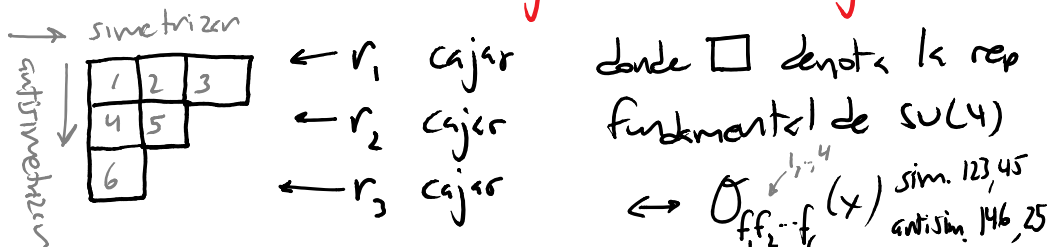


(asociados respectivamente a $SO(1,1) \times SO(3,1) \subset SO(4,2)$)
 y su representación ("carga") bajo la simetría R $SU(4)$, que
 podemos identificar con un **diagrama de Young** con ≤ 3 filas:



p.ej., $\square = \underline{4}$, $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix} = \underline{6}$ (fundamental de $SO(6)$),

$\begin{smallmatrix} \square & \square \end{smallmatrix} = \underline{10}$, $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix} = \bar{\underline{4}}$ (antifundamental de $SU(4)$), etc.

Equivalentemente, se pueden dar los "etiquetas de Dynkin"

$[d_1, d_2, d_3]$, donde $d_1 \equiv r_3$, $d_2 \equiv r_2 - r_3$, $d_3 \equiv r_1 - r_2$,

La dimensión de la rep de $SU(4)$ resulta ser \leftarrow cajero extra reempl. 2 vs. 3 o 1 vs. 2

$$\dim [d_1, d_2, d_3] = \frac{1}{12} \tilde{d}_1 \tilde{d}_2 \tilde{d}_3 (\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2) (\tilde{d}_2 + \tilde{d}_3) (\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 + \tilde{d}_3),$$

con $\tilde{d}_i \equiv d_i + 1$.

más en general,
 $[d_1, d_2, d_3]^* = [d_3, d_2, d_1]$

P.ej., $[1, 0, 0] = \underline{4}$, $[0, 1, 0] = \underline{6}$, $[0, 0, 1] = \bar{\underline{4}}$.

El multiplete entero tiene dimensión infinita

(puesto que es posible actuar repetidamente con P_m), pero contiene solo un número finito de primarios conformes, porque ellos se obtienen actuando con las supercargas. Hay 16 componentes de Q y \bar{Q} , así que un multiplete genérico contiene 2^{16} primarios conformes (al actuar más de una vez con la misma supercarga se obtiene cero o un descendiente conforme). Las 16 supercargas Q, \bar{Q} tienen espín $1/2$, y actuando con ellos sobre un primario superconforme $\underline{\mathcal{O}}(0)$ con espín (helicidad) $s \equiv s_I + s_b$ se obtienen primarios conformes $\underline{\mathcal{O}}(0)$ con espín $s, s+1/2, s+1, \dots, s+7/2, s+4$.

Como los operadores

$$\mathcal{O}(x) \sim \text{Tr}(M_1(x)M_2(x)\dots),$$

están contruidos a partir de los campos cartesianos básicos de la teoría, $M_I(x) = F_{\mu\nu}(x), \Phi^e(x), \psi^f(x)$

(o sus derivadas covariantes D_μ), sus propiedades de transformación bajo Lorentz y $SU(4)_R$ son manifiestas. El único dato no trivial es entonces su dimensión conforme Δ .

En la teoría libre ($\lambda=0$), este dato coincide con el que proviene de análisis dimensional,

$$\Delta_{F_{\mu\nu}}^{(0)} = 2 \quad (\Delta_{A_\mu}^{(0)} = 1), \quad \Delta_{\Phi^e}^{(0)} = 1, \quad \Delta_{\psi^f}^{(0)} = \frac{3}{2}, \quad \Delta_{D_\mu}^{(0)} = 1,$$

$$\Delta_{\text{Tr}(M_1 M_2 \dots)}^{(0)} = \Delta_{M_1}^{(0)} + \Delta_{M_2}^{(0)} + \dots$$

Ukmanos a estos los dimensiones desnudas. Al encender las interacciones, es necesario renormalizar los campos básicos y los operadores compuestos,

$$\Phi_{\text{ren}}^e \equiv \sqrt{Z_\Phi} \Phi_{(0)}^e, \quad \Psi_{\text{ren}}^f \equiv \sqrt{Z_\Psi} \Psi_{(0)}^f, \quad A_\mu^{\text{ren}} \equiv \sqrt{Z_A} A_\mu^{(0)},$$

dependen de λ , corte UV (Λ ó ϵ) y escala de renormalización μ_{ren}

$$\mathcal{O}_I^{\text{ren}} \equiv Z_{\pm}^J \mathcal{O}_J^{(0)}$$

↑
suma sobre J

donde hemos tomado en cuenta que en general hay una mezcla entre operadores compuestos con los mismos números cuánticos (pues son solo algunas combinaciones específicas de ellos las que tienen una dimensión de escalamiento bien definida).

Los objetos renormalizables tienen funciones de correlación sin divergencias UV, pero a cambio de ello, en general NO escalan de la manera ingenua, sino que tienen una dimensión corregida

$$\Delta \equiv \Delta^{(0)} + \gamma$$

\curvearrowright dimensión anómala

(En MSYM, los campos básicos NO adquieren dimensión anómala, pero los operadores compuestos en general SÍ.)

Determinar los valores de Δ para todos los $\mathcal{O}(0)$ en una CFT es análogo a encontrar el espectro de masas de una teoría relativista habitual (pej. QCD).

Cuando $\lambda \ll 1$, podemos calcular $\gamma(\lambda, N_c)$ de forma perturbativa (usando diagramas de Feynman),

$$\Delta(\lambda, N_c) = \Delta^{(0)} + \underbrace{\lambda \Delta^{(1)} + \lambda^2 \Delta^{(2)} + \dots}_{\gamma(\lambda, N_c)}$$

Pero cuando $\lambda \gg 1$, en general NO conocemos el valor de Δ para cada operador \mathcal{O} . Solo sabemos que todos los miembros de un mismo multiplete superconforme dado tienen necesariamente la misma dimensión anómala, porque la aplicación de Q_s y \bar{Q}_s sobre el primitivo \mathcal{O} solo puede aumentar Δ en pasos de $1/2$.

Pero se presenta una situación excepcional cuando el primitivo superconforme resulta ser aniquilado por algunas supercargas (\leftrightarrow invariante bajo esas SUSYs),

$$[Q_{\alpha}^f, \underline{\mathcal{O}}^{(0)}]_{\pm} = 0 \quad \text{ó} \quad [\bar{Q}_{\dot{\alpha}f}, \underline{\mathcal{O}}^{(0)}]_{\pm} = 0$$

para ciertos valores de α y f . Llamamos a estos operadores primitivos (superconformes) quirales ó BPS.
Para ellos ocurren 2 cosas importantes. Primero,

el multiplete que generan es automáticamente más corto, porque hay menos supercargas disponibles para actuar sobre $\underline{\underline{O}}$ y generar los otros primarios conformes. P.ej., si $\underline{\underline{O}}$ es aniquilado por la mitad de las Q 's y \bar{Q} 's (es decir, 8 supercargas), entonces su multiplete contiene solo 2^8 $\underline{\underline{O}}$'s (en lugar de 2^{16}), con espines $s, s+\frac{1}{2}, s+1, s+\frac{3}{2}, s+2$. Llamemos a tal $\underline{\underline{O}}$ (y a su multiplete) mitad BPS ($\frac{1}{2}$ BPS).

Similarmente, un $\underline{\underline{O}}$ que fuera $\frac{1}{4}$ BPS ($\frac{1}{8}$ BPS) sería aniquilado por la cuarta (octava) parte de las supercargas, es decir, 4 (2), y genera un multiplete con 2^{12} (2^{14}) primarios conformes, con espines $s, \dots, s+3$ ($s, \dots, s+\frac{7}{2}$).

Segundo, recordando de la p. 118 que

$$\{Q_{\alpha}^f, S_{\beta f'}\} = \varepsilon_{\alpha\beta} \left(\delta_{f'}^f D + \sum_A R_A^f f' \right) + \frac{1}{2} \delta_{f'}^f J_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu},$$

(o la expresión conjugada para \bar{Q}), vemos que

$$[S_{\beta f'}, \underline{\underline{O}}^{(s)}]_{\pm} = 0 \quad \forall \beta, f' \quad \text{y} \quad [Q_{\alpha}^f, \underline{\underline{O}}^{(s)}]_{\pm} = 0$$

\uparrow primario \uparrow igual a BPS

para algunos valores de α, f implican que

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[[Q_{\alpha}^f, \underline{\underline{O}}(0)]_{\pm}, S_{\beta f'} \right] + \left[Q_{\alpha}^f, [S_{\beta f'}, \underline{\underline{O}}(0)]_{\pm} \right] = \left[\{Q_{\alpha}^f, S_{\beta f'}\}, \underline{\underline{O}}(0) \right] \\
 &= \left[\varepsilon_{\alpha\beta} \left(\delta_{f'}^f D + \sum_A R_A^f \right) + \frac{1}{2} \delta_{f'}^f J_{\mu\nu} \sigma_{\alpha\beta}^{\mu\nu}, \underline{\underline{O}}(0) \right],
 \end{aligned}$$

de modo que la dimensión de escalamiento Δ de un operador primario quiral (o BPS) queda determinada por sus propiedades de transformación bajo Lorentz y bajo la simetría R .

Importantemente, esto implica que la dimensión Δ en cuestión no puede depender del acoplamiento λ [Witten, Olive].

La razón es que la rep de $SO(3,1) \times SU(4)$ a la que pertenece $\underline{\underline{O}}$ (especificada por los semienteros (s_{\pm}, s_{β}) y los enteros (r_1, r_2, r_3) ó (d_1, d_2, d_3)) no depende de λ , así que mientras $\underline{\underline{O}}$ siga siendo BPS, $\Delta_{\underline{\underline{O}}}$ tampoco puede tener dependencia de λ . Y $\underline{\underline{O}}$ no puede dejar de ser BPS cuando varíamos λ , porque en ese caso el número de operadores en el multiplete que genera tendría que saltar de manera discontinua (p.ej., de 2^8 a 2^{16}).

Los operadores quirales/BPS (tanto el primitivo superconforme $\underline{\underline{O}}(0)$ como todo el multiplete que genera) tienen entonces, para cualquier valor de λ , dimension de energía exactamente igual a su dimension de masa,

$$\Delta_{\text{BPS}} = \Delta_{\text{BPS}}^{(0)}$$

Otros operadores con las mismas cargas tienen $\Delta_{\text{BPS}} > \Delta_{\text{BPS}}^{(0)}$.

Procedamos ahora a establecer cuáles operadores de una traza en $\mathcal{N}=4$ SYM son primitivos superconformes, y si algunos de ellos resultan ser BPS. Para esto necesitamos la regla de transformación de los campos básicos bajo SUSY, que habíamos escrito en la p. 104.

Esquemáticamente,

$$[Q, \underline{\underline{\Phi}}] \sim \Psi, \quad [Q, F] \sim \mathcal{D}\Psi,$$

$$\{Q, \Psi\} \sim F^+ + [\underline{\underline{\Phi}}, \underline{\underline{\Phi}}], \quad \{Q, \bar{\Psi}\} \sim \mathcal{D}\underline{\underline{\Phi}}.$$

$$\uparrow \frac{1}{2}(F + \bar{F})$$

Un primitivo superconforme $\underline{\underline{O}}(0)$ no puede escribirse en la forma $\underline{\underline{O}}(0) = [Q, \text{algo}]_{\pm}$, así que no podrá involucrar a cualquiera de los elementos que

aparecen en el lado derecho de las reglas de transformación. Es decir, no puede incluir a $F_{\mu\nu}$ ni a ψ_α , y los escalares Φ^e no pueden aparecer dentro de conmutadores ni con derivadas.

Son entonces primarios super-conformes los operadores $\text{Tr}(\Phi^{e_1} \Phi^{e_2} \dots \Phi^{e_l})$, con los índices simetrizados.

Estos operadores transforman en una representación reducible del grupo de simetría $R \quad SU(4) \simeq SO(6)$, y para obtener las reps irreducibles es necesario aislar a las trazas sobre los distintos pares de índices.

Tomemos como ejemplo el caso más sencillo, $l=2$ (para $l=1$ tenemos $\text{Tr}(\Phi^e) = 0$ porque estamos en $SU(N_c)$):

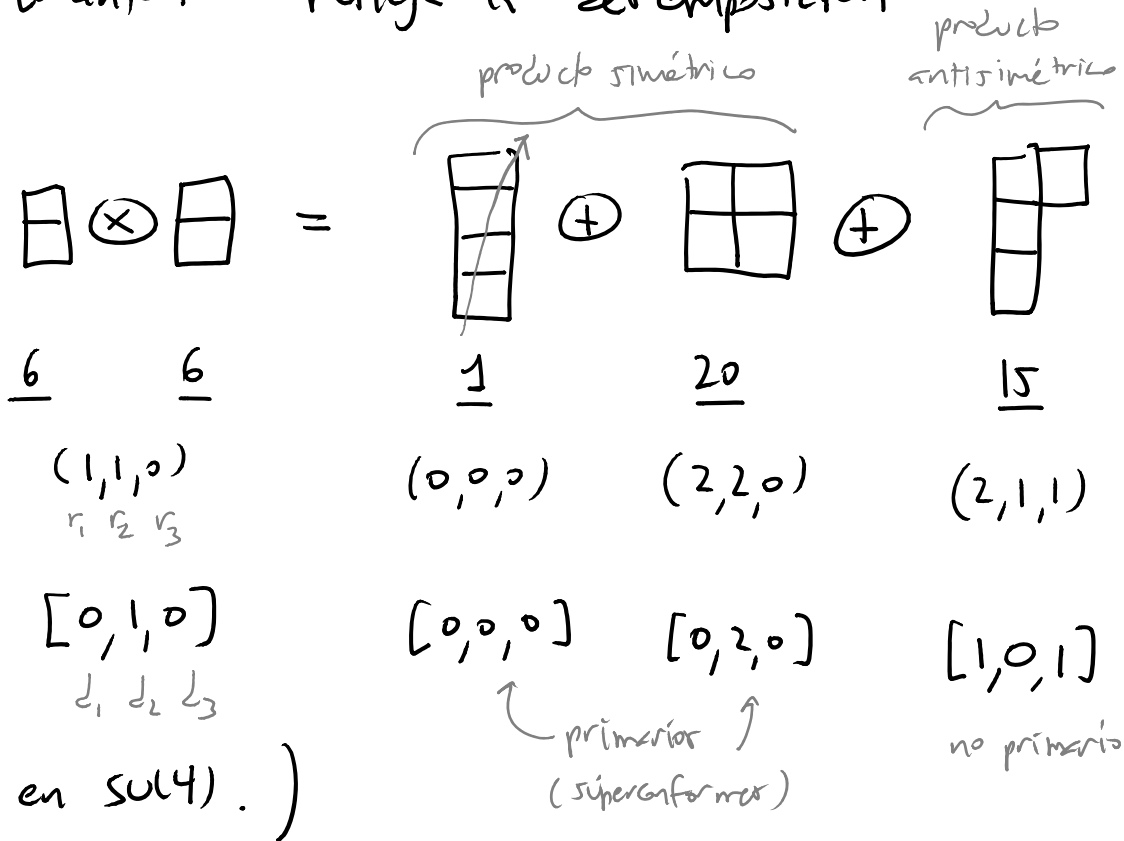
- $\text{Tr}(\Phi^e \Phi^e)$ (c/suma $\sum_{e=1}^6$) es un simplete (1)

bajo $so(6)$ y tiene $\Delta^{(0)} = 2$

$$\begin{aligned} \bullet \text{Tr}(\Phi^{e_1} \Phi^{e_2}) &\equiv \text{Tr}(\Phi^{(e_1} \Phi^{e_2)}) - \frac{1}{6} \delta^{e_1, e_2} \text{Tr}(\Phi^e \Phi^e) \\ &\equiv \frac{1}{2} \text{Tr}(\Phi^{e_1} \Phi^{e_2}) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\Phi^{e_2} \Phi^{e_1}) = \text{Tr}(\Phi^{e_1} \Phi^{e_2}) \end{aligned}$$

transforma en la rep 20 de $so(6)$ y tiene $\Delta^{(0)} = 2$.

(lo anterior refleja la descomposición



Es claro que $\text{Tr}(\Phi^e \Phi^e)$ No puede ser BPS, porque su $\Delta^{(0)} = 2$ No es la mínima posible para su

cargas bajo Lorentz, $(s_{\mathbb{I}}, s_{\mathbb{b}}) = 0$, y bajo $SU(4)$,
 $[d_1, d_2, d_3] = [0, 0, 0]$. Existe un operador (y solo uno)
 escalar de Lorentz y sin carga R con $\Delta = 0$: la identidad,
 $\mathcal{O} = 1$, que "es BPS" (i.e. preserva todos las 32 supersimetrías!) y
 forma un súpermultiplete por sí solo. El estado
 correspondiente es por supuesto el vacío.

Por otra parte, $\text{Tr}(\Phi^{e_1} \Phi^{e_2})$ tiene $\Delta^{(0)} = 2$ y
 carga R $[0, 2, 0] \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$, y sí resulta ser BPS.

De hecho, se puede mostrar que para cualquier l ,

$$\mathcal{O}_l(x) \equiv \text{Tr}(\Phi_{(x)}^{e_1} \dots \Phi_{(x)}^{e_l})$$

con $\Delta^{(0)} = l$ y carga R $[0, l, 0]$ es $\frac{1}{2}$ BPS,
 y que estos son los únicos operadores de 1 traza
 en $\mathcal{N} = 4$ SYM que son quiral primarios. **Estos**
operadores tienen entonces $\Delta = l$, para cualquier
valor de λ , y sabemos que dan lugar a
 multipletes superconformes cortos, con 2^l primarios

conformes y rango de espín 0-2.

(Existen también operadores de ≥ 2 trazo que son $\frac{1}{4}$ BPS, con carga R $[d_1, d_2, d_1]$ y $\Delta = d_2 + 2$, ó $\frac{1}{8}$ BPS, con carga R $[d_1, d_2, d_1 + 2l]$ y $\Delta = d_2 + 2d_1 + 3l$.)

Un punto importante es que los $\mathcal{O}_l(x)$ con $l > N_c$ no son independientes de sus contrapartes con $l \leq N_c$, porque la traza del producto de $> N_c$ matrices $N_c \times N_c$ que conmutan entre sí siempre puede expresarse como una suma de productos de traza de $\leq N_c$ matrices (y podemos restringirnos a matrices que conmutan porque ya habíamos visto que los conmutadores dan lugar a descendientes superconformes). P.ej., para $N_c = 2$, con

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad C \equiv \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix},$$

es fácil ver que

$$\text{Tr}(ABC) = \frac{1}{2} \text{Tr}(AB)\text{Tr}(C) + \frac{1}{2} \text{Tr}(AC)\text{Tr}(B) + \frac{1}{2} \text{Tr}(BC)\text{Tr}(A) - \frac{1}{2} \text{Tr}(A)\text{Tr}(B)\text{Tr}(C).$$

$l=3 > 2$

Nuestra conclusión es entonces que, en $M5/M$, los operadores quiral primario de 1 traza son $\mathcal{O}_l(x)$, con $l=2,3,4,\dots,N_c$, que tienen $\Delta=l$ y carga $R [0, l, 0]$.

Actuando sobre ellos con los supercargas Q y \bar{Q} , generamos los otros operadores primarios conformes del multiplete. Los basínicos resultan ser [ver MAG00, D'Hoker-Freedman]:

- Con $\Delta=l+1$ (después de actuar con 2 supercargas),
 - 2 escalares de Lorentz $\sim \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2} \text{Tr}(\Psi_{\alpha_1}^{f_1} \Psi_{\alpha_2}^{f_2} \Phi^{f_1 e_1} \dots \Phi^{f_{l-2} e_{l-2}}) + \dots$
 en rep $[2, l-2, 0]$ y $[2, l-2, 0]^* = [0, l-2, 2]$ de $SU(4)$,
 - 2 tensores antisimétricos $\sim \text{Tr}(F_{\mu\nu}^{\pm} \Phi^{f_1 e_1} \dots \Phi^{f_{l-1} e_{l-1}}) + \dots$
 en $[0, l-1, 0]$,
 $\leftarrow \equiv \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} \pm \tilde{F}_{\mu\nu})$
 - 1 vector de Lorentz $\sim (\sigma^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}} \text{Tr}(\Psi_{\alpha}^{f_1} \bar{\Psi}_{\dot{\alpha} f_2} \Phi^{f_1 e_1} \dots \Phi^{f_{l-2} e_{l-2}})$
 en $[1, l-2, 1]$.
- Con $\Delta=l+2$ (después de actuar con 4 supercargas),
 - 2 escalares reales $\sim \text{Tr}(F_{\mu\nu}^{\pm} F^{\pm\mu\nu} \Phi^{f_1 e_1} \dots \Phi^{f_{l-2} e_{l-2}}) + \dots$
 en $[0, l-2, 0]$,
 $\leftarrow \leftarrow$ signos coordinados
 - 1 escalar real $\sim \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \text{Tr}(\Psi_{\alpha}^{f_1} \Psi_{\beta}^{f_2} \bar{\Psi}_{\dot{\alpha} f_1} \bar{\Psi}_{\dot{\beta} f_2} \Phi^{f_1 e_1} \dots \Phi^{f_{l-4} e_{l-4}}) + \dots$
 en $[2, l-4, 2]$,

2 vectores reales $\sim \text{Tr}(F_{\mu\nu}^{\pm} D^{\nu} \Phi^{e_1} \Phi^{e_2} \dots \Phi^{e_{l-1}}) + \dots$

en $[0, l-1, 0]$,

2 tensores antisimétricos reales $\sim \text{Tr}(F_{\mu\nu}^{\pm} [\Phi^{e_1}, \Phi^{e_2}] \Phi^{e_3} \dots \Phi^{e_{l-2}})$

en $[2, l-3, 0]$ ó $[0, l-3, 2]$,

1 tensor simétrico $\sim \text{Tr}(D_{\mu} \Phi^e D_{\nu} \Phi^e \Phi^{e_1} \dots \Phi^{e_{l-2}}) + \dots$

en $[0, l-2, 0]$.

• Con $\Delta = l+3$ (después de actuar con 6 supercargas),

2 escalares reales $\sim \epsilon^{\dot{i}\dot{j}} \text{Tr}(F_{\pm}^{\mu\nu} F_{\pm\mu\nu} \bar{\Psi}_{\dot{i}f} \bar{\Psi}_{\dot{j}f} \Phi^{e_1} \dots \Phi^{e_{l-4}})$

en $[0, l-4, 2]$, ↖ signos sincronizados

2 tensores antisimétricos $\sim \text{Tr}(F_{\mu\nu}^{\pm} (F^{\mp})^2 \Phi^{e_1} \dots \Phi^{e_{l-3}})$

en $[0, l-3, 0]$,

1 vector $\sim (\sigma^{\mu})^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \text{Tr}(F_{\mu\nu}^{+} F^{\dot{\alpha}\dot{\beta}\mu\nu} \Psi_{\dot{\alpha}f} \bar{\Psi}_{\dot{\beta}f} \Phi^{e_1} \dots \Phi^{e_{l-4}})$

en $[1, l-4, 1]$.

• Con $\Delta = l+4$ (después de actuar con las 8 supercargas activas)

1 escalar real $\sim \text{Tr}(F_{\mu\nu}^{+} F^{+\mu\nu} F_{\lambda\rho}^{-} F^{-\lambda\rho} \Phi^{e_1} \dots \Phi^{e_{l-4}})$

en $[0, l-4, 0]$.

Podemos notar que en los casos $l=2,3$ algunos de los anteriores reps se anulan, así que hay totalvía menos operadores.

En particular, para $l=2$ solo se alcanza a llegar hasta $\Delta=l+2=4$. Los primeros conformes de este multiplete son

$$\text{Tr}(\Phi^{e_1} \Phi^{e_2}) \quad \Delta=2 \quad [0, 2, 0],$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} \text{Tr}(\psi_\alpha^f \psi_\beta^{f'}) + \dots \quad \Delta=3 \quad [2, 0, 0],$$

$$\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \text{Tr}(\bar{\psi}_{\dot{\alpha}f} \bar{\psi}_{\dot{\beta}f'}) + \dots \quad \Delta=3 \quad [0, 0, 2],$$

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu}^\pm \Phi^e) + \dots \quad \Delta=3 \quad [0, 1, 0],$$

$$(\sigma^\mu)^{\tau\dot{\tau}} \text{Tr}(\psi_\tau^f \bar{\psi}_{\dot{\tau}f'}) + \text{Tr}(D^\mu \Phi^e \Phi^{e'}) \quad \Delta=3 \quad [1, 0, 1]$$

Corrientes de Noether de la simetría R J^μ =  = 15,
rep adjunta de $SU(4)$
Número de generadores de $SU(4)$

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \dots \text{ y } \text{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}) \quad \Delta=4 \quad [0, 0, 0],$$

Densidad Lagrangiana y densidad de instantones

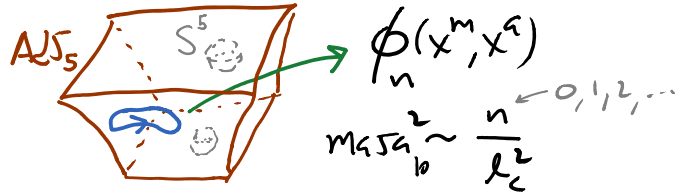
$$\text{Tr}(F_{\mu\nu}^\pm D^\nu \Phi^e) + \dots \quad \Delta=4 \quad [0, 1, 0],$$

$$\text{Tr}(D_{(\mu} \Phi^e D_{\nu)} \Phi^e) + \text{Tr}(F_{(\mu\lambda} F_{\nu)}^\lambda) + \dots \quad \Delta=4 \quad [0, 0, 0]$$

Tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$.

Consideremos ahora el otro lado de la correspondencia. Desafortunadamente no sabemos cómo calcular el espectro completo de la teoría de cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$,

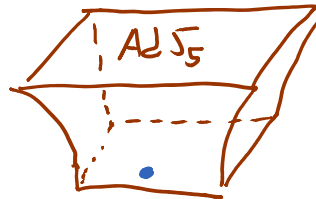
ni siquiera perturbativamente
 (la presencia del campo RR
 es un obstáculo importante).



Pero en el límite $N_c \rightarrow \infty$,
 $\lambda \rightarrow \infty$, sabemos que CIB se reduce a SUGRA IIB libre
 (masa₀=0). A partir de la acción de SUGRA en 9+1 dim,
 desarrollada hasta orden cuadrático en fluctuaciones alrededor
 de $AdS_5 \times S^5$, es posible hacer una descomposición de
 Kaluza-Klein sobre la S^5 y obtener el espectro de masas
 para los torres de KK que son campos en AdS_5 ,

$$\phi_0(x^m, x^a) \sim \sum_{o,k} \phi_{o,k}(x^m) Y_k(x^a)$$

\uparrow masa $\sim k/L$



Incluso este ejercicio es algo engorroso, porque hace
 falta encontrar combinaciones de los campos para
 diagonalizar la matriz de masas. El cálculo fue
 realizado por [Kim, Romans, van Nieuwenhuizen] (y
 también [Günaydin, Marcus]), y los resultados para los
 campos bosónicos se pueden resumir en la siguiente tabla,
 donde m, n denotan índices en AdS_5 y a, b son índices en S^5 :

<u>Campos (KK)</u>	<u>Masas en AdS₅</u>	<u>Reps de SU(4)</u>
φ, C	$m^2 L^2 = k(k+4) \quad k \geq 0$ <small>momento angular en S⁵</small>	$\underline{1}_c, \underline{6}_c, \underline{20}_c, \dots$ <small>reps complejas</small>
	\uparrow radis de S ⁵ (cf. KK en S ¹ $m \sim k/L$)	
B_{ab}, C_{ab} <small>escalares en AdS</small>	$\begin{cases} m^2 L^2 = (k-2)(k+2) & k \geq 1 \\ m^2 L^2 = (k+2)(k+6) & k \geq 0 \end{cases}$	$\underline{10}_c, \underline{45}_c, \dots$ $\underline{10}_c, \underline{45}_c, \dots$
B_{ma}, C_{ma} <small>vectores en AdS</small>	$m^2 L^2 = (k+1)(k+3) \quad k \geq 1$	$\underline{15}_c, \underline{64}_c, \dots$
B_{mn}, C_{mn} <small>Tensores antisimétricos</small>	$\begin{cases} m^2 L^2 = k^2 & k \geq 1 \\ m^2 L^2 = (k+4)^2 & k \geq 0 \end{cases}$	$\underline{6}_c, \underline{20}_c, \dots$ $\underline{1}_c, \underline{6}_c, \dots$
h_{ab} <small>escalares</small>	$m^2 L^2 = k(k+4) \quad k \geq 2$	$\underline{84}, \underline{300}, \dots$
h^a_a C_{abcd} <small>escalares</small>	$\begin{cases} m^2 L^2 = k(k-4) & k \geq 2 \\ m^2 L^2 = (k+4)(k+8) & k \geq 0 \end{cases}$	$\underline{20}_c, \underline{50}_c, \dots$ <small>← primarios</small> $\underline{1}_c, \underline{6}_c, \underline{20}_c, \dots$ <small>[0,2,0] [0,3,0] [0,0,0] [0,1,0] [0,2,0]</small>
h_{ma} C_{mabc} <small>vectores</small>	$\begin{cases} m^2 L^2 = (k-1)(k+1) & k \geq 1 \\ m^2 L^2 = (k+3)(k+5) & k \geq 0 \end{cases}$	$\underline{15}_c, \underline{64}_c, \underline{175}_c, \dots$ $\underline{15}_c, \underline{64}_c, \underline{175}_c, \dots$
h_{mn} <small>tensores simétricos</small>	$m^2 L^2 = k(k+4), \quad k \geq 0$	$\underline{1}_c, \underline{6}_c, \underline{20}_c, \dots$
C_{mnab} <small>tensores antisimétricos</small>	$m^2 L^2 = (k+2)^2 \quad k \geq 1$	$\underline{10}_c, \underline{45}_c, \dots$

Todos estos campos se acomodan naturalmente en reps del grupo $SU(2,2|4)$, construidos a partir de un campo primario súperconforme que resulta ser la primera de las combinaciones lineales de h^a y C_{abcd} . Estos campos son escalares en AdS_5 (y por tanto también en las direcciones x^m paralelas a ∂AdS_5 , que se identifican directamente con los de $\mathcal{N}=4$ SYM), transforman en la rep $[0, k, 0]$ de $SU(4)$, para $k \geq 2$ y tienen masa $m^2 L^2 = k(k-4)$.

Podemos notar que los modos de KK de estos campos con $k=2,3$, y también algunos de los asociados a otros campos en la tabla, tienen masa al cuadrado que son negativos, es decir, son taquiónicos!

Si estuvéramos en Minkowski, la existencia de modos taquiónicos sería señal de inestabilidad, porque con $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, $m^2 < 0$ y $\vec{p}^2 < |m^2|$ implican que la energía E es imaginaria.

Pero en AdS_5 la historia es distinta, porque la métrica depende de la coordenada radial (ρ en coords. globales o z en coords. de Poincaré), y como consecuencia de ello las partículas (asociadas a modos de los campos que resuelven las ecuaciones de movimiento correspondientes) no pueden tener energía cinética igual a cero.

P.ej., para un campo escalar en coordenadas globales (ver p.ej. MAB00, sección 2.2.2) se encuentra que la energía está dada por

$$E = 2 + \sqrt{4 + (mL)^2} + j + 2n,$$

↙ número radial
 $n=0,1,2,\dots$

↑ adimensional,
conjugado a \mathcal{L}

↖ momento angular en $S^3 \subset AdS_5$
 $j=0,1,2,\dots$

que es real siempre y cuando

$$(mL)^2 \geq -4.$$

En AdS_{d+1} , la condición correspondiente es

$$(mL)^2 \geq -\frac{d^2}{4},$$

y se conoce como la cota de Breitenlohner-Freedman (BF).

Tiene su contraparte para campos no escalares, aunque la cota toma formas ligeramente distintas dependiendo del espín del campo. En todos los casos, lo que importa es la relación entre la masa y la energía de la partícula en cuestión. En el caso de AdS_5 (global) y cuando los números cuánticos se eligen para dar la menor energía posible (p.ej. $j=0=n$ en el caso escalar), la relación resulta ser

$$\text{Espín } 0 \text{ ó } 2 : \quad m^2 L^2 = E(E-4)$$

$$\text{Espín } \frac{1}{2} \text{ ó } \frac{3}{2} : \quad |m|L = E-2$$

$$p\text{-forms} : \quad m^2 L^2 = (E-p)(E+p-4)$$

Todos los modos de KK en la tabla de la p. 317 obedecen la cota BF correspondiente, así que, a pesar de las apariencias, no hay ninguna patología: la solución $AdS_5 \times S^5$ es (perturbativamente) estable.

[2] = 27/10/16 (+14)