y $\frac{1}{L} \gg \frac{1}{\ell_c}$ si $g_c N \ll 1$,

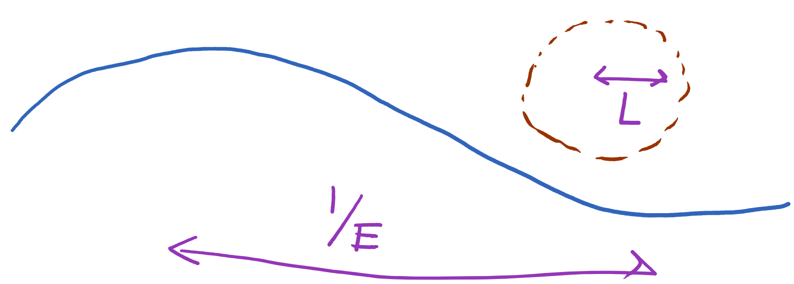
así que la condición que estamos imponiendo es una sola: $E \ll 1/L$ ó $E \ll 1/\ell_c$, respectivamente.

En este régimen, suceden 2 cosas importantes:

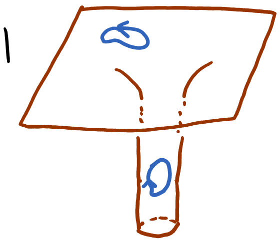
I) En cada lado de la correspondencia, obtenemos 2 sistemas desacoplados.

En la R3, se sabe que la sección eficaz de absorción de modos no masivos por parte de la brana negra es $\sigma \propto (EL)^8$ [Klebanov].

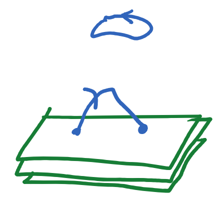
Pudiera parecer que la brana negra siempre debiera absorber cualquier cosa que se le arroje, pero lo que sucede es que su tamaño característico es L, y resulta por tanto invisible para modos con longitud de onda $1/E \gg L$.



Los modos de SUGRA (cuerda cerrada no masiva) en el exterior de la garganta ($r > L$) esencialmente se propagan entonces en un fondo plano, y no pueden penetrar al interior. A la inversa, los modos en el interior de la garganta no tienen energía suficiente para escalar el potencial gravitacional y escapar al exterior. Las 2 regiones entonces NO pueden comunicarse una con otra.

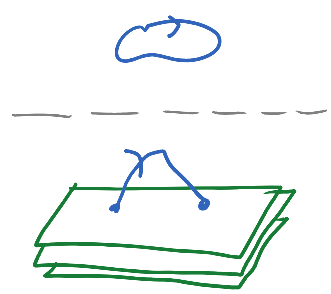


En la descripción con D-branas, sabemos que se tiene la misma probabilidad de absorción [Klebanov], así que igualmente obtenemos 2 sistemas desacoplados: las cuerdas cerradas en el fondo plano NO pueden convertirse en abiertas, ni vice versa.



II) En cada lado de la dualidad, la descripción se simplifica drásticamente.

Del lado de las D-branas, las cuerdas cerradas IIB en fondo plano se reducen a los modos de SUGRA IIB libres (la gravedad se acopla a la energía, y por ello es $\underbrace{\text{no renormalizable}}_{=\text{irrelevante}}$: fuertemente acoplada a altas



libre

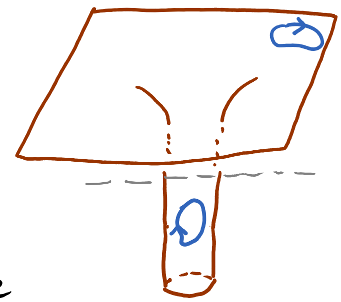
energía y débilmente acoplada a bajas energías),
y las cuerdas abiertas sobre las D3-branas se reducen a los modos no masivos, descritos por SYM $\mathcal{N}=4$ ($\equiv$ MSYM) $U(N)$ en 3+1 dimensiones (que es una teoría todavía interactuante).

Del lado de la D3-brana negra, hay que tomar en cuenta que $g_{tt} = -(1+L^4/r^4)^{-1/2}$, por lo que hay un efecto de corrimiento al rojo. Un objeto con energía propia (medida localmente) E_{prop} en un punto r tiene energía

$$E_\infty = \sqrt{-g_{tt}}\, E_{prop} = \left(1+\frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/4} E_{prop}$$

medida por un observador en infinito. Esta última es la noción de energía $E = E_\infty$ sobre la cual hemos impuesto la restricción $E \ll 1/l_s, 1/L$, porque la noción de tiempo t en la D3 cuando $r \to \infty$ coincide con la que tenemos para las D3.

En cualquier sitio $r \gtrsim L$, estamos pidiendo entonces que $E_{prop} << 1/\ell_c\,,\ 1/L$, y reducimos por tanto a SUGRA libre. Ya habíamos visto que estos modos se propagan en un fondo plano.



Pero en la región cercana al horizonte $r << L$, podemos tener E_{prop} arbitrariamente grande y aún así satisfacer $E_\infty \simeq \left(\frac{r}{L}\right) E_{prop} << 1/\ell_c\,,\ 1/L$.

En esta región $H(r) = 1 + L^4/r^4 \simeq L^4/r^4$ y el fondo se simplifica a

$$ds^2 = \underset{H^{-1/2}}{\frac{r^2}{L^2}} \left(-dt^2 + d\vec{x}^{\,2}\right) + \underset{H^{1/2}}{\frac{L^2}{r^2}} \left(dr^2 + r^2 d\Omega_5^2\right)$$

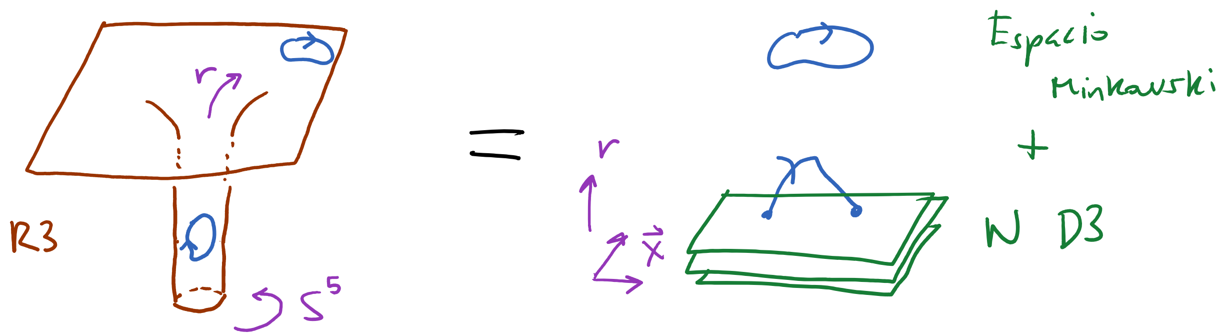
$$= \underbrace{\left(\frac{r^2}{L^2}\, dx_\mu dx^\mu + \frac{L^2}{r^2}\, dr^2\right)}_{\substack{\text{Espaciotiempo anti-de Sitter} \\ \text{(4+1)-dimensional} \\ \text{con radio } L}} + \underbrace{L^2\, d\Omega_5^2}_{\substack{\text{5-esfera} \\ \text{con radio } L}}$$

$$G_{r0123} = g_c^{-1}\, \frac{4r^3}{L^4}\,, \qquad G_{\theta_1 \cdots \theta_5} = g_c^{-1}\, 4L^4\, v(\Omega_5)\,.$$

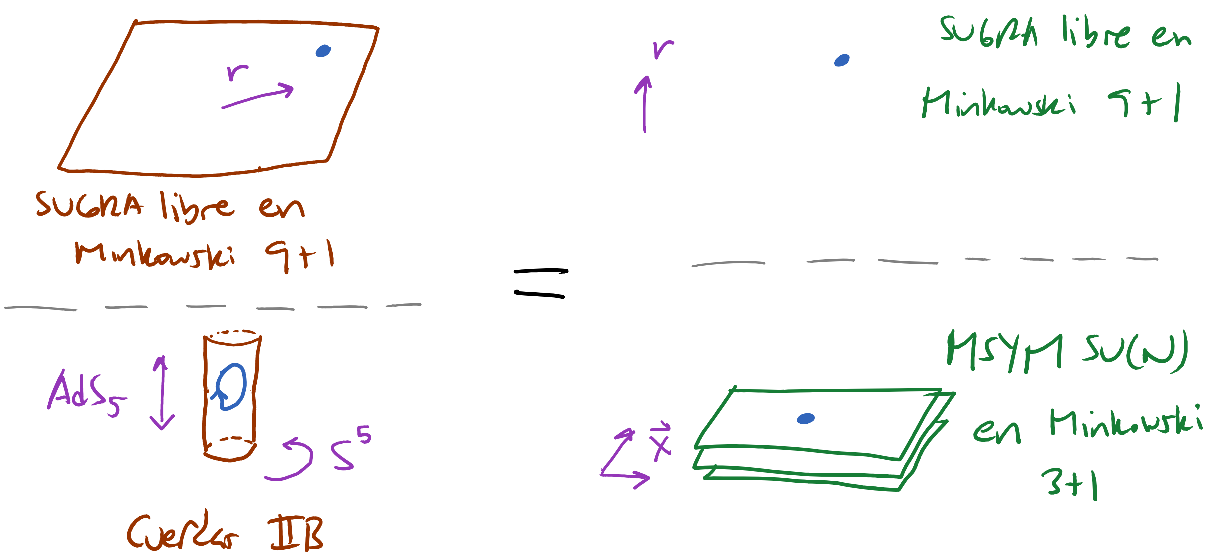
$\hookrightarrow$ N unidades de flujo a través de S^5

Sobre este espacio $AdS_5 \times S_5$ con N unidades de flujo RR a través de S_5 se propagan todos los modos de la teoría de cuerdas IIB, incluyendo los no perturbativos como Dp-branas, NS5-branas, etc.

En resumen, tenemos



$$\Big\downarrow \quad E \ll \frac{1}{\ell_c}, \frac{1}{L}$$



Dado que teníamos una equivalencia desde el principio, y de los 2 componentes desacoplados que obtenemos en cada lado uno coincide directamente, debemos concluir que los 2 componentes restantes también son equivalentes:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Teoría de Cuerdas IIB} \\ \text{en } AdS_5 \times S^5 \\ \text{con } N \text{ unidades de flujo RR} \\ \text{a través de la } S^5\end{array} = \begin{array}{c}\text{MSYM con grupo } SU(N) \\ \text{en Minkowski } 3+1\end{array}}$$

← No $U(N)$, ver más adelante

¡¡ Esta conclusión es mucho más sorprendente que el punto de partida !!

Hemos presentado la deducción aquí en términos de la descripción aproximada que se tiene del régimen a ultra-bajas energías $E \ll 1/\ell_c, 1/L$, pero esta descripción se vuelve un enunciado exacto en el límite $E\ell_c, EL \to 0$.

La forma más conveniente de formular esta idea es decir que elegimos trabajar en unidades donde

$$\boxed{\ell_c \to 0 \quad \text{mientras mantenemos} \quad g_c N \text{ fijo} \quad (\Rightarrow L \to 0)},$$

lo cual garantiza que $E\ell_c, EL \to 0$.

Esto se conoce como el límite de Maldacena, o "de desacoplamiento", o "cercano al horizonte". En estas unidades, E puede tomar valores arbitrariamente grandes sin que regresemos a la dualidad de cuerdas abiertas/cerradas que teníamos originalmente. Esto es muy útil porque tiene perfecto sentido considerar a las cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$ y a MSYM con energías arbitrariamente altas, y la afirmación de Maldacena es que la correspondencia entre ellas es válida para cualquier valor de E, g_c y N.

Vale la pena abundar un poco en este punto. Si tomamos p.ej. QED sin masa,

$$S_{QED} = \int d^4x \left[\bar{\Psi}\, i\gamma^\mu \underbrace{D_\mu}_{\equiv \partial_\mu + iq A_\mu} \Psi - \frac{1}{4} \underbrace{F_{\mu\nu}}_{\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu} F^{\mu\nu} \right],$$

sabemos que el acoplamiento q, que por ser adimensional no cambia clásicamente bajo reescalamientos de la energía (es clásicamente "marginal" ≡ "estrictamente renormalizable"), tiene

$$\beta(q) \equiv E\frac{dq}{dE} = 0 + \frac{q^3}{12\pi^2} > 0 ,$$

escala de renormalización — nivel árbol — 1 lazo

y se vuelve pequeño a bajas energías (q es "marginalmente irrelevante"), $q(E) \xrightarrow[E\to 0]{} 0$. "Teoría libre en el IR"

(Esto es distinto al caso con masa, donde $q(E)$ deja de correr fuera del radio de Compton, $E < 1/m$.)

Sabemos entonces que QED sin masa es aproximadamente libre a bajas energías, y exactamente libre cuando $E = 0$:

$$S_{QED} \xrightarrow[E\to 0]{} \int d^4x \left[\bar{\Psi}\, i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]$$

$$= S_{Dirac} + S_{Maxwell} .$$

El punto que queremos resaltar es que, a pesar de que hemos obtenido esta teoría libre tomando un límite $E \to 0$, tiene perfecto sentido considerar $S_{Dirac} + S_{Maxwell}$ a cualquier energía, sin que ello implique volver a S_{QED}.

Habiendo obtenido $S_{\text{Dirac}} + S_{\text{Maxwell}}$ como el límite de ultra-bajas energías de QED sin masa, queda claro que esta teoría necesariamente tendrá la misma forma a cualquier energía: $g=0$ es lo que llamamos un punto fijo del grupo de renormalización ($\beta(g=0)=0$).

Claro que esta independencia de la escala energética es obvia por tratarse de una teoría libre sin ningún parámetro dimensional: el punto fijo que hemos obtenido es "trivial" o "gaussiano".

Lo que ha ocurrido en nuestra deducción de la correspondencia es hasta cierto punto análogo: empezando con la acción completa de las N D3-branas, que esquemáticamente es

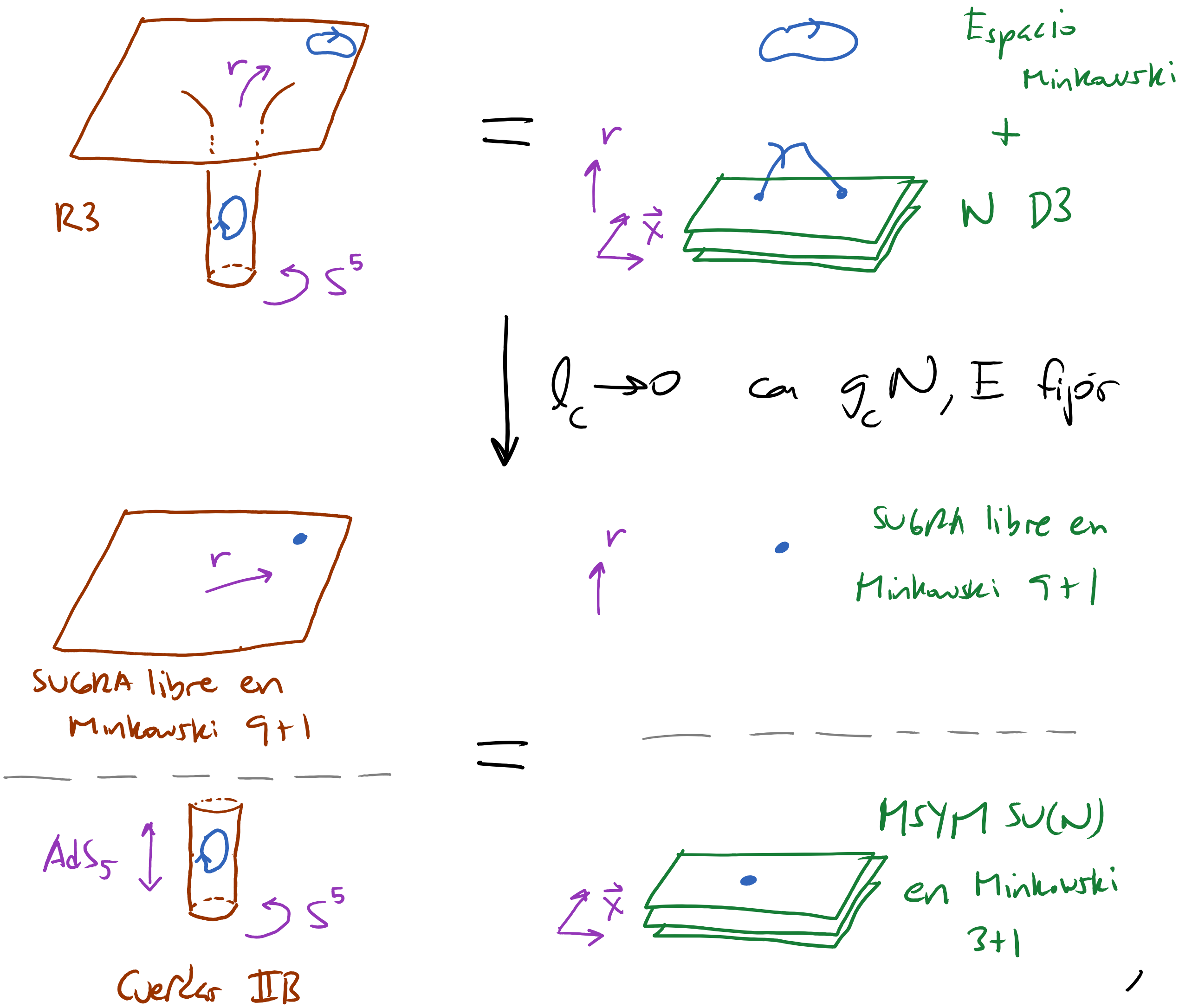
$$S_{D3} = \int d^4x \left\{ \underbrace{\mathrm{Tr}(F^2 + \dots)}_{\substack{S_{\text{MSYM}} \\ \text{acoplamientos adimensionales} \\ \text{(marginales)}}} + \underbrace{l_c^4\, \mathrm{Tr}(F^4 + \dots) + \dots}_{\substack{\text{términos con acoplamientos} \\ \text{de dimensión negativa} \\ \text{(“irrelevantes”} \\ \equiv \text{“no renormalizables”)}}} \right\},$$

encontramos que $S_{D3} \xrightarrow[E\to 0]{} S_{\text{MSYM}}$, y tiene perfecto sentido considerar a S_{MSYM} por sí sola a energías arbitrariamente grandes. Este es el punto que se vuelve evidente si consideramos el límite de Maldacena como $l_c \to 0$ (con $g_c N$ fijo), porque E puede ser entonces arbitraria.

Si en verdad S_{MSYM} es lo que se obtiene en el límite $E \to 0$ (o $l_c \to 0$) de S_{D3}, entonces queda claro que esta teoría debe ser invariante bajo reescalamientos de E (como de hecho afirmamos en la p. 197): es un punto fijo. Lo interesante del asunto es que se trata de una teoría INTERACTUANTE: es un punto fijo "no trivial".

Relacionado con el hecho de que, del lado de las D3 tomamos primero $El_c, EL \to 0$ y al final de todos modos podemos considerar E arbitrarias en MSYM, sin que ello implique que regresamos a $S_{D3} + S_{SUGRA}$, del lado de la D3-brana negra, aún cuando en la deducción consideramos primero $r/L \to 0$, después del límite de Maldacena podemos tomar r arbitrario en la geometría AdS_5 resultante, incluyendo $r \gg L$, sin que ello implique que regresamos a la región (asintóticamente) plana.

En resumen, después de tomar el límite

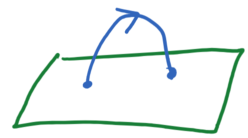


,

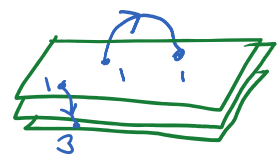
cualquier punto en AdS_5, $0 \leq r < \infty$, corresponde a estar todavía dentro de las D3, a nivel de MSYM.

L17: 17/11/20

La razón por la cual al final hemos escrito el grupo de norma como SU(N) en lugar de U(N) es la siguiente.



Recordemos primero que los 9-p campos escalares $\Phi^i(x)$ sobre una Dp-brana describen la posición de la brana en las 9-p direcciones transversales. Para una pila de N D3-branas, $\Phi^i(x)$ se vuelven campos matriciales,



$$\Phi^i(x) = \Phi^i_{\underset{1,2,\dots N}{IJ}}(x) = \Phi^i_A(x)\, T^A$$

generador de U(N): hermítico

con $\Phi^i_{11}(x)$, $\Phi^i_{22}(x)$, $\Phi^i_{33}(x)$, ... la posición de la D3-brana número 1, 2, 3, ...

Podemos ver entonces que

$$\Phi^i_{cm}(x) \equiv \frac{1}{N}\left[\Phi^i_{11}(x) + \Phi^i_{22}(x) + \Phi^i_{33}(x) + \dots\right] = \frac{1}{N}\,\mathrm{Tr}\left[\Phi^i(x)\right]$$

describe la posición del centro de masa de la pila, mientras que

$$\Phi^i_{rel,IJ}(x) \equiv \Phi^i_{IJ}(x) - \frac{1}{N}\Phi^i_{cm}(x)\,\delta_{IJ}$$

describe a las posiciones relativas (además de los grados de libertad fuera de la diagonal).

Pero

$$\Phi^i_{IJ}(x) = \underbrace{\frac{1}{N}\Phi^i_{cm}(x)\,\delta_{IJ}}_{\text{Traza}} + \underbrace{\Phi^i_{rel,IJ}(x)}_{\text{Hermítica, sin traza}}$$

es precisamente la descomposición

$$\underbrace{U(N)}_{\text{unitarias}} \simeq \underbrace{U(1)}_{\{e^{i\varphi}\}} \times \underbrace{SU(N)}_{\text{unitarias c/ det}=1}$$

($\leftrightarrow$ hermíticas
$\leftrightarrow$ $Tr = 0$
a nivel del álgebra de Lie)

Para ser más exactos,

$$U(N) = \frac{U(1)\times SU(N)}{Z_N},$$

porque un factor de $e^{i2\pi/N}$ (o cualquier otra raíz N-ésima de 1) en realidad sí forma parte de $SU(N)$, dado que $\det\left(e^{i2\pi/N}\mathbb{1}\right) = 1$: Z_N es el 'centro' de $SU(N)$.

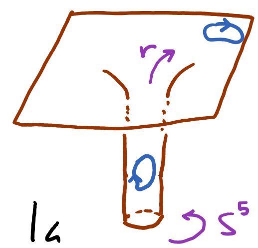
La diferencia entre trabajar con MSYM $U(N)$ ó $SU(N)$ es entonces incluir o dejar fuera a los grados de libertad del centro de masa (junto con sus supereparejas).

Como esperaríamos desde el punto de vista físico, estos grados de libertad $U(1)$ están desacoplados del resto, porque no contribuyen a los conmutadores que figuran en todas las interacciones en MSYM.

La teoría de cuerdas IIB en $AdS_5 \times S^5$ no tiene ningún sector desacoplado de todo lo demás, así que solo podría ser dual a MSYM $SU(N)$.

Antes de tomar el límite de Maldacena, del lado de la D3-brana, los grados de libertad $U(1)$ corresponden también a la posibilidad de desplazar a la brana. Su origen es el hecho de que, por invariancia bajo traslaciones, existen soluciones solitónicas ubicadas en cualquier posición X^i_{D3} (que se escriben con $r = \sqrt{\sum_{i=4}^{9} (X^i - X^i_{D3})^2}$). Como todas tienen la misma energía $M = N T_{D3} V$, el deformar de cualquiera de estas soluciones a cualquiera de sus vecinas no cuesta energía. Se puede mostrar que, al cuantizar, estas fluctuaciones infinitesimales de los campos dan lugar a partículas sin masa, desacopladas de las demás fluctuaciones de los campos, conocidas como las "coordenadas colectivas" del solitón (Esto es un ejemplo particular del teorema de Goldstone: siempre que el vacío de una teoría de campo rompe espontáneamente una simetría continua global, aparecen en el espectro partículas sin masa.)

Así que, en resumidas cuentas, del lado de la R3 los modos U(1) nos informan dónde en el espacio plano decidimos colocar la garganta.



Después de tomar el límite de Maldacena, la garganta se simplifica a $AdS_5 \times S^5$ y se desacopla de la parte plana. Cuando consideramos a la teoría de cuerdas IIB definida únicamente sobre $AdS_5 \times S^5$, ya no resulta natural entonces tener a los grados de libertad que nos informan en qué lugar del espacio plano se encuentra la garganta. Es por esta razón que la equivalencia que se obtiene involucra sólo a la parte SU(N) de MSYM.

(Otra posibilidad es sí retener al U(N) completo, en el entendido de que la parte U(1) debe identificarse con ciertos grados de libertad conocidos como 'singuletones' o 'dobletones', que se agregan a mano y esencialmente viven sólo en el infinito de AdS_5, que hubiera sido el punto de 'unión' con la región asintóticamente plana. Ver p.ej. MA600 p. 58 y refs. que ahí se citan.)

Un punto adicional es que, si en verdad la física completa de MSYM es dual a la teoría de cuerdas IIB, incluyendo excitaciones con energía arbitrariamente grande, entonces en esta teoría gravitacional debemos considerar no sólo la geometría $AdS_5 \times S^5$ que obtuvimos a partir de la D3 extremal, sino deformaciones arbitrariamente grandes de ella (y de los otros campos de cuerda cerrada), incluyendo, p.ej., hoyos negros. Lo único que NO podemos cambiar es el hecho de que el fondo es $AdS_5 \times S^5$ (con N unidades de flujo RR sobre la S^5) EN EL INFINITO, porque modificar eso requeriría energía infinita.

Así que, análogamente a como el relativista suele trabajar con espaciotiempos asintóticamente planos, nosotros debemos trabajar con fondos asintóticamente $AdS_5 \times S^5$.

El enunciado más preciso de la correspondencia es entonces

MSYM SU(N) en 3+1 dim	=	Cuerdas IIB en fondo asintóticamente $AdS^5 \times S^5$

Partículas	vs.	Cuerdas
SIN gravedad	vs.	CON gravedad
CON color	vs.	SIN color
Espaciotiempo PLANO	vs.	Espaciotiempo CURVO
3+1 dim	vs.	9+1 dim

A pesar de las marcadas diferencias, Maldacena nos dice que estas 2 teorías son completamente equivalentes: existe un diccionario que traduce entre ellas. Esta equivalencia suena completamente absurda; pero 23 años y 16,000 citas después, ¡sigue pareciendo cierta!

Como prometimos desde el principio del curso, esta dualidad representa un nuevo paradigma teórico: la existencia o inexistencia de la gravedad, y el número de dimensiones, ¡dependen del punto de vista que adoptemos!

Para evitar confusiones, es importante tener presente que NINGUNA de estas 2 teorías describe a nuestro universo. Se trata de 2 universos imaginarios, ¡que de manera milagrosa resultan ser uno mismo!

Vale la pena también enfatizar que lo que hemos presentado aquí (que es la deducción original de Maldacena —ver también p.ej., MAGOO, hep-th/9905111) NO constituye una demostración rigurosa. Se trata solo de una deducción heurística, porque

i) Hemos partido de suponer la equivalencia entre la D3-brana negra y las D3-branas.

ii) A nivel de cuerdas, en ambos lados de la dualidad hemos utilizado solamente una formulación perturbativa.

iii) En el enunciado final, NO tenemos una definición precisa y completa (no perturbativa) de la teoría de cuerdas IIB en AdS (y la presencia del campo RR dificulta incluso los cálculos de cuerdas perturbativos).

Habíamos mencionado que el punto i) es de hecho controvertido incluso entre cuerderos. Una deducción que intenta prescindir de él parte de la IIB y las D3 como descripciones complementarias (NO duales), relevantes para regímenes mutuamente excluyentes de $g_c N$, y luego utiliza el mismo límite de Maldacena para argumentar que MSYM y IIB en AdS deben ser equivalentes (duales) si los límites $g_c N \to \infty$ y $l_c \to 0$ conmutan (ver, p.ej., Myers & Vázquez, arXiv:0804.2423, o Polchinski, arXiv:1010.6134):

martes, 21 de agosto de 2012 05:08 p.m.