

obteniendo por el mecanismo de Higgs algunos estados
 con masa y cargas eléctricas: $n_e^l = 0, \pm 1$ bajo el $U(1)$
 número l ($l=1, \dots, N_c-1$). Estos son análogos a W^\pm
 en el Modelo Estándar. p.ej. gluones \rightarrow

Se pueden encontrar también solitones que portan carga
magnética $n_m^l = 0, \pm 1$, conocidos como monopolos magnéticos
 (de 't Hooft - Polyakov), con un perfil de campo
 topológicamente no trivial (caracterizado por n_m^l).

Por el argumento de discretización de carga de Dirac, el
 cuanto mínimo de carga magnética \tilde{g}_{YM} está relacionado
 con el de carga eléctrica g_{YM} a través de

$$g_{YM} \tilde{g}_{YM} = 4\pi.$$

Los objetos que hemos mencionado arriba tienen entonces
 carga eléctrica

$$q_e^l = n_e^l g_{YM} - n_m^l \frac{g_{YM} \theta_{YM}}{2\pi}$$

y magnética

$$q_m^l = n_m^l \tilde{g}_{YM} = n_m^l \frac{4\pi}{g_{YM}}.$$

← "efecto Witten": cuando
 $\theta_{YM} \neq 0$, los monopolos
 adquieren carga eléctrica)

Utilizando el álgebra de supersimetría, se puede mostrar que

la masa (energía en reposo) de cualquier estado en la teoría con cargas q_e^l , q_m^l satisface la cota BPS (Bogomol'nyi - Prasad - Sommerfield) [ver p.ej. Harvey 9603086, Di Vecchia 9603026, ó www.maths.ed.ac.uk/~jmf/Teaching/Lectures/EDC.pdf]

$$M \geq \sqrt{q_e^l q_e^l + q_m^l q_m^l}$$

↑ valor esperado $\text{Tr} \langle \Phi^\dagger \Phi \rangle_{x \rightarrow \infty} = V^2$

Todos los estados mencionados arriba de hecho saturan esta cota, es decir, tienen la mínima masa posible para las cargas dadas. Este tipo de estados son especiales (se puede mostrar que son aniquilados por algunos de las supercargas — es decir, son invariantes bajo las transformaciones correspondientes —, y viven por tanto en multipletes más contos) y se conocen como estados BPS. Para nuestros propósitos aquí, la propiedad importante es que su masa está completamente determinada por sus cargas, y se sabe por tanto de manera exacta incluso en la región de acoplamiento fuerte.

L9: 13/09/16 (-10 min)

Es entonces muy interesante observar que la fórmula de masa para los estados BPS se puede reescribir en la

forma

$$M^2 = 4\pi v^2 \sum_{\ell=1}^{N_c-1} (n_e^\ell, n_m^\ell) \frac{1}{\text{Im}\tau} \begin{pmatrix} 1 & -\text{Re}\tau \\ -\text{Re}\tau & |\tau|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_e^\ell \\ n_m^\ell \end{pmatrix},$$

y resulta ser **invariante** bajo las transformaciones $SL(2, \mathbb{Z})$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1$$

que actúan de acuerdo con

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \begin{pmatrix} n_e^\ell \\ n_m^\ell \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_e^\ell \\ n_m^\ell \end{pmatrix}.$$

sol. tiene sentido
para $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

Se cree que esta es una simetría de la teoría $\mathcal{N}=4$ completa (no solo para los estados BPS), y se conoce como **Dualidad S** (o de Montonen-Olive, o eléctrico-magnética).

El grupo $SL(2, \mathbb{Z})$ es generado por 2 transformaciones básicas: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

- $\tau \rightarrow \tau + 1$, que equivale a $\Theta_{YM} \rightarrow \Theta_{YM} + 2\pi$, y es una simetría porque Θ_{YM} multiplica a la derivada total $\text{Tr}(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})$, que para configuraciones topológicamente no triviales de $A_\mu(x)$ contribuye a la integral funcional un factor de $\exp(i n \Theta_{YM})$, con $n \in \mathbb{Z}$ (en el sector de n "instantones").

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 $\tau = \frac{\theta_{YM}}{2\pi} + i \frac{4\pi}{g_{YM}^2}$

$\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$, que cuando $\theta_{YM} = 0$ equivale a

$$g_{YM} \rightarrow \frac{4\pi}{g_{YM}} = \tilde{g}_{YM} \quad \text{acoplamiento débil} \leftrightarrow \text{fuerte!!}$$

e intercambia $n_e^l \leftrightarrow n_m^l$, de modo que es una generalización de la dualidad eléctrica-magnética que se vislumbra en las ecuaciones de Maxwell. Esta transformación intercambia a los 'bosones W ' (gluones masivos) con los monopolos magnéticos!

Con todo lo anterior, tenemos ya bastante información sobre las propiedades de MSYM. Recordando que llegamos a ellas presentándose como una prima lejana de QCD, nos falta todavía preguntarnos hasta qué punto podría servirnos para aprender algo sobre la fuerza fuerte.

Si comparamos las propiedades de ambas teorías a temperatura $T=0$,

QCD en Minkowski^{3,1} vs.

MSM en Minkowski^{3,1}

- Asintóticamente libre

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_{YM}^2 < 0$$

$$\left(\begin{array}{l} g_{YM}^2(\mu) \ll 1 \\ g_{YM}^2(\mu) \approx 1 \end{array} \right) \text{ si } \left(\begin{array}{l} \mu \gg \Lambda_{QCD} \\ \mu \approx \Lambda_{QCD} \end{array} \right)$$

- Confinada a bajas energías
- Contiene solo partículas masivas (hadrones con $m \sim \Lambda_{QCD}$)

- Con quarks
- Potencial quark-antiquark lineal
 $V(L) \approx \sigma L$ para $L \gg \Lambda_{QCD}^{-1}$

- No supersimétrica
- Con simetría interna global
 $U_I(N_f) \times U_D(N_f) \rightarrow U(1)_{\text{bariónico}}$
- Sin dualidad S compromiso de simetría quiral
- Con grupo de norma $SU(N_c)$

- Conforme

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_{YM}^2 = 0$$

$$\left(g_{YM}^2 = \text{cte.} \right) \text{ para } \left(\begin{array}{l} \mu \ll 1 \\ \mu \sim 1 \\ \mu \gg 1 \end{array} \right)$$

- Desconfinada siempre
- No hay escala de masa
 \nexists verdaderos partículas (= estados asintóticos)

- Sin quarks
- Potencial $q-\bar{q}$ de Coulomb
 $V(L) \propto \frac{1}{L}$ para todo L

- Máximamente supersimétrica
- Con simetría interna global
 $SU(4)_R \approx SO(6)_R$
- Con dualidad S
- Con grupo de norma $SU(N_c)$

Vemos que son MUY diferentes (aunque definitivamente
L10: 22/10/20

están emparentados, y tienen en particular los mismos "amplitudes de dispersión" gluónicas a nivel árbol).

Pero la situación mejora sustancialmente si consideramos a ambas teorías en una temperatura finita $T > T_c \sim \Lambda_{QCD}$. En particular, se tiene entonces


QCD en Minkowski^{3,1} vs. MSM en Minkowski^{3,1}

- Aproximadamente conforme para un rango finito $T \gtrsim T_c$
pej. $E \propto T^4 V$ (retícula)
 \curvearrowright p.59
- Desconfinada
- Plasma no abeliano de gluones y quarks (QGP) - fuertemente acoplado para $T \gtrsim T_c$
(no para $T \gg T_c$)
- Potencial apantallado por el plasma a distancias grandes
- No supersimétricas
- Simetría conforme rota solo por T. Pej. $E \propto T^4 V$
(por análisis dimensional)
- Desconfinada
- Plasma no abeliano de gluones y materia adjunta (AGP) - fuertemente acoplado si así lo decidimos
 \curvearrowright adjunta
- Potencial apantallado por el plasma a distancias grandes
- Supersimetría rota

(La supersimetría se rompe porque los ensamblados térmicos de bosones y fermiones son distintos. Una manera de verlo es notar que la función de partición térmica

$$Z(\beta) \equiv \text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}}) = \sum_{|estab\rangle} \langle estab| e^{-\frac{\hat{H}}{T}} |estab\rangle$$

se calcula en el formalismo de cuantización por integral de trayectoria tomando el tiempo euclideo ($x_E^0 \equiv -iX^0$) como un círculo de circunferencia β , $x_E^0 \approx x_E^0 + \frac{1}{T}$, con


 condiciones de frontera periódicas para campos bosónicos y antiperiódicas para campos fermiónicos.

Aprendemos entonces que MSYM

* a temperatura cero nos sirve solo como laboratorio teórico (muy interesante en sí mismo: ¡MSYM resulta ser la teoría interactuante más sencilla! Ver p.ej. Arkani-Hamed et al. 0808.1446, Dixon 1310.5353, Bern et al. 1909.01358.)

* a temperatura finita nos sirve además como un modelo de juguete para el QGP del mundo real.

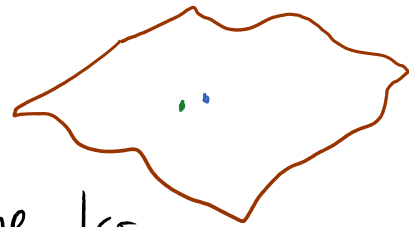
Como veremos, la dualidad holográfica afirma que podemos entender a MSYM en términos de una cierta teoría de cuerdas que vive en un cierto espaciotiempo

curvo. (Adicionalmente, obtendremos acceso a otras otras teorías no abelianas, algunas de las cuales resultan ser incluso menos lejanas de QCD).

Antes de hablar de cuerdas, echamos un breve vistazo a la gravedad cuántica, tema que también sirve como antecedente y motivación para la correspondencia.

* GRAVEDAD CUÁNTICA

La relatividad general nos enseñó que la gravedad es una manifestación de la dinámica del propio espaciotiempo, codificada en la métrica $g_{\mu\nu}(x)$, que define las distancias/tiempo propio y la estructura causal.



Para entender a este sistema cuánticamente, un particularista/campista naturalmente intenta en primera instancia utilizar el enfoque que le funcionó para los otros campos: considerar pequeñas fluctuaciones del campo, y estudiar sus amplitudes de dispersión.

Claramente la métrica $g_{\mu\nu}(x)$ No es solo un campo más, y en particular, a diferencia de lo que pasa con los otros campos, es difícil darle sentido a un estado cuántico donde su valor esperado sea $g_{\mu\nu}(x) = 0$.

Pero lo que sí tiene sentido es separar

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + \sqrt{\frac{\hbar}{2M_{\text{Planck}}}} h_{\mu\nu}(x)$$

Constante de Newton
para que h esté
normalizada canónicamente

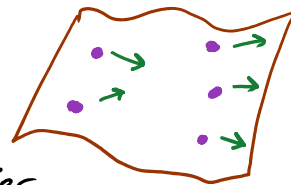
↙
valor de fondo
(p.ej., $\eta_{\mu\nu}$)

↖
fluctuación que se cuantiza,
dando lugar a partículas
no masivas con espín 2

Gravitón:
excitación
mínima del
espaciotiempo



Dispersión de
gravitones:
autointeracciones
del espaciotiempo



En principio, debería ser posible estudiar este tipo de procesos experimentalmente, por lo que desde el punto de vista operativo, este parece un enfoque sensato para empezar a explorar a la gravedad a nivel cuántico.

Pero desde el punto de vista teórico, hay un problema:

la acción de la relatividad general (Einstein-Hilbert),

$$S_{\text{E-H}} = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^D x \sqrt{-g} R \sim \int d^D x \left(\partial h \partial h + \sqrt{G_N} h \partial h \partial h + (\sqrt{G_N})^2 h h \partial h \partial h + \dots \right)$$

(donde a cada orden hay varios términos que difieren por la manera en que los índices están contráidos con $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$),

es una teoría perturbativamente No renormalizable.

Esto quiere decir que, al analizarla en una expansión perturbativa en potencias de la constante de acoplamiento $\sqrt{G_N}$ (que tiene dimensión $1 - \frac{D}{2} < 0$ si $D > 2$), el proceso de renormalización requiere que ajustemos un número infinito de coeficientes (utilizando un número infinito de datos experimentales) para poder eliminar todas las divergencias ultravioleta (si queremos el límite continuo $\Lambda \rightarrow \infty$).

Ante esta dificultad, hay al menos 2 posibles reacciones:

- La culpa la tiene el método perturbativo, y hay que cuantizar entonces de manera no perturbativa. Este es el camino que sigue la Gravedad Cuántica de lazos

(partiendo de reescribir $S_{\text{NW}}(x)$ en términos de una variable tipo $A_{\text{N}}(x)$, y utilizando una cuantización 'polimérica' que es altamente no estándar).

- La culpa la tiene la relatividad general, que debe entenderse entonces solo como una "teoría efectiva" (descripción aproximada) a bajas energías. Hace falta modificarla a distancias pequeñas de tal manera que sí pueda ser cuantizada perturbativamente. Este es el camino que sigue la Teoría de Cuerdas (sobre la cual abundaremos un poco más adelante), que, como se sabe, acaba aspirando también a unificar a la gravedad con las otras interacciones y con los ingredientes elementales de la materia.

(Estos son apenas los métodos más populares para intentar cuantizar la gravedad. Otros enfoques son la 'triangulación dinámica causal' (Ambjorn, Loll, ...), la 'seguridad asintótica' (Weinberg, Percacci, ...), los 'conjuntos causales' (Sorkin, Dowker), la 'gravedad

de 'Hörska-Lifshitz' (Hörska; Germani, Kehagias, Sletkov; etc.) la 'gravedad entrópica' (Verlinde), o la 'invariancia conforme local' ('t Hooft). Y por supuesto, bien pudiera ser que la descripción correcta no se nos haya ocurrido todavía...)

Hay 2 puntos que conviene resaltar aquí. Uno es que No es obvio que cuantizar la gravedad signifique ni más ni menos que cuantizar a la relatividad general. El otro es que, si bien a bajas energías la gravedad se vuelve despreciable, y es por eso que el Modelo Estándar logra tener éxito a pesar de que no la incluye, No es claro que existe algún límite en el cual las interacciones del Modelo Estándar se vuelvan despreciables con respecto a la gravedad, de modo que tenga sentido (y sea útil) cuantizar a la gravedad por sí sola.

Con base en lo que hemos dicho hasta ahora, la cuantización de la gravedad parecería ser principalmente un problema técnico. Pero en realidad es también un problema conceptual bastante profundo, puesto que esencialmente equivale a preguntar ¿de qué están

hechar el espacio y el tiempo !! Esto va asociado a varias otras dificultades espinosas, como p.ej.

- En vista del problema de medición de la mecánica cuántica, ¿Cómo se interpreta a la función de onda para el universo entero?
- ¿Cómo se trabaja con estados del tipo $|g_{\mu\nu}(x)\rangle + |g'_{\mu\nu}(x)\rangle$, donde la geometría del espaciotiempo es incierta?
- ¿Cuáles son las observables? Dado que ahora son los difeomorfismos (reparametrizaciones) los que juegan el papel de transformaciones de norma, las observables, para ser invariantes de norma, necesariamente tendrán que ser cantidades no locales (p.ej., el valor de cualquier campo en un punto, $\varphi(x)$, NO es invariante).
- La evolución temporal $t \rightarrow t + \delta t$ puede entenderse como un difeomorfismo. ¿Cómo puede entonces ser descrito como un proceso físico?

Otro gran problema es que la información experimental

¡¡ pudiera quizás estar tancaen lejana como la escala de Planck tradicional, $\sim 10^{19}$ GeV $\sim 10^{15}$ LHC !! (Aún así, se

han buscado posibles efectos en fenómenos cosmológicos, en mediciones atómicas de alta precisión, etc. Esta industria se conoce como 'fenomenología de la gravedad cuántica', e incluye p.ej. búsqueda de posibles violaciones a Lorentz (Amelino-Camelia, Kostelecky, Urrutia, Bondar, etc.).)

- Además de esclarecer los puntos conceptuales ya mencionados, a una teoría de gravedad cuántica, para ser merecedora de tal nombre, seguramente le pediríamos que:
- Sea una teoría cuántica, que se reduzca correctamente a la relatividad general a distancias grandes (en el límite semi-clásico donde se recupere un espaciotiempo suave).
 - Sea independiente del fondo, en el sentido de que no sea indispensable elegir un espaciotiempo dado antes de formular la teoría. En otras palabras, debe dar una descripción donde el espaciotiempo —ya sea fundamental o emergente— sea plenamente dinámico.

Para ser más precisos, podemos considerar por separado a distintas familias de espaciotiempo que difieren por sus condiciones de frontera (p.ej., asintóticamente planas, o anti-de Sitter, etc.), y como estas no son dinámicas, podría ser que la teoría solo describa a uno de estos 'sectores de superselección' a la vez.

- Nos permita calcular amplitudes de dispersión, que en fondos apropiados (p.ej., asintóticamente planas) son observables válidos.
 - Dé una explicación microscópica de las propiedades (teóricas, pero aparentemente confiables) de los agujeros negros.
 - Resuelva las singularidades de la relatividad gral.
 - Aclare el origen de la constante cosmológica.
 - Acabe con la pobreza en el mundo.
- (¡Nota: que cada quien agregue algunos criterios que son más bien preferencias personales!)

Es interesante profundizar un poco en las propiedades conocidas/esperadas de los agujeros negros.

En los 60s y 70s se encontró que el área del horizonte de eventos de un agujero negro, A_h , y la gravedad superficial K_s , que puede definirse para agujeros negros estacionarios y esencialmente representa la fuerza que debe ejercerse en infinito para mantener a una masa unidad en reposo justo en el horizonte del agujero negro (técnicamente, $K_s^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^\mu k^\nu)(\nabla_\mu k_\nu)$, donde k^μ es el "vector de Killing" nulo asociado al horizonte), satisfacen las siguientes leyes de la mecánica de los agujeros negros:

- Ley Cero - la gravedad superficial K_s es constante en el horizonte de un agujero negro estacionario.
- Primera Ley - los cambios en masa M , área del horizonte, momento angular J y carga eléctrica Q del agujero negro estacionario más general (Kerr-Newman $\leftrightarrow (M, Q, J)$) \supset Reissner-Nordström $\leftrightarrow (M, Q)$ \supset Schwarzschild $\leftrightarrow M$) están relacionados entre sí a través de

$$dM = K_s \frac{dA_h}{8\pi} + \omega_h dJ + \Phi_e dQ ,$$

donde ω_h es la velocidad angular en el horizonte y Φ_e el potencial electrostático.

- Segunda ley - el área del horizonte nunca decrece en procesos dinámicos (clásicos), $\Delta A_h \geq 0$.
- Tercera ley - es imposible lograr que $K_s \rightarrow 0$ a través de un proceso físico.

Evidentemente, la numeración se les eligió para resaltar el paralelismo perfecto con las leyes familiares de la termodinámica:

- Ley Cero - la temperatura T es una constante en todo los puntos de un cuerpo en equilibrio térmico.
- Primera Ley - $dE = dC - dW$

$$= \underbrace{T dS}_{\text{calor}} - \underbrace{p dV + \omega dJ + \Phi_e dQ + \dots}_{\text{trabajo}}$$

entropía \uparrow
- segunda ley - La entropía nunca decrece en procesos dinámicos, $\Delta S \geq 0$.

- Tercera Ley - Es imposible alcanzar $T=0$ en un proceso físico (\leftrightarrow cuando $T \rightarrow 0$ la entropía tiende a una constante, usualmente cero).

La transcripción entre estos 2 conjuntos de leyes identifica a E con M , lo cual tiene perfecto sentido físico, y requiere además que identifiquemos a $S = \frac{\alpha}{8\pi} A_h$ y $T = \frac{1}{\alpha} K_s$ como la entropía y temperatura del agujero negro, con α alguna constante de proporcionalidad.

La identificación $S \propto A_h$ fue argumentada por Bekenstein, quien, en base en experimentos pensados, propuso que la 2a. ley de la termodinámica debía extenderse en presencia de agujeros negros a una segunda Ley Generalizada de la Termodinámica,

$$\Delta S_{\text{tot}} \equiv \Delta S_{\text{BH}} + \Delta S_{\text{ordinaria}} \geq 0.$$

↑ entropía de agujero negro ($\propto A_h$)

Un obstáculo importante, por supuesto, es que clásicamente los agujeros negros son incapaces de emitir radiación, de

modo que resulta difícil creer que pudiera asignársele una temperatura verdaderamente física.

Pero a partir de un cálculo con teoría cuántica de campos libre en el fondo curvo del agujero negro, Hawking mostró que a nivel cuántico el agujero en verdad emite radiación térmica (que puede entenderse como asociada a un fenómeno de creación de pares y tunelaje en el horizonte), de tal modo que inequívocamente debe asignársele una

$$T_H = \left(\frac{\hbar}{k_B c^3} \right) \frac{K_S}{2\pi}$$

Temperatura de Hawking

Esto a su vez fija el coeficiente de proporcionalidad en

$$S_{BH} = \left(\frac{k_B c^3}{\hbar} \right) \frac{A_h}{4G_N}$$

Entropía de Bekenstein-Hawking

(trabajaremos por supuesto con unidades donde $k_B = \hbar = c = 1$).
cte. de Boltzmann ↗

Si bien estos resultados evidentemente no fueran deducidos utilizando una teoría cuántica de la gravedad, se cree que son confiables, porque solo requieren el uso

de teoría cuántica de campos en regiones del espacio-tiempo que no están altamente curvados (esto incluye al horizonte si el agujero negro es grande).

El hecho de que los agujeros negros tengan una enorme entropía (p.ej., para un agujero negro de Schwarzschild con masa igual a la del sol, $S_{\text{BH}} \sim 10^{77} \sim 10^{20} S_{\text{sol}}!$), nos hace pensar que, a pesar de que clásicamente un agujero negro estacionario parece ser un estado único de la geometría (caracterizado en 3+1 dim por M, J, Q), cuánticamente debe existir una cantidad gigantesca de estados microscópicos ($N \sim e^{S_{\text{BH}}}$) compatibles con las propiedades macroscópicas dadas.

Desde los 70's se considera entonces como un reto muy importante para cualquier teoría que pretenda dar una descripción cuántica de la gravedad el poder reproducir S_{BH} (o su generalización a teorías de gravedad con más derivadas: entropía de Wald) a través de un conteo explícito en mecánica estadística cuántica.