

ϕ 's. En la teoría de campos, la existencia de una ^{LZ4 (09/20)} brecha muy grande en el espectro (de masas o de dimensiones de los operadores \mathcal{O}) requiere que el acoplamiento sea enorme. El hecho extremadamente afortunado es entonces que el exigir algo de control cuantitativo sobre la descripción gravitacional nos empuja al régimen de acoplamiento fuerte de la teoría de campos, donde no tenemos tal control. En sentido inverso, el régimen débilmente acoplado de la teoría de campos, al cual sí tenemos acceso directo, contiene información sobre la teoría de gravedad cuántica en la situación poco familiar donde es necesario considerar a muchos campos ϕ (infinitos si $N \rightarrow \infty$) en el mismo pie que a la métrica.

En el caso particular en el que del lado no gravitacional tenemos una teoría de norma no abeliana, la teoría de gravedad resultará ser una teoría de cuerdas completa. Como veremos más adelante, este hecho se había anticipado de varias maneras desde la década de los 70. La teoría de cuerdas de hecho nació como un intento para explicar los hadrones.

0. Motivación y Antecedentes

La correspondencia holográfica establece una conexión entre 2 de los problemas más importantes de la física teórica moderna:

- Entender el comportamiento de teorías de campos en el régimen de acoplamiento fuerte.
- Formular una teoría de gravedad cuántica.

En esta sección repasaremos algunos antecedentes relacionados con estos 2 temas.

* TEORÍA DE CAMPOS

La teoría cuántica de campos es el lenguaje básico que utilizamos para describir (¡muy exitosamente!) la estructura microscópica del universo.

Su principal enseñanza es que el "particular" es en realidad un "campista": el mundo está hecho de

$$\text{campos } \varphi(x^m) = \varphi_x(t) \quad (\leftrightarrow \varphi(p^m) \equiv \int d^4x e^{ip \cdot x} \varphi(x))$$

— sistemas con un número infinito de grados de libertad —

y las partículas de cada tipo son pequeñas excitaciones cuánticas del campo correspondiente:

Electrón y Antielectrón \leftrightarrow Campo del electrón $\psi_\alpha(x)$
 (espín $1/2$) (espín de Dirac) $\uparrow 1,2,3,4$

(y similarmente para quarks y otros leptones)

Fotón (espín 1) \leftrightarrow Campo electromagnético $A_\mu(x)$
 (cuadrivector) $\uparrow 0,1,2,3$

(y similarmente para gluones, W y Z)

Partícula de Higgs \leftrightarrow Campo de Higgs $\Phi(x)$
 (espín 0) (escalar) \uparrow Complejo

Ma' en detalle, para un campo libre (acción cuadrática \leftrightarrow ecuación de movimiento lineal), como p.ej.

$$S[\varphi] = \int d^4x \left(\underbrace{-\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \eta^{\mu\nu}}_{\substack{\text{escalar} \uparrow \\ \uparrow \text{diag}(-1, +1, +1, +1)}} - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right) \quad \text{Campo de Klein-Gordon}$$

[2: 18/08/16

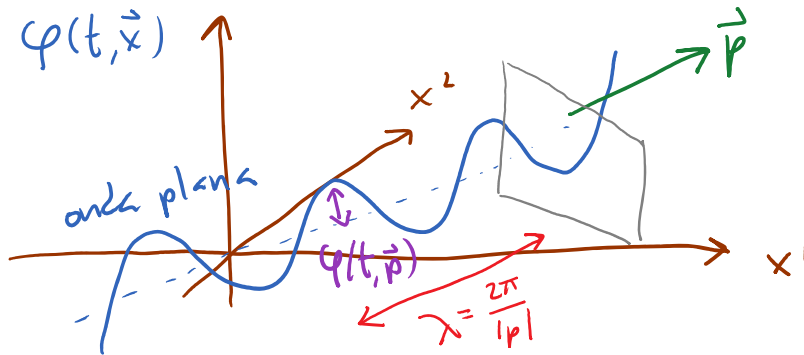
$\equiv \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$ densidad Lagrangiana
 al cuantizar canónicamente

(densidad de) momento conjugado \swarrow

$$(\varphi(x), \pi(x)) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}(x)} \rightarrow \varphi(x), \pi(x) \quad \text{operadores}$$

En relaciones de conmutación $[\varphi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{x}')] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$

Las partículas son cuantos de ondas planas por encima del valor preferido del campo (normalmente cero):



Cada modo de Fourier es un oscilador armónico, y distintos modos están desacoplados.

Equivalentemente, podemos cuantizar por integral de camino (= integral funcional), donde φ sigue siendo una función clásica, y sumamos sobre todas las $\varphi(t, \vec{x})$ posibles (sin usar ec. de mov.):

$$\langle \varphi_f(\vec{x}) | \varphi_i(\vec{x}) \rangle = \mathcal{N} \int_{\varphi(t_i, \vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})}^{\varphi(t_f, \vec{x}) = \varphi_f(\vec{x})} \mathcal{D}\varphi(t, \vec{x}) e^{iS[\varphi]}, \quad \mathcal{D}\varphi(t, \vec{x}) \equiv \prod_{t, \vec{x}} d\varphi_{t, \vec{x}}.$$

Cuando agregamos términos cúbicos o más altos a $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$, las partículas interactúan unas con otras (y consigo mismas).

P.ej., en

$$S[\varphi] = \int d^4x \left(-\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{g}{4!} \varphi^4 \right) \quad \text{Término } \varphi^4$$

g es la constante de acoplamiento, y controla la intensidad de las interacciones.

En cualquier teoría de campos, el objetivo principal es calcular los correladores = funciones de correlación o de Green,
orden temporal vacio (estado base)

$$G_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle \Omega | T \{ \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) \} | \Omega \rangle$$

$$= \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \exp(iS)}{\int \mathcal{D}\varphi \exp(iS)}$$

que físicamente representan algo así como la amplitud de probabilidad de empezar con cierto número de partículas en algunos puntos del espaciotiempo y terminar con otro número en los sitios restantes. (Salvo que para definir adecuadamente a las partículas necesitamos separarlas mucho y pasar al espacio de momentos: amplitudes de dispersión.)

Toda la información física de la teoría puede extraerse de estas funciones de correlación.

Si la teoría está débilmente acoplada (es decir, las constantes de acoplamiento son pequeñas), entonces está cerca de ser libre, y es posible calcular las $G_n(x_1, \dots)$ en una expansión perturbativa (una serie en potencias de las constantes de acoplamiento). La receta se basa en diagramas de Feynman, construidos a partir de 2 tipos de ingredientes que se leen directamente del lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m^2\varphi^2}_{\text{propagación libre}} - \underbrace{\frac{g}{4!}\varphi^4}_{\text{interacción}}$$

propagador $\xrightarrow{p} = \frac{-i}{p^2+m^2}$

vértice (de 4 patas) $\times = -ig$

P.ej.

$$G_4(x_1, \dots, x_4) \equiv \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_4) \} | 0 \rangle$$

Suma sobre todos los diagramas con 4 puntos
= externos (y sin pedazos completamente desconectados de esos puntos)

$$= \begin{matrix} 1 & \text{---} & 2 \\ 3 & \text{---} & 4 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & & 2 \\ | & & | \\ 3 & & 4 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 & & 2 \\ & \diagdown & / \\ 3 & & 4 \end{matrix} \quad \mathcal{O}(g^0)$$

$$+ \begin{matrix} 1 & \text{---} & 2 \\ \circ & & \\ 3 & \text{---} & 4 \end{matrix} + \begin{matrix} \text{---} & & \text{---} \\ \circ & & \\ \text{---} & & \text{---} \end{matrix} + \begin{matrix} | & & | \\ | & & | \\ | & & | \end{matrix} + \begin{matrix} | & & | \\ | & & | \\ | & & | \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 & \text{---} & 2 \\ \circ & & \\ 3 & \text{---} & 4 \end{matrix}} \right\} \mathcal{O}(g^1)$$

$$+ \begin{matrix} \diagdown & & / \\ \circ & & \\ \diagup & & \diagdown \end{matrix} + \begin{matrix} \diagdown & & / \\ \circ & & \\ \diagup & & \diagdown \end{matrix} + \begin{matrix} \diagdown & & / \\ & \times & \\ \diagup & & \diagdown \end{matrix}$$

$$+ \begin{matrix} \diagdown & & / \\ \diagup & & \diagdown \\ \diagdown & & / \end{matrix} + \begin{matrix} \diagdown & & / \\ \diagup & & \diagdown \\ \diagdown & & / \end{matrix} + \begin{matrix} \diagdown & & / \\ \diagup & & \diagdown \\ \diagdown & & / \end{matrix} + \dots \quad \mathcal{O}(g^2)$$

+ etc.

Cada diagrama se traduce en una fórmula, pero además nos cuenta la historia de un proceso en el espaciotiempo, donde vemos que en etapas intermedias partículas ("virtuales") aparecen y desaparecen.

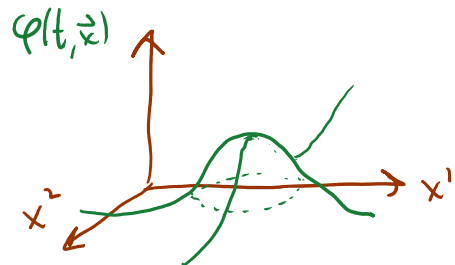
Para $g \ll 1$, es una buena aproximación quedarnos solo con unos cuantos diagramas de los más sencillos; pero cuando la teoría está fuertemente acoplada ($g \gg 1$), la expansión perturbativa se vuelve completamente inútil, y perdemos nuestro método de cálculo y de visualización. Importantemente, aún cuando $g \ll 1$ la serie perturbativa no converge, de modo que no captura toda la física de la teoría - existen efectos "no perturbativos".

Un ejemplo es la existencia en algunas teorías de excitaciones grandes pero localizadas del campo (con energía finita $E \sim 1/g^2$)

conocidas como solitones.

Esto sirve para recordarnos

que el campo es el concepto primario, y las partículas son apenas un tipo de excitaciones de él.



Entender el comportamiento de teorías de campos en el régimen de acoplamiento fuerte es una tarea pendiente.

* CRONODINÁMICA CUÁNTICA

El ejemplo paradigmático de una teoría de campos donde los efectos de acoplamiento fuerte son importantes es la cronodinámica cuántica, o QCD, que describe a la interacción fuerte (responsable de la existencia de los núcleos y el brillo de las estrellas).

Recordemos primero a su pariente más sencillo, asociado a la interacción electromagnética: la electrodinámica cuántica, o QED. Esta involucra al campo de Maxwell (vectorial, real, abeliano)

$A_\mu(x)$ (cuadrivector potencial electromagnético) \leftrightarrow fotones

junto con un campo de Dirac (espinorial, con 4 componentes complejas)

$\psi(x) \equiv \psi_\alpha(x)$ \leftrightarrow Electrones / antielectrones (u otras partículas con carga eléctrica),

$$S = \int d^4x \mathcal{L}$$

con dinámicas descritas por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi, A_\mu, \partial_\mu A_\nu) = \mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu \psi) + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}}(F_{\mu\nu}) + \mathcal{L}_{\text{int}}(A_\mu, \psi, \bar{\psi})$$

constante de acoplamiento = carga eléctrica

$$= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - g \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$$

matrices de Dirac
4x4 tales que $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$
 $\equiv \psi^\dagger \gamma^0$ (y p.ej. $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \equiv \bar{\psi}_\alpha \gamma^\mu_{\alpha\beta} \psi_\beta$)
 $\equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$
intensidad de campo

$$= \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$\equiv \partial_\mu + i g A_\mu$ derivada
covariante ($F_{\mu\nu} = \frac{1}{i g} [D_\mu, D_\nu]$)

\mathcal{L}_{QED} es invariante bajo las transformaciones de
norma $\psi \equiv e^{i g \theta(x)} \psi \in$ grupo de Lie $U(1)$
(abeliano)

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x) \psi(x)$$

rotación local de fase

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = U(x) \left(A_\mu(x) - \frac{i}{g} \partial_\mu \right) U^{-1}(x)$$

$$= A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x)$$

$$\Rightarrow D_{\mu}\psi(x) \rightarrow D'_{\mu}\psi'(x) = U(x) D_{\mu}\psi(x) \quad \begin{array}{l} \text{propiedad} \\ \text{básica de } D_{\mu} \end{array}$$

La parte global (con $\theta = \text{cte.}$) es una simetría de la teoría, pero la parte local o "de norma" ($\theta = \theta(x)$, con $\theta(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$) expresa el hecho de que la teoría es redundante: el campo $A_{\mu}(x)$ tiene (por invariancia bajo Lorentz) 4 componentes, pero 2 de ellas salen sobrando, porque el fotón tiene solo 2 estados de espín (helicidad) $\pm 1 \leftrightarrow$ fotones con polarización circular ^{derecha} izquierda.

Más en general, una teoría de norma es una teoría redundante, con más variables que grados de libertad físicos (y la redundancia se manifiesta a través de invariancia bajo ciertas transformaciones locales).

Toda la información física está contenida en cantidades invariantes de norma, como $F_{\mu\nu}(x)$ en el caso de QED.

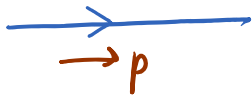
Si cuantizamos QED de manera covariante bajo Lorentz (tratando a las 4 componentes $A_{\mu}(x)$ en el mismo pie), es vital para la consistencia de la teoría que la

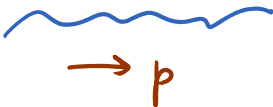
invariancia de norma se preserva, porque nos asegura, p.ej., que los estados con norma negativa! creados por $A_0(x)$ No son físicos.

(La alternativa es eliminar toda la redundancia a nivel clásico, imponiendo condiciones sobre $A_\mu(x)$ que "fijan la norma" — es decir, que nos impidan realizar transformaciones de norma adicionales —, y después cuantizar únicamente a las variables que sí representan grados de libertad físicos. P.ej., en QED podemos fijar la "norma de Coulomb" $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, $A_0 =$ determinado por $\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$.

La desventaja de este procedimiento es que no es manifiestamente covariante bajo Lorentz.)

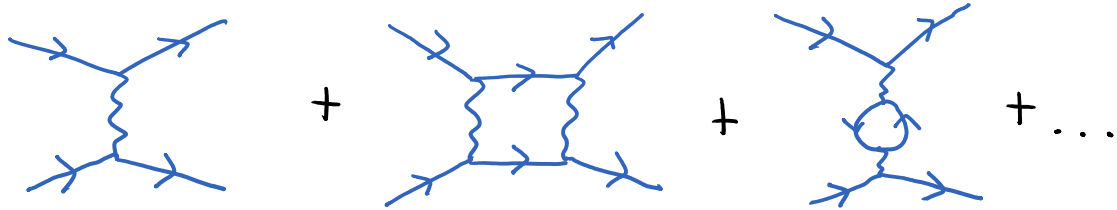
A partir de \mathcal{L}_{QED} podemos deducir los factores asociados a los ingredientes de la expansión perturbativa:

Propagador del electrón  =
$$\frac{-i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 + m^2}$$

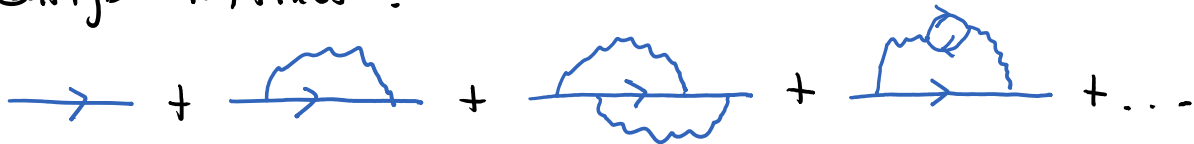
Propagador del fotón  =
$$\frac{i\eta^{\mu\nu}}{p^2}$$

Vértice de interacción  =
$$-i\gamma^\mu$$

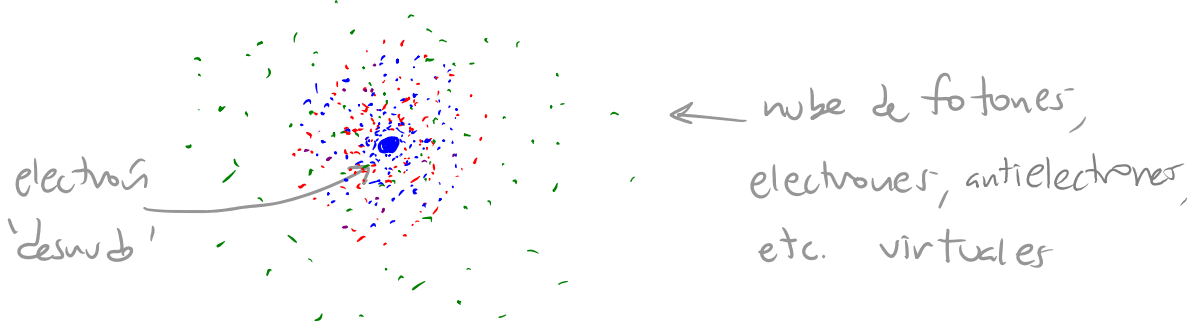
Dado que $q \neq 0$, los electrones (o antielectrones) se pueden hablar uno al otro intercambiando fotones:



Pero (como en cualquier teoría de campo) esto implica de manera inevitable que también pueden interactuar consigo mismos:



En lugar de lo que hubiera sido un electrón "desnudo" (si $q=0$), debemos entonces visualizar al electrón del mundo real ("estroboscópico" \leftrightarrow polo en G_n) como un objeto más complicado:



Un punto muy importante es que las características medibles (masa, carga eléctrica, ...) de este objeto físico No coinciden directamente en los parámetros

"desnudar" que aparecen en el Lagrangiano original, a los que ahora denotaremos con subíndices "0":

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi}_0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \Psi_0 - \frac{1}{4} \underbrace{F_{0,\mu\nu} F_0^{\mu\nu}}_{\partial_\mu A_{0,\nu} - \partial_\nu A_{0,\mu}} - g_0 \bar{\Psi}_0 \gamma^\mu \Psi_0 A_{0,\mu}$$

Podemos definir a los parámetros (y campos) físicos m, g (y $\Psi \equiv \frac{\Psi_0}{\sqrt{Z_\Psi}}$, $A_\mu \equiv \frac{A_{0,\mu}}{\sqrt{Z_A}}$) haciendo referencia

directa a algunas mediciones experimentales, y dependerán entonces de la escala energética μ involucrada en estas mediciones:

$m(\mu), g(\mu)$ describen al electrón físico cuando lo examinamos a una distancia $\lambda \sim 1/\mu$ (e incluimos por tanto solo una cierta porción de su nube de partículas virtuales).

Podemos reescribir la expansión perturbativa en términos de los parámetros físicos, pero conocida como renormalización, separando el Lagrangiano original en 2 partes:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}_0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \Psi_0 - g_0 \bar{\Psi}_0 \gamma^\mu \Psi_0 A_{0\mu}$$

$$\equiv \mathcal{L}_{QED,ren} + \mathcal{L}_{QED,ct},$$

donde el "Lagrangiano renormalizado" es

$$\mathcal{L}_{QED,ren} \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi - g \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu}$

y los "contratérminos" se definen como la diferencia

$$\mathcal{L}_{QED,ct} \equiv -\frac{1}{4} (z_A - 1) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (z_\Psi - 1) \bar{\Psi} i \not{\partial} \Psi$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\equiv \delta z_3} \qquad\qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\equiv \delta z_2}$

$$- \underbrace{(z_m m_0 - m)}_{\equiv \delta m} \bar{\Psi} \Psi - \underbrace{(z_\Psi \sqrt{z_A} g_0 - g)}_{\equiv z_1 g} \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{(z_1 - 1)g} \equiv \delta z_1 g$

Con \mathcal{L}_{QED} reescrito de esta forma, tenemos nuevos vértices de interacción que se originan de $\mathcal{L}_{QED,ct}$, y se encuentra que $\delta z_3, \delta z_2, \delta z_1, \delta m$ absorben todas las divergencias ultravioleta de los diagramas



en lazos (por partículas virtuales con energías arbitrariamente grandes, que exploran distancias arbitrariamente pequeñas).

Los cálculos perturbativos nos permiten deducir la manera en que los parámetros físicos/renormalizados dependen de la energía μ involucrada en su definición, llamada la escala de renormalización. En particular, se encuentra que g tiene una dependencia de μ codificada en la "función beta (o de Callan-Symanzik)"

$$\beta(g) \equiv \mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = 0 + \frac{g^3}{12\pi^2} + \mathcal{O}(g^5),$$

\uparrow normalmente denotado e $\frac{\partial g}{\partial(\ln \mu)}$ \uparrow nivel árbol (g dimensiones!) \uparrow 1 lazo \uparrow 2 lazos, etc.

En términos de la combinación

$$\alpha_{em} \equiv \frac{g^2}{4\pi} \quad (\text{"constante de estructura fina"}),$$

esto equivale a

$$\beta(\alpha_{em}) \equiv \mu \frac{\partial \alpha_{em}}{\partial \mu} = 0 + \frac{2\alpha_{em}^2}{3\pi} + \mathcal{O}(\alpha_{em}^3),$$

e implica que

$$\alpha_{em}(\mu) = \frac{\alpha_{em}(\mu_{ref})}{1 - \frac{2}{3\pi} \alpha_{em}(\mu_{ref}) \ln(\mu/\mu_{ref})}$$

energía de referencia
(\leftrightarrow cte. de integración)

Esta expresión es válida solo para $\mu \gg m_e$, es decir, para distancias menores que el radio de Compton del electrón, o lo que es lo mismo, el tamaño de su nube de partículas virtuales, $r_c \equiv 1/m_e \sim 1/0.5 \text{ MeV} \sim 2 \times 10^{-12} \text{ m}$. Para $\mu < m_e$, α_{em} se aproxima exponencialmente al valor familiar $\alpha_{em}(0) \approx 1/137$, así que al usar la fórmula de arriba podemos simplemente tomar

$$\mu_{ref} = m_e \quad \text{y} \quad \alpha_{em}(\mu_{ref}) \sim 1/137.$$



La fórmula dice que $q \leftrightarrow \alpha_{em}$ aumenta logarítmicamente (es decir, lentamente) con la energía (equivalentemente, disminuye con la distancia). Este aumento es por supuesto consecuencia de que $\beta(\alpha_{em}) > 0$.

α_{em} de hecho será divergente a una energía finita

$$\mu_{div} = \mu_{ref} \exp\left(\frac{3\pi}{2\alpha_{em}(\mu_{ref})}\right) \quad (\text{"polo de Landau"})$$

si pudiéramos seguir confiando en estas fórmulas a tales energías, lo cual obviamente no es el caso: $g(\mu) \gtrsim 1$ invalida la expansión perturbativa. Efectos de acoplamiento fuerte podrían modificar el comportamiento.

Queda muy en duda entonces si QED pudiera realmente considerarse como una teoría autoconsistente a distancias arbitrariamente pequeñas. Por supuesto, dado que $\mu_{\text{div}} \sim 10^{277} \text{ GeV} \gg 10^2 \text{ GeV} \sim$ escala electrodébil, esta es solo una preocupación teórica que no es relevante para QED en el mundo real (pero sí para la "hipercarga" g_1 asociada al grupo $U(1)$ en el Modelo Estándar).

Habiendo recordado la estructura y propiedades básicas de QED, podemos ahora proceder a QCD, que nos interesa más para este curso. QCD es simplemente una hermana no abeliana de QED:

- En lugar del electrón (u otras partículas en carga eléctrica), en QCD figuran partículas en carga fuerte que llamamos quarks, descritos por campos de Dirac (\leftrightarrow espín $1/2$)

$\Psi_{\alpha c}^{(s)}(x)$ con $\alpha=1,2,3,4$ índice espinorial

$c=1,2,3 \leftrightarrow$ rojo, verde, azul

3 colores: tipos de carga fuerte

que se mezclan entre sí bajo el grupo de norma

$SU(3) \equiv \{ \text{Matrices } 3 \times 3 \text{ unitarias y "especiales"} \}$

$$= \{ U_{cc'}, c, c'=1,2,3 \mid UU^\dagger=1, \det U=1 \}$$

grupo de Lie
no abeliano

$$= \{ \exp(i\Theta^I t_{cc}^I), I=1, \dots, 8 \mid t^I = t^{I\dagger}, \text{tr}(t^I)=0 \}$$

parámetros
(suma sobre I
implícita)

generadores de $SU(3)$: base para
"álgebra de Lie" (como $\frac{\sigma_i}{2}$ para $SU(2)$)

Transformación de norma mezcla

$$\Psi_{(x)}^{(s)} \equiv \begin{pmatrix} \Psi_{c=1}^{(s)}(x) \\ \Psi_2^{(s)}(x) \\ \Psi_3^{(s)}(x) \end{pmatrix} \rightarrow \Psi'_{(x)}{}^{(s)} = U(x) \Psi_{(x)}^{(s)} = \exp(i\Theta_I^I t^I) \Psi_{(x)}^{(s)},$$

es decir, $\Psi'_{c'}{}^{(s)}(x) = U_{cc'}(x) \Psi_c^{(s)}$ ← suma implícita

\leftrightarrow el campo del quark $\Psi_{(x)}^{(s)}$ transforma en la representación fundamental de $SU(3)$ ($\equiv \underline{3}$)

$S=1,2,\dots,6 \leftrightarrow$ arriba, abajo, ..., belleza

6 sabores: especies de quarks

(En el Modelo Estándar = QCD + Teoría Electro débil,

en realidad $S = (I, i)$ con

$I=1,2$ "isospin débil": tipos de carga débil

↖ ó $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ p.ej. $U = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix}$

$i=1,2,3$ "generación" U ó $C = \begin{pmatrix} c(x) \\ s(x) \end{pmatrix}$ ó $T = \begin{pmatrix} t(x) \\ b(x) \end{pmatrix}$.
↳ sabor

- En lugar del fotón, en QCD tenemos al gluón como partículas mensajeras de la interacción fuerte, descrito por un campo vectorial (\leftrightarrow espín 1)

$$A_{cc'}^{\mu I}(x) \equiv A^{\mu I}(x) t_{cc'}^I, \quad c, c' = 1, 2, 3 \quad I = 1, \dots, 8$$

Campo gluónico (matriz 3x3 hermitiana y sin traza)

que bajo transformaciones de norma $SU(3)$ cambia a

$$A_{\mu}^I(x) \rightarrow A'_{\mu}^I(x) \equiv U(x) \left(A_{\mu}^I - \frac{i}{g_f} \partial_{\mu} \right) U(x)^{-1},$$

cte. de acoplamiento fuerte

es decir,

(g_f en inglés), análogo a g

$$\left[A'_{\mu}^I(x) \right]_{cc'} = \left[\exp(i\theta^I(x) t^I) \right]_{c''} \left[A_{\mu}^I(x) - \frac{i}{g_f} \mathbb{1} \partial_{\mu} \right]_{c''c'''} \left[\exp(-i\theta^J(x) t^J) \right]_{c''''c'}$$

Este campo de norma nos permite definir la derivada covariante

$$D_{\mu} \equiv \partial_{\mu} + ig_f A_{\mu}^{(s)}(x)$$

que tiene la importante propiedad de que

$$D_{\mu} \psi^{(s)}(x) \equiv \partial_{\mu} \psi^{(s)}(x) + ig_f A_{\mu}^{(s)}(x) \psi^{(s)}(x)$$

$$\underbrace{[A_{\mu}^{(s)}]_{cc'}}_{[A_{\mu}^{(s)}]_{cc'}} \underbrace{[\psi^{(s)}]_c}_{[\psi^{(s)}]_c}$$

transforma igual que $\psi^{(s)}(x)$:

$$D_{\mu} \psi^{(s)}(x) \rightarrow D'_{\mu} \psi'^{(s)}(x) = U(x) D_{\mu} \psi^{(s)}(x)$$

Si tomamos $\theta_I(x) \ll 1$, podemos deducir que

$$A'_{\mu}(x) \equiv A_{\mu}^I t^I$$

$$\simeq (1 + i\theta^J t^J) \left(A_{\mu}^K t^K - \frac{i}{g_f} \mathbb{1} \partial_{\mu} \right) (1 - i\theta^L t^L)$$

$$= A_{\mu}^K t^K + i\theta^J A_{\mu}^K [t^J, t^K] - \frac{1}{g_f} \partial_{\mu} \theta^L t^L$$

$$\underbrace{\equiv i f^{JKL} t^L}_{\equiv i f^{JKL} t^L}$$