

o lo que es lo mismo,

$$g_{mn} dx^m dx^n = \frac{L^2}{z^2} \left\{ dx^\mu dx_\mu + dz^2 + \mathcal{O}(z^4) \right\}.$$

↖ modos sujetos a cuantización

Para el resto de los campos debemos utilizar una prescripción similar: si queremos el fondo dual a una CFT específica, como $\mathcal{N}=4$ SYM, exigimos que los modos NO normalizables estén apagados, al tiempo que permitimos que los modos normalizables puedan estar encendidos. Esto es entonces también parte de lo que queremos decir en el contexto de AdS/CFT al hablar de un fondo "asintóticamente AdS".

Encender modos NO normalizables, modificando las condiciones de frontera, significa cambiar de teoría.

Recordando que esto es justamente lo que necesitamos hacer para calcular la funcional generatriz

$$Z_{\text{CFT}}[J_j] \equiv \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi^e \mathcal{D}\Psi^f \exp \left[iS_{\text{HSM}} + i \sum_j \int d^4x \mathcal{O}_j(x) J_j(x) \right]$$

$iS_{\text{CFT de forma de ...}}$

veremos que es natural proponer la identificación

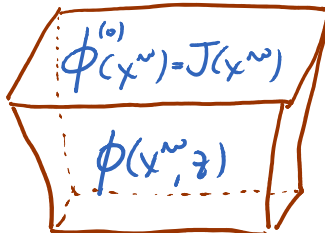
$$** \quad Z_{\text{CFT}}[J_j] = Z_{\text{AdS}}[\phi_j^{(0)} = J_j] \quad \text{Receta GKPW}$$

[Gubser, Klebanov, Polyakov; Witten], donde

$$Z_{\text{AdS}}[\phi_j^{(0)}] \equiv \int \mathcal{D}\varphi_\ell \mathcal{D}h_\ell^{mn} \mathcal{D}B_\ell^{mn} \dots \exp[iS_{\text{CIIB}}]$$

con $\lim_{z \rightarrow 0} \phi_j(x^\mu, z) = z^{4-\Delta_j} \phi_j^{(0)}(x^\mu)$.

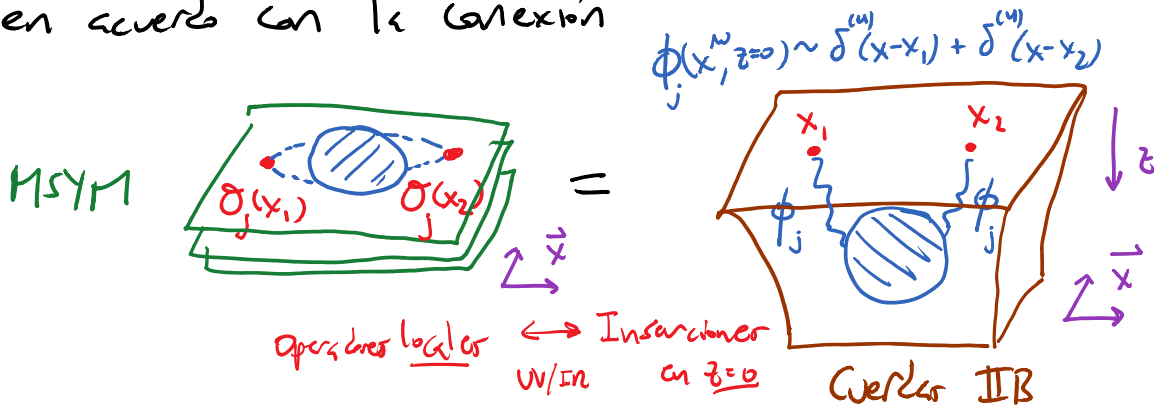
(de solo si $\Delta_j = 4$ (como $\text{Tr}(F^2)$ o $T_{\mu\nu}$)



Es decir, el valor de frontera $\phi_j^{(0)}(x^\mu) \equiv \lim_{z \rightarrow 0} z^{\Delta_j-4} \phi_j(x^\mu, z)$ del campo $\phi_j(x^\mu, z)$ se interpreta como la fente $J_j(x^\mu)$ del operador dual $\mathcal{O}_j(x^\mu)$.

Para calcular funciones de correlación $\langle \mathcal{O}_j(x_1) \mathcal{O}_j(x_2) \dots \rangle$, encendemos estas fuentes solo en los puntos específicos x_1^μ, x_2^μ, \dots , es decir, ponemos $\phi_j^{(0)}(x) \sim \delta^{(4)}(x-x_j)$,

en acuerdo con la conexión



que habíamos visualizado (en la p.353) a partir de la deducción de la correspondencia.

La identificación de BKPW entre las funciones de partición implica que el diccionario de AdS/CFT incorpora la interpretación de los modos sí/no normalizables que ya tenemos del lado de AdS:

Encender modos NO normalizables de $\phi_j(x, z)$, \leftrightarrow Cambiar la TEORÍA por $\delta S = \int d^4x \sigma_j(x) \phi_j^{(0)}(x)$

$\phi_j(x, z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^{4-\Delta} \phi_j^{(0)}(x)$

Encender modos SÍ normalizables de $\phi_j(x, z)$, \leftrightarrow Cambiar el ESTADO a $\sim u_{j_n}(x) a_n^\dagger |0\rangle$

$\phi_j(x, z) \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^\Delta \left[\sum_n u_{j_n}(x) a_n^\dagger + c.h. \right]$

[Balasubramanian, Kraus, Lawrence; Banks, Douglas, Horowitz, Martinez].

Cabe señalar que, debido a que nuestro análisis del campo escalar en la p. 358 mostró que los modos $\phi_{\pm}(x, z) \sim z^{\Delta_{\pm}} \phi^{(0)}(x)$ son NO normalizables cuando $m^2 L^2 > -3$, mientras que la cota de Breitenlohner-Freedman (pp. 319-20) exige solo que $m^2 L^2 \geq -4$ para tener estabilidad del fondo, hay una pequeña ventana

$$\boxed{-4 \leq m^2 L^2 < -3} \quad \left(-\frac{d^2}{4} \leq m^2 L^2 < -\frac{d^2}{4} + 1 \text{ en } \text{AdS}_{d+1} \right)$$

en donde tanto $\phi_+ \sim z^{\Delta_+}$ como $\phi_- \sim z^{\Delta_-}$ son de hecho normalizables. En ese caso es consistente fijar ϕ_- por condiciones de frontera y tomar a ϕ_+ como fluctuante, ó fijar ϕ_+ por condiciones de frontera y tomar a ϕ_- como fluctuante. Estos 2 distintos cuantizaciones son duales a 2 distintos CFTs, donde el operador \mathcal{O} dual a ϕ tiene respectivamente $\Delta = \Delta_+$ ó $\Delta = \Delta_-$. [Klebanov, Witten].

En general no sabemos calcular Z_{AdS} . Si

$\lambda \equiv g_{\text{YM}}^2 N_c \gg 1$, entonces podemos restringir atención a los modos de SUGRA IIB en 9+1 dim (pp. 157-8),

$$S_{\text{SIB}} = \frac{1}{16\pi G_N^{(10)}} \int d^{10}x \sqrt{-g^{(10)}} \left\{ R^{(10)} - \frac{1}{2} \partial_m \varphi \partial^m \varphi + \dots \right\},$$

o, después de la descomposición en modos de KK sobre la S^5 ,

$$S_{\text{SIB}} = \frac{1}{16\pi G_N^{(5)}} \int d^5x \sqrt{-g^{(5)}} \left\{ R^{(5)} - \frac{1}{2} \partial_m \varphi \partial^m \varphi + \dots \right\},$$

incluye torre de KK ↗

donde

$$\frac{1}{16\pi G_N^{(5)}} \equiv \frac{\text{Vol}(S^5)}{16\pi G_N^{(10)}} = \frac{L^5 \Omega_5}{16\pi G_N^{(10)} L^3} = \frac{(4\pi g_c N_c l_c^4)^2 \pi^3}{(2\pi)^7 g_c^2 l_c^8 L^3} = \frac{N_c^2}{8\pi^2 L^3}.$$

Para $N_c \rightarrow \infty$, esta acción $S_{\text{SIB}} \propto N_c^2$ se vuelve muy grande, justo como cualquier acción $\frac{S}{\hbar}$ en el límite clásico $\hbar \rightarrow 0$, así que la función de partición puede calcularse en la aproximación de punto de silla (o de fase estacionaria),

$$Z_{\text{AdS}}[\phi_j^{(0)}] \equiv \int \mathcal{D}\varphi_l \mathcal{D}h_l^{mn} \mathcal{D}B_l^{mn} \dots e^{iS_{\text{SUGRA}}[\phi_j]} \\ \lim_{z \rightarrow 0} \phi_j(x^m, z) = z^{4-\Delta_j} \phi_j^{(0)}(x^m) \stackrel{\text{6KPW}}{=} J_j(x^m) \\ \simeq_{N_c \rightarrow \infty} \exp \left\{ iS_{\text{SUGRA}}[\phi_j^{\text{cl}}[\phi_j^{(0)}]] \right\} \Big|_{\lim_{z \rightarrow 0} \phi_j^{\text{cl}}(x^m, z) = z^{4-\Delta_j} \phi_j^{(0)}(x^m)}$$

donde ϕ_j^{cl} denota la solución a las eqs. de mov. de SUGRA (es decir, el perfil de los campos que extremiza a S_{SUGRA}) con las condiciones de frontera dadas.

AJT que para $\lambda, N_c \gg 1$, podemos determinar las funciones de correlación de MSYM a través de un cálculo en AdS, que involucra simplemente resolver las eqs. de mov. clásicas de SUGRA!

Antes de explicar cómo se realizan los cálculos del lado de gravedad, conviene tener claro qué es lo que esperamos del lado de la teoría de norma. En cualquier CFT, la forma de los correladores está fuertemente restringida por la simetría conforme.

En la p. 296 vimos la manera en que se comportan los operadores primarios bajo transformaciones conformes infinitesimales. Concentrándonos por simplicidad en el caso de operadores escalares $\mathcal{O}_j(x)$ con dimensión Δ_j , la versión finita de la regla de transformación bajo $x \rightarrow x'(x)$ es

$$\mathcal{O}_j(x) \rightarrow \underbrace{\left| \det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right|^{\Delta_j/d}}_{\text{jacobiano de matriz } d \times d} \mathcal{O}_j(x') .$$

dimensión espectral temporal

P.ej., bajo una dilatación $x' = sx \Leftrightarrow \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = s \delta_\nu^\mu$,

$$\mathcal{O}_j(x) \rightarrow s^{\Delta_j} \mathcal{O}_j(sx), \text{ como ya sabemos.}$$

Consideremos ahora funciones de correlación de n puntos, en el vacío invariante conforme.

- $n=1$: Por invariancia bajo traslaciones, $\langle \mathcal{O}_j(x) \rangle$ debe ser constante. Pero bajo una dilatación,

$$\langle \mathcal{O}_j(x) \rangle \rightarrow s^{\Delta_j} \underbrace{\langle \mathcal{O}_j(sx) \rangle}_{= \langle \mathcal{O}_j(x) \rangle},$$

así que solo tenemos invariancia si $\Delta_j = 0$ (en cuyo caso $\sigma_j < 1$) o si $\langle \sigma_j(x) \rangle = 0$. En resumen,

$$\langle \sigma_j(x) \rangle = \delta_{\Delta_j, 0} \quad \cdot$$

← delta de Kronecker

• $n=2$: Por invariancia bajo Poincaré, $\langle \sigma_1(x_1) \sigma_2(x_2) \rangle$ solo puede depender de $(x_1 - x_2)^2$, es decir,

$$\langle \sigma_1(x_1) \sigma_2(x_2) \rangle = f(|x_1 - x_2|).$$

Bajo dilataciones debemos tener

$$\begin{aligned} f(|x_1 - x_2|) &= \langle \sigma_1(x_1) \sigma_2(x_2) \rangle = s^{\Delta_1 + \Delta_2} \langle \sigma_1(sx_1) \sigma_2(sx_2) \rangle \\ &= s^{\Delta_1 + \Delta_2} f(s|x_1 - x_2|), \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$f(|x_1 - x_2|) = \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} \quad \cdot$$

Por último, notando que bajo una transformación

conforme especial

$$x^w \rightarrow x'^w = \frac{x^w + b^w x^2}{1 + 2b \cdot x + b^2 x^2} \quad \text{se tiene}$$

$$(x'_1 - x'_2)^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2}{(1 + 2b \cdot x_1 + b^2 x_1^2)(1 + 2b \cdot x_2 + b^2 x_2^2)}$$

$$y \quad \left| \det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right| = \frac{1}{|1 + 2b \cdot x + b^2 x^2|^d}, \quad \sigma_j(x) \rightarrow \left| \det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right|^{\Delta_j/d} \sigma_j(x')$$

La invariancia de $\langle \sigma_1(x_1) \sigma_2(x_2) \rangle$ equivale a

$$\begin{aligned} \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} &= \left| \det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right|^{\frac{\Delta_1}{d}} \left| \det \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right) \right|^{\frac{\Delta_2}{d}} \langle \sigma_1(x'_1) \sigma_2(x'_2) \rangle \\ &= \frac{C_{12} (1 + 2b \cdot x_1 + b^2 x_1^2)^{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}} (1 + 2b \cdot x_2 + b^2 x_2^2)^{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}}}{|1 + 2b \cdot x_1 + b^2 x_1^2|^{\Delta_1} |1 + 2b \cdot x_2 + b^2 x_2^2|^{\Delta_2} |x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} \end{aligned}$$

Si $C_{12} \neq 0$, esto solo se satisface si $\Delta_1 = \Delta_2$.

En resumen,

$$\langle \sigma_1(x_1) \sigma_2(x_2) \rangle = \delta_{\Delta_1, \Delta_2} \frac{C_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}}$$

L24: 10/11/16

(donde C_{12} podría escalarse a 1 ajustando la normalización de los operadores).

En particular, $\langle \sigma(x_1) \sigma(x_2) \rangle = |x_1 - x_2|^{-2\Delta}$ implica

que una manera de determinar la dimensión de un operador σ es calcular su función de 2 puntos.

- $n=3$: Un análisis similar [ver MA600] permite mostrar que

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1) \mathcal{O}_2(x_2) \mathcal{O}_3(x_3) \rangle = \frac{C_{123}}{|x_{12}|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_{13}|^{\Delta_1 + \Delta_3 - \Delta_2} |x_{23}|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1}}$$

Con $x_{ij} \equiv x_i - x_j$. Después de normalizar los funciones de 2 puntos a 1, las constantes C_{123} son características de la teoría. Están relacionadas con la expansión del producto de operadores, OPE: $\mathcal{O}_i(x) \mathcal{O}_j(0) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sum_k |x|^{\Delta_k - \Delta_i - \Delta_j} C_{ijk} \mathcal{O}_k(0)$, y en general dependen de los parámetros/acoplamiento de la teoría (en el caso de MSYM, g_{YM}^2 y N_c , ó λ y N_c).

- $n \geq 4$: Aquí la dependencia espaciotemporal deja de estar determinada por completo, porque con $n \geq 4$ variables x_j^m se pueden formar combinaciones invariantes conformes del tipo

$$X_{1234} \equiv \frac{x_{12} x_{34}}{x_{13} x_{24}},$$

conocidos como "cocientes cruzados" (cross-ratios) o "cocientes anarmónicos." Para una función de n puntos

← = 2 para n=4

existen $n(n-3)/2$ cuentes cruzador independientes.

Utilizando la invariancia conforme, se puede identificar la forma de los correladores salvo por una función de los correspondientes cuentes cruzador. P.ej.,

$$\langle \tilde{O}_{j_1}(x_1) \tilde{O}_{j_2}(x_2) \tilde{O}_{j_3}(x_3) \tilde{O}_{j_4}(x_4) \rangle = f\left(\frac{x_{12}x_{34}}{x_{13}x_{24}}, \frac{x_{12}x_{34}}{x_{23}x_{14}}\right) \prod_{i < j} x_{ij}^{\frac{\Delta}{3} - \Delta_i - \Delta_j}$$

con $\Delta \equiv \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$

Podemos regresar ahora a la receta GKPW para correladores (para $N_c \gg 1, \lambda \gg 1$),

$$\langle \tilde{O}_{j_1}(x_1) \dots \tilde{O}_{j_n}(x_n) \rangle = \frac{\delta}{i\delta J_{j_1}(x_1)} \dots \frac{\delta}{i\delta J_{j_n}(x_n)} \left[e^{iS_{\text{SII B}}[\phi_j^d[J_j]]} \right]_{J_j=0}$$

$\phi_j^d \xrightarrow{z \rightarrow 0} z^{4-\Delta} J_j$

Queda claro de esta fórmula que para determinar la función de 2 puntos de algún operador \tilde{O} , basta con considerar los términos de $S_{\text{SII B}}$ que son cuadráticos en el campo dual ϕ .

Si lo que queremos es el **correlador de 2 puntos**

ordenado en el tiempo, es decir, el propagador de Feynman,
(que es el que calcula en automático la integral funcional),

$$\langle 0 | T \{ \phi_{j_1}(x_1) \phi_{j_2}(x_2) \} | 0 \rangle,$$

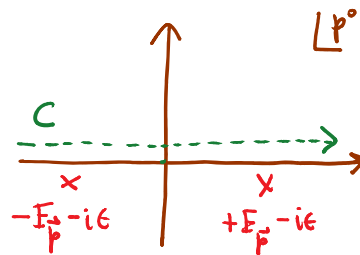
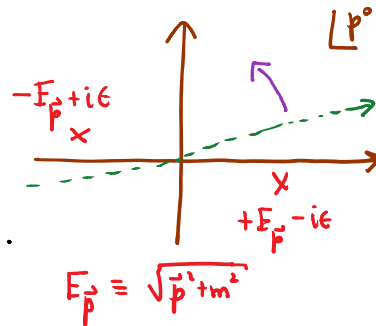
↖ orden temporal: tiempo aumenta de derecha a izquierda
podemos obtenerlo en una rotación de Wick a partir de
la versión euclídea de la correspondencia. (Recordar
que la prescripción del $+i\epsilon$ que
implementa el orden temporal
justamente permite la rotación de Wick.

p.ej., para un campo libre,

$$\langle T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{ip \cdot (x_1 - x_2)}}{-p^2 - m^2 + i\epsilon} \leftarrow = \frac{1}{[p^0 - (E_p - i\epsilon)][p^0 + (E_p - i\epsilon)]}.$$

Este No es el caso para correladores No ordenados en el
tiempo, como p.ej., el propagador
retardado

$$\langle \theta(x_1^0 - x_2^0) [\phi(x_1), \phi(x_2)] \rangle = \int_C \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i e^{ip \cdot (x_1 - x_2)}}{-p^2 - m^2}.$$



El primer paso en el cálculo del correlador será entonces resolver la ecuación de movimiento para ϕ en la versión euclídea de AdS_5 (es decir, el espacio hiperbólico 5-dimensional, H_5). Tomemos por simplicidad el caso de un campo escalar con masa m (como p.ej. los modos de KK del dilatón, $\phi_\ell(x)$, con $m^2 L^2 = \ell(\ell+4)$),

$$S = c \int dz d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right]$$

cte. de normalización

$$\propto \frac{1}{L^5} \propto N_c^2 \quad \text{p. 365}$$

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (dx_4^2 + d\vec{x}^2 + dz^2)$$

$$\Rightarrow (\square - m^2)\phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_m (g^{mn} \sqrt{g} \partial_n \phi) - m^2 \phi = 0,$$

es decir (p. 355)

$$z^5 \partial_z \left(\frac{\partial_z \phi}{z^3} \right) + z^2 \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - m^2 L^2 \phi = 0.$$

↑

Podemos descomponer en modos de Fourier a lo largo

de x^μ , $\phi(x, z) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot x} \tilde{\phi}(p, z)$, obteniendo

$$z^5 \partial_z \left(\frac{\partial_z \tilde{\phi}}{z^3} \right) - z^2 \underbrace{\delta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu}_{\equiv p^2} \tilde{\phi} - m^2 L^2 \tilde{\phi} = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$J^5 \partial_J \left(\frac{\partial_J \tilde{\phi}}{J^3} \right) - J^2 \tilde{\phi} - m^2 L^2 \tilde{\phi} = 0,$$

con $J \equiv p\bar{z}$. Si ahora ponemos $\tilde{\phi}(J) = J^2 B(J)$, la ecuación para B resulta ser la de Bessel modificada,

$$J^2 \partial_J^2 B + J \partial_J B - (J^2 + \nu^2) B = 0 \quad \text{con } \nu = \sqrt{4 + m^2 L^2},$$

de modo que encontramos 2 soluciones independientes,

$$\tilde{\phi}(J) = \begin{cases} c' J^2 K_\nu(J) \\ c'' J^2 I_\nu(J) \end{cases} \quad \text{con } \nu = \sqrt{4 + m^2 L^2} = \Delta - 2. \quad \begin{matrix} \swarrow m^2 L^2 = \Delta(\Delta - 4) \text{ p.328} \end{matrix}$$

Descartamos la segunda opción porque diverge exponencialmente

para $J = p\bar{z} \rightarrow \infty$, así que no da una contribución $\neq 0$ a

$Z = \exp(-S[\phi])$. Nos quedamos en solución tal que $\tilde{\phi} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \text{finito}$.

Notar que $z \rightarrow \infty$ es donde estaría el horizonte de Penrose

en la versión lorentziana, para la cual, cuando $p^2 < 0$, las

2 soluciones I_ν y K_ν se convierten en J_ν y $H_\nu^{(1)}$, que tienen comportamiento oscilatorio en lugar de exponencial.

Los correladores no ordenados en el tiempo, o los

correladores si ordenados en el tiempo pero tomados

en un estado distinto al vacío, se distinguirán por tener una condición de frontera diferente en $z \rightarrow \infty$

[Herzog, Son hep-th/0212072] y [Skenderis, van Rees 0812.2909].

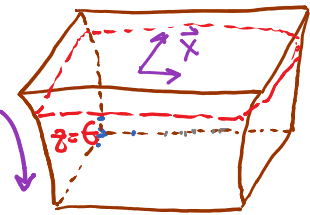
La solución $\phi(x, z) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \tilde{\phi}_0(p) e^{ip \cdot x} J^\nu K_\nu(z)$ queda completamente determinada en cuanto imponemos la condición de frontera en $z=0$, $\phi(x, z) \rightarrow z^{4-\Delta} \phi_0(x)$ con $\phi_0(x) = J(x)$. ↖ fuente arbitraria

Pero antes de hacer esto, recordemos que nuestro siguiente paso sería sustituir la solución obtenida, $\phi[J]$, en la acción $S \sim \int_0^\infty dz d^4 x \sqrt{g} \dots$. En general, esta integral será divergente en $z \rightarrow 0$, por la sencilla razón de que el volumen del espacio diverge ahí, $\sqrt{g} \sim (L/z)^5$. Por la conexión UV/IR (p.262), esta divergencia IR en AdS corresponde a una divergencia UV en la CFT, que es precisamente lo que esperamos encontrar al calcular correladores.

Debemos entonces enfrentarnos con un procedimiento análogo al que es estándar en teoría de campos (pp.32-35), modificando temporalmente la teoría a través de

algún método de regularización (para que las divergencias se vuelvan cantidades manejables), y después renormalizando por medio de contra términos que permiten obtener resultados finitos al retirar la regularización.

Como el problema se origina de la región $z \rightarrow 0$, es natural regularizar truncando la integral $\int_0^{\infty} dz$ a $\int_{\epsilon}^{\infty} dz$. Por la conexión UV/IR, esto debe corresponder básicamente a un corte UV en nuestra escala de resolución espacial de la CFT, $l \geq \epsilon$, o energética, $|p| \leq \Lambda \sim 1/\epsilon$, aunque preserva la invariancia de Lorentz y de norma, así que no puede ser exactamente un 'corte de fuerza bruta'. (Recordar que al regularizar una teoría de norma, como HSYM , un corte de fuerza bruta rompe la invariancia de norma, y es por ello que normalmente recurrimos a la regularización dimensional. Lo malo es que este método solo está definido a nivel perturbativo.



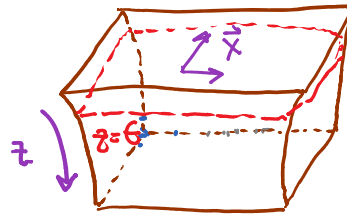
El único método no perturbativo invariante de norma conocido es la regularización por retícula, el cual NO es invariante de Lorentz. Mágicamente, después de pasar a la descripción de gravedad, la correspondencia AdS/CFT nos permite implementar un método de regularización (que es a la vez no perturbativo, invariante de Lorentz, e invariante de norma!)

Como condición de frontera, pediremos entonces que

$$\phi(x^\mu, z) \xrightarrow{z \rightarrow \epsilon} \epsilon^{4-\Delta} J(x^\mu),$$

o, en espacio de momentos,

$$\tilde{\phi}(p, z) \xrightarrow{z \rightarrow \epsilon} \epsilon^{4-\Delta} \tilde{J}(p).$$



Maximamente, esto equivale a insertar una fuente que no está completamente localizada, sino extendida en una región de tamaño $\sim \epsilon$.

Usando la solución que encontramos en la p. 374,

$$\tilde{\phi}(p, z) = c' (pz)^2 K_\nu(pz) \quad \text{con } \nu = \Delta - 2,$$

claramente debemos elegir $c' = \frac{\epsilon^{4-\Delta} \tilde{J}(p)}{(p\epsilon)^2 K_{\Delta-2}(p\epsilon)}$, y

concluimos entonces que

$$\tilde{\phi}(p, z) = \frac{(pz)^2 K_{\Delta-2}(pz)}{(p\epsilon)^2 K_{\Delta-2}(p\epsilon)} \epsilon^{4-\Delta} \tilde{J}(p)$$

El factor que aparece frente a la fuente $\tilde{J}(p)$ se conoce como el propagador bulk-frontera (bulk-to-boundary) en espacio de momento:

$$\tilde{\mathcal{P}}_{\Delta}(p; z, \epsilon) \equiv \frac{z^2 K_{\Delta-2}(pz)}{\epsilon^2 K_{\Delta-2}(p\epsilon)} \epsilon^{4-\Delta}$$

Es una solución a la ec. de Klein-Gordon homogénea (no una función de Green) finita en $z \rightarrow \infty$ y con la propiedad de que

$$\phi(x, z) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot x} \tilde{\phi}(p, z)$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot x} \tilde{\mathcal{P}}_{\Delta}(p; z, \epsilon) \tilde{J}(p)$$

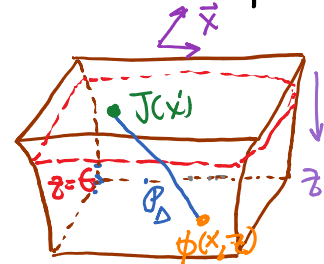
$$\int d^4 x' e^{-ip \cdot x'} J(x')$$

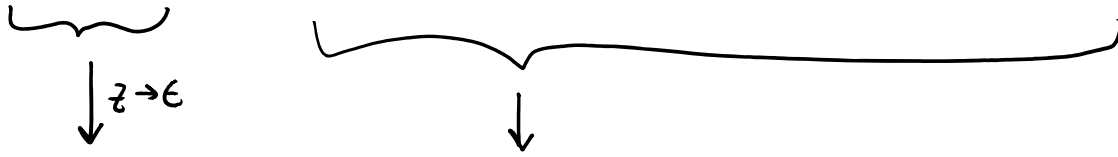
$$= \int d^4 x' \underbrace{\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x-x')} \tilde{\mathcal{P}}_{\Delta}(p; z, \epsilon)}_{\mathcal{P}_{\Delta}(x-x'; z, \epsilon)} J(x')$$

$$\equiv \mathcal{P}_{\Delta}(x-x'; z, \epsilon)$$

propagador bulk-frontera
en espacio de posiciones

← Núcleo (kernel)
que propaga desde (x', ϵ)
hasta (x, z)





$$\epsilon^{4-\Delta} J(x) = \int d^4 x' P_{\Delta}(x-x'; \epsilon, \epsilon) J(x') \quad \forall J,$$

es decir,
$$z^{\Delta-4} P_{\Delta}(x-x'; z, \epsilon) \xrightarrow{z \rightarrow \epsilon} \delta^{(4)}(x-x').$$

Se puede mostrar [ver p.ej. D'Hoker, Freedman] que

$$P_{\Delta}(x-x'; z, \epsilon) = \frac{\Gamma(\Delta)}{\pi^{\Delta/2} \Gamma(\Delta - \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{z^2 + (x-x')^2} \right)^{\Delta}$$

(Para $\epsilon > 0$, no se tiene una expresión exacta en espacio de posiciones.)

Con la solución $\phi^{cl}(x, z)$ en mano, podemos ahora

calcular

$$S_{\epsilon}[\phi^{cl}[J]] = \frac{c}{2} \int_{\epsilon}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \sqrt{g} \left\{ g^{mn} \partial_m \phi^{cl} \partial_n \phi^{cl} + m^2 (\phi^{cl})^2 \right\}$$

partes

$$= \frac{c}{2} \int_{\epsilon}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \sqrt{g} \left\{ -\phi^{cl} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_m (\sqrt{g} g^{mn} \partial_n) \phi^{cl} + m^2 (\phi^{cl})^2 \right\}$$

$$- \phi^{cl} (\square - m^2) \phi^{cl} \rightarrow 0$$

$$+ \frac{c}{2} \int_{\epsilon}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} d^4 x \partial_m \left\{ \sqrt{g} g^{mn} \phi^{cl} \partial_n \phi^{cl} \right\},$$

← solo contribuye z ,
dirección en la cual tenemos $\partial \Delta S_{\epsilon}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{g} g^{zn} \phi^{cl} \partial_n \phi^{cl} \Big|_{\epsilon}^{\infty} \leftarrow \text{No contribuye, por } \sqrt{g} \sim (L/z)^5 \text{ y } \phi^{cl} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} S_{\epsilon}[\phi^{cl}[J]] &= -\frac{c}{2} \int_{z=\epsilon}^{\infty} d^4x \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^5 \left(\frac{\epsilon}{L}\right)^2 \phi^{cl} \partial_z \phi^{cl}, \\ &= -\frac{c}{2} \int_{z=\epsilon}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot x} \tilde{\phi}^{cl}(p) \int_{z=\epsilon}^{\infty} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} e^{ip' \cdot x} \tilde{\phi}^{cl}(p') \\ &= -\frac{c}{2} \int_{z=\epsilon}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+p') \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^3 \tilde{\phi}^{cl}(p) \partial_z \tilde{\phi}^{cl}(p') \\ &\quad \underbrace{\left(\frac{z}{\epsilon}\right)^2 \frac{K_{\Delta-2}(pz)}{K_{\Delta-2}(p\epsilon)} \epsilon^{4-\Delta} \tilde{J}(p)} \end{aligned}$$

$$= -\frac{c}{2} \int_{z=\epsilon}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+p') \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^3 \epsilon^{\delta-2\Delta-2} \frac{\tilde{J}(p) \tilde{J}(p')}{K_{\Delta-2}(p'\epsilon)} \partial_z \left[z^2 K_{\Delta-2}(pz) \right].$$

En espacio de momento, el término fuente en la

$$\begin{aligned} \text{CFT es } \int d^4x \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}(x) \tilde{J}(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{i(p+p') \cdot x} \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}(p) \tilde{J}(p') \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\mathcal{O}}_{\Delta}(p) \tilde{J}(-p), \end{aligned}$$