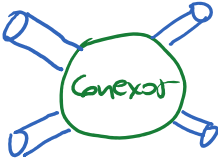


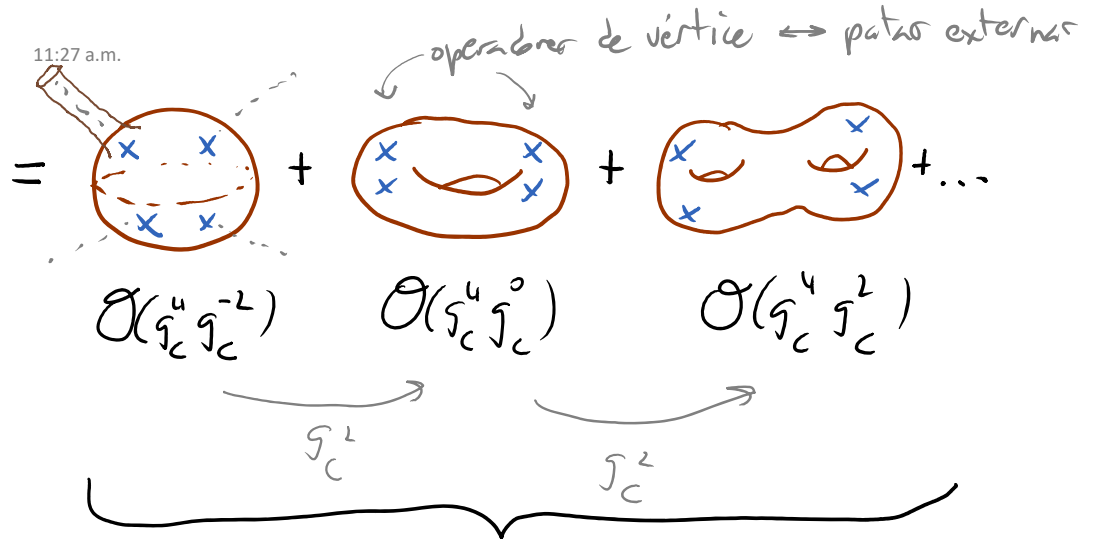
Sabemos que la teoría de cuerdas está bajo control a nivel de cálculos solo si el espacio tiempo está débilmente curvado y las cuerdas están débilmente acopladas:

$$\frac{l_c^2}{L^2} \ll 1, g_c \ll 1 \Rightarrow \lambda \equiv g_{YM}^2 N_c \gg 1, N_c \gg 1,$$

es decir, cuando $MSYM$ tiene (azúcar, flores y) muchos colores y está fuertemente acoplada!

Frecuentemente se dice que AdS/CFT es una dualidad de acoplamiento débil \leftrightarrow acoplamiento fuerte; pero hay que tener presente que en los cálculos de cuerdas hay no 1 sino 2 parámetros de expansión perturbativa. P.ej.,

$$A(12 \rightarrow 34) =$$




Expansión en lazos de cuerda, controlada por g_c

En cada orden deberemos hacer una integral funcional en una teoría de campo 2-dimensional (sobre la hoja de mundo M),

$$A_m \sim \int_M D^M X(\sigma) \underbrace{V_1(k_1) \dots V_n(k_n)}_{\text{operadores de vértice}} e^{-\frac{1}{2\pi\alpha'^2} \int d^2\sigma g_{MN}(X) \partial_a X^M \partial_b X^N \eta^{ab}}$$

campos escalares ↙
hoja de mundo ↖
acción de Polyakov

que en términos de $X^M(\sigma) \equiv \bar{x}^M + \ell_c \zeta^M(\sigma)$,

p.ej. centro de masa ↗
fluctuaciones ↖

$$g_{MN}(X) = g_{MN}(\bar{x}) + \ell_c \partial_p g_{MN}(\bar{x}) \zeta^p + \frac{1}{2} \ell_c^2 \partial_p \partial_q g_{MN}(\bar{x}) \zeta^p \zeta^q + \dots$$

toma la forma

$$A_m \sim \int_M D^M \zeta(\sigma) \dots e^{-\int d^2\sigma \left[g_{MN}(\bar{x}) \partial_a \zeta^M \partial_b \zeta^N \eta^{ab} + \ell_c \partial_p g_{MN}(\bar{x}) \partial_a \zeta^M \partial_b \zeta^N \eta^{ab} \zeta^p + \dots \right]}$$

← término libre

vértice de 3 patas

Vemos que los acoplamientos en 2D son $\sim (\ell_c/L)^n$, donde L es el radio de curvatura característica del fondo, $\partial_p g_{MN} \sim \frac{1}{L}$.

U16: 11/10/16

La expansión en lazos en la hoja de mundo está entonces controlada por l_c/L .

En la correspondencia ADS/CFT,

MSYM fuertemente acoplado \leftrightarrow Hoja de mundo débilmente acoplada ($\lambda \gg 1$) \leftrightarrow ($l_c/L \ll 1$),

MSYM débilmente acoplado \leftrightarrow Hoja de mundo fuertemente acoplada ($\lambda \ll 1$) \leftrightarrow ($l_c/L \gg 1$);

pero en AMBS es posible tener CIB débilmente acoplada ($g_c \ll 1$), siempre y cuando $N_c \gg 1$.

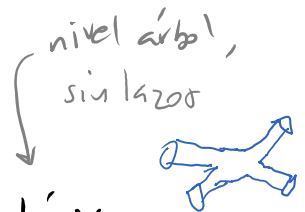
Lo más fácil es hacer cálculos en el límite planar (N_c grande) y con acoplamiento infinito en MSYM,

$$N_c \rightarrow \infty, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

donde: $g_c \rightarrow 0$, así que CIB es libre/clásica,

$l_c^2/L^2 \rightarrow 0$, así que CIB se describe de manera exacta con supergravedad IIB (SUGRA).

Con más esfuerzo, pueden incorporarse correcciones en l_c^2/L^2 (provenientes de estados masivos de las cuerdas),



que en MSYM corresponden a correcciones en $1/\sqrt{\lambda}$.

Las correcciones cuánticas en potencias de g_c (¡difíciles de calcular!) incorporan interacciones /lazos en CIB y corresponden en MSYM a correcciones en $1/N_c$ (o, para ser precisos, $1/N_c$).

En el resto del curso, veremos ejemplos del uso de la correspondencia en esta dirección: como *un herramienta* para explorar la región de acoplamiento fuerte de la teoría de cuerdas.

A la inversa, los cálculos perturbativos en MSYM en la región

$$\lambda \ll 1, N_c \gg 1,$$

contienen información sobre CIB débilmente interactuantes (libres/clásicos si $N_c \rightarrow \infty$) en un fondo altamente curvado, que no puede ya verse simplemente como una geometría, puesto que involucra también a los modos masivos de cuerdas \Rightarrow campos de alto espín.

En la práctica, es más complicado extraer información usando la dualidad en esta dirección, porque el diccionario traza los datos espaciotemporales de AJS de modo altamente no local. [Ver, p.ej., Haggi-Mani, Sundberg; Sundberg; Berenstein; Aharony, David, Gopakumar, Komargodski, Razamat; Gopakumar; Beisert, Bianchi, Morales, Santleben; Clark, Karich, Kovtun, Yamada; etc.]

Y podemos notar por otra parte que la dualidad norma/gravedad no nos da acceso fácil a la región donde el acoplamiento de cuerdas es fuerte, porque $g_c \sim \frac{\lambda}{N_c} \gg 1$ es imposible con $\lambda \ll 1$.

Para entender esta región, podemos en cambio utilizar la dualidad S de CIB, que intercambia $g_c \leftrightarrow 1/g_c$ - ver pp. 169-70.

Es interesante que todo lo anterior empieza con la forma de la conexión entre teorías de norma y teorías de cuerdas

sugerida por 't Hooft (ver pp. 76-78): una teoría no abdicana con $N_c \rightarrow \infty$ y λ fija en verdad puede reformularse como una teoría de cuerdas, con acoplamiento $g_c \sim 1/N_c$.

AdS/CFT nos da entonces una implementación muy explícita de las ideas de 't Hooft, identificando a la teoría de cuerdas involucrada y el significado preciso de λ . Y en esta implementación, nos topamos con un par de sorpresas:

- i) El lenguaje dual a la teoría de norma involucra a la gravedad!!
- ii) La teoría de cuerdas vive en un espaciotiempo curvado, con mayor número de dimensiones!!

Antes de proseguir en el diccionario, nos conviene sujetar a la correspondencia a una primera prueba: si en verdad AdS/CFT es equivalente a CFT, entonces ambas teorías deben tener los mismos simetrías globales.

1) Como vimos (pp. 107-111), MYM es un teorema de campo conforme, es decir, es ^{si vale (simétrico)} invariante bajo el grupo conforme en 3+1 dim, $SO(4,2)$.

En el lib de aerder, estas mismas simetrías conforman el grupo de isometrías de AdS_5 , ^{si existen} es decir, el conjunto de difeos que no cambian la forma de la métrica (el análogo del grupo de Poincaré para el espaciotiempo de Minkowski). Si recordamos la definición de AdS_5 como el


hiperboloide

$$\underbrace{-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2}_{\text{norma en } \mathbb{R}^{4,2}} = -L^2$$

en el espacio plano con métrica $\eta_{AB} \equiv \text{diag}(-1, -1, 1, 1, 1, 1)$, resulta obvio que $SO(4,2)$ (el análogo del grupo de Lorentz para este espacio de empuje) no cambia η_{AB} (por definición) ni la ec. del hiperboloide, así que no cambia tampoco la métrica inducida sobre el hiperboloide.

Es decir, $so(4,2)$ es en verdad el grupo de isometrías de AdS_5 , y por tanto, se cuenta entre las simetrías globales de CII B en $AdS_5 \times S^5$. ✓

2) Sabemos también (pp. 95-6, 117) que M5YM tiene una simetría interna global $SU(4) \cong so(6)$, conocida como simetría R, que deja invariante al campo gluónico $(A_m^a(x))_{cc'}$, pero rota entre sí a los 4 campos fermiónicos $(\psi^f(x))_{cc'}$, y al mismo tiempo, mezcla entre sí a los 6 campos escalares $(\Phi^e(x))_{cc'}$.

En el sistema de N_c D3s en espaciotiempo plano que tenemos antes de tomar el límite de Maldacena, $so(6)$ se origina de las rotaciones en las 6 direcciones transversales a las D3s. 

En CII B, estas mismas simetrías aparecen como el grupo de isometrías de la S^5 , que es justamente $so(6)$, o en versión espinorial, $Spin(6) \equiv SU(4)$ (la relación entre ambos grupos es análoga a $so(3) \cong su(2) \equiv Spin(3)$).

Esto era de esperarse, puesto que la S^5 se originó precisamente de las direcciones que rodeaban a la garganta de la $R3$. Así que CII B sobre a $AdS_5 \times S^5$ efectivamente tiene simetría global $SO(6) \approx SU(4)$. ✓
 ↗ ¡espaciotemporal, no interna!

3) Además de estas simetrías básicas, MSYM tiene un total de 32 supersimetrías (rotaciones fermiónicas) independientes. Esto es el DOBLE de lo que el nombre SYM $N=4$ sugiere: tenemos 16 componentes de las 4 supercargas ordinarias Q^f más 16 componentes de las 4 supercargas superconformes S^f (recordar que $[K^M, Q^f] \sim \sigma^M \bar{S}^f$, con K^M los generadores de las transformaciones conformes especiales). Dijimos que las Q^f , y por separado las S^f , rotan entre sí bajo las transformaciones $SU(4)$, y esto es lo que identifica a este grupo como simetría R .

En CII B, sabemos que el "II" hace referencia

a que se tiene supersimetría (local) $N=2$ (es decir, 2 espinores de Majorana-Weyl) en $9+1$ dim, lo cual equivale a 32 supersimetrías. El fondo de Minkowski $9+1$ dim (con todos los otros campos apagados) preserva todas estas supersimetrías; pero un fondo genérico no preserva ninguna. El fondo completo de R^3 (o R^p) es invariante bajo 16 supersimetrías (es un estado BPS, justo como el bunch de D3's), pero su límite cercano al horizonte, $AdS_5 \times S^5$ es de hecho máximamente supersimétrico (tal como Minkowski): es invariante bajo 32 supersimetrías. ✓

Combinando 1) + 2) + 3), encontramos que M2YM y CII3 en $AdS_5 \times S^5$ tienen de hecho el mismo supergroup de simetrías globales, $SU(2,2|4)$. ✓

4) Además de tener estas simetrías continuas, hemos dicho (pp. 120-124) que se cree que MSYM tiene una simetría discreta global, conocida como dualidad S, descrita por el grupo $SL(2, \mathbb{Z})$.

Estas transformaciones mezclan/intercambian los estados de la teoría en cargas eléctricas y magnéticas, y al mismo tiempo modifican el acoplamiento

Complejo

$$\tau = \frac{\Theta_{YM}}{2\pi} + i \frac{4\pi}{g_{YM}^2}$$

de acuerdo con

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}).$$


Esto incluye (y de hecho es generado por) la posibilidad de transformar

$$\Theta_{YM} \rightarrow \Theta_{YM} + 2\pi$$

$$y \quad g_{YM}^2 \leftrightarrow \frac{4\pi}{g_{YM}^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{acoplamiento} \\ \text{débil} \leftrightarrow \text{fuerte} \end{array} \right).$$

Y mencionamos también (pp. 169-70) que CII B tiene igualmente dualidad S con grupo $SL(2, \mathbb{Z})$, que mezcla/intercambia $B_{MN} \leftrightarrow C_{MN}$ y transforma al suplemento complejo $\tau \equiv C + i e^{-\varphi}$
 acción = es decir RR \curvearrowright Dilatón

justo como indicamos arriba. Un punto importante es que estas transformaciones dejan invariante a la métrica (en el marco de Einstein) y a $G_{M_1 \dots M_5}$, que son los únicos 2 campos excitados en el fondo $AdS_5 \times S^5$, así que CII B en este fondo efectivamente tiene a $SU(2, \mathbb{Z})$ como simetría discreta. ✓

(De hecho, la dualidad S de CII B explica la dualidad S de M5YM, que sabemos que proviene de  \leftarrow autodualidad bajo dualidad S.)
 [20: 26/11/10]

* De esta conexión aprendemos además que, tal como el valor de g_{YM}^2 está determinado por $g_c = e^{\varphi} \Big|_{z=0}$, el valor del parámetro restante de M5YM, θ_{YM} , está determinado por $C \Big|_{z=0}$.

En conjunto, vemos entonces que la correspondencia ha superado exitosamente su primera prueba: ¡hay un acuerdo perfecto entre las simetrías de ambas teorías!

(En varios casos vimos que el acuerdo puede explicarse por la conexión entre D3s y la R3; pero eso no le resta contundencia. Por supuesto la dualidad debe ser correcta si en verdad esa conexión entre D3s y R3 existe. Pero dado que esto último podría ser puesto en duda, estamos en búsqueda de evidencia directa de que $M_{SYM} = CIB$ en $AdS_5 \times S^5$, y el acuerdo entre las simetrías globales de estas teorías indudablemente sorprende desde este punto de vista.)

Lo que hemos aprendido nos permite anticipar la posible existencia de una correspondencia AdS/CFT más general, tal como habíamos mencionado en la parte inicial del curso. Imaginemos que tenemos una teoría

de campos conforme (CFT) en $3+1$ dimensiones, distinta a $\mathcal{N}=4$ SYM. Entre sus simetrías globales se cuenta entonces el grupo conforme $SO(4,2)$. Si acaso esta CFT tuviera, como $\mathcal{N}=4$ SYM, alguna descripción dual en términos de una teoría de gravedad (más adelante entenderemos por qué la gravedad necesariamente estará involucrada), entonces el espaciotiempo donde vive la teoría gravitacional necesariamente tendrá un factor AdS_5 , puesto que este es el único espacio con $SO(4,2)$ como su grupo de isometrías. La S^5 , por otra parte, en general no figurará, puesto que la presencia de $SU(4) \cong SO(6)$ como simetría global está asociada a la existencia de $\mathcal{N}=4$ SUSY, que es una característica específica de $\mathcal{N}=4$ SYM.

Además, al no estar hablando ya del ejemplo de $\mathcal{N}=4$ SYM, la teoría gravitacional en general no tendrá por qué ser específicamente CIB — incluso podemos plantearnos la

posibilidad de que No sea una teoría de cuerdas (aunque sí debe ser una teoría de gravedad bien definida a nivel cuántico, y tal vez ello implique siempre una relación con cuerdas).

Podemos llegar todavía más lejos notando que el grupo conforme en $d+1$ dimensiones, $SO(d+1, 2)$, coincide con el grupo de isometrías de AdS_{d+2} .

Parece plausible entonces la existencia de dualidades englobadas en una Correspondencia AdS/CFT más general,

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Teoría Conforme} \\ \text{en } d+1 \text{ dim} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Teoría gravitacional} \\ \text{en } AdS_{d+2} \times M^p \end{array} /}$$

donde M^p es alguna variedad compacta p -dimensional asociada a las simetrías globales internas de la CFT.

(Más adelante veremos ejemplos explícitos.)

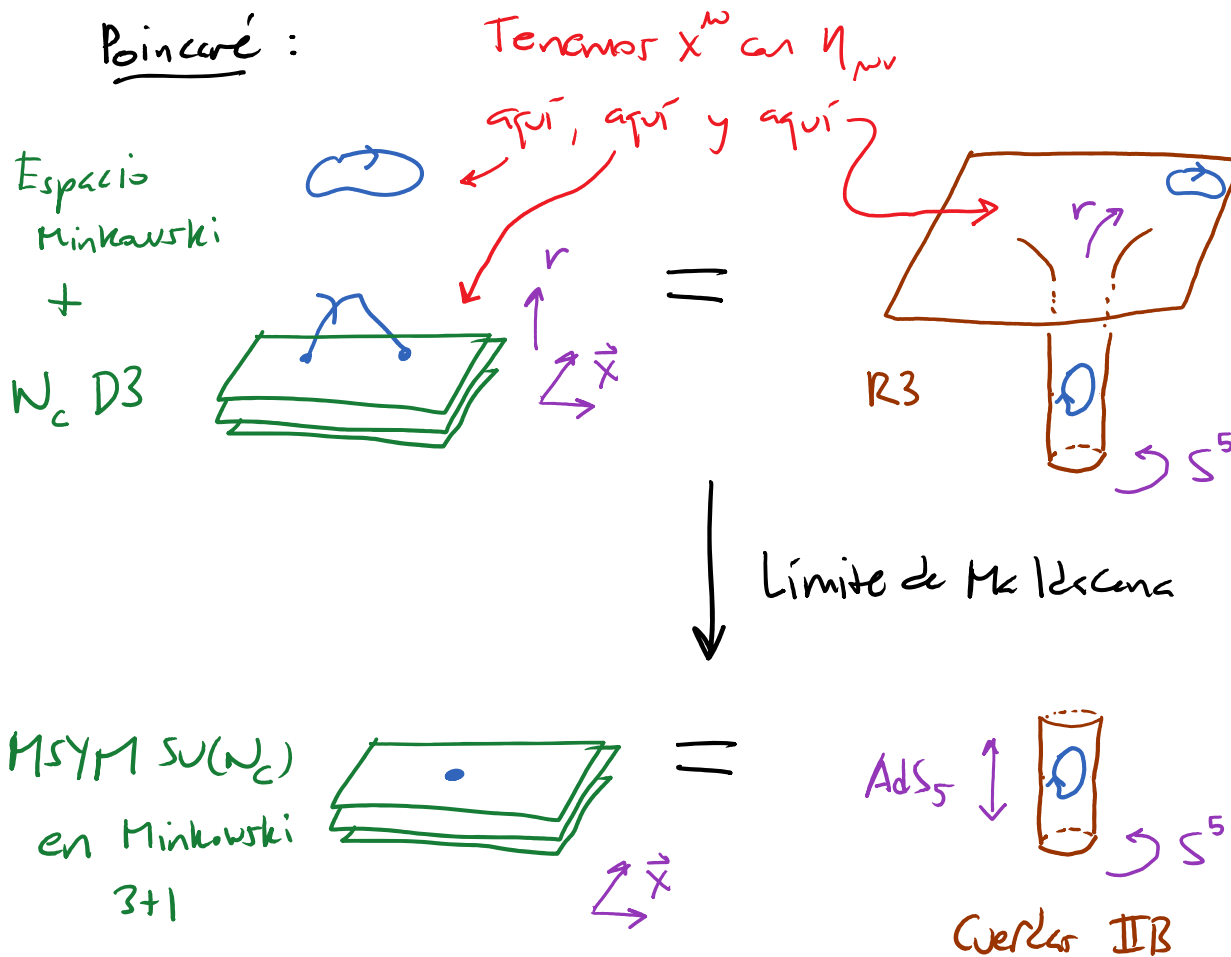
Respecto a nuestro caso particular $MSTM \leftrightarrow CIB$, podemos notar que, si bien las simetrías globales empentan, las simetrías locales están en completo desacuerdo:

- i) Al grupo de normas $SU(N_c)$ de M5YM, no le corresponde NADA en CIIB sobre $AdS_5 \times S^5$!
- ii) A (la mayoría de) los difeomorfismos en $AdS_5 \times S^5$, no les corresponde NADA en M5YM !
- Esto NO contradice a la correspondencia, porque las invariancias locales NO son simetrías en sentido estricto (que mapeen unos estados físicos a otros), sino una manifestación de que nuestra descripción es redundante. Las redundancias de los 2 lenguajes NO tienen por qué coincidir. Toda la información física está contenida en cantidades invariantes de normas, y es a nivel de ellas que tendremos que operar la correspondencia (veremos los detalles más adelante).

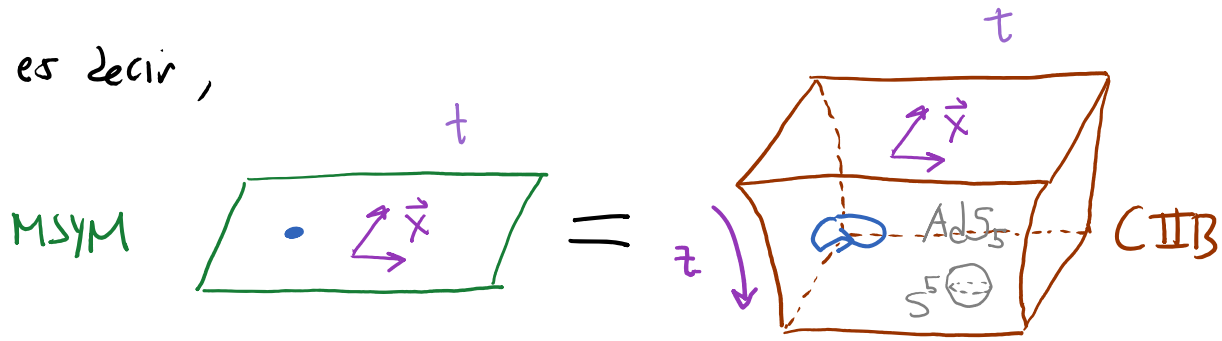
Podemos regresar ahora a la deducción del diccionario de la dualidad. Dado que las 2 teorías viven en diferente número de dimensiones, una pregunta particularmente interesante es cómo se

mapean las coordenadas espaciotemporales.

* A partir de la conexión $D3_5 \leftrightarrow R3$, sabemos que las coordenadas $x^M \equiv (t, \vec{x})$ del espaciotiempo Minkowski 3+1 dim donde vive MSYM, **coinciden directamente** con las coordenadas x^M en la línea de Poincaré:



es decir,



L17: 13/10/16 (-35 min)

* Por esta misma conexión, sabemos que las coordenadas $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ en la S^5 de CIIA no son coordenadas espaciales en M2YM, sino que parametrizan el espacio interno sobre el cual actúa $SO(6) \cong SU(4)$. Lo natural del lado de M2YM no es entonces hablar de puntos específicos sobre S^5 , sino tratar con objetos que tienen números cuánticos bien definidos bajo $SU(4)$, es decir, con armónicas esféricas sobre S^5 (nos toparemos con algunos ejemplos más adelante).

Entendamos ya cómo mapear 9 de las 10 coordenadas de CIIA, pero lo que es menos claro es a qué

Corresponde la coordenada radial r ó $z \equiv L^2/r$ en

$$ds^2_{AdS_5} = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2) .$$

Para responder esta pregunta, podemos notar que el rescalamiento (= dilatación) en M5M

$$(t, \vec{x}) \xrightarrow{s>0} (st, s\vec{x}) ,$$

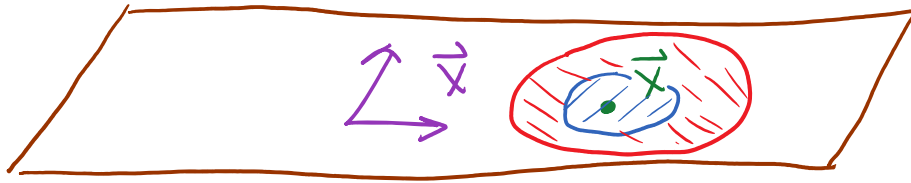
que es una transformación conforme perteneciente al grupo $SO(4,2)$, corresponde en CIB al difeo

$$(t, \vec{x}, z) \rightarrow (st, s\vec{x}, sz) ,$$

que es una isometría de AdS_5 .

Con esto vemos que al explorar distancias más pequeñas o más grandes en M5M, estaremos explorando en CIB ubicaciones con menores o mayores valores de la coordenada radial z :

MSYM



CIB

