

Por supuesto, con este argumento (que en principio pretende ser más conservador; ¡pero "deduciría" una dualidad a partir de una NO dualidad!) uno se queda con la producción de pe , así como existe una discontinuidad en la descripción a nivel de cuerdas en $g_c N \simeq 1$, podría haber también una discontinuidad a ultra-bajas energías que nos impida igualar MSYM en IIB para $g_c N \gg 1$. Esta incertidumbre parece comparable a la que conlleva el suponer que a nivel de cuerdas existe ya una dualidad.

En lo personal, me parece que lo más razonable, al menos en retrospectiva, es interpretar a toda la evidencia que tenemos a favor de la dualidad norma/gravedad como evidencia a favor de la existencia de una dualidad de cuerdas abiertas/cerradas. (Para un intento de explorar esta dualidad a energías que son bajas pero están todavía fuera del límite

de Maldacena, es decir, energías que son bajas pero no "ultrabajas", $\frac{1}{L} \sim E \ll \frac{1}{L_c}$, ver por ej. hep-th/0004187 y la explicación en la sección 2 de hep-th/0305257.)

L15: 06/10/16




A pesar de las limitaciones en (cualquiera de las 2 versiones de) la deducción, a la fecha contamos con muchísima evidencia de que en verdad es cierta esta asombrosa equivalencia.

Podemos entonces invertir la lógica y simplemente suponer que la correspondencia es cierta, obteniendo así, a través de MSYM, una definición no perturbativa de la teoría de cuerdas IIB sobre un fondo asintóticamente anti-de Sitter. Esto no significa que la correspondencia se vuelve un enunciado vacío o tautológico, porque conocemos muchas propiedades de la teoría IIB de manera independiente. En particular, incluye a la gravedad, así que estamos afirmando que MSYM, de alguna manera escondida, ¡es una teoría de gravedad cuántica!

De hecho, la dualidad holográfica (en este y muchos otros ejemplos) nos da la definición más completa que tenemos de lo que es una teoría de cuerdas.

2. Diccionario y Evidencia de la Correspondencia

Para poder seguir avanzando, ahora sí nos conviene entender con mayor claridad qué cosa es AdS. Para ser concretos, nos restringiremos al caso $(4+1)$ -dimensional, que será el que más usaremos; pero la generalización al caso $(d+1)$ -dimensional (incluyendo $d=3$, que es el que discuten los relativistas) es obvia.

A pesar de su intimidante nombre, anti-de Sitter es de hecho el espaciotiempo más sencillo después de Minkowski. Así como sabemos que los espacios (sin tiempo) con curvatura constante son el plano  (curvatura cero), la esfera  (curvatura positiva) y la silla de montar = espacio hiperbólico  (curvatura negativa), los espaciotiempos con curvatura constante son Minkowski

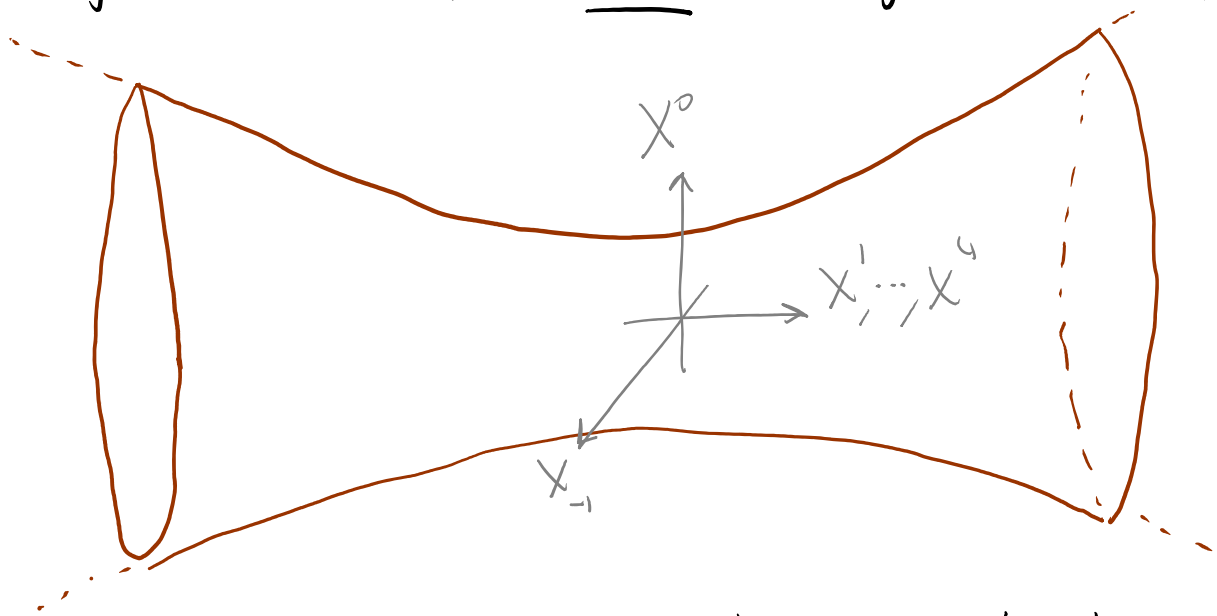
(curvatura cero), de Sitter (curvatura positiva) y anti-de Sitter (curvatura negativa). En otras palabras, anti-de Sitter es un espaciotiempo máximamente simétrico con curvatura negativa (\Leftrightarrow constante cosmológica negativa, que es el signo opuesto al de nuestro universo). Puede definirse como (la cubierta universal de) el

hiperboloide

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = -L^2$$

normalmente usando métrica $\eta_{ij} = \text{diag}(-1, -1, +1, +1, +1, +1)$

encijado en un espacio plano con signature (4,2).



Una manera de parametrizarlo es con los llamados

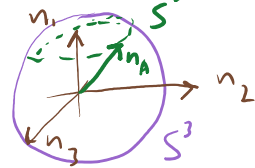
Coordenadas globales $0 \leq \rho < \infty$, $-\infty < \tau < \infty$,

vector unido en \mathbb{R}^4

$$0 \leq n_A \leq 1 \quad \text{con} \quad n_A n_A = 1 \quad (\text{es decir, los } n_A$$

$A=1,2,3,4$

suma



describen puntos en la S^3 , o equivalentemente

$$n_1 \equiv \cos \Theta_1, \quad n_2 \equiv \sin \Theta_1 \cos \Theta_2,$$

no confundir con $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \Theta_5 \in S^5$

$$n_3 \equiv \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos \Theta_3, \quad n_4 \equiv \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \sin \Theta_3,$$

con

$$X_{-1} = L \cosh \rho \sin \tau,$$

$$X_0 = L \cosh \rho \cos \tau,$$

$$X_A = L \sinh \rho n_A.$$

$$0 \leq \Theta_1, \Theta_2 \leq \pi$$

$$0 \leq \Theta_3 < 2\pi$$

Con estas coordenadas, la métrica AdS (es decir, la métrica inducida sobre el hiperboloide a partir de la métrica plana en $\mathbb{R}^{4,2}$) es

$$ds^2 = L^2 \left(-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_3^2 \right),$$

$$\text{con} \quad d\Omega_3^2 \equiv d\Theta_1^2 + \sin^2 \Theta_1 (d\Theta_2^2 + \sin^2 \Theta_2 d\Theta_3^2).$$

Podemos usar una coordenada radial modificada

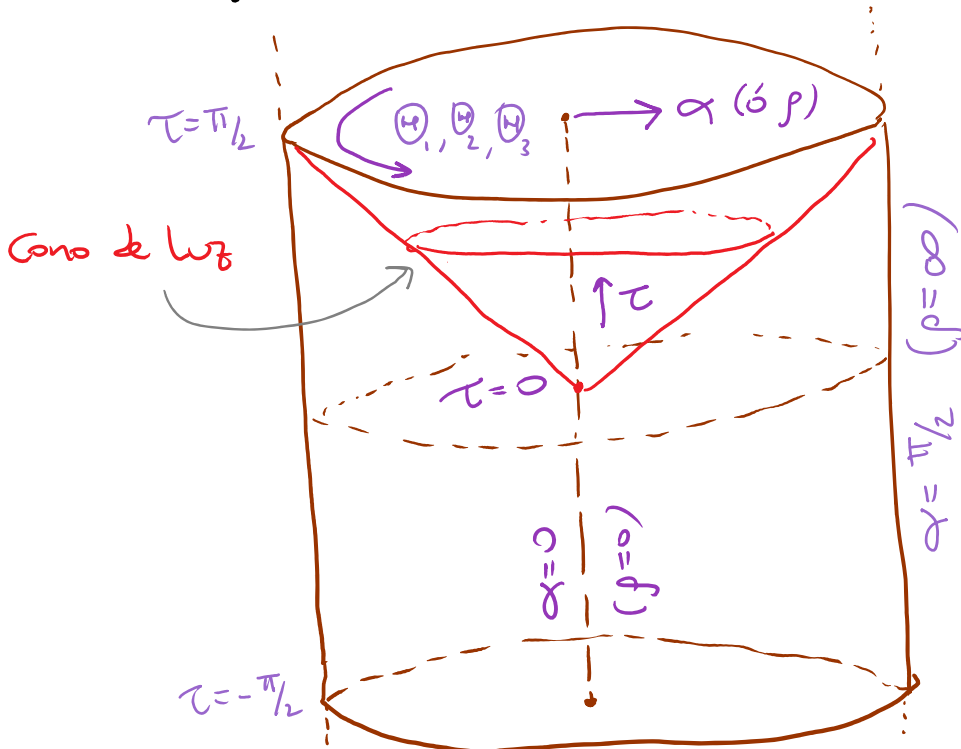
$\tan \alpha \equiv \sinh \rho$, con rango compacto, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$,
para reescribir la métrica en la forma

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos^2 \alpha} (-d\tau^2 + d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\Omega_3^2)$$

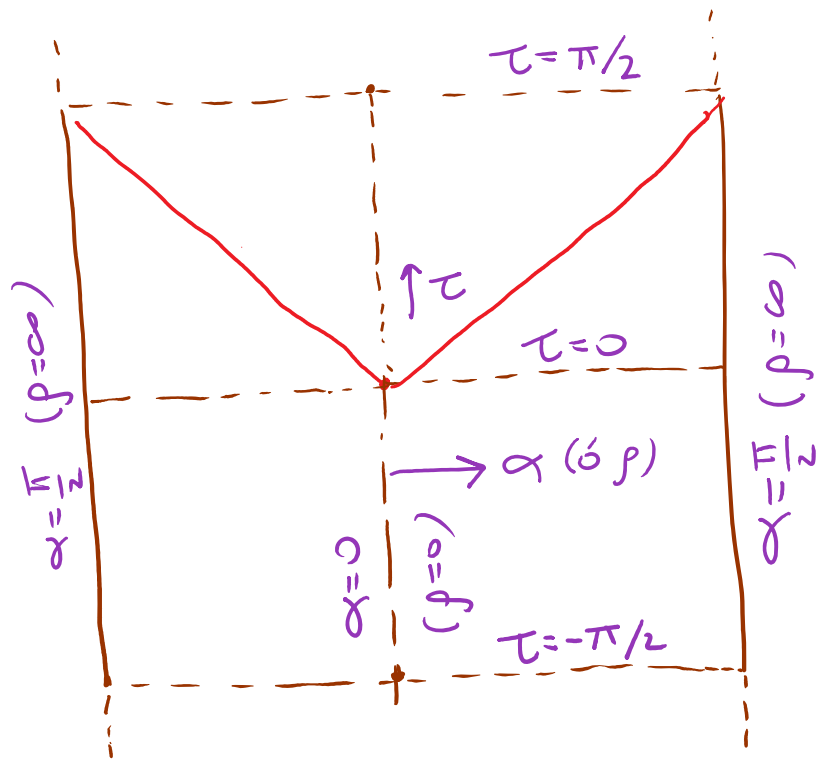
Si ahora hacemos una transformación de Weyl (= 'conforme'), podemos eliminar el factor de enfrente, respetando las direcciones nulas:

$$ds^2 \rightarrow \hat{ds}^2 \equiv L^2 (-d\tau^2 + d\alpha^2 + \sin^2 \alpha d\Omega_3^2)$$

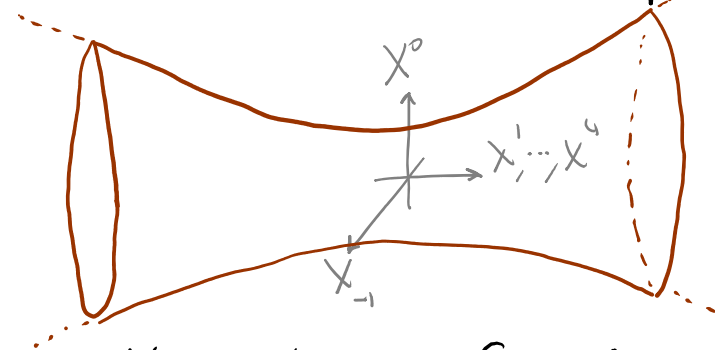
Esto nos permite visualizar a AdS completo en una región que es finita a lo largo de las direcciones espaciales. La representación resultante se conoce como el diagrama de Penrose de AdS:



Si tomamos un corte vertical de este cilindro sólo, a $\tau = 0, \pi$, obtenemos el diagrama de la derecha.



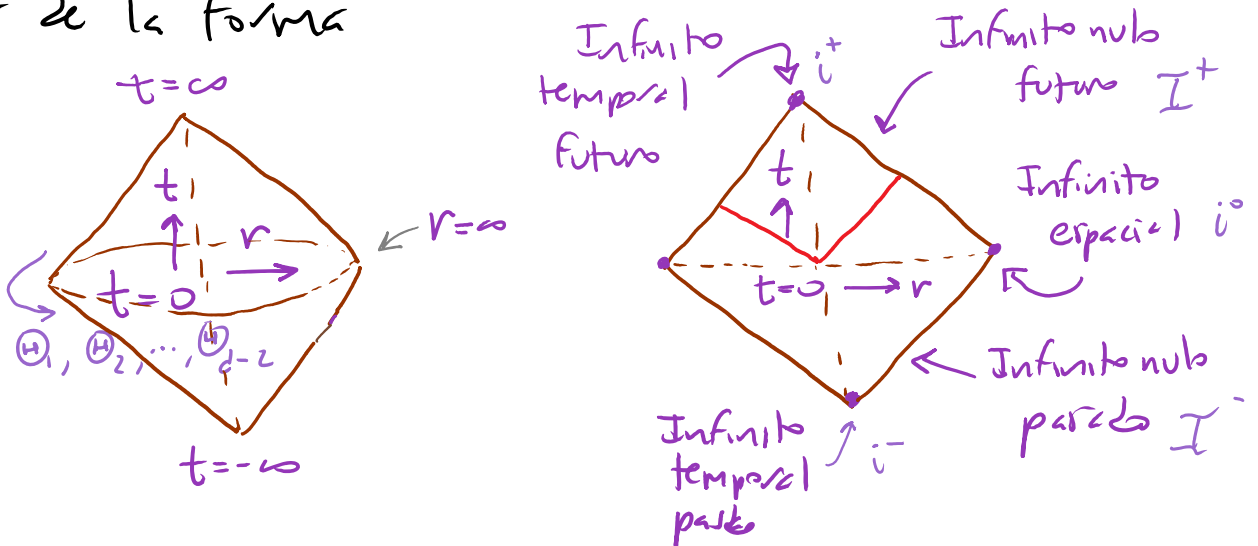
Si nos quedáramos sólo con el hiperboloide inicial,



el hecho de que X_{-1} y X_0 sean funciones periódicas de τ implica que las superficies/líneas $\tau = -\pi$ y $\tau = \pi$ del diagrama deben identificarse. ¡Tendríamos entonces curvas cerradas tipo tiempo! Para evitar esto, simplemente evitamos hacer esta identificación, y definimos ADS como el cilindro infinito con $-\infty < \tau < \infty$, en lugar de sólo $-\pi < \tau \leq \pi$.

Notamos que el infinito espacial (y nulo) es una superficie tipo tiempo, y la luz toma un tiempo FINITO en llegar a la frontera (o "frontera conforme") $p \rightarrow \infty \leftrightarrow \alpha = \pi/2$, a pesar de que éste realmente se encuentra a una distancia propia infinita.

Ambas propiedades son marcadamente diferentes a las del espaciotiempo Minkowski $\mathbb{R}^{d-1,1}$, cuyo diagrama de Penrose es de la forma



donde la luz toma un tiempo infinito en llegar al infinito.

Esto implica que en anti-de Sitter No basta con dar condiciones iniciales en (p.ej.) $\tau=0$ para determinar por completo la evolución (los relativistas resumen esto diciendo que AdS No es "globalmente hiperbólico"), sino que hace

falta además especificar condiciones de frontera en $p \rightarrow \infty$ ($\alpha = \pi/2$). Como veremos, esto juega un papel crucial en la correspondencia AdS/CFT.

Una manera distinta de parametrizar el hiperbolóide

$$-X_{-1}^2 - X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = -L^2$$

es a través de las coordenadas de Poincaré (u horosféricas) $0 \leq r < \infty$, $-\infty < t, x_1, x_2, x_3 < \infty$

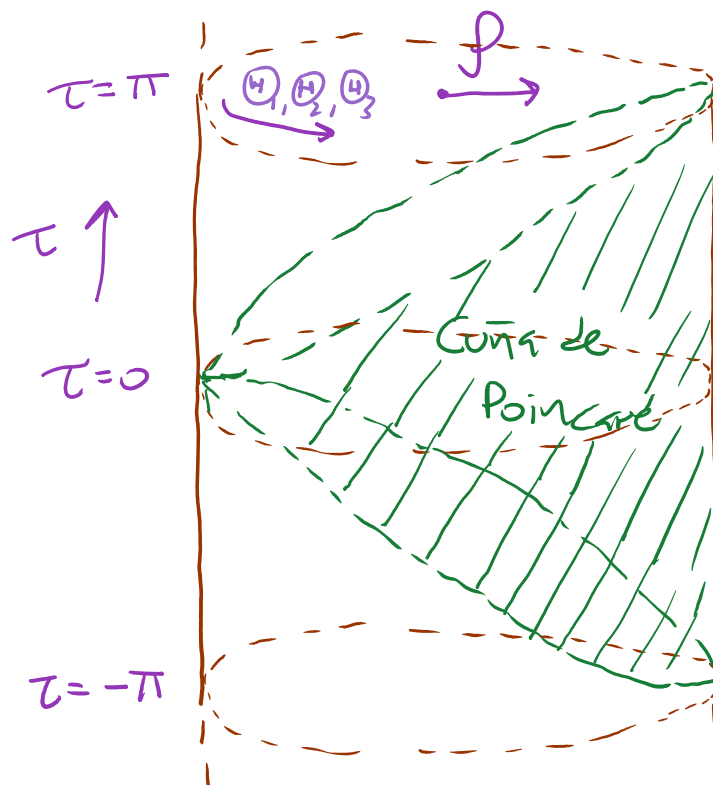
o

$$\begin{aligned} X_{-1} &= \frac{r}{L} t \\ X_0 &= \frac{L^2}{2r} \left[1 + \frac{r^2}{L^4} (L^2 + \vec{x}^2 - t^2) \right] \\ \vec{X} &= \frac{r}{L} \vec{x} \quad \leftarrow x_1, x_2, x_3 \\ X_4 &= \frac{L^2}{2r} \left[1 + \frac{r^2}{L^4} (-L^2 + \vec{x}^2 - t^2) \right] \end{aligned}$$

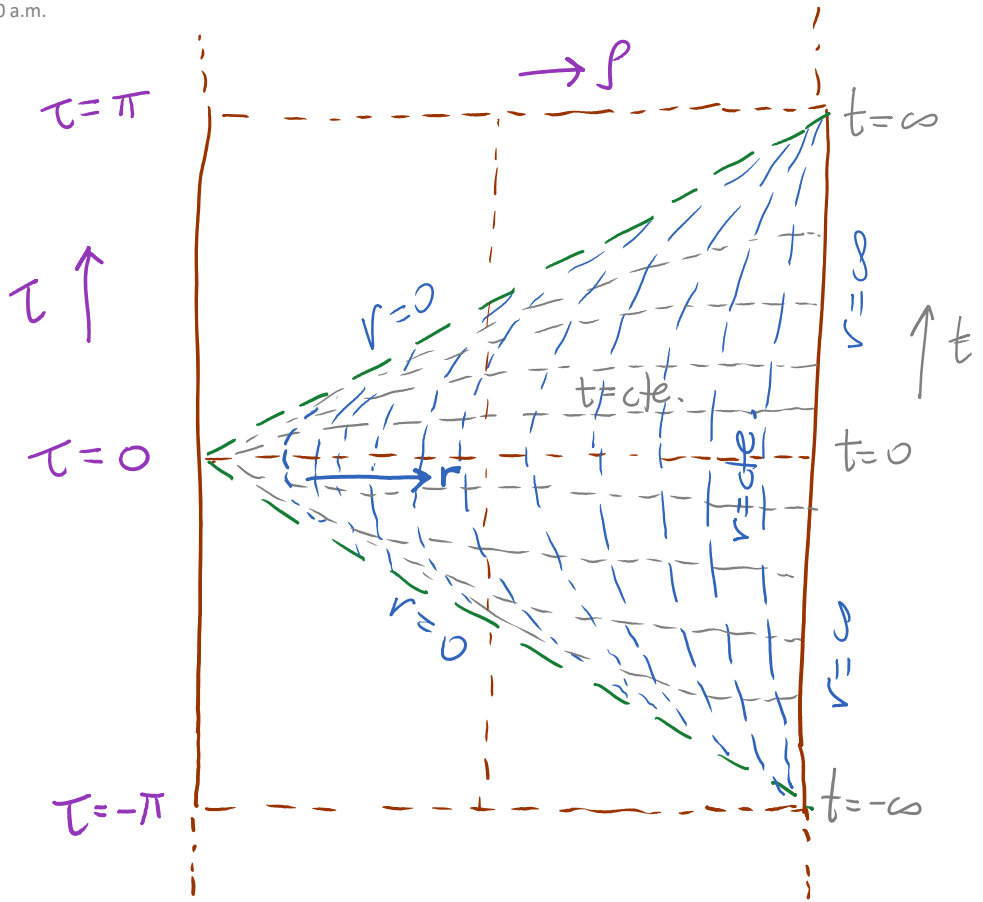
La métrica toma entonces la forma

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{L^2}{r^2} dr^2$$

Éstos son los coordenados que aparecen naturalmente en nuestra deducción de AdS/CFT, en el límite cercano al horizonte de la métrica de la R3-brana negra extrema (p.204). Interesantemente, los coordenados de Poincaré cubren solo una porción del espaciotiempo AdS (que los coordenados globales cubrían por completo), como la cuña de Poincaré:



En un corte vertical a $\phi_i = 0, \pi$, la cuna de Poincaré luce como en el diagrama de la derecha.



Los observadores a $r = \text{cte.}$ tienen **aceleración propia**

constante

$$A^2 \equiv g_{mn} \underbrace{\frac{dx^m}{ds}}_{\text{tiempo propio}} \underbrace{\frac{dx^n}{ds}}_{\text{métrica en AdS } (x^m = (t, \vec{x}, r))} = \frac{1}{L^2},$$

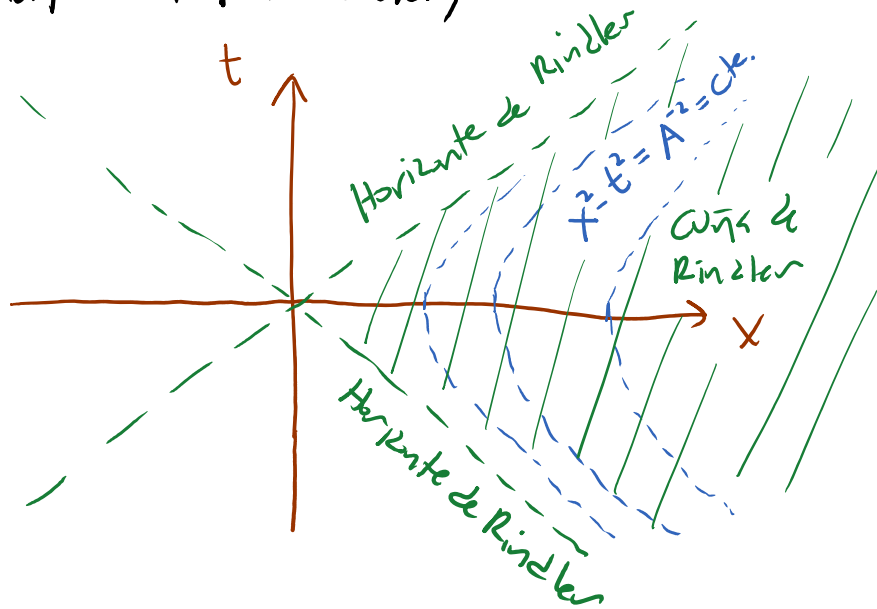
$$\frac{d^2 x^n}{ds^2} \equiv \frac{dU^n}{ds} + \Gamma_{pq}^n U^p U^q,$$

como resultado de lo cual sus trayectorias se vuelven nulas para $t \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow -\infty$.

Los eventos a los que tienen acceso (es decir, aquellos a los que pueden enviar y de los cuales pueden recibir una señal) son precisamente los que están dentro de la cónica de Poincaré (los eventos arriba de esta cónica no pueden enviar señales a estos observadores, y los que están debajo no pueden recibir señales de ellos).

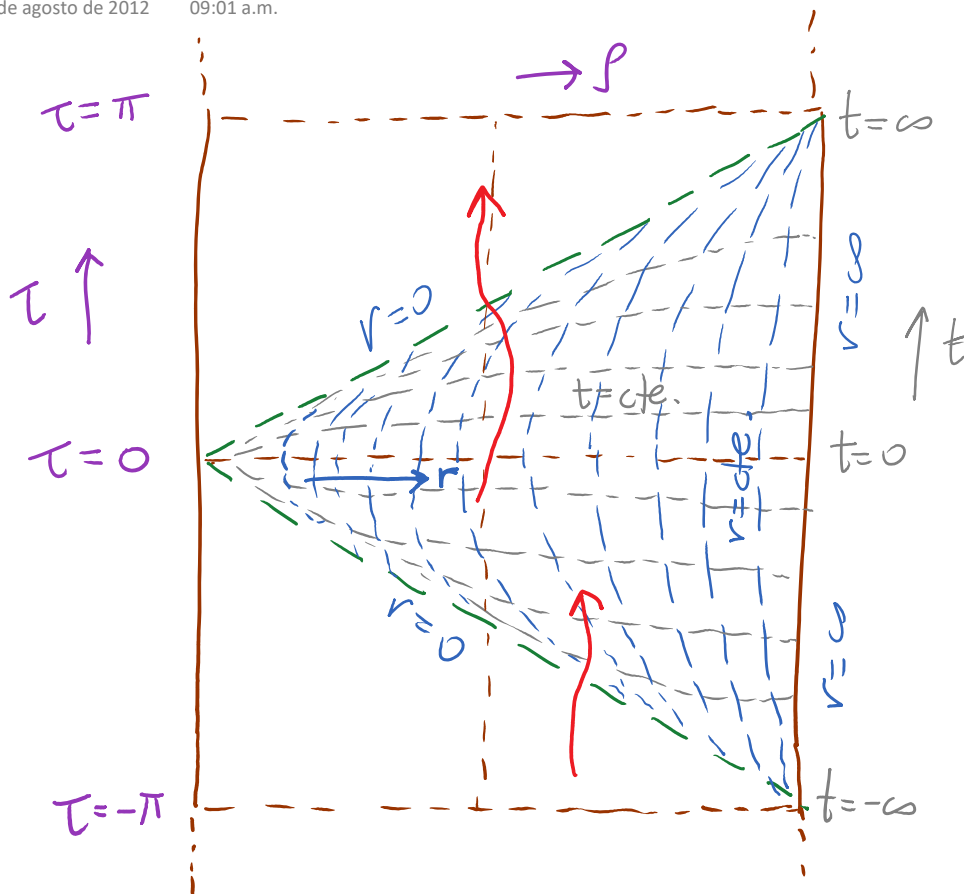
Para todos estos observadores, la hipersuperficie $v=0$ es un horizonte causal o de aceleración: marca la frontera de la región que les es causalmente accesible.

Todo esto es análogo a observar con aceleración propia constante en Minkowski,



Solo que en AdS estamos hablando de observadores que tienen toda la misma aceleración propia A , y el valor $A = \frac{1}{L}$ en AdS tiene como consecuencia especial que la temperatura de Unruh detectada por estos observadores en el vacío es cero, mientras que en Minkowski es $T = A/2\pi$ (más en general, en AdS es $T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{A^2 - L^{-2}}$ [Deser, Levin]).

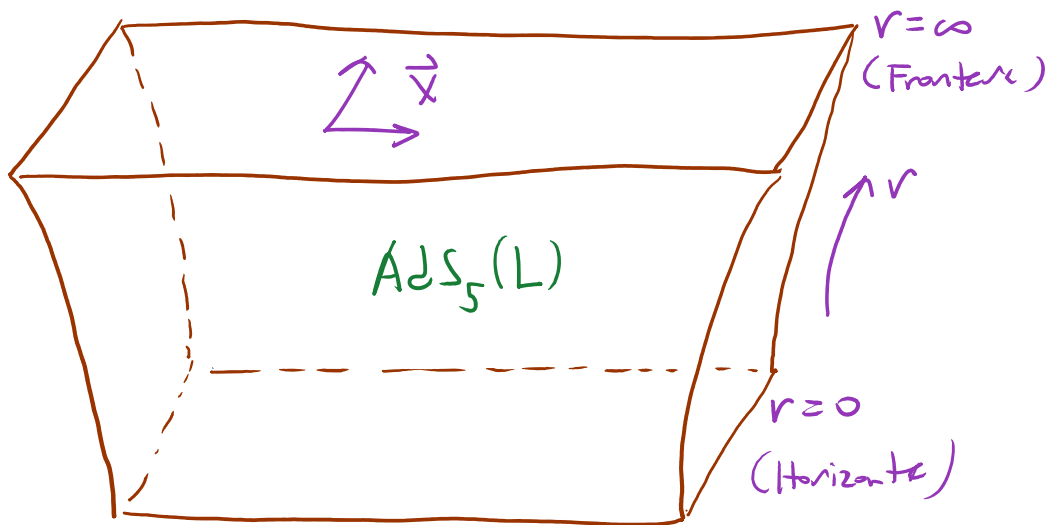
Dado que la cuna de Poincaré es apenas una porción del espaciotiempo AdS completo, las trayectorias tipo tiempo o nulas en general salen de esta región, cruzando el horizonte en un tiempo global (y tiempo propio) finito, pero en tiempo de Poincaré infinito:



Sabemos que en la correspondencia holográfica, el tiempo de Poincaré es directamente el que coincide con el tiempo de M5M, y es por esto que tiene sentido restringirnos únicamente a la cónica de Poincaré.

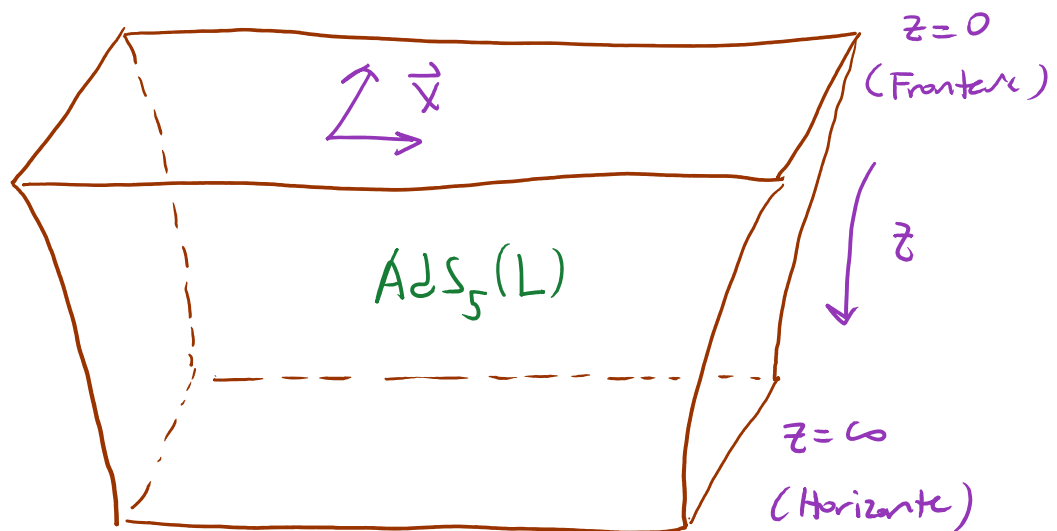
Desde ahora, representaremos esquemáticamente a AdS en la cónica de Poincaré (a tiempo fijo)

así:



$$ds^2 = \left(\frac{r}{L}\right)^2 \underbrace{(-dt^2 + dx^2)}_{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} + \frac{L^2}{r^2} dr^2.$$

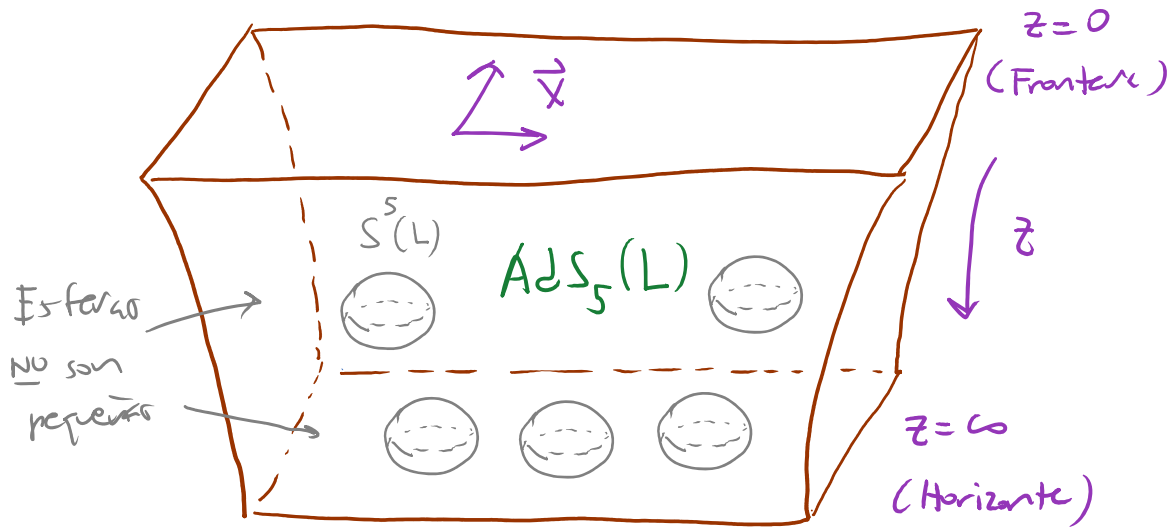
Muchos veces nos conviene usar una coordenada radial invertida, $z \equiv \frac{L^2}{r}$, de modo que la frontera ∂AdS esté en $z=0$ ($r \rightarrow \infty$):



$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2 + dz^2)$$

debemos recordar que la geometría relevante para el ejemplo de la dualidad AdS/CFT que inducirá a M2YM es $AdS_5 \times S^5$, de modo que en cada punto de nuestro dibujo hay una esfera con el mismo radio L :



Antes de tomar el límite cercano al horizonte, las direcciones de la S^5 eran las que rodeaban a la garganta de R^3 / pila de $D3s$, y tenían un radio que crecía con r , pero en el límite, esa dependencia

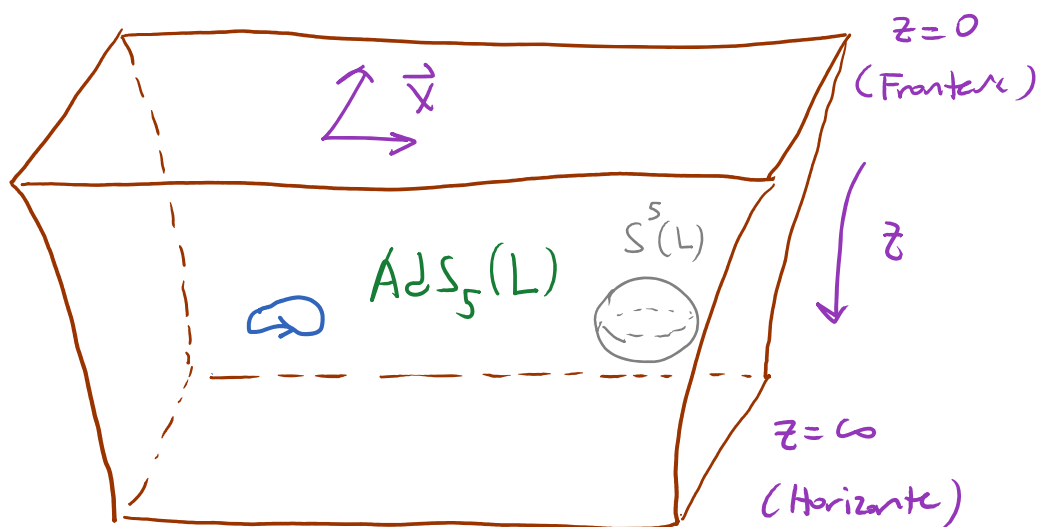
desaparición,

$$ds^2 \supset \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{1/2} r^2 d\Omega_5^2 \rightarrow \frac{L^2}{r^2} r^2 d\Omega_5^2,$$

y es por ello que la geometría se volvió un producto directo de 2 factores.

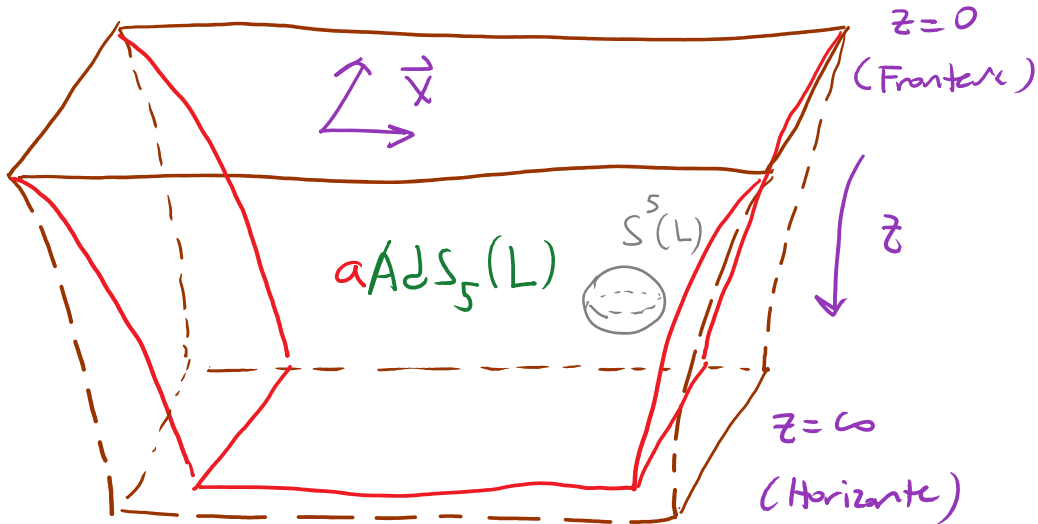
L19:24 / 11/20

Al considerar a la teoría de cuerdas IIB sobre este fondo $AdS_5 \times S^5$ con N unidades de flujo RR, las fluctuaciones pueden ser pequeñas, en cuyo caso son descritas por cuerdas cerradas,



o grandes, en cuyo caso los valores de fondo de los diversos campos de la teoría

(p.ej. los de SUBRA: $g_{MN}, \varphi, B_{MN}, C, C_{MN}, C_{M_1 \dots M_4}$ etc.)
se modifican sustancialmente,



conservando el mismo comportamiento asintótico
cerca de ∂AdS ($z=0$), puesto que cambiar el
fondo en la frontera (\leftrightarrow volumen infinito) requeriría
una energía infinita.

P.ej., podríamos tener shocks

$$ds^2 = \left(\frac{L}{z}\right)^2 \left[g_{\mu\nu}(x, z) dx^\mu dx^\nu + dz^2 \right] + \text{componentes en } S^5,$$

$$\text{con } g_{\mu\nu}(x, z) = \eta_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}^{(2)}(x) z^2 + \mathcal{O}(z^4).$$

↑ comportamiento asintótico sin alterar
↑ fluctuación notable de la métrica

(Más adelante entenderemos esto en mayor detalle.)

En realidad lo que tenemos en mente es entonces, como ya habíamos dicho antes, a la teoría de cuerdas IIB en un fondo asintóticamente AdS₅ × S⁵ (a AdS₅ × S⁵), aun cuando el adjetivo normalmente queda implícito. El punto clave a recordar es que, al ser la teoría de cuerdas una teoría de gravedad, la geometría es dinámica.

En el contexto de la correspondencia AdS/CFT

$$\begin{array}{l} \text{MSYM } SU(N_c) \\ \text{en Minkowski} \\ \text{3+1 dimensiones} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Cuerdas IIB (CIIB) en fondo} \\ a \text{ AdS}_5 \times S^5 \text{ Poincaré} \end{array},$$

el fondo AdS₅ × S⁵ sin excitación corresponde al estado de MSYM con energía mínima, es decir, al vacío (simétrico). Fluctuaciones pequeñas o grandes por encima de AdS₅ × S⁵ corresponden a otros estados de MSYM.

Más en general, cualquier objeto o proceso de un lado de la dualidad corresponde a un objeto o proceso en el otro lado, y existe un diccionario que traduce de un lenguaje al otro.

Conocer y las entradas de este diccionario se se refieren a los parámetros de ambas teorías:

* el rango N_C del grupo de norma $SU(N_C)$ (↔ número de colores ↔ número de D3s) = el número de unidades de flujo del campo RR $G_{M_1 \dots M_5}$ a través de la S^5 (↔ carga de R3)

* el acoplamiento $g_{YM}^2 = 4\pi g_c = 4\pi e^{\varphi} \Big|_{z=0}$ (valor de φ en $z=0$ está fijo (posición de frontera))

* el acoplamiento de 't Hooft

$$\lambda \equiv g_{YM}^2 N_C = 4\pi g_c N_C = \frac{L^4}{l_c^4} \equiv \frac{L^4}{\alpha'^2}$$

notar que l_c no es por sí solo un parámetro de CIB, sino únicamente en comparación con L

Combinando las 2 relaciones anteriores, vemos además que

$$N_C = \frac{\lambda}{g_{YM}^2} = \frac{L^4}{4\pi g_c l_c^4} \propto \frac{L^4}{l_p^4} \leftarrow \text{longitud de Planck } G_N^{(10)} \propto l_p^8 \propto g_c^2 l_c^8$$