de integrar por partes, la acción toma la forma *omitir el solo m=z contribuye*

$$S = \int dz d^d x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \underbrace{(\phi_j (-\square + m^2) \phi_j)}_{=-g \phi_k \phi_l \text{ por ec. de mov.}} + \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_m (\sqrt{g} \phi_j g^{mn} \partial_n \phi_j) \right\} + g \phi_1 \phi_2 \phi_3$$

$$= \int_{z=\epsilon} d^d x \sqrt{g} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \phi_j g^{zz} \partial_z \phi_j - \frac{1}{2} g \int dz d^d x \sqrt{g} \phi_1 \phi_2 \phi_3$$

$$\sim \underbrace{\rho_{\Delta_j}}_{\phi_j^{(0)}} \cdot \underbrace{J_j}_{\phi_k^{(0)}} + g \underbrace{y_{\Delta_j}}_{\phi_k^{(0)}} \cdot \underbrace{\rho_{\Delta_k}}_{\phi_l^{(0)}} \cdot \underbrace{J_k}_{\phi_l^{(0)}} \cdot \underbrace{\rho_{\Delta_l}}_{\phi_l^{(0)}} \cdot \underbrace{J_l}_{\phi_l^{(0)}} + \dots$$

Notar que esto no es puramente un término de frontera.

Hay 2 maneras más de obtener términos proporcionales a $J_1 J_2 J_3$. Una es utilizar en el término cúbico de frontera la contribución de orden g^1 en uno de los ϕ_j y de orden g^0 en el otro, p.ej.,

$$\int_{z=\epsilon} d^4x \sqrt{g} \frac{1}{2} \phi_1 \int^{zz} \partial_z \phi_1$$

$$\supset \int_{z=\epsilon} d^4x \sqrt{g} \frac{1}{2} \left[g \int_{\Delta_1} d^5x' \sqrt{g} \mathcal{U}(x, x') \int_{\Delta_2} d^4x'' \mathcal{P}(x', x'') J_2(x'') \int_{\Delta_3} d^4x''' \mathcal{P}(x', x''') J_3(x''') \right]$$

$$\int^{zz} \partial_z \left[\int_{\Delta_1} d^4x'''' \mathcal{P}(x, x''') J_1(x''') \right],$$

$\phi_1^{(1)}(x)$

Se puede mostrar que este tipo de término no contribuye, por tener \mathcal{U}_Δ un comportamiento normalizable cuando $z \rightarrow \epsilon$ ($\mathcal{U}_\Delta \propto \epsilon^\Delta$).

La segunda manera de obtener $J_1 J_2 J_3$ es utilizar en el término cúbico en el bulk las contribuciones de orden g^0 en cada ϕ_j (las contribuciones de orden más alto contienen más J de las 3 que estamos buscando).

Sustituyendo en S y tomando las 3 derivadas funcionales, obtenemos entonces

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \mathcal{O}_3(x_3) \rangle$$

$$= \frac{g}{2} \int d^2z d^4x \sqrt{g} P_{\Delta_1}(x-x_1; z) P_{\Delta_2}(x-x_2; z) P_{\Delta_3}(x-x_3; z),$$

↑ dependencia esperada $\propto 1/N_c$

expresión que se puede resumir diagramáticamente como

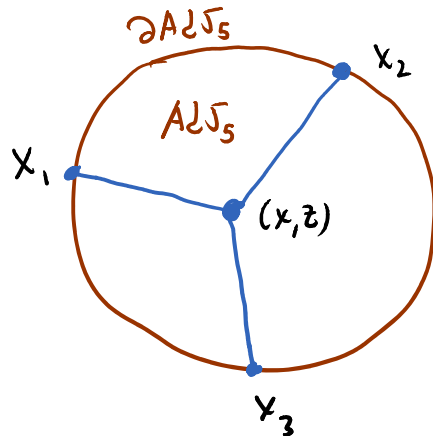


Diagrama como si fuera ADS5 global, con z saliendo de la página (por puntos externos pueden estar a distinto z)

donde cada línea denota un propagador bulk-frontera, y el vértice cúbico es el que se lee de la acción original en el bulk S , con las reglas de Feynman usuales.

Usando la expresión explícita para P_{Δ} que tenemos en la p.390, se puede mostrar que la integral transforma de la manera esperada bajo el grupo conforme, así que obtenemos correctamente

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \mathcal{O}_3(x_3) \rangle = \frac{1}{N_c} \frac{C_{123}}{|x_{12}|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_{13}|^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2} |x_{23}|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1}}$$

← de. de orden N_c^0

en acuerdo con la estructura que discutimos en la p. 370. ✓

Sabemos que, en general, C_{123} puede depender de λ y N_c , pero [Lee, Minwalla, Rangamani, Seiberg] encuentran que para los primarios quirales $\text{Tr}(\Phi^{e_1} \dots \Phi^{e_3})$ la cuenta en AdS ($\lambda \rightarrow \infty$) arroja exactamente el mismo resultado que en MSYM libre ($\lambda \rightarrow 0$). Esto naturalmente motivó la conjetura de que C_{123} para este tipo de operadores es independiente de λ . Cálculos en MSYM aportaron evidencia para esta conjetura [D'Hoker, Freedman, Skiba], y condujeron a otra más fuerte todavía: que C_{123} es además independiente de N_c , es decir, que las funciones

de 3 puntos de primarios $\frac{1}{2}$ BPS "no se renormalizan". ← El mismo resultado a todo orden

Un correlador de 3 puntos se resulta particularmente interesante es el de las corrientes de Noether J_a^M ($a=1, \dots, 15$) asociadas a la simetría $SU(4)_R$ (p. 315), que están en el mismo multiplete superconforme que $\text{Tr}(\Phi^i \Phi^j)$ y $T_{\mu\nu}$.

En MSYM, se puede calcular ϵ_{123} contracción en γ^{λ}

$$\langle J_a^{\mu}(x_1) J_b^{\nu}(x_2) J_c^{\rho}(x_3) \rangle = -\frac{N_c^2 - 1}{32\pi^6} \text{id}_{abc} \frac{\text{Tr}(Y_5 Y_{12}^{\mu} Y_{23}^{\nu} Y_{31}^{\rho})}{x_{12}^4 x_{23}^4 x_{31}^4}$$

\uparrow $\text{Tr}(\psi\bar{\psi}) + \dots$ fermiones parte impar bajo permutación (hay también una parte par)

con $d_{abc} \equiv 2\text{Tr}(T_a \{T_b, T_c\})$. generadores de $SU(4)_R$

Este correlador implica que si acoplamos estas corrientes a un campo de norma $SU(4)_R$ externo A_{μ} (\neq campo gluónico A_{μ}) tendremos \uparrow $SU(N_c)$

\uparrow fuente "J" para $\sigma = J^{\mu}$

$S_{\text{MSYM}} + \int d^4x J^{\mu} A_{\mu}$

$$\langle (D_{\mu} J^{\mu})_a \rangle_{d_{\mu}} = \frac{N_c^2 - 1}{384\pi^2} \text{id}_{abc} \underbrace{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu}^b F_{\rho\sigma}^c}_{F_{\mu\nu}^b \tilde{F}^{c\mu\nu}}$$

es decir, la corriente NO se conserva. Este efecto se conoce como la anomalía quiral (se origina del hecho de que la simetría $SU(4)_R$ en MSYM es quiral, es decir, trata distinto a los fermiones izquierdos $\psi^f \in \underline{4} = \square$ y a los derechos $\bar{\psi}_f \in \bar{\underline{4}} = \square \neq \underline{4}$).

El punto importante es que se sabe que el resultado

para la anomalía calculada a un lazo es exacto (este es el contenido del teorema de Adler-Bardeen), de modo que el cálculo en ADS está obligado a reproducirlo.

Y efectivamente, ¡lo hace! [Witten; Freedman, Mathur, Mathur, Rastelli; Chalmers, Nastase, Schalm, Siebelnik; ver por ej. MAG00 o Nastase]. El ingrediente clave es que la SUBGA normal de $N=8$ en AdS_5 (\subset SUBGA $\#B$ en $AdS_5 \times S^5$, ver p. 322) contiene un acoplamiento tipo Chern-Simons

para el campo de norma $A_m^a(x, z)$ dual a J_a^m :

$$S_{SII B} \supset S_{YM} [A] + S_{CS} [A] \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{camp en el multiplete del gravitón (p. 321)} \\ \text{cuy valor en } AdS_5 \text{ es fuente para } J_a^m \end{array}$$

$$\frac{i N_c^2}{96 \pi^2} \int_{AdS_5} d^5 x \text{Tr} (A \wedge F \wedge \tilde{F}) + \dots$$

$\supset A_3 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$

que reproduce perfectamente la anomalía para $N_c \rightarrow \infty$.

Notar por cierto que $SU(4)_R$ es global en M2YM y local en CIIB.

Siempre simetría global continua de QFT \leftrightarrow simetría local de gravedad.

$\uparrow J_\mu, T_{\mu\nu}$ $\uparrow A_m, h_{mn}$

Se puede obtener un cuerpo similar para la llamada anomalía conforme (o de Weyl), que se refiere al hecho de que una CFT no tiene $\langle T_\mu^\mu \rangle = 0$ cuando se le acpla a una métrica externa que no es plana. En AdS , la

← grupo de isometrías

violación de $SO(4,2)$ proviene de los contratérminos S_{ct} que es indispensable agregar para que los correladores de $T_{\mu\nu}$ estén bien definidos [Henningson, Skenderis].

Resulta muy impresionante que los anomalías, que son efectos netamente cuánticos en MSYM, se reproducen clásicamente en CMB.

Para correladores de $n \geq 4$ puntos, la receta GKPW también se puede resumir gráficamente, en términos de los llamados diagramas de Witten. Pej., para $n=4$,

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \cdots \mathcal{O}_4(x_4) \rangle_{\text{canon}} =$$

donde la novedad es que empieza a figurar el propagador bulto-bulto (para todos los campos que pueden intercambiarse) y el vértice cúrtico en el bulto (si lo hay).

Los cálculos en AdS arrojan resultados compatibles con la expansión del producto de operadores (OPE) esperada en la CFT,

y revelan una sorpresa: los correladores de $n \geq 4$ puntos que son "extremales" y "cuasi-extremales" no se renormalizan.

$\langle \sigma_1 \dots \sigma_n \rangle$ se llama extremal si $\Delta_1 = \Delta_2 + \dots + \Delta_n$ (porque el correlador se anulará para $\Delta_1 > \Delta_2 + \dots + \Delta_n$ por teoría de reps de $su(4)_R$, o más fácil, porque algunos campos bárricos Φ^e quedarían sin contrar).
El caso cuasi-extremal (next-to-extremal) es

$$\Delta_1 = \Delta_2 + \dots + \Delta_n - 2.$$

El conjunto de resultados para funciones de correlación de $n \geq 2$ puntos nos da entonces varias verificaciones adicionales de la correspondencia y de la receta BKTW. En particular, nos permite comprobar que M5YM no solo contiene gravitones (y sus superparientes) como partículas que son libres en el límite $N_c \rightarrow \infty$, sino que codifica correctamente las interacciones entre estas partículas, orden por orden en la expansión perturbativa en potencias de $1/N_c$. Para $\lambda \rightarrow \infty$, las interacciones de los gravitones (\leftrightarrow correladores de $T_{\mu\nu}(x)$) llenan realidad son justo como dice Einstein!!

Una observación útil es que, en el desarrollo asintótico

$$\phi(x, z) \xrightarrow{z \rightarrow \epsilon} \epsilon^{d-\Delta} (J(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)) + \epsilon^\Delta (V(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2)),$$

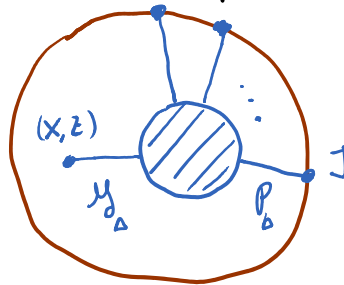
↑ fuente para \mathcal{O}_Δ
↑ ojo: puede dominar sobre ϵ^Δ

el coeficiente $V(x)$ que domina en la porción normalizable tiene una interpretación física directa: los cálculos revelan que

$$\bar{V}(x) = \frac{1}{2\Delta-d} \langle \mathcal{O}(x) \rangle_J \equiv \frac{1}{2\Delta-d} \langle \mathcal{O}(x) e^{\int d^d x' \mathcal{O}(x') J(x')} \rangle,$$

es decir, $\bar{V}(x)$ es el valor esperado del operador \mathcal{O} en presencia de la fuente externa J .

Para mostrar esto, notamos que, por un lado,

$$\phi(x, z) =$$


← suma sobre diagramas con cualquier número de Js

$$= \int d^d x' dz' Y_\Delta(x', z'; x, z) F_J(x', z'),$$

y por otro,

$$\langle \mathcal{O}(x) \rangle_J = \frac{\delta}{\delta J(x)} \left[\overset{Z_{\text{AdS}}[J]}{\text{Diagram}} \right] = \times \text{Diagram}$$

↑ suma sobre número de Js