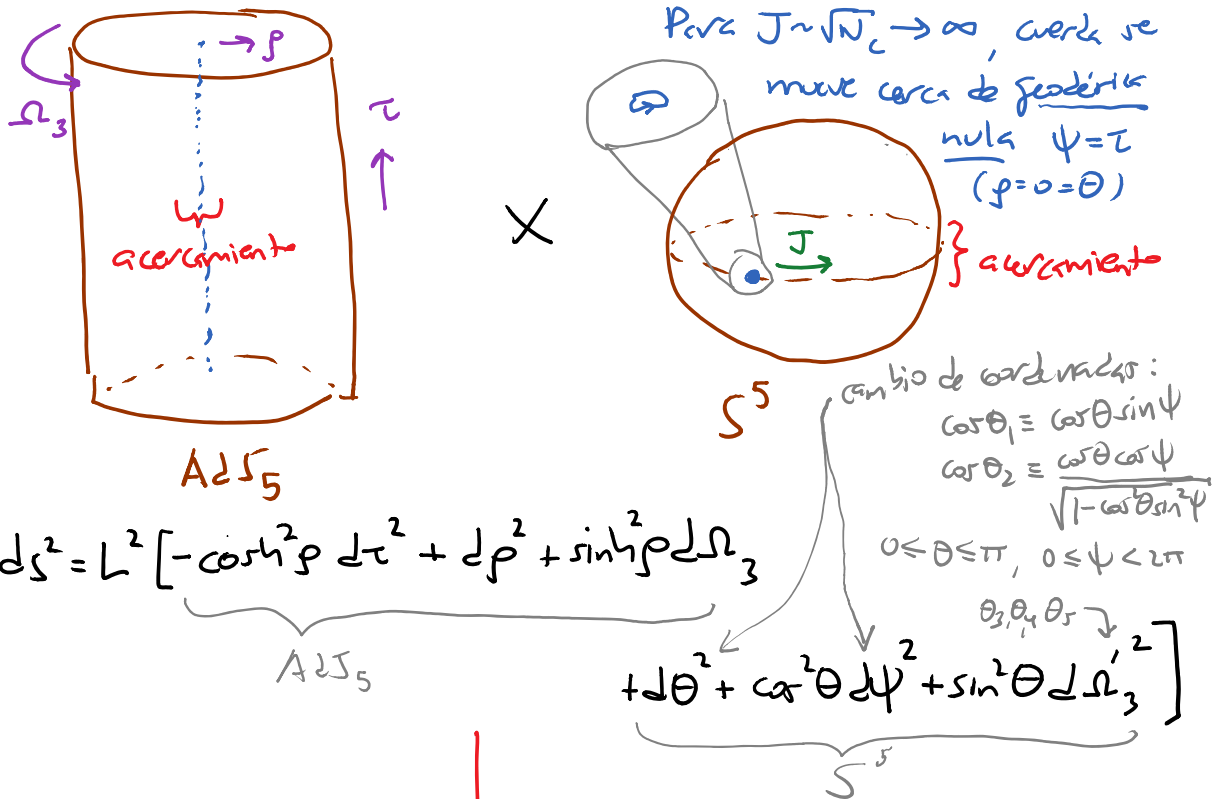


tipo coset como onda pp ( $\equiv$  onda de frente plano con rayos paralelos), que tiene isometrías  $SO(4) \times SO(4)$  (en lugar de  $SO(4,2) \times SO(6)$ ) y todavía preserva 32 SUSYs

[Blau, Figueroa-O'Farrill, Hull, Papadopoulos, hep-th/0110242].



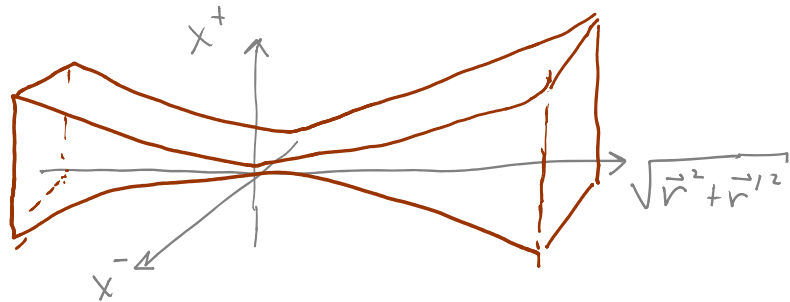
Región vecina a geodésica nula

$$dS^2 = -4 dx^+ dx^- - (\vec{r}^2 + \vec{r}'^2) (dx^+)^2 + d\vec{r}^2 + d\vec{r}'^2$$

$x^+ \equiv \frac{\tau + \psi}{2}$       $x^- \equiv L^2 \frac{\tau - \psi}{2}$       $\mathbb{R}^4$  proveniente de AdS<sub>5</sub>      $\mathbb{R}^4$  proveniente de S<sup>5</sup>

$$(y G_{+1234} = G_{+5678} = \text{const.})$$

El fondo de onda pp  
tiene la forma  
esquemática:



En tal fondo, la acción en la hoja de mundo de la cuerda (en la norma del cono de luz) resulta ser cuadrática, justo como en Minkowski (que de hecho es un caso particular de onda pp), ¡así que **el espectro de la cuerda puede obtenerse de manera exacta** [Metsaev, hep-th/0112044]! En notación de MSM, el resultado es

$$\Delta = J + \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_n \sqrt{1 + \frac{\lambda n^2}{J^2}}.$$

↑  $\sim \sqrt{N_c}$

↑ número de excitación del modo  $n$

(Nota: que la dimensión anómala  $\sim \Delta - J \propto \lambda^{1/4}$ . La manera en que escala  $J$  hace que estos estados sean "casi BPS".)

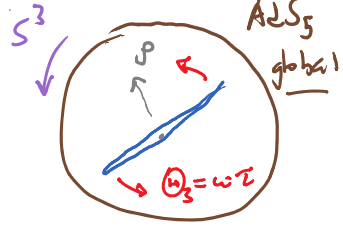
Segundo, a pesar de que  $\lambda \rightarrow \infty$ , la expresión para  $\Delta$  admite una expansión en potencias de  $\lambda/J^2$ , que puede tomarse pequeño (la condición  $g_{YM} J^2/N_c \ll 1$  solo implica que  $\lambda/J^2 \gg g_{YM}^3$ , con  $g_{YM} \ll 1$ ) y examinarse entonces perturbativamente en MSYM!

[Para algunos detalles de esta historia, ver p.ej. el capítulo 12 del curso de Nastase, arXiv: 0712.0689, o el artículo de revisión de Plefka, hep-th/0307101.]

La construcción de BMN (junto con muchos análisis posteriores) demuestra que **MSYM contiene, cuando menor, ¡el espectro completo de las cuerdas en un fondo de ondas pp (que es un subsector del espectro completo en  $AdS_5 \times S^5$ ), incluyendo el caso de Minkowski!**

Otro trabajo importante fue [Gubser, Klebanov, Polyakov, hep-th/0204051], que estudió operadores con espín alto, como, p.ej.,

derivadas covariantes

$$\sigma_s \sim \text{Tr} \left( \Phi^e \underset{(\mu_1, \mu_2)}{D} \cdots \underset{(\mu_s)}{D} \Phi^e \right) \leftrightarrow$$


(que se dice tiene "torcedura" ( $\equiv$  "twist")  $\Delta^{(0)} - S = 2$ )  
 identificándolos con cuerdas macroscópicas rotantes en  
 $AdS_5$  (soluciones a las eqs. de mov. clásicas para la  
 cuerda, que pueden considerarse solitones de la teoría  
 en la hoja de mundo), y encontrando para ellos que

$$\Delta = S + \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \ln \left( \frac{S}{\sqrt{\lambda}} \right) + \mathcal{O}(S^0)$$


cundo  $S \gg \sqrt{\lambda} \gg 1$  (de nuevo, la dimensión  
 anómala  $\sim \Delta - S \propto \lambda^{1/4}$ ). Esto es interesante porque en  
 acoplamiento débil se encuentra el mismo tipo de  
 comportamiento logarítmico (característico de las teorías  
 de norma),

$$\Delta = (S+2) + c_1 \lambda \ln S + \dots \quad \text{para } \lambda \ll 1,$$

y se ha argumentado que para cualquier  $\lambda$  se tendrá

$$\Delta - S = f(\lambda) \ln S + \dots$$

↖ término dominante para  $S$  grande

(con  $f(\lambda)$  la llamada "dimensión anómala de cúspide", asociada a un lazo de Wilson con cúspide ).

BMN y GKP fueron seguidos por una verdadera avalanche de trabajos, que exploraban cada vez con mayor profundidad y precisión la conexión entre el espectro (e interacciones) de  $\mathcal{N}=4$  SYM y CIB.

Una observación clave fue la traducción entre cada operador de  $\mathcal{N}=4$  SYM y una cadena de espín (es decir, una hilera de sitios, en cada uno de los cuales hay una variable física descrita por un espín)

[Minahan, Zarembo, hep-th/0212208]. P.ej., los operadores del tipo  $\lambda$  campos en total

$$\text{Tr}(z z \dots z \gamma z \dots z \gamma z \dots)$$

$\uparrow \equiv \Phi^5 + i\Phi^6$ 
 $\uparrow \Phi^3 + i\Phi^4$

que utilizan un solo campo escalar complejo  $\gamma$  además de  $z$  (y no involucran a los conjugados complejos  $z^\dagger$  y  $\gamma^\dagger$ ), se convierten, con el reemplazo

$$Z \rightarrow |\downarrow\rangle, \quad Y \rightarrow |\uparrow\rangle,$$

en cadenas de espín  $SU(2)$  (se trata de un  $SU(2) \subset SU(4)$ )

$$|\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\downarrow\uparrow\downarrow\cdots\rangle$$

\(\underbrace{\hspace{10em}}\_{\text{\(\lambda\) sitios en total}}

(y debemos exigir que los estados físicos sean invariantes bajo traslaciones, para reflejar la ciclicidad de la traza). Bajo este mapeo, el generador de dilataciones  $\Delta$ , cuyos eigenvalores deseamos obtener, se interpreta como el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  de la cadena de espín.

Cuando se trabaja hasta  $I$  lazos en la expansión perturbativa en  $1/N$ , se encuentra que  $\mathcal{H}$  contiene interacciones entre cada espín y sus vecinos hasta  $I$  sitios de distancia. P.ej., en el sector  $SU(2)$  descrito más arriba, a  $1$  lazo, se encuentra que

$$\mathcal{H}_{SU(2)}^{(1)} = \frac{\lambda}{8\pi^2} \left[ -2 \sum_{j=1}^{\lambda} (\vec{\sigma}_j \cdot \vec{\sigma}_{j+1} - 1) \right],$$

\(\leftarrow\) matrices de Pauli

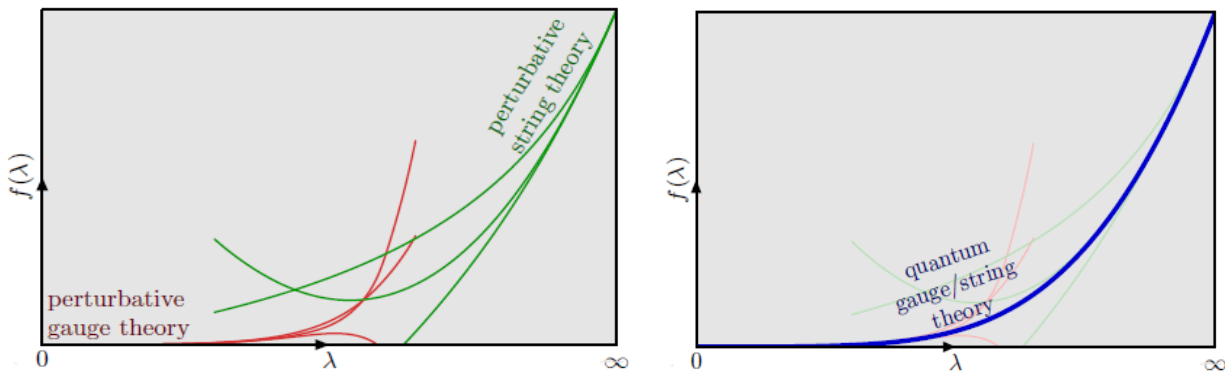
que contiene interacciones únicamente entre vecinos más

cercanos, y de hecho coincide con el llamado modelo de Heisenberg isotrópico ( $\equiv$  "XXX"), resuelto por Bethe en 1931. Tenemos entonces

Cadena de Espín  $\leftrightarrow$  Subsector de MSYM  $\leftrightarrow$  Subsector de CIB.  
También es posible regresar directamente de la cadena de espín a la acción de la cuerda [Kruczenski, hep-th/0311203].

La conclusión más importante de este tipo de análisis [realizados de manera prominente por Beisert y diversos colaboradores] es que, en el límite planar  $N_c \rightarrow \infty$ , tanto MSYM como CIB son teorías integrables a nivel cuántico, para cualquier valor de  $\lambda$  (es decir, poseen un número infinito de cargas conservadas, que permiten que la teoría sea soluble). Esto permite la utilización de técnicas de sistemas integrables (como p.ej. el "ansatz de Bethe termodinámico" o el "sistemas Y") para obtener resultados en MSYM/CIB a cualquier valor de  $\lambda$ ! Para ser más

precisos, las técnicas en cuestión permiten expresar a cualquier cantidad deseada (p.ej., dimensiones conformes) como la solución a un sistema de ecuaciones integrales (que pueden ser infinitas en número). Al menos en algunos casos, dicho sistema puede ser resuelto numéricamente, obteniendo así una función  $F(\lambda)$  que interpole correctamente entre los resultados esperados para  $\lambda \ll 1$  (provenientes de la expansión perturbativa en  $MSM$ ) y para  $\lambda \gg 1$  (provenientes de cálculos perturbativos en  $CIB$ ). Esquemáticamente:



[ del compendio Beisert et al., arXiv:1012.3982 ]

[23: 08/11/16]

P.ej., a partir del sistema de ecuaciones integrales



obtenido en [Gromov, Kazakov, Vieira, arXiv:0901.3753],  
 que codifica a las dimensiones  $\Delta(\lambda)$  de toler los  
 operadores de MSYM en el límite  $N_c \rightarrow \infty$ ,  
 [Gromov, Kazakov, Vieira, arXiv:0906.4240] fueron  
 capaces de calcular numéricamente la dimensión del  
operador de Konishi (discutido brevemente en la p. 338), que  
 no es BPS ni tiene números cuánticos grandes (a diferencia  
 de los operadores de BMN o GKP), logrando reproducir el  
 comportamiento  $\Delta \propto \lambda^{1/4}$  predicho por AdS/CFT:

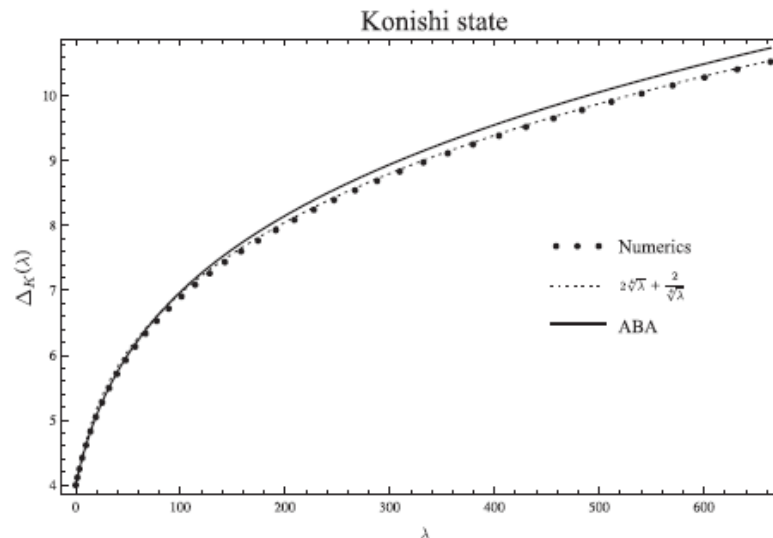


Figure 1: Numerical solution of exact finite size integral Y-system equations for the Konishi dimension  $\Delta_K(\lambda)$  in a wide range of 't Hooft couplings  $\lambda$ , compared to the asymptotic Bethe ansatz curve and to the predicted large  $\lambda$  asymptotics  $\Delta_K(\lambda) \simeq 2\lambda^{1/4} + 2/\lambda^{1/4}$  obtained by fit.

Otro ejemplo de este tipo de comprobaciones es el cálculo de un coeficiente dentro del llamado "factor de vestido" (que determina una matriz de dispersión  $2 \rightarrow 2$  en MSYM/CFTB, la cual a su vez determina el espectro) [trabajo de Vieira, Volin, arXiv: 1012.3992]:

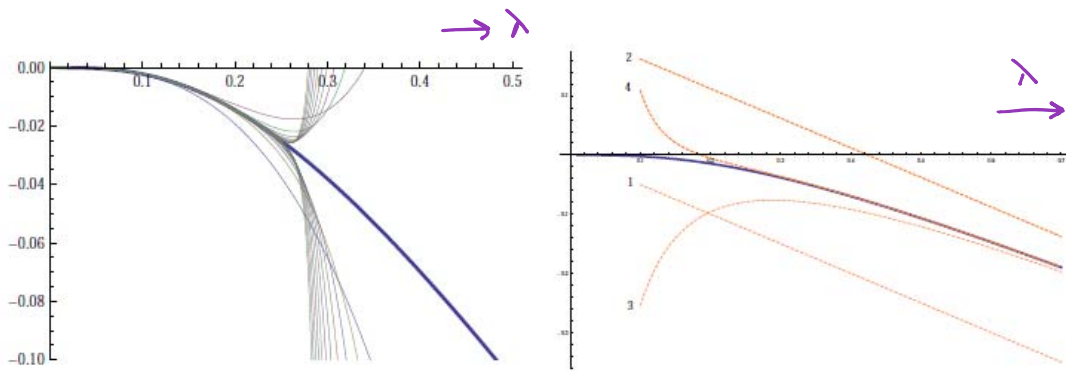


Figure 4: Left:  $c_{1,2}(g)$  as given by (4.3) or (4.4) can be evaluated for any  $g$ : thick line. The weak coupling Taylor expansion (4.5) has a finite radius of convergence. The several thin lines plotted in this figure are several truncations of this expansion (from 1 to 20 terms); the more terms are included the most they approach the real curve for  $g < 1/4$ , the radius of convergence. Right:  $c_{1,2}(g)$  (blue line) compared with its strong coupling expansion (dotted orange lines). 1 is the AFS result, 2 is AFS plus HL, 3 already includes the two loop correction and 4 contains the first four non-trivial terms. We see that the fit with four terms is perfect even for relatively small  $g$ ! This fast convergence was also observed in numerical computations of dimensions, see e.g. [27].

Un muy extenso artículo de revisión sobre el tema de integrabilidad en ADS/CFT es

[Beisert et al., arXiv: 1012.3982].

buen link a colección completa de compendios

En los análisis que hemos esbozado, se puede ver que las cuerdas emergen en el límite  $N_c \rightarrow \infty$  a partir de estructuras (como las cadenas de espín) que son discretas cuando  $N_c < \infty$ . Es decir, las cuerdas No son ingredientes fundamentales de la teoría, sino que se construyen con elementos más básicos. De esta manera, la correspondencia norma/gravedad nos ofrece el camino más prometedor que tenemos para entender la estructura microscópica de las cuerdas (y otros branas), el espacio y el tiempo.

—

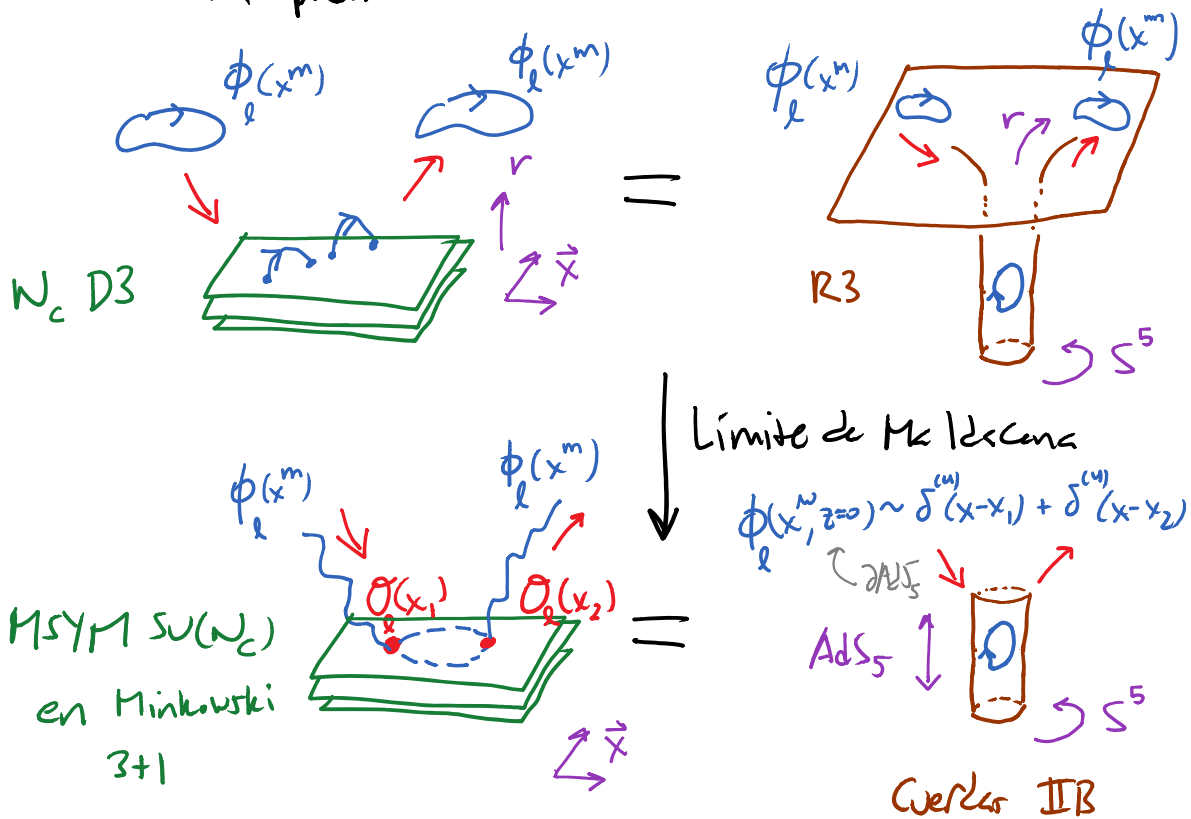
Sabiendo ya que los operadores/campos (o, equivalentemente, los estados) de ambas teorías coinciden, ¿qué hay de las interacciones?

En  $\text{MSTM}$ , ellas están codificadas en los correladores de operadores invariantes de norma,

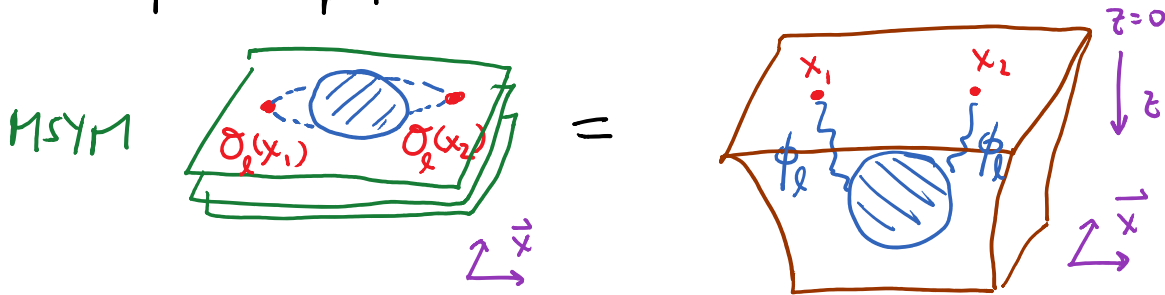
$$\langle \mathcal{O}_{j_1}(x_1) \mathcal{O}_{j_2}(x_2) \dots \mathcal{O}_{j_n}(x_n) \rangle .$$

(En una CFT no es posible definir amplitudes de dispersión, porque no hay una escala con respecto a la cual podamos definir el límite de grandes separaciones y tiempo temprano/tardío, y no existen entonces estados asintóticos en el sentido tradicional.)

Para vislumbrar cómo podríamos calcular estos correladores en AdS/CFT, regresemos a nuestra imagen de la situación previa al límite de Maldacena:



Así que, para calcular un correlador en MSYM, esencialmente queremos encender el campo correspondiente en los puntos apropiados de la frontera de AdS:



Del lado de MSYM, sabemos que una manera eficiente de encapsular toda la información sobre correladores es a través de la funcional generatriz o función de partición

$$Z_{\text{CFT}}[J_j] \equiv \int \mathcal{D}A_{\tilde{N}} \mathcal{D}\Phi^e \mathcal{D}\Psi^f \exp \left[ iS_{\text{MSYM}} + i \sum_j \int d^4x \mathcal{O}_j(x) J_j(x) \right]$$

↑ incluir fronteras y términos fijos de norma  
 ↑ operadores compositos (invariantes de norma) de interés  
 ↑ fuentes

(análogo a p.ej.  $\int \mathcal{D}A_{\tilde{N}} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \exp \left[ iS_{\text{QED}} + i \int d^4x (A_{\tilde{N}} J^{\mu} + \bar{\eta} \Psi + \eta \bar{\Psi}) \right]$ ),

a partir de lo cual podemos determinar

$$\langle \bar{O}_j(x_1) \cdots \bar{O}_j(x_n) \rangle = \frac{1}{Z_{\text{CFT}}[b]} \frac{\delta}{i\delta J_j(x_1)} \cdots \frac{\delta}{i\delta J_j(x_n)} Z_{\text{CFT}}[J_j] \Big|_{J_j=0}.$$

Nota que, para calcular la funcional generatriz, lo que hacemos es deformar la teoría de modo que

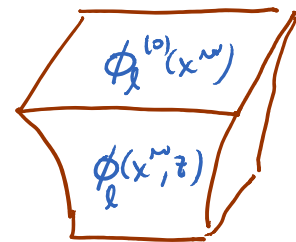
$$S_{\text{MSYM}} \rightarrow S_{\text{MSYM}} + \sum_j \int d^4x \bar{O}_j(x) J_j(x),$$

$\neq \text{CFT}$ , en general (a menos que  $\bar{O}_j$ s sean marginales) y en el cálculo de correladores eventualmente apagamos esta deformación. (Después veremos qué pasa si decidimos NO apagarla.)

Del lado de CIB, es posible también definir una función de partición, teniendo cuidado de especificar las condiciones de frontera para cada campo  $\phi_l(x^m)$  (que como sabemos juegan un papel más importante en AdS que en Minkowski, debido a la estructura causal):

$$Z_{\text{AdS}}[\phi_j^{(0)}] = \int \mathcal{D}\varphi_l \mathcal{D}h_l^{mn} \mathcal{D}B_l^{mn} \cdots \exp[iS_{\text{CIB}}]$$

$$\varphi_l(x^m, z=0) \sim \phi_l^{(0)}(x^m) \\ \text{etc.}$$



Pero, en más detalle, las condiciones de frontera que

podemos imponer para los campos  $\phi_j(x^m)$  están restringidos por las 5 ecuaciones de movimiento correspondientes.

P.ej., para un campo escalar  $\phi(x^m, z)$  en  $AdS_5$  con masa  $m$  (un modo de KK específico en la  $S^5$ ), la acción libre

$$\int d^5x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} g^{mn} \partial_m \phi \partial_n \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right)$$

implica la ecuación de Klein-Gordon

$$(\square - m^2)\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_m (\sqrt{-g} g^{mn} \partial_n \phi) - m^2 \phi = 0,$$

$$d\sigma^2 = \frac{L^2}{z^2} (\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2)$$

que en coordenadas de Poincaré dice que

$$\left(\frac{z}{L}\right)^5 \left[ \partial_z \left( \left(\frac{L}{z}\right)^{5-2} \partial_z \phi \right) + \left(\frac{L}{z}\right)^{5-2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi \right] - m^2 \phi = 0,$$

$$\text{es decir, } z^5 \partial_z \left( \frac{\partial_z \phi}{z^3} \right) + z^2 \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - m^2 L^2 \phi = 0.$$

Habríamos de la solución exacta más adelante. Por ahora, solo nos interesa resaltar que esta ecuación obliga a  $\phi$  a tener el comportamiento asintótico  $\phi_{z \rightarrow 0} = z^{\Delta} \phi^{(0)}(x^m)$ :  
 en breve explicaremos la notación para este exponente  $\Delta$

podemos descomponer en modos de Fourier,  $\phi^{(0)} \sim \exp(ip \cdot x)$

$$z^5 \Delta(\Delta-4) z^{\Delta-5} \phi^{(0)} + z^{\Delta+2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi^{(0)} - m^2 L^2 z^\Delta \phi^{(0)} = 0$$

$\leftarrow z^\Delta \text{ en total}$ 
 $\leftarrow$  subdominante para  $z \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \Delta(\Delta-4) = m^2 L^2 \quad \text{cf. } \underbrace{\Delta(\Delta-4) = m^2 L^2}$$

De la p. 328 podemos ver que esta relación es la misma que existe entre la masa de  $\phi$  y la dimensión conforme  $\Delta$  del operador dual  $\mathcal{O}$ . En realidad esta ecuación tiene 2 soluciones:

$$\Delta_{\pm} \equiv 2 \pm \sqrt{4 + m^2 L^2} \quad \left( \text{ó } \Delta_{\pm} \equiv \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2} \text{ en } \text{AdS}_{d+1} \right),$$

que corresponden a los 2 posibles comportamientos asintóticos de las 2 soluciones independientemente a la ecuación de movimiento (que es de 2do. orden):  $\phi_+ \sim z^{\Delta_+}$ ,  $\phi_- \sim z^{\Delta_-}$ .

Se tiene  $\Delta_+ = \Delta$ ,  $\Delta_- = 4 - \Delta_+$  ( $\Delta_- = d - \Delta_+$ ).

Dado que  $\Delta_- = \Delta_+ - 2\sqrt{4 + m^2 L^2} < \Delta_+$ , es  $\phi_-$

la que crece más rápido conforme  $z \rightarrow 0$ . Ten es así, que  $\phi_-$  genéricamente es no normalizable. Para ver

esto, definiremos el producto interno de Klein-Gordon



det de métrica inducida a  $t$  fijo

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv i \int d^3\vec{x} dz \sqrt{\gamma} \sqrt{g^{tt}} (\phi_1^* \partial_t \phi_2 - \phi_2 \partial_t \phi_1^*)$$

2 soluciones cualesquiera de KG

(bajo el cual los modos de Fourier usuales en

Minkowski,  $\phi_{\vec{p}} \equiv \frac{e^{ip \cdot x}}{\sqrt{2p^0}}$  con  $p^2 = -m^2$ , son ortogonales,

$$(\phi_{\vec{p}}, \phi_{\vec{p}'} ) \Big|_{t=0} = i \int d^3\vec{x} (-1) \left\{ \frac{e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2p^0}} (-ip'^0 \frac{e^{i\vec{p}' \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2p'^0}}) - \frac{e^{i\vec{p}' \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2p'^0}} (ip^0 \frac{e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}}}{\sqrt{2p^0}}) \right\}$$

$$= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$$

de tal modo que la norma de Klein-Gordon

$$\|\phi\|^2 \equiv (\phi, \phi) = i \int d^3\vec{x} dz \sqrt{\gamma} \sqrt{g^{tt}} (\phi^* \partial_t \phi - \phi \partial_t \phi^*)$$

es la integral de la componente  $m=t$  de la corriente de Noether  $j^m \equiv g^{mn} (\phi^* \partial_n \phi - \phi \partial_n \phi^*)$ , y por tanto es independiente de  $t$  si  $j^m$  satisface condiciones de frontera adecuadas en el infinito espacial. Vamos que

$$(\phi_-, \phi_-) = i \int d^2x dz \sqrt{\gamma} \sqrt{g^{tt}} (\phi_-^* \partial_t \phi_- - \phi_- \partial_t \phi_-^*)$$

$$\sim (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\vec{p}-\vec{p}') \underbrace{\int_0^L dz \left(\frac{L}{z}\right)^3 \left(\frac{z}{L}\right) z^{2\Delta_-}}_{\rightarrow \infty \text{ si } \Delta_- < 1} \propto z^{2\Delta_- - 2} \Big|_{z=0}$$

Es decir,  $\phi_-$  es no normalizable si cf. nota BF (p.319-20)

$$2 - \sqrt{4 + m^2 L^2} < 1 \Rightarrow \boxed{m^2 L^2 > -3} \quad m^2 L^2 \geq -4$$

(para  $AdS_{d+1}$ , esto sería  $m^2 L^2 > -(d^2 - 4)/4$ ).

Por otra parte,  $(\phi_+, \phi_+) \propto z^{2\Delta_+ - 2} \Big|_{z=0} < \infty$  si

$\Delta_+ = 2 + \sqrt{4 + m^2 L^2} \geq 1$ , es decir,  $\phi_+$  siempre es normalizable.

Aunque hemos hecho el análisis aquí explícitamente para un campo escalar, este resultado es genérico: los posibles comportamientos asintóticos son

$$\phi \underset{z \rightarrow 0}{\sim} z^{\Delta_{\pm}}, \text{ con } \begin{cases} \Delta_+ = \Delta \text{ normalizable} \\ \Delta_- = 4 - \Delta \text{ No normalizable} \end{cases},$$

donde  $\Delta$  coincidirá con la dimensión conforme del operador  $\mathcal{O} \in \text{CFT}$  que es dual a  $\phi$ . (Podremos

comprobar esta conexión genérica más adelante.)

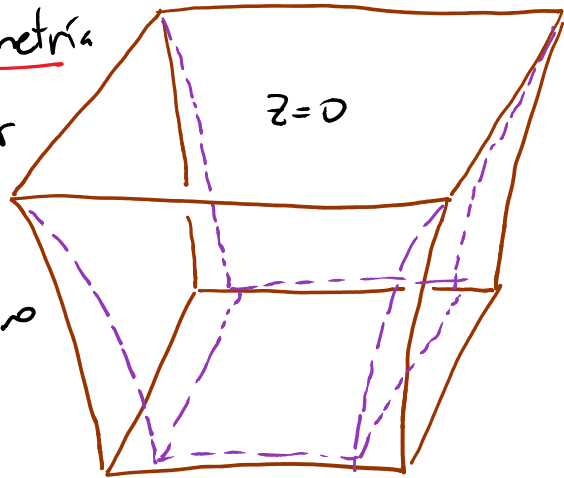
Al cuantizar el campo  $\phi(x^\mu, z)$ , son solo los modos normalizables los que pueden fluctuar y están asociados a operadores de creación/aniquilación [para cuantización de campos en fondos curvos, ver p.ej. Birrell & Davies]. Los modos no normalizables, en cambio, tienen un comportamiento asintótico tan violento que no pueden fluctuar, y representan simplemente un fondo fijo sobre el cual ocurren las fluctuaciones dinámicas. Decidimos si los encendemos o no especificando condiciones de frontera en  $z \rightarrow 0$ . En resumen,

Modos NO normalizables  
(no fluctuantes, clásicos)  $\longleftrightarrow$  Fondo que define a nuestra TEORÍA

Modos normalizables  
(fluctuantes, sujetos a cuantización)  $\longleftrightarrow$  ESTADO de interés en la teoría dada

Habríamos enfatizado antes que, para tener el dual de

una CFT, pedimos que la geometría sea asintóticamente ADS, es decir, fijamos el comportamiento de la métrica en la frontera, pero dejamos que fluctúe en el interior. Ahora podemos ser más



precisos respecto a este punto. Si escribimos

$$g_{mn} \equiv \frac{L^2}{z^2} (\eta_{mn} + h_{mn}), \quad \text{Gravitón (onda s)}$$

el posible comportamiento asintótico de  $h_{mn}$ , restringido por la ecuación de Einstein linealizada, es

$$h_{mn} \sim z^{\Delta_{\pm}} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \Delta_+ = \Delta = 4 \\ \Delta_- = 4 - \Delta = 0 \end{cases},$$

con  $\Delta=4$  la dimensión del operador dual  $T_{\mu\nu}$ .

Nuestra definición de un fondo asintóticamente ADS requiere no extender los modos no normalizables de la métrica pero sí dar oportunidad de que se extiendan los modos normalizables, es decir,  $h_{mn} \underset{z \rightarrow 0}{\sim} \mathcal{O}(z^4)$ ,