

Las rebanadas de AdS a distintos valores de z o r contienen información sobre lo que ocurre en M5YM a distintos escalas de distancia o energía.

Descubrimos entonces que (tal como prometimos):

- * La coordenada radial invertida z en AdS corresponde a una escala de distancia l (en el sentido de una escala de resolución espacial) en M5YM. Equivalentemente, la coordenada radial $\frac{r}{l^2}$ corresponde a una escala de energía E en M5YM.

Notamos que la región cercana a la frontera en AdS , que es el IR (distancia grande) en la teoría gravitacional, corresponde al UV de la teoría de campos, y viceversa. Por esta razón, el mapeo

$$z \leftrightarrow l \quad \text{ó} \quad \frac{r}{L^2} \leftrightarrow E$$

se puede ver como la conexión UV-IR. [Susskind, Witten; Peet, Polchinski]

En el resto del curso veremos cómo opera este mapeo en varios ejemplos explícitos. El hecho de que la energía E se pueda reinterpretar como una dimensión espacial más resulta muy sorprendente, análogo a la conexión establecida entre el espacio y el tiempo en la relatividad especial.

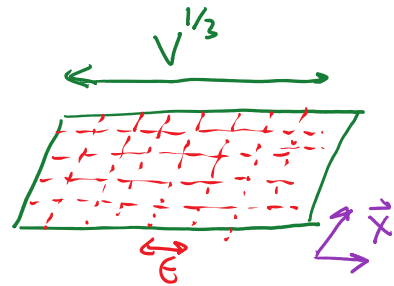
Esta conexión nos permite hacer contacto con el principio holográfico (pp. 144-48), que afirma que

número de grados de libertad en una teoría gravitacional en región R $\rightarrow S_R \leq \frac{A_{\partial R}}{4G_N}$ \leftarrow áreas de la frontera de R

Consideremos a M5YM con un corte UV (en distancia) ϵ . El número de grados de libertad en un volumen (corte \mathbb{R}^2) V es

$$S_{\text{M5YM}} \sim N^2 \frac{V}{\epsilon^3}$$

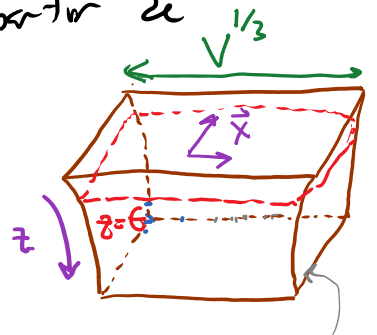
↳ por matrices $N \times N$



del lado de gravedad, el corte UV corresponde a cortar el espacio AdS en $z = \epsilon$. A partir de

la métrica

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) + L^2 d\Omega_5^2$$



podemos calcular el área de la superficie 3-dim

corte \mathbb{R}^2
en $z = V^{1/3}$
no cambiaría el resultado

$$z = \epsilon : A_\epsilon = \int_{z=\epsilon} d^3x d\theta_1 \dots d\theta_5 \sqrt{\det g_{MN}}$$

↳ volumen 3-dim

↳ métrica inducida en $z = \epsilon$

$t = \text{cte.}$

$$= V \Omega_5 \sqrt{\left(\frac{L^2}{z^2}\right)^3 (L^2)^5} \Big|_{z=\epsilon}$$

$$\sim \frac{L^8}{\epsilon^3} V$$

↳ volumen de S^5 (π^3)

De acuerdo con el principio holográfico, esto implica que el número de grados de libertad en CIB- $(2, \epsilon)$ es

$$S_{\text{IIB}} \leq \frac{A_\epsilon}{4G_N} \sim \frac{\frac{L^8}{\epsilon^3} V}{G_N} \sim \frac{(\cancel{g_c}^2)^2 \cancel{l_c}^8 V}{\epsilon^3 \cancel{g_c}^2 \cancel{l_c}^8}, \quad \begin{matrix} L^4 \propto g_c^2 l_c^4 \\ G_N \propto g_c^2 l_c^8 \end{matrix}$$

es decir,

$$S_{\text{IIB}} \lesssim \frac{N^2 V}{\epsilon^3} \sim S_{\text{M5YM}}.$$

Vemos entonces que la correspondencia AdS/CFT satura la cota holográfica. ✓

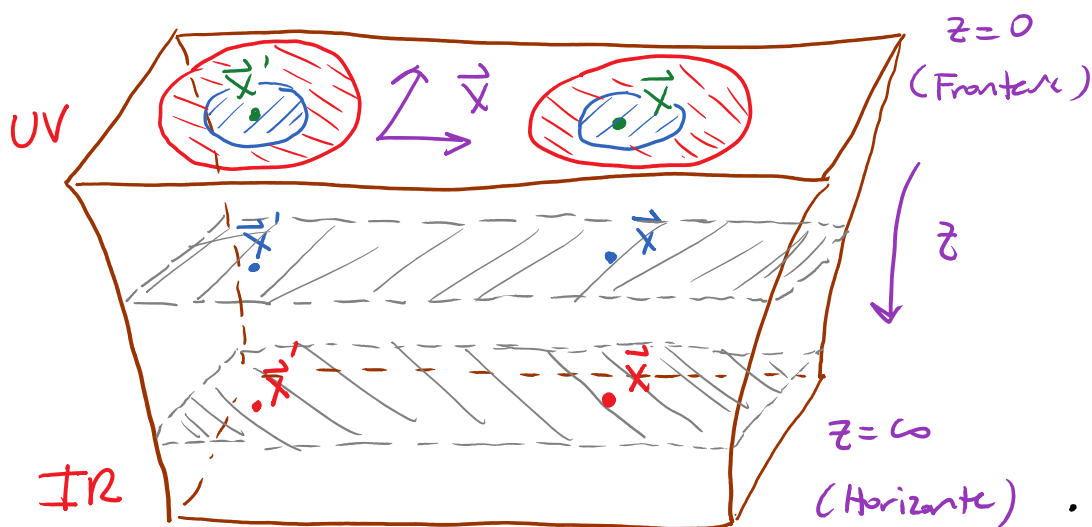
Un punto curioso es que AdS tiene un volumen que escala como la misma potencia del corte ϵ :

$$\begin{aligned} \text{Vol}_\epsilon &= \int_\epsilon^\infty dz \int d^3x \int d\theta_1 \dots d\theta_5 \sqrt{\det g_{MN}} \quad \leftarrow \text{métrica en } t = \text{cte.} \\ &= V \Omega_5 \int_\epsilon^\infty dz \sqrt{\left(\frac{L^2}{z^2}\right)^4 (L^2)^5} \\ &= V \Omega_5 L^9 \int_\epsilon^\infty \frac{dz}{z^4} \sim \frac{VL^9}{\epsilon^3} \sim LA_\epsilon. \end{aligned}$$

\leftarrow ó $\sqrt{1/3}$, da igual

Esto implica que cualquier teoría en ADS, incluso si no es gravitacional, es "holográfica" en el sentido de que su número de grados de libertad es proporcional al área A_ϵ (y también al volumen Vol_ϵ). Pero la dependencia de L es distinta para Vol_ϵ y A_ϵ , y en la correspondencia ADS/CFT vemos que el número de grados de libertad de MSYM y CIB escala correctamente como el área A_ϵ .

Según lo que hemos mencionado, el diccionario de la correspondencia identifica $X_{\text{ADS}}^M = X_{\text{CFT}}^M$ y $z = l$, haciendo uso de una foliación radial específica:



(En situaciones dinámicas, este mapeo puede ser más complicado.)

Frecuentemente se dice que la CFT "vive en la frontera de AdS", porque es en $z \rightarrow 0$ donde los datos de CIB describen excitaciones completamente localizadas de M5YM. Es importante, sin embargo, tener presente que al hablar de CIB en AdS, es incorrecto considerar simultáneamente a alguna teoría 3+1 que vive en $z=0$ (o cualquier otra hoja de la foliación radial). M5YM es una descripción alternativa de CIB en AdS, y contiene información sobre lo que ocurre en todos los valores de z , no solo $z=0$.

* La elección de una foliación radial específica de AdS nos permite también leer la métrica del espaciotiempo donde vive la CFT:

$$ds_{\text{AdS}}^2 = \frac{L^2}{z^2} \left[\underbrace{g_{\mu\nu}(x,z)}_{\eta_{\mu\nu}} dx^\mu dx^\nu + dz^2 \right]$$

$$\eta_{\mu\nu} + z^2 g_{\mu\nu}^{(2)}(x) + \dots$$

"Norma de Fefferman-Graham"

$$\text{con } g_{zz} = \frac{L^2}{z^2},$$

$$\text{y } g_{z\mu} = 0$$

* Dadas estas identificaciones, es claro que los difeos en ADS que solo cambian $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu(x)$ corresponden directamente a difeos en Minkowski^{3,1}

* Por otro lado, los difeos en ADS que mezclan a x^μ con z cambian la foliación redial, y en ello tienen el efecto de cambiar la métrica de M5M por una transformación de Weyl:

$$z \rightarrow \tilde{z} = e^{\omega(x)} z, \quad x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu(x, z) \quad \text{con } \tilde{x}^\mu(x, 0) = x^\mu$$

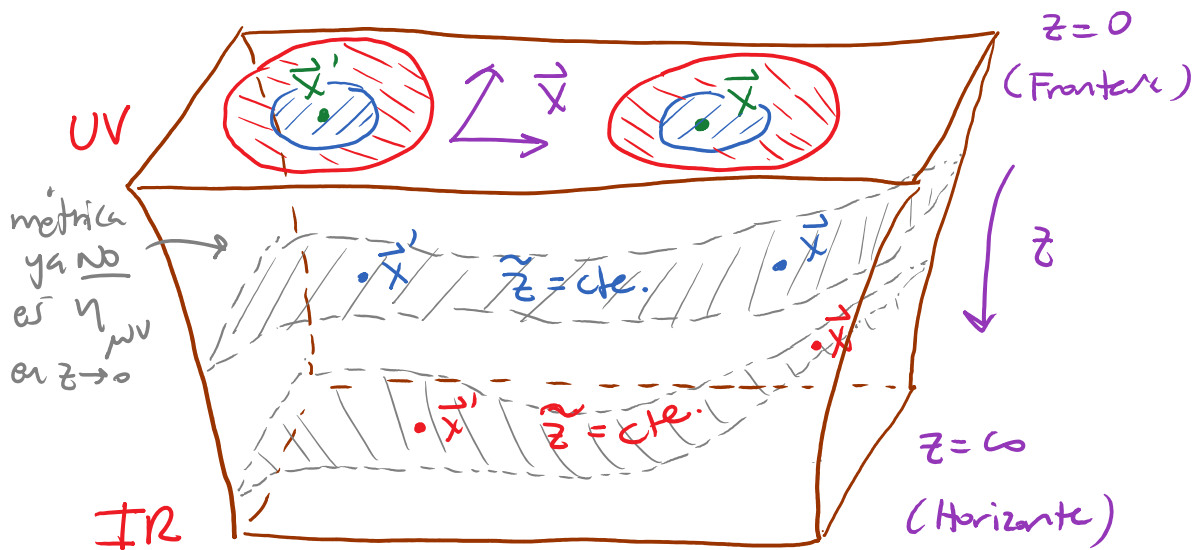
(elegido para evitar términos $\tilde{\mu}\tilde{z}$ en la métrica, y preservar entonces la forma de Fefferman-Graham) produce el efecto

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(x) = e^{2\omega(x)} g_{\mu\nu}(x) \quad \text{sobre la métrica de la CFT.}$$

[Imbimbo, Schwimmer, Theisen, Yankielowicz]

L21: 01/12/20

Específicamente,



El paso de coordenadas de Poincaré en AdS a coordenadas globales es de hecho un ejemplo de esto.

La métrica AdS global (p.225)

$$ds^2_{\text{AdS}} = L^2 \left(-\cosh^2 p \, d\tau^2 + \sinh^2 p \, d\Omega_3^2 + dp^2 \right)$$

puede ponerse en la forma de Teitelman-Brachon definiendo $Z \equiv 2L e^{-p}$ (para que la frontera $p \rightarrow \infty$ esté ahora en $Z=0$), y se encuentra

$$ds^2_{\text{AdS}} = \frac{L^2}{Z^2} \left[\begin{aligned} & \left(L^2 + \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^4}{16L^2} \right) d\tau^2 \\ & \left(L^2 - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^4}{16L^2} \right) d\Omega_3^2 + dZ^2 \end{aligned} \right],$$

de donde podemos leer que la CFT vive ahora en un espaciotiempo $\mathbb{R} \times S^3$ con métrica

$$ds_{\text{CFT}}^2 = L^2 \left[-dt^2 + d\Omega_3^2 \right]. \quad \begin{array}{l} \text{Universo estático} \\ \text{de Einstein} \end{array}$$

\uparrow curvatura cte. > 0

Y a partir de las definiciones podemos ver que la relación entre Z y z es

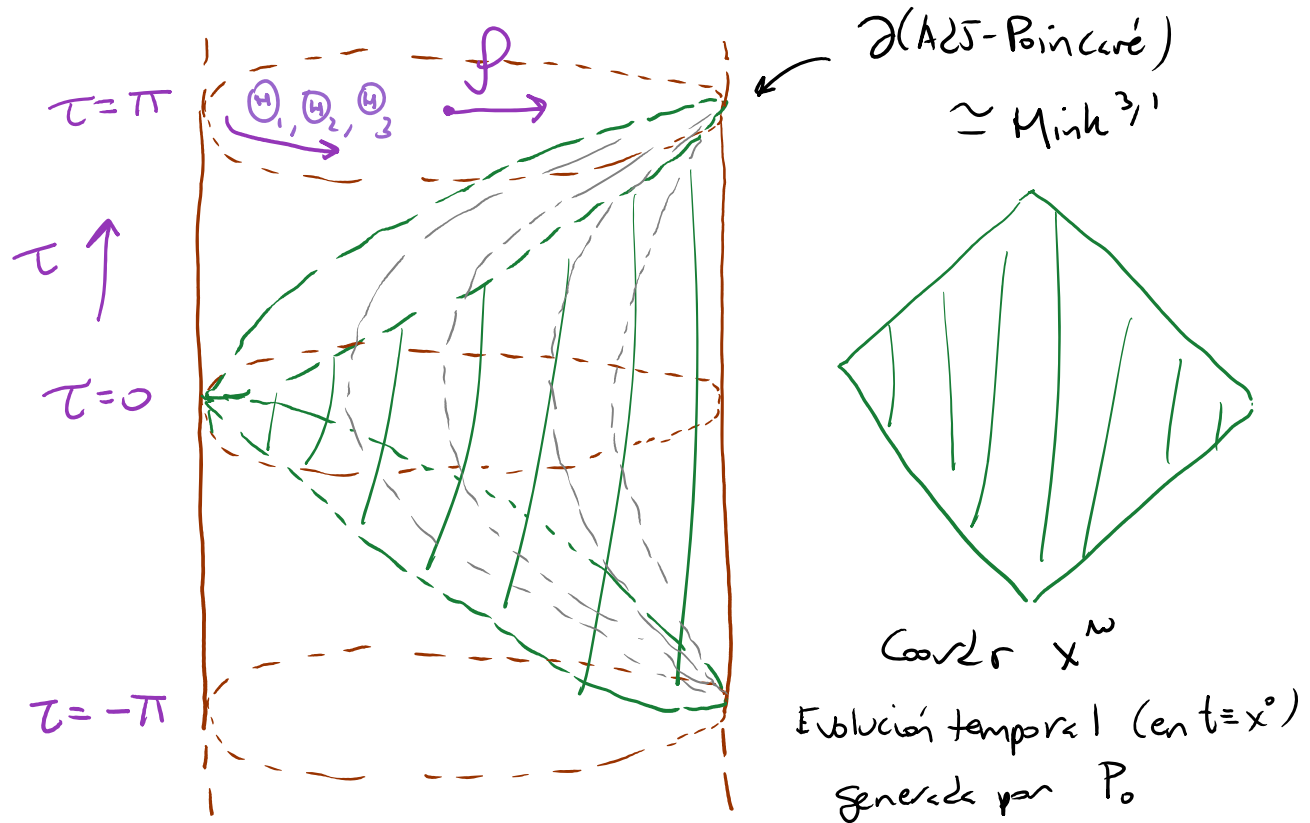
$$\begin{aligned} \frac{L^2}{Z^2} + \frac{1}{Z} + \frac{Z^2}{16L^2} &= L^2 \cosh^2 \rho \\ &= (X_{-1})^2 + (X_0)^2 \\ &= \frac{L^2 t^2}{z^2} + \frac{z^2}{4} \left[1 + \frac{L^2 + x^2 - t^2}{z^2} + \frac{(L^2 + x^2 - t^2)^2}{z^4} \right], \end{aligned}$$

que cerca de la frontera implica

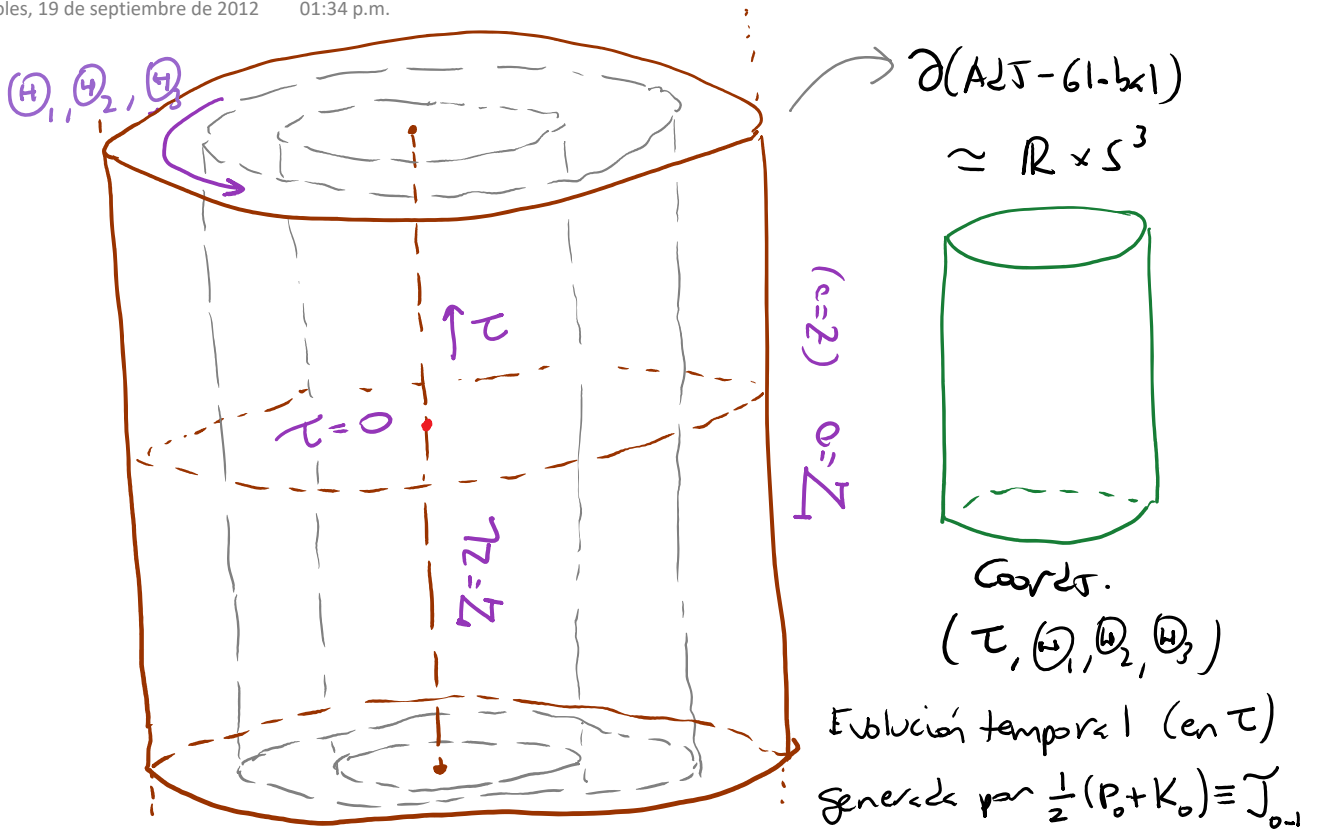
$$Z \simeq \frac{z}{\sqrt{t^2 + \frac{(L^2 + x^2 - t^2)^2}{4L^2}}},$$

es decir, el factor de Weyl entre las coordenadas globales y las de Poincaré es $e^{w(x)} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + \frac{(L^2 + x^2 - t^2)^2}{4L^2}}}$.

Entonces, redefiniendo nuestra foliación vertical tiempo logrado pasar de la correspondencia que teníamos en la cuna de Poincaré,



donde la CFT vivirá en Minkowski 3+1, a una nueva situación donde la CFT está definida sobre una 3-espacia x el tiempo global, que se puede identificar con la frontera de AdS en coordenadas globales,



Y algo interesante es que con esta nueva foliación $\tau=Z$,
 ¡no tenemos ya un horizonte, y podemos describir el
 espaciotiempo $A\mathbb{J}_5$ completo!

En resumen, podemos entender esto como un nuevo
 ejemplo de la correspondencia:

$$\text{MSYM en } \mathbb{R}^{3,1} \quad = \quad \text{MSYM en } \mathbb{R} \times S^3$$

\downarrow Weyl $e^{\omega(x)}$

$$\text{CIIB en } aA\mathbb{J}_5\text{-Poincaré} \times S^5 \quad = \quad \text{CIIB en } aA\mathbb{J}_5\text{-Global} \times S^5$$

$\downarrow z \rightarrow \tilde{z} = e^{\omega(x)} z$

Ambos casos están por supuesto estrechamente relacionados,

↪ conforme \leftrightarrow Weyl

particularmente por tratarse de una CFT; pero los detalles de la física son distintos (existe anomalía de Weyl).

LI: 18/10/16

Esto tiene también conexión con la acción de $SO(4,2)$: si bien en cualquier punto de AdS está bien definida a nivel local la acción de los generadores de este grupo de simetrías, solo en AdS global está también bien definida la acción de $SO(4,2)$ a nivel de los elementos del grupo (transformaciones finitas). En particular, hay transformaciones $SO(4,2)$ que nos sacan de la cuna de Poincaré. Del lado de la CFT, habíamos enfatizado igualmente que el grupo conforme $SO(4,2)$ (siempre bien definido a nivel local) no está bien definido directamente sobre Minkowski, $\mathbb{R}^{3,1}$, sino que se requiere la adición de puntos en el infinito. Después de esta maniobra, acabamos precisamente con la CFT en $S^3 \times \mathbb{R}$ [Luscher, Mack], que, como ahora sabemos, es dual a AdS global.

Por supuesto, las coordenadas globales y las de Poincaré son apenas 2 ejemplos de distintas foliaciones radiales de AdS_5 , y existe una infinidad de otras opciones. Es posible, por ejemplo, presentar la métrica de AdS_5 en la forma [ver p.ej. 1804.05855 Apéndice A]

$$ds_{AdS}^2 = - \left(-1 + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + r^2 dH_3^2 + \frac{dr^2}{-1 + \frac{r^2}{L^2}},$$

con $dH_3^2 \equiv \frac{dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2}{y_3^2}$ la métrica en el espacio

hiperbólico 3-dimensional (la versión euclídea de AdS_3), o equivalentemente, en la forma de Fefferman-Graham (con $z \equiv L^2/r$)

$$ds_{AdS}^2 = \left(1 - \frac{L^2}{z^2} \right) dt^2 + \frac{L^4}{z^2} dH_3^2 + \frac{L^4 dz^2}{z^2(L^2 - z^2)}$$

$$\stackrel{z \rightarrow 0}{=} \frac{L^2}{z^2} \left[-dt^2 + L^2 dH_3^2 + dz^2 + \mathcal{O}(z^2) \right],$$

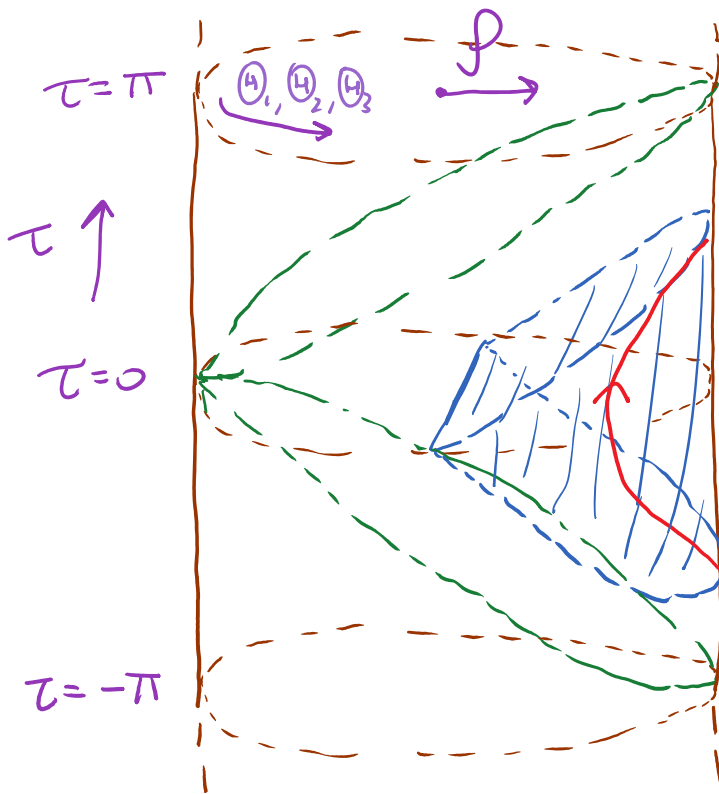
donde vemos que la CFT está ahora definida sobre $\mathbb{R} \times H^3$ con métrica

$$ds_{\text{CFT}}^2 = -dt^2 + L^2 dH_3^2$$

curvature etc. < 0

Universo estático
abierto de Einstein

Esta foliación tiene un horizonte de aceleración en $z=L$ ($\Leftrightarrow r=L$), y resulta cubrir una región de AdS que es más pequeña que la cuna de Poincaré,



A diferencia de la cuna de Poincaré, esta cuna de Rindler en AdS si deja fuera parte de la superficie $\tau=0$ (\sim superficie de Cauchy), así que no contiene toda la información sobre el estado de la teoría gravitacional

Esta región es la que resulta accesible a un observador uniformemente acelerado con $A^2 > 1/L^2$,

de modo que en este caso sí se tiene un efecto

Unruh: AdS puro corresponde a un estado de la CFT a temperatura finita $T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{A^2 - \frac{1}{L^2}}$. [Emparan]

Con otras foliaciones radiales es posible obtener regiones de AdS duales a la CFT en, p.ej., ds_4 , AdS_4 global, ó $S^p \times AdS_{4-p}$ [Emparan, Johnson, Myers]. En particular, ¡una teoría de gravedad cuántica en AdS_{d+2} resulta ser dual a una CFT en AdS_{d+1} !

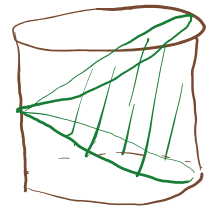
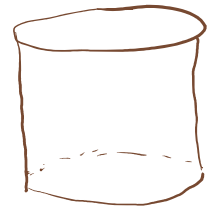
Además de cambios de foliación radial \leftrightarrow transformaciones de Weyl, podemos hacer rotaciones de Wick sincronizadas en la teoría de gravedad y la CFT, para obtener versiones eulidianas de la correspondencia AdS/CFT. P.ej., a partir de la equivalencia en AdS global, podemos ver que CIBB en

H^5 ($\equiv EAdS_5$, la versión eulideana de AdS_5)

es dual a $\mathcal{N}=4$ SYM en $\mathbb{R} \times S^3$ eulideano.

Y de hecho, obtenemos también H^5 completo

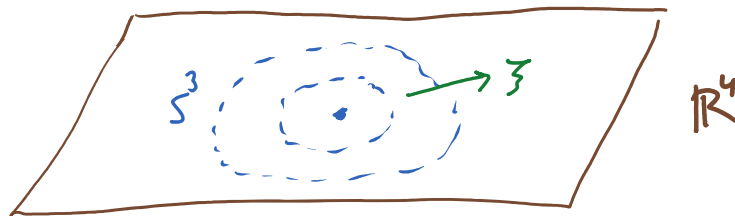
incluso si empezamos con AdS_5 -Poincaré, en cuyo caso $\mathcal{N}=4$ SYM estaría definida sobre



\mathbb{R}^4 (la rotación de Wick de $\mathbb{R}^{3,1}$).

Esto es de lo raro en que no existen horizontes en geometrías euclidianas, y también, en que \mathbb{R}^4 es completamente equivalente a $\mathbb{R} \times S^3$ bajo una transformación de Weyl:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dx_E^i dx_E^i \quad \text{coords. cartesianas} \quad i=1, \dots, 4 \\
 &= dx_E^2 + x_E^2 d\Omega_3^2 \quad \text{coords. esféricas} \quad x_E \equiv \sqrt{x_E^i x_E^i} \\
 &= x_E^2 \left(\frac{dx_E^2}{x_E^2} + d\Omega_3^2 \right) = e^{2\zeta} (d\zeta^2 + d\Omega_3^2). \\
 &\quad \uparrow \equiv d\zeta^2 \quad \text{con } \zeta \equiv \ln x_E
 \end{aligned}$$



En algunas ocasiones nos conviene utilizar la versión euclidiana de AdS/CFT, y eventualmente hacer la rotación de Wick inversa para volver a la versión Lorentziana.

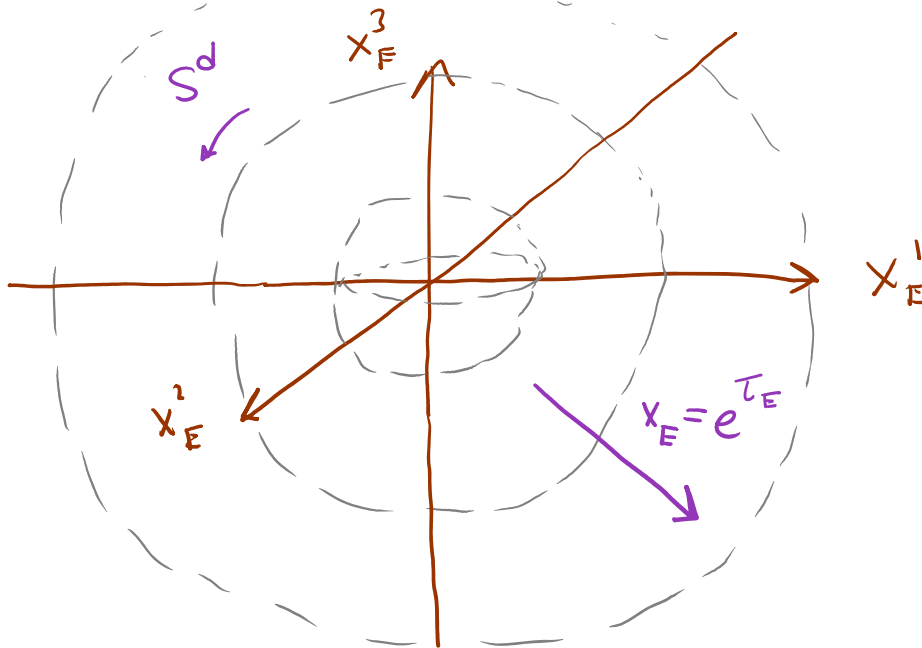
Continuando con el diccionario de la correspondencia, podemos argumentar que existe un isomorfismo entre los objetos básicos de las 2 teorías.

Del lado de M5YM, los objetos de interés son los operadores invariantes de norma, pues en ellos los que contienen la información física. Por el momento nos concentraremos en operadores locales, $\mathcal{O}(x)$, como por ej. $\text{Tr}(F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x))$.

EQUIVALENTEMENTE, podemos considerar a los estados de la teoría, y de hecho, en cualquier CFT_{d+1} existe siempre un isomorfismo entre estados y operadores locales, el llamado mapa estado-operador.

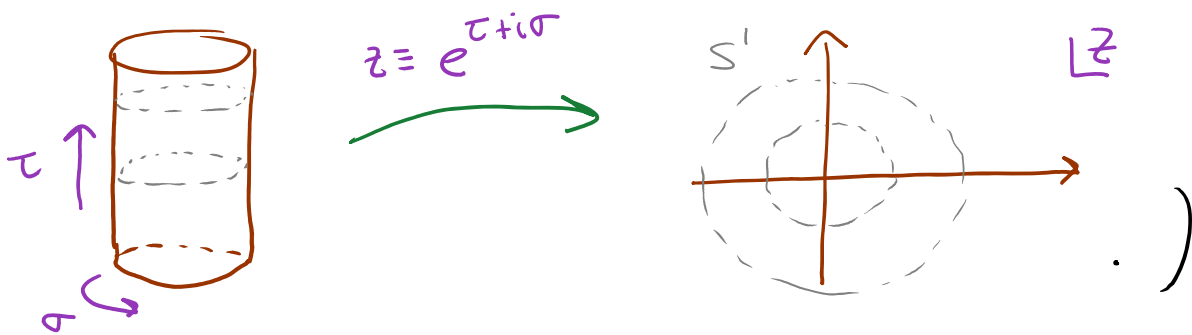
L22: 03/12/20
Para entenderlo, conviene pensar en la CFT sobre la versión euclidiana de $\mathbb{R}^{d,1}$, es decir, \mathbb{R}^{d+1} , y trabajar en coordenadas esféricas $\mathbb{R} \times S^d$, como mencionamos en la página anterior:

$$\begin{aligned}
 ds_{\text{CFT}}^2 &= \int dx_E^i \int dx_E^i = dx_E^2 + x_E^2 d\Omega_d^2 \\
 &= e^{2\tau_E} (d\tau_E^2 + d\Omega_d^2), \quad \text{con } \tau_E \equiv \ln x_E.
 \end{aligned}$$



En esta presentación, conocida como cuantización radial, podemos pensar en la dirección radial τ_E (que parametriza al \mathbb{R} de $\mathbb{R} \times S^d$) como si fuera el tiempo, de tal modo que las superficies de tiempo constante son los esferos S^d a distintos radios. El pasado remoto $\tau_E \rightarrow -\infty$ corresponde al

origen de \mathbb{R}^{d+1} ($x_E = 0$), y el futuro remoto $\tau_E \rightarrow +\infty$ corresponde a la S^d con radio infinito ($x_E \rightarrow \infty$). (El mapeo entre el cilindro $\mathbb{R} \times S^1$ y el plano \mathbb{R}^2 que se realiza habitualmente para la hoja de mundo de la cuerda cerrada es justamente un caso particular de lo que estamos diciendo aquí,



Podemos notar que las dilataciones $x_E^i \rightarrow s x_E^i$ en \mathbb{R}^d corresponden a la evolución temporal $\tau_E \rightarrow \tau_E + \ln s$ para la CFT definida en $\mathbb{R} \times S^d$.

El mapeo de operadores a estados es

$$\mathcal{O}(x) \rightarrow |\mathcal{O}\rangle \equiv \lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{O}(x) |0\rangle, \quad \uparrow \text{evalua en el pasado remoto}$$

o lo que es lo mismo,

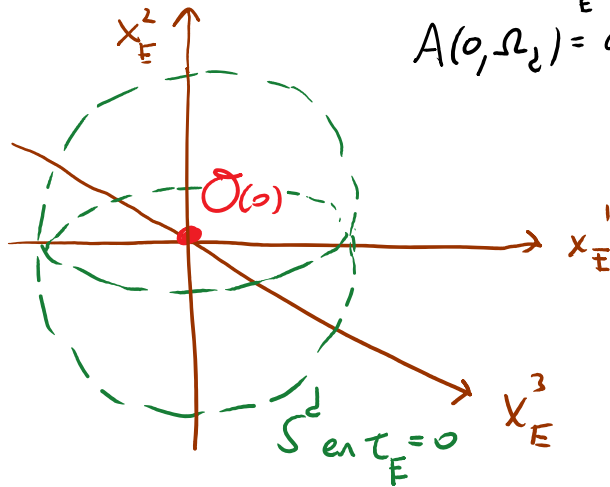
funcional de onda para estado $|\sigma\rangle$

$$\langle a(\Omega_d) | \sigma \rangle \equiv \langle a(\Omega_d) | \hat{\mathcal{O}}(0) | 0 \rangle$$

valor de campo A de CFT sobre S^d

$$= \int_{-\infty < \tau_E \leq 0} \mathcal{D}A(\tau_E, \Omega_d) \hat{\mathcal{O}}(0) e^{-S_{\text{CFT}}[A]}$$

$$A(0, \Omega_d) = a(\Omega_d)$$



Esta integral funcional define un estado: un mapeo de $a(\Omega_d)$'s a números.

El mapeo inverso, de estado a operadores, toma un estado definido como funcional de $A(\Omega_d)$ a un cierto tiempo/vela τ_E y hace una dilatación para elegir el vela de la S^d (es decir, disminuir el valor de τ_E) hasta cero, de modo que equivale a la inserción de un operador local en el origen ($\tau_E \rightarrow -\infty$).

Del lado de la teoría de gravedad, los objetos básicos son los campos $\phi(x^M)$, que en el límite clásico ($N_c \rightarrow \infty$) asumen ciertos valores específicos, no confundir con dilatación $\phi(x^M)$