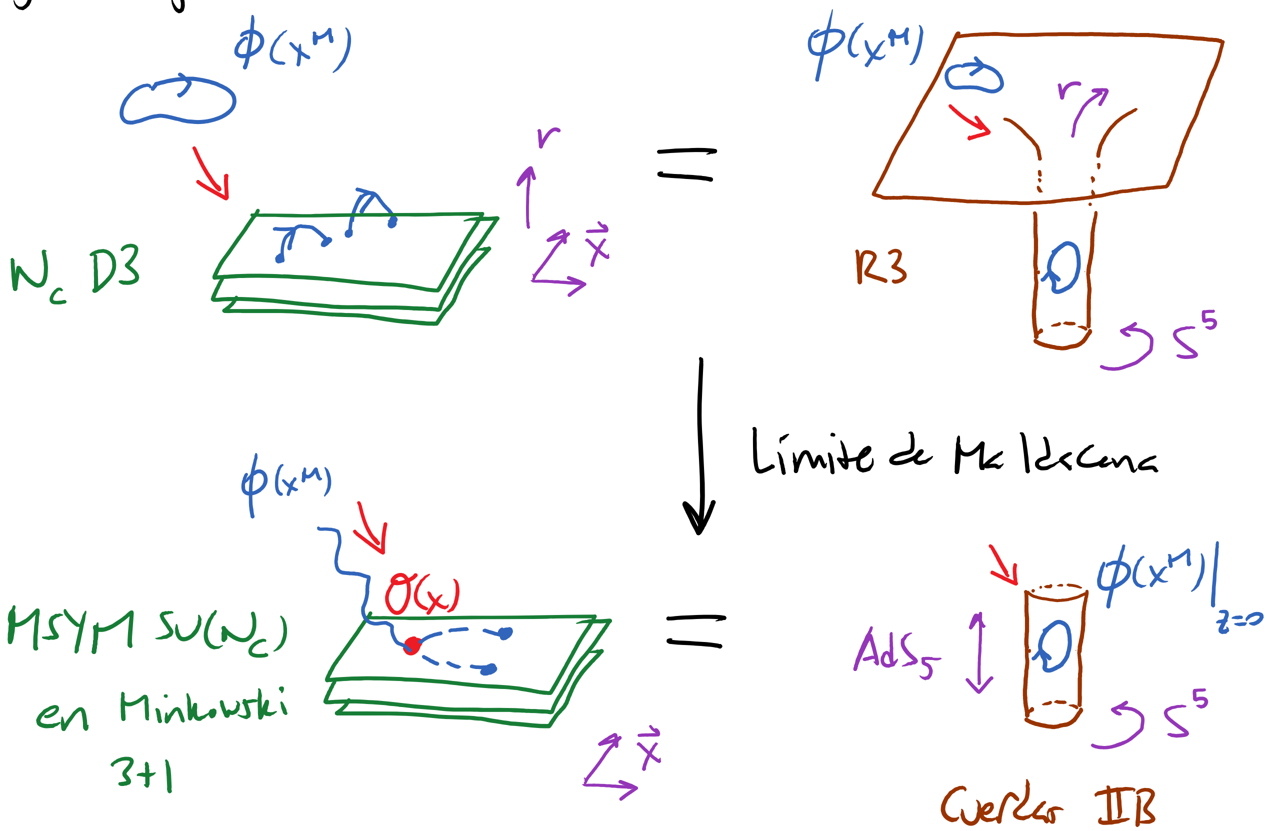
y en la teoría cuántica son también operadores que pueden actuar sobre el vacío para darnos distintos estados.

Esperamos entonces una correspondencia entre operadores $\mathcal{O}(x^\mu)$ en MSYM y campos $\phi(x^M)$ en CIIB. Podemos entender el origen de esta conexión volviendo a la equivalencia entre la R3-brana negra y el bonche de N_c D3-branas antes del límite de bajas energías:



Podemos explorar a las D3s / gargantas arrojándoles una cuerda cerrada vibrando en un modo particular, que corresponde a un campo específico de CIIB, $\phi(x^M)$. En el lado de las D3s, este campo puede excitar a las branas, convirtiéndose en un cierto número de cuerdas abiertas vibrando en modos específicos. En el límite de bajas energías, esto se refleja en el hecho de que el campo $\phi(x^M)$ se acopla a cierto operador local $\mathcal{O}(x^\mu)$ en MSYM (cuya inserción en correladores crea un cierto número de gluones etc. —ver, p.ej., p. 86).

Podemos entonces identificar cuál $\mathcal{O}(x^\mu)$ le corresponde a cada $\phi(x^M)$ examinando la acción de las D3s en el límite de Maldacena:

$$S_{D3s} = \underbrace{S_{MSYM}}_{\int d^4x\, \mathrm{Tr}(F^2+\dots)} + \underbrace{S_{\alpha'}}_{\int d^4x\, \ell_c^4\, \mathrm{Tr}(F^4+\dots)} + S_{int}$$

← acoplamientos entre campos de MSYM y CIIB
$\int d^4x\, \phi\, \mathcal{O}$
(cf. $\int d^4x\, J\varphi$ en p.ej. φ^4)

En resumen, el valor de $\phi(x^M)$ en la ubicación de las D3s se convierte en una fuente externa de los campos de MSYM a través del operador $\mathcal{O}(x^\mu)$.

Del lado de CIIB, podemos producir excitaciones de las cuerdas en $AdS_5 \times S^5$, y el valor de $\phi(x^M)$ que es fuente de estas excitaciones es el que el campo tiene en la frontera de AdS, $z=0$, porque ese es el "punto de entrada" a (lo que queda de) la garganta, que sabemos es dual a las D3s.

Un ejemplo concreto es el dilatón φ, que figura en la acción de las D3s en la forma (p.189)

$$S_{D3} = -\underbrace{T_{D3}}_{\frac{1}{(2\pi)^3 g_c l_c^4}} \int d^4x \underbrace{e^{-\varphi}}_{1-\varphi+\ldots} \,\text{sTr}\left\{\sqrt{-\det(\eta_{\mu\nu}+2\pi l_c^2 F_{\mu\nu})}+\ldots\right\}$$

traza simetrizada

$e^{\langle\varphi\rangle}$ fluctuación por encima de valor de fondo $\langle\varphi\rangle$

$$= \underbrace{-\underbrace{\frac{1}{8\pi g_c}}_{\frac{1}{2g_{YM}^2}} \int d^4x \,\text{Tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\ldots\right)}_{S_{MSYM}} + \int d^4x\, \varphi \underbrace{\text{Tr}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\ldots\right)}_{\mathcal{O}_\varphi = \mathcal{L}_{MSYM}} + \ldots$$

así que el operador dual a φ (cuyo valor en $z=0$

$$S_{MSYM} \supset \int d^4x \, \frac{1}{g_{YM}^2} \mathrm{Tr}(F^2 + \dots)$$

determina a $g_c \leftrightarrow g_{YM}^2$) es $\mathrm{Tr}(F^2+\dots) \sim \lim_{\ell_c \to 0} \left.\frac{\delta S_{D3}}{\delta\varphi}\right|_{\varphi=0}$.

Con un argumento similar, podemos ver que el escalar RR C (cuyo valor en $z=0$ determina a θ_{YM}) es dual a $\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}) \sim \lim_{\ell_c\to 0} \left.\frac{\delta S_{D3}}{\delta C}\right|_{C=0}$.

El gravitón h_{MN} aparece por supuesto en S_{D3} dentro de la métrica $g_{MN} = \eta_{MN} + h_{MN}$,

$$S_{D3} = -T_{D3} \int d^4x \; \mathrm{sTr}\left\{ \sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + 2\pi\ell_c^2 F_{\mu\nu})} + \dots \right\},$$

métrica inducida

de modo que sus componentes $\mu\nu$ son duales al tensor de energía momento de MSYM,

$$\mathcal{O}_{h_{\mu\nu}}(x) \sim \lim_{\ell_c\to 0} \left.\frac{\delta S_{D3}}{\delta h^{\mu\nu}}\right|_{h=0} \equiv T_{\mu\nu} = \mathrm{Tr}(F_\mu{}^\lambda F_{\nu\lambda} + \dots).$$

L19: 20/10/16

Para ser más precisos, debemos notar 2 cosas. Primero, dado que en MSYM todos los campos están en la representación adjunta (son matrices $N_c \times N_c$), los operadores locales invariantes de norma son necesariamente del tipo

bajo $SU(N_c)$,
$M(x) \to U(x) M(x) U^{-1}(x)$

$$\mathcal{O}(x) \sim \mathrm{Tr}\left(M_1(x) M_2(x) \ldots\right),$$

No A_μ

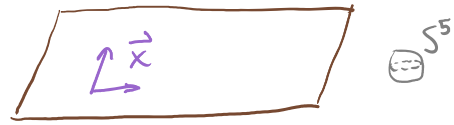
donde los $M_I(x)$ denotan a $F_{\mu\nu}(x)$, $\Phi^e(x)$, $\psi^f(x)$ o derivadas covariantes D_μ de estos campos básicos.

Más en general, podemos tener sumas de productos de estos operadores de una traza, que habíamos entendido físicamente como operadores de glubla en las pp. 84-91. Cuando $N_c \to \infty$, crean una glubola.

Del lado de AdS, los operadores locales más generales son sumas de productos de los $\phi(x^M)$, así que es natural esperar que cada campo básico $\phi(x^M)$, que crea una partícula cuando $g_c \propto \frac{1}{N_c} \to 0$, sea dual a un operador de una traza $\mathcal{O}_\phi(x^\mu)$, mientras que productos de los ϕ's, que crean estados de $n \geq 2$ partículas (o quizás estados ligados), sean duales a operadores de $n \geq 2$ trazas.

La segunda observación es que los operadores naturales en MSYM,

$\mathcal{O}(x) \sim \mathrm{Tr}\left(M_1(x)\, M_2(x) \ldots\right)$,



están localizados en las coordenadas de Minkowski x^μ, pero NO en las coordenadas $\theta^1, \ldots, \theta^5$ del espacio interno S^5 asociado a la simetría R $SU(4) \simeq SO(6)$.

Más bien, tienen números cuánticos específicos bajo esta simetría, es decir, pertenecen a alguna representación específica (con dimensión finita) de este grupo de transformaciones. P.ej., $\mathrm{Tr}(F^2(x) + \ldots)$ ó $\mathrm{Tr}(\Phi^e \Phi^e(x))$ (c/suma sobre $e = 1, \ldots, 6$) son escalares (singuletes) bajo $SO(6)$, $\mathrm{Tr}(\Phi^e(x))$ transformaría en la rep fundamental ($\underline{6}$) de $SO(6)$ (salvo por el hecho de que $\mathrm{Tr}(M(x)) = 0 \;\; \forall\, M(x)$, porque el grupo de norma es $SU(N_c)$), y $\mathrm{Tr}(\Phi^{e_1} \Phi^{e_2}(x))$ transforma en la rep $\underline{20}$ (parte simétrica sin traza) + $\underline{15}$ (parte antisimétrica) + $\underline{1}$ (traza) de $SO(6)$.

Sabiendo que el espacio interno S^5 en MSYM corresponde al factor S^5 del espaciotiempo en CIIB, debemos esperar entonces que los operadores $\mathcal{O}_\phi(x^\mu)$ corresponden no a campos $\phi(x^M)$ localizados en las 9+1 dimensiones del espaciotiempo, sino a campos $\phi(x^m)$ en AdS_5, con propiedades de transformación específicas bajo el grupo de isometrías de la S^5. Es decir, cada campo 10-dimensional se descompone en una torre infinita de modos de Kaluza-Klein (KK) sobre la S^5,

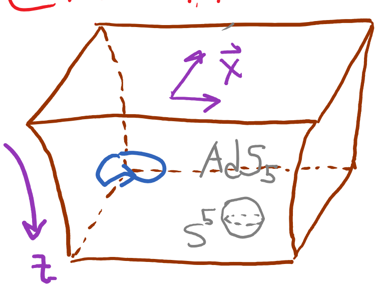
¡No es pequeña!

$$\phi(x^m,\theta^a) = \sum_k \phi_k(x^m)\, Y_k(\theta^a)$$

(x^μ, z)

número(s) de KK: índice compuesto análogo a l,m de $Y_{l,m}$ en S^2

armónicos esféricos sobre S^5



(análogo a Fourier $\phi(x^m,\theta) = \sum_n \phi_n(x^m)\, e^{in\theta}$ sobre S^1), y dado que los $Y_k(\theta^a)$ pertenecen a representaciones de dimensión finita de $SO(6) \simeq SU(4)$, son los modos de KK $\phi_k(x^m)$ los que son directamente duales a operadores de MSYM.

cf. $Y_{lm} \leftrightarrow SO(3)$, p.ej. $l=1$ $m=0,\pm 1$

Juntando las 2 observaciones, concluimos entonces que

* Campo de CIIB en AdS_5 (modo de KK sobre S^5)	Operador local invariante de norma en MSYM (con 1 traza cuando $N_c \to \infty$)
$\phi_k(x^m)$ ← (x^μ, z) $\longleftrightarrow$	$\mathcal{O}_{\phi_k}(x^\mu)$

P.ej., el modo del dilatón que es constante sobre la S^5 (la "onda s") es dual a la densidad lagrangiana de MSYM,

$$* \quad \varphi(x^m) \longleftrightarrow \mathcal{O}_\varphi(x^\mu) = \mathrm{Tr}\left(F^2(x^\mu) + \ldots\right).$$

sin momento angular sobre S^5 — invariante bajo simetría R $SO(6) \simeq SU(4)$

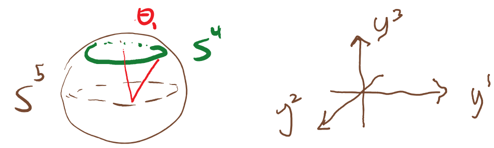
4:33: 08/12/20

En el caso de un campo escalar como el dilatón, los armónicos relevantes sobre la S^5 (eigenfunciones del Laplaciano sobre S^5, con eigenvalor $\underbrace{\ell(\ell+4)}_{\text{cf. } \ell(\ell+1) \text{ en } S^2}$) pueden definirse como

$$Y_{e_1 \cdots e_\ell}(\Theta^a) \propto y^{\{e_1} y^{e_2} \cdots y^{e_\ell\}},$$

← Tal como nos es familiar para $Y_{\ell m}$ en S^2

donde $y^{e=1,\ldots,6}$ son coordenadas cartesianas en el $\mathbb{R}^6$ donde definimos a S^5 a través de $\sum_{e=1}^{6} (y^e)^2 = 1$,



(es decir $y^1 = \cos\theta_1$, $y^2 = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2$, $\dots$, $y^6 = \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \cdots \operatorname{sen}\theta_5$)

y $\{\cdots\}$ significa simetrizar los índices y restar todas las trazas.

Los modos de Kaluza-Klein del dilatón con $l \neq 0$ asociados a esta expansión,

$$\varphi(x^m,\theta^a) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{e_1,\dots,e_l=1}^{6} \varphi_{e_1\cdots e_l}(x^m)\, Y_{e_1\cdots e_l}(\theta^a),$$

tienen momento angular sobre la S^5, y son duales por tanto a operadores en MSYM que son variantes de $\mathrm{Tr}(F^2+\dots)$ con carga R (es decir, que transforman en la representación correspondiente de $so(6) \simeq su(4)$),

$$* \quad \varphi_{e_1\cdots e_l}(x^m) \longleftrightarrow \mathcal{O}_{\varphi_{e_1\cdots e_l}}(x^m) = \mathrm{Tr}\left[(F^2+\dots)\Phi^{\{e_1}\cdots\Phi^{e_l\}}\right]$$

(esta conexión es la que se encuentra al desarrollar $S_{int} \subset S_{D3}$ en armónicos esféricos).

Similarmente, es la onda s del gravitón la que es dual al tensor de energía-momento en MSYM,

x^ρ, z

$$* \quad h_{mn}(x^\rho) \longleftrightarrow T_{\mu\nu}(x^\rho) = \mathrm{Tr}\left(F_{\mu\lambda} F_\nu{}^\lambda + \dots\right),$$

difeor $x^m \to x^m + \xi^m \Rightarrow h_{mn} \to h_{mn} + \nabla_m \xi_n + \nabla_n \xi_m$ permiten fijar norma $h_{zm} = 0$

y las ondas parciales de $h_{mn}(x^\rho, \theta^a)$ con momento angular (que están asociadas a armónicos esféricos tensoriales) son duales a operadores en MSYM que son generalizaciones de $T_{\mu\nu}$ con carga R (por inserciones de $\Phi^{\{e_1} \dots \Phi^{e_\ell\}}$).

Podemos hacer aquí una observación importante: en cualquier teoría cuántica de campos local, siempre $T_{\mu\nu}(x)$ es uno de los operadores locales invariantes de norma (que se conserva si hay invariancia bajo translaciones en el espaciotiempo), y su campo correspondiente, el gravitón $h_{mn}(x)$, deberá entonces estar presente en la descripción dual. Vemos entonces que, en cualquier ejemplo de la correspondencia AdS/CFT (o incluso, no-AdS/no-CFT), la teoría en AdS (o no-AdS) incluye a la gravedad.

Volviendo a nuestro ejemplo favorito CIIB = MSYM, ahora que conocemos la conexión que existe entre campos $\phi(x^m)$ en AdS y operadores $\mathcal{O}_\phi(x^\mu)$ en la CFT, podemos recordar que en el límite $N_c \to \infty$ ($g_c \to 0$) los campos $\phi(x^m)$ se vuelven libres, y crean solo estados de una partícula. Esto empata con (y explica) la propiedad de factorización de los operadores de 1 traza que vimos antes (en las pp. 87-91),

$$\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\cdots\mathcal{O}_n(x_n)\rangle \underset{N_c\to\infty}{=} \underbrace{\langle \mathcal{O}_1(x_1)\mathcal{O}_2(x_2)\rangle}_{\text{funciones de 2 pts dominan porque } \langle \mathcal{O}(x)\rangle = 0 \text{ en CFT}}\cdots\langle \mathcal{O}_{n-1}(x_{n-1})\mathcal{O}_n(x_n)\rangle + \ldots$$

que implica que todos los $\mathcal{O}_i$ crean partículas libres.
(En MSYM todos estos son operadores de glueballs; pero vimos que la factorización para $N_c \gg 1$ aplica igualmente para operadores de mesones, si los hay en la teoría.)
Esto es consistente también con nuestra afirmación

de que la correspondencia campo $\leftrightarrow$ operador se puede formular igualmente a nivel de estados, con

$\phi(x)|0\rangle \leftrightarrow \mathcal{O}_\phi(x)|0\rangle$ = estado de 1 partícula (1 glueball)

en sentido estricto, en una CFT no hay partículas ($\leftrightarrow$ estados asintóticos)

$\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\cdots|0\rangle \leftrightarrow \mathcal{O}_{\phi_1}(x_1)\mathcal{O}_{\phi_2}(x_2)\dots|0\rangle$
= estado de multipartículas
(varias glueballs)

Para $N_c < \infty$, los campos $\phi(x)$ se vuelven interactuantes, y NO crean estados puramente de 1 partícula.
Lo mismo ocurre entonces para $\mathcal{O}_\phi(x)$, cuyos correladores ya no se factorizan. Los estados de 1 partícula
$\sim \left(\phi(x) + \frac{\text{cte.}}{N_c}\phi(x)\phi(x) + \dots\right)|0\rangle$ están asociados
entonces a operadores con contribuciones multitraza,
$\sim \mathcal{O}_\phi(x) + \frac{\text{cte.}}{N_c}\mathcal{O}_\phi(x)\mathcal{O}_\phi(x) + \dots$

[Banks, Douglas, Horowitz, Martinec;
Balasubramanian, Giddings, Lawrence]

Hasta ahora hemos mostrado apenas algunos ejemplos del mapeo entre los campos de CIIB y los operadores invariantes de norma de MSYM. Si la correspondencia AdS/CFT es correcta, debe existir un acuerdo perfecto entre ambas colecciones de objetos.

Dado que las 2 teorías poseen las mismas simetrías globales, ambos tipos de objetos se organizan naturalmente en (super)multipletes de estas simetrías, particularmente del grupo (super)conforme. La pregunta clave (y no trivial) es entonces si CIIB y MSYM en verdad contienen los mismos (super-) multipletes: $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2 \leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow O_1 \leftrightarrow O_2 \leftrightarrow \cdots$.

Del lado de MSYM, como en cualquier CFT, los operadores pertenecen a multipletes que forman una representación irreducible del grupo conforme, y tienen en particular una dimensión (de escalamiento) Δ específica:

Como vimos en la p. 109, bajo $x^\mu \to s x^\mu$ se tiene

exp(ln s)

$$\mathcal{O}(x) \to \mathcal{O}'(x) = \underbrace{s^{iD}}_{\exp(iD\ln s)} \mathcal{O}(x) s^{-iD} = \underbrace{s^{\Delta}}_{\exp(\Delta \ln s)} \mathcal{O}(sx) ,$$

lo cual equivale a decir que

$$\delta\mathcal{O}(x) \propto [D, \mathcal{O}(x)] = i(-\Delta + x^\mu\partial_\mu)\mathcal{O}(x) ,$$

reescala $\mathcal{O}$ reescala x

de modo que $\mathcal{O}(0)$ es un <u>eigenoperador</u> del generador de dilataciones D, con eigenvalor $-i\Delta$,

$$[D, \mathcal{O}(0)] = -i\Delta\mathcal{O}(0) .$$

De las pp. 108-9 sabemos también que

$$\underbrace{[D, J_{\mu\nu}] = 0}_{\text{lorentz}} , \quad \underbrace{[D, P_\mu] = -iP_\mu}_{\text{traslaciones}} , \quad \underbrace{[D, K_\mu] = +iK_\mu}_{\text{especiales}} ,$$

es decir, $J_{\mu\nu}$, P_μ y K_μ tienen dimensión $0, +1, -1$.

Así que si $\mathcal{O}(0)$ tiene dimensión Δ, entonces

$$[J_{\mu\nu}, \mathcal{O}(0)] , \quad [P_\mu, \mathcal{O}(0)] \quad \text{y} \quad [K_\mu, \mathcal{O}(0)]$$

tienen respectivamente dimensión $\Delta, \Delta+1$ y $\Delta-1$.

$$\Big(\text{P.ej.}, \; [D, \underbrace{[K_\mu, \mathcal{O}(0)]}_{\mathcal{O}'(0)}] \overset{\text{Jacobi}}{=} [[D, K_\mu], \mathcal{O}(0)] + [K_\mu, [D, \mathcal{O}(0)]] \Big)$$

$$= +i[K_\mu, \mathcal{O}(0)] - i\Delta[K_\mu, \mathcal{O}(0)]$$

$$= -i(\Delta-1)\,\underbrace{[K_\mu, \mathcal{O}(0)]}_{\mathcal{O}'(0)} \quad .\,)$$

Podemos pensar entonces en K_μ y P_μ como análogos respectivamente a operadores de aniquilación a_μ y creación $a^\dagger_\mu$, que disminuyen o aumentan el eigenvalor Δ, análogo a n (eigenvalor de $N \equiv a^\dagger_\mu a_\mu$).

Ahora bien, en una teoría de campos unitaria los operadores deben tener dimensión positiva ← para evitar norma negativa (salvo por $\mathcal{O}=1$, que tiene $\Delta=0$) [ver p.ej. Minwalla, hep-th/9712074], así que dado cualquier $\mathcal{O}(0)$, con aplicaciones sucesivas de $[K_\mu, \cdot\,]$ debemos llegar eventualmente a un operador $\underline{\mathcal{O}}(0)$ que es aniquilado por K_μ,

$$[K_\mu, \underline{\mathcal{O}}(0)] = 0 \quad ,$$

y tiene entonces la menor dimensión de todos los operadores en ese multiplete. Decimos que tal $\underline{\mathcal{O}}(x)$ es un operador primario (conforme) (y, en la analogía $K_\mu \sim a_\mu$, $P_\mu \sim a^\dagger_\mu$, $\underline{\mathcal{O}}(0)$ es análogo al vacío $|0\rangle$).

Comenzando con un operador primario $\underline{\mathcal{O}}(x)$, podemos generar el multiplete completo actuando repetidamente con los generadores del grupo conforme, que sobre $\underline{\mathcal{O}}(x)$ tienen el efecto

Matriz en alguna rep de Lorentz, que actúa sobre índices de $\underline{\mathcal{O}}$

$$[P_\mu, \underline{\mathcal{O}}(x)] = i\partial_\mu \underline{\mathcal{O}}(x) ,$$

$$[J_{\mu\nu}, \underline{\mathcal{O}}(x)] = \{ i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + M_{\mu\nu} \} \underline{\mathcal{O}}(x) ,$$

$$[D, \underline{\mathcal{O}}(x)] = i(-\Delta + x^\mu \partial_\mu) \underline{\mathcal{O}}(x) ,$$

se anula si $x^\mu = 0$ ✓

$$[K_\mu, \underline{\mathcal{O}}(x)] = \{ i(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x^\nu \partial_\nu + 2x_\mu \Delta) - 2x^\nu M_{\mu\nu} \} \underline{\mathcal{O}}(x) .$$

Más en concreto, actuando sobre $\underline{\mathcal{O}}(0)$ con $J_{\mu\nu}$ obtenemos todas sus otras componentes de Lorentz, y actuando con P_μ
(índices de Lorentz implícitos)
un número arbitrario de veces obtenemos todos los nuevos operadores del multiplete $\partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_n} \underline{\mathcal{O}}(0)$ (que nos permiten reconstruir a $\underline{\mathcal{O}}(x)$ por expansión de Taylor), los cuales se conocen como los descendientes del operador primario.

(Esto es análogo al hecho de que podemos construir el espacio de Hilbert completo para un oscilador actuando con $a^\dagger_\mu$ sobre $|0\rangle$.)

La representación de $SO(4,2)$ que obtenemos así tiene dimensión infinita, y se puede caracterizar por los

3 números (Δ, s_I, s_D), donde Δ es la dimensión del operador primario y (s_I, s_D) determinan la manera en que transforma $\underline{O}(0)$ bajo Lorentz, es decir, la rep a la que pertenece la matriz $M_{\mu\nu}$. (Podemos recordar que el grupo de Lorentz se descompone como $SO(3,1)$ "$=$" $SU(2)_I \times SU(2)_D$, y $s_I, s_D = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ son los espines correspondientes. P.ej., $(s_I, s_D) = (\frac{1}{2}, 0)$ denota un espinor de Weyl izquierdo, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es un cuadrivector, etc.)

Estos 3 números determinan a los 3 operadores de Casimir de $SO(4,2)$, incluyendo al Casimir cuadrático

conmutan con todo, y ∴ clasifican las rep

ver p. 110

análogo a $\vec{J}^2$

$$C_2 \equiv \frac{1}{2} J_{MN} J^{MN} \qquad (M,N = -1,0,1,2,3,4)$$

$$= D^2 + \frac{1}{2}(P\cdot K + K\cdot P) + \frac{1}{2} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu} .$$

Hay además un Casimir cúbico y uno cuártico

En teorías de campo relativistas, estamos acostumbrados a etiquetar las representaciones con el espín

(s_I, s_D) asociado a Lorentz y la masa $m^2 \equiv -P_\mu P^\mu$. Este último operador es un Casimir del grupo de Poincaré; pero NO del grupo conforme, porque $[D, P^2] \neq 0$. Es importante tener presente entonces que los operadores $\mathcal{O}(0)$ (o los estados $\mathcal{O}(0)|0\rangle$ que ellos crean) en los multipletes conformes que hemos descrito arriba, por tener una dimensión definida, no pueden tener una masa $(-P^\mu P_\mu)$ ni una energía (P_0) definida. (De hecho, contienen un espectro continuo de m^2 que va desde 0 hasta ∞.)

L20: 25/10/16

Además de ser conforme, MSYM es superconforme (es una SCFT), con lo cual los multipletes de operadores invariantes de norma serán aún más grandes: si tomamos a algún $\mathcal{O}(0)$ primario conforme, actuando con las supercargas conformes S_{af} ó $\bar{S}^f_{\dot{a}}$ (que conmutan con K_μ) o con algunas combinaciones de las supercargas Q^f_α y $\bar{Q}_{\dot{\alpha}f}$ podemos obtener otros primarios conformes.

Dado que (p. 118)

dim $= +\frac{1}{2}$ dim $= -\frac{1}{2}$

$$[D, Q^f_\alpha] = -\frac{i}{2} Q^f_\alpha \quad , \quad [D, S_{\alpha f}] = +\frac{i}{2} S_{\alpha f} \, ,$$

vemos que al actuar con las Q's aumentamos la dimensión en $\frac{1}{2}$ (y lo mismo sucede con las $\bar{Q}$'s), mientras que al actuar con las S's (y $\bar{S}$'s) disminuimos la dimensión por $\frac{1}{2}$. (Así que $Q, \bar{Q}$ y $S, \bar{S}$ son resp. análogos a nuevos operadores de creación $b^{f\dagger}_\alpha, b^\dagger_{\dot{\alpha}f}$ y aniquilación $b_{\alpha f}, b^f_{\dot{\alpha}}$, ahora fermiónicos.) Al actuar con R_A no cambia Δ.

La dimensión de los operadores todavía está acotada por debajo, así que debe existir un operador primario $\underline{\underline{O}}(x)$ tal que

dependiendo de si $\underline{\underline{O}}$ es fermiónico o bosónico

$$[S_{\alpha f}, \underline{\underline{O}}(0)]_\pm = 0 = [\bar{S}^f_{\dot{\alpha}}, \underline{\underline{O}}(0)]_\pm \quad \forall \alpha, \dot{\alpha}, f$$

(además de que $[K_\mu, \underline{\underline{O}}(0)] = 0$).

Esto se conoce como un <u>operador primario superconforme</u>.

Un (súper)multiplete completo del grupo superconforme $SU(2,2|4)$ se obtiene entonces comenzando con un operador primario superconforme $\underline{\underline{O}}(0)$ (que por definición es aniquilado por todos los S, $\bar S$ y K_μ), y actuando sobre él con los operadores Q y $\bar Q$ para obtener otros primarios conformes $\underline{O}(0)$, los cuales a su vez dan lugar a descendientes bajo la acción de P_μ. Esquemáticamente,

(salvo por $\{Q^f_\alpha, \bar Q_{\dot\beta f'}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu \delta^f_{f'}$, p.116)

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{O}}(0)\equiv \underline{O}_1(0) \arrow[r, shift left, "Q \text{ ó } \bar Q"] \arrow[d, shift left, "P_\mu"] & \underline{O}_2(0) \arrow[l, shift left, "S \text{ ó } \bar S"] \arrow[r, shift left] \arrow[d] & \underline{O}_3(0) \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] \arrow[d] & \underline{O}_4(0) \arrow[l, shift left] \arrow[d] \cdots \\
O_{1,1}(0) \arrow[u, shift left, "K_\mu"] & O_{2,1}(0) & O_{3,1}(0) & O_{4,1}(0) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

L24: 10/12/12

Estos multipletes están caracterizados por los números cuánticos del primario superconforme $\underline{\underline{O}}(0)$ bajo

conforme

$$SO(4,2)\times SO(6) \simeq SU(2,2)\times SU(4) \subset SU(2,2|4),$$

simetría R

es decir, su dimensión Δ y espín (s_I, s_D)