implica que el estado de mínima energía debe satisfacer

$$[\Phi^e, \Phi^{e'}] = 0 \quad \forall \quad e, e'.$$

Estas condiciones tienen más de una solución, así que

MSYM tiene más de 1 vacío:

- La opción más obvia es simplemente

$$\langle \Phi^e \rangle = 0 \quad \forall \quad e = 1, 2, \cdots, 6.$$

Este vacío preserva todas las simetrías de la teoría, y se conoce como "vacío superconforme", por razones que entenderemos un poco más adelante.

- La posibilidad restante es una familia de vacíos con

$$\langle \Phi^e \rangle \neq 0 \quad \text{para al menos un valor de } e,$$

y evidentemente con los distintos Φ^e conmutando.

En este caso, la invariancia de norma se ve reducida (rota) por el mecanismo de Higgs. Esta familia de vacíos se conoce como la "rama de Coulomb" de la teoría.

La mayor parte del tiempo, cuando hablemos de "el vacío de MSYM" nos referiremos al que preserva las simetrías.

L7: 06/09/16

El "super" en el nombre de la teoría se debe por supuesto al hecho de que posee supersimetría, es decir, es invariante bajo transformaciones que mezclan entre sí a los campos bosónicos y fermiónicos.

En la presentación (9+1)-dimensional de la teoría, donde hay solo 2 campos $A_M(x)$ y $\Psi(x)$, la transformación en cuestión es simplemente

era importante que $\Psi \in$ rep. adjunta

$$\delta A_M(x) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\jmath}\,\Gamma_M \Psi(x) \equiv \bar{\jmath}\,[Q, A_M(x)],$$

$\Gamma^{M}\Gamma^{N}$, antisimetrizado

$$\delta\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} F_{MN}(x)\,\Gamma^{MN}\jmath \equiv \{Q, \Psi(x)\}\,\jmath,$$

donde $\jmath$ (dseda), el parámetro infinitesimal constante de la transformación, es un espinor de Majorana-Weyl en 9+1 dimensiones (que tiene entonces 16 componentes reales).

En el segundo paso hemos definido un operador Q, también espinorial, que genera la transformación, y se conoce como la supercarga $(\phi(x) \to \exp(i\jmath Q)\phi(x)\exp(-i\jmath Q))$.

La teoría se llama SYM $\mathcal{N}=1$ porque hay solo 1 supercarga (con 16 componentes independientes). En 9+1 dimensiones no se puede tener supersimetría menor a esta.

(Esta es por cierto la misma teoría que figura en la acción efectiva a bajas energías de la teoría de cuerdas tipo I y heteróticas, salvo que el grupo de norma allá es distinto, $SO(32)$ ó $E_8 \times E_8$.)

Al descender a MSYM en 3+1 dimensiones, hemos dicho ya que cada espinor de Majorana-Weyl en 9+1 se descompone en 4 espinores de Weyl en 3+1, así que obtenemos $\boxed{4 \text{ supercargas}}$ Q^f_α $f = 1,2,3,4$

$$Q \equiv \begin{pmatrix} Q^1 \\ Q^2 \\ Q^3 \\ Q^4 \end{pmatrix}$$

en el nuevo lenguaje (manteniéndose por supuesto en 16 el número total de componentes independientes).

Esto explica el nombre de SYM $\mathcal{N}=4$. La designación de MSYM, "máximamente supersimétrica", se debe a que no es posible agregar más supercargas sin involucrar a la gravedad (lo cual requiere que la supersimetría sea una transformación local en vez de global, y da lugar a las teorías conocidas como supergravedad).

En lenguaje (3+1)-dimensional, la supersimetría opera de la siguiente forma:

parámetro espinorial $\sim \gamma^{e}_{ff'}$

$$\delta \Phi^{e}(x) = \bar{\epsilon}^{f} C^{e}_{ff'} \psi^{f'}(x) \equiv \bar{\epsilon}^{f} [Q^{f}, \Phi^{e}(x)],$$

$$\delta \psi^{f}(x) = F^{+}_{\mu\nu}(x)\, \sigma^{\mu\nu} \epsilon^{f} + \underbrace{[\Phi^{e}(x), \Phi^{e'}(x)]\, i\sigma^{2} C^{ee'}_{ff'}}_{\sim (\gamma^{e}\gamma^{e'})_{ff'}} \epsilon^{f'}$$

$F^{+}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} + \tilde{F}_{\mu\nu})$, $\quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}[\sigma^{\mu}, \sigma^{\nu}]$

$$\equiv \{Q^{f'}, \psi^{f}\} \epsilon^{f'},$$

$$\delta \bar{\psi}^{f}(x) = \bar{\epsilon}^{f'} C^{e}_{f'f}\, \bar{\sigma}^{\mu} D_{\mu} \Phi^{e}(x) \equiv \bar{\epsilon}^{f'} \{Q^{f'}, \bar{\psi}^{f}\},$$

$$\delta A_{\mu}(x) = \epsilon^{f} \sigma_{\mu} \bar{\psi}^{f}(x) \equiv \epsilon^{f} [Q^{f}, A_{\mu}(x)].$$

Notamos aquí que todos los campos de la teoría están emparentados entre sí a través de la supersimetría, es decir, forman un solo "multiplete", conocido naturalmente como el multiplete vectorial $\mathcal{N}=4$. Es por esto que Φ^{e} y ψ^{f} deben ser campos adjuntos y sin masa.

Las teorías supersimétricas con posible relevancia para fenomenología más allá del Modelo Estándar (del tipo que se busca en el LHC) tienen solo $\mathcal{N}=1$ en

3+1 dimensiones, es decir, una sola supercarga Q (que es un espinor de Weyl, con 4 componentes independientes). En ese caso, cada campo está emparentado con otro cuyo espín difiere por $1/2$, que llamamos su superpareja.

En teorías con supersimetría "extendida", $\mathcal{N}>1$, hay más supercargas y por tanto más de una manera de "rotar" a una nueva superpareja. Es por esta razón que los multipletes son más grandes. El contenido de MSYM puede describirse alternativamente como

1 multiplete vectorial $\mathcal{N}=4$ (A_μ, ψ^f, Φ^e) = 1 multiplete vectorial $\mathcal{N}=1$ (A_μ, ψ^1) + 3 multipletes "quirales" $\mathcal{N}=1$ sin masa $(\Phi^1, \Phi^2, \psi^2), (\Phi^3, \Phi^4, \psi^3), (\Phi^5, \Phi^6, \psi^4)$

$$= 1 \text{ multiplete vectorial } \mathcal{N}=2$$
$$(A_\mu, \psi^1, \psi^2, \Phi^1, \Phi^2)$$
$$+ 1 \text{ ``hipermultiplete'' } \mathcal{N}=2$$
$$(\Phi^3, \Phi^4, \Phi^5, \Phi^6, \psi^3, \psi^4).$$

Las teorías con $\mathcal{N}\geq 2$ NO son buenos candidatos para fenomenología más allá del Modelo Estándar, porque no son quirales, y el Modelo Estándar sí lo es. Pero debemos recordar que aquí NO estamos buscando al Modelo Estándar, sino una prima manejable de QCD.

8:15/10/20

En las reglas de Feynman para cualquier teoría, los lazos de fermiones van acompañados de un signo menos (porque los campos en cuestión satisfacen relaciones de anticonmutación). Dado que en las teorías supersimétricas se tiene una sincronización entre los campos fermiónicos y bosónicos y sus acoplamientos, podemos obtener cancelaciones de las contribuciones de lazos, y en particular, de las divergencias UV.

En el caso de MSYM, al calcular funciones de correlación de los campos básicos $A_\mu(x), \psi^f(x), \Phi^e(x)$

¡¡no se encuentra divergencia UV alguna: la teoría es finita !! (Aunque para operadores compuestos sí se necesitan Z's).
hay divergencias UV que dan lugar a "dimensiones anómalas"

Por esta razón, el proceso de renormalización NO introduce dependencia de escala alguna, y se tiene

$$\beta(g_{YM}) \equiv \mu \frac{dg_{YM}}{d\mu} = -\frac{g_{YM}^3}{4\pi^2}\left(\frac{11}{12}N_c - \frac{1}{6}n_f N_c - \frac{1}{24}n_e N_c\right)$$

de espinores de Weyl en rep. adjunta: 4

de escalares reales: 6

$$= -\frac{g_{YM}^3}{4\pi^2}N_c\left(\frac{11}{12} - \frac{8}{12} - \frac{3}{12}\right) = 0,$$ cierto

a todo orden en la expansión perturbativa, e incluso a nivel no perturbativo. La constante de acoplamiento g_{YM} NO corre con la energía (así que no existe un análogo de Λ_{QCD}), ¡¡y la teoría es invariante bajo reescalamientos incluso a nivel cuántico!!

Cualquier teoría de campos relativista tiene como simetría al grupo de Poincaré = Lorentz SO(3,1) + Traslaciones, con

$(x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu)$ $(x^\mu \to x^\mu + a^\mu)$

generadores $J_{\mu\nu}$ (3 rotaciones y 3 empujones) y P_μ (4 translaciones) que satisfacen

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\rho}] = -i(\eta_{\mu\lambda}J_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho}J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\rho}J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}J_{\mu\rho})$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[J_{\mu\nu}, P_\rho] = -i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu)$$

($\longleftrightarrow P_\mu$ transforma como vector bajo Lorentz)

y cuyo efecto sobre los operadores (básicos o compuestos) es

$$[P_\mu, \mathcal{O}(x)] = i\overset{\text{traslada } x}{\partial_\mu}\mathcal{O}(x),$$

$$[J_{\mu\nu}, \mathcal{O}(x)] = [i\underbrace{(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)}_{\text{rota } x} + M_{\mu\nu}]\mathcal{O}(x)$$

Matriz en alguna rep. de Lorentz (actúa sobre índices espaciotemporales de $\mathcal{O}$)

Si los **reescalamientos** o **dilataciones** $x^\mu \to s x^\mu$ ($s \in \mathbb{R}^+$) son también una simetría, tenemos un generador D para estas tranformaciones, tal que

P tiene dimensión 1 J tiene dimensión 0

$$[D, P_\mu] = -iP_\mu, \quad [D, J_{\mu\nu}] = 0,$$

y conviene trabajar con una base de operadores que tengan un eigenvalor definido Δ bajo D, conocido como su **dimensión de escalamiento**, miércoles, 14 de marzo de 2012 10:45 a.m.

$$[D, \mathcal{O}(x)] = i(-\Delta + \underbrace{x^\mu \partial_\mu}_{\text{rescala a } x})\mathcal{O}(x),$$

lo cual equivale a decir que bajo $x^\mu \to s x^\mu$ se tiene

$$\mathcal{O}(x) \to \mathcal{O}'(x) = s^\Delta \mathcal{O}(sx) .$$

Las teorías relativistas invariantes bajo dilataciones normalmente son invariantes también [ver p.ej. 1302.0884] bajo las llamadas transformaciones conformes especiales

$$x^\mu \to \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b_\nu x^\nu + b^2 x^2} ,$$

← caracterizadas por un parámetro vectorial b^μ

cuyos 4 generadores K_μ satisfacen

$$[K_\mu, K_\nu] = 0$$

$$[J_{\mu\nu}, K_\lambda] = -i(\eta_{\mu\lambda} K_\nu - \eta_{\nu\lambda} K_\mu)$$

($\leftrightarrow K_\mu$ transforma como vector bajo Lorentz)

$$[P_\mu, K_\nu] = 2iJ_{\mu\nu} - 2i\eta_{\mu\nu} D$$

$$[D, K_\mu] = iK_\mu .$$

K tiene dimensión -1

Como podemos ver, las relaciones de conmutación de los 15 generadores $(P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu)$ cierran entre sí, y forman lo que se conoce como el álgebra conforme, que codifica la tabla de multiplicación del llamado grupo conforme.

Definiendo

$$J_{\mu\nu} \equiv J_{\mu\nu}, \quad J_{\mu 4} \equiv \frac{1}{2}(K_\mu - P_\mu),$$

$$J_{4-1} \equiv D, \quad J_{\mu -1} = \frac{1}{2}(K_\mu + P_\mu),$$

es fácil verificar que los J_{MN} (con $M,N = -1,0,1,2,3,4$) satisfacen relaciones de conmutación idénticas a las de los $J_{\mu\nu}$ pero con $\eta_{\mu\nu} \to \eta_{MN} = \mathrm{diag}(-1,-1,1,1,1,1)$. En otras palabras, el grupo conforme en 3+1 dim es isomorfo al grupo $SO(4,2)$ (o, si la teoría contiene fermiones, al grupo $\mathrm{Espin}(4,2) = SU(2,2)$). Si hacemos una rotación de Wick para pasar a 4 dimensiones euclideanas, el grupo de Lorentz se convierte en $SO(4)$, y el grupo conforme en $SO(5,1)$. De manera similar, para una teoría definida en $(d-1)+1$ dimensiones, el grupo de Lorentz es $SO(d-1,1)$ y el conforme $SO(d,2)$ (en versión euclideana, $SO(d)$ y $SO(d+1,1)$, respectivamente).

Las teorías cuánticas de campos invariantes bajo el grupo conforme se llaman teorías de campos conformes o teorías conformes, que se abrevia CFT por las siglas en inglés. MSYM es un ejemplo interactuante, pero existen otros (con diversas cantidades de supersimetría y en diferentes números de dimensiones). Como vimos en las pp. 7-10, las CFTs son muy importantes porque gobiernan el comportamiento a ultra-altas energías de las teorías de campo que están bien definidas (a través de un punto fijo UV del grupo de renormalización), y también, en algunos casos, su comportamiento a ultra-bajas energías (a través de un punto fijo IR). QCD es un ejemplo de lo primero, y algunos sistemas de materia condensada, de lo segundo. Las teorías de campo genéricas pueden entenderse como deformaciones de una CFT.

Conviene tener una definición más conceptual e intuitiva de las transformaciones conformes. Para ello, supongamos que nuestra teoría de campos está definida sobre un espacio con métrica $g_{\mu\nu}(x)$. Definimos una transformación de Weyl como un reescalamiento local de la métrica,

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)\, g_{\mu\nu}(x)$$

← Aquí las distancias propias sí cambian

(sin que las coordenadas cambien). Recordando que bajo una reparametrización $x \to x'(x)$ la métrica cambia

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu}\, g_{\lambda\rho}(x) \,,$$

definimos una reparametrización (o isometría) conforme como aquella bajo la cual

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \omega^2(x)\, g_{\mu\nu}(x) \,.$$

← Aquí las distancias propias NO cambian

En este caso, el cambio en la métrica claramente se puede cancelar con una transformación de Weyl con $\Omega(x) = \omega^{-1}(x)$, y el efecto neto es precisamente lo que llamamos una transformación conforme:

$$\text{Transformación Conforme} \equiv \underset{\Omega(x)=\omega^{-1}(x)}{\text{Weyl}} \circ \underset{\omega(x)}{\text{Reparametrización Conforme}} \,.$$

$$x \longrightarrow x'(x)$$

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x)$$

L8: 02/09/16 (~15min)

Estas transformaciones se llaman conformes porque a pesar de que sí cambian las distancias propias, lo hacen solo por un reescalamiento local, de modo que NO modifican los ángulos (generalizados) entre los vectores, $\cos(\sphericalangle(v,w)) = \frac{v\cdot w}{\sqrt{v\cdot v}\sqrt{w\cdot w}}$, preservando las formas.

Muchas personas (en especial los relativistas) llaman "transformaciones conformes" a las transformaciones que aquí hemos llamado "de Weyl". Si la teoría es invariante bajo reparametrizaciones arbitrarias, ambos conceptos son prácticamente idénticos.

En el caso de mayor interés para nosotros, donde la teoría de campos vive en un espacio plano, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, es obvio que son conformes todas las transformaciones de Poincaré (porque son isometrías, $\omega(x)=1$), y las dilataciones $x^\mu \to x'^\mu = s x^\mu$ (con $\omega(x) = 1/s$). Es fácil comprobar que las transformaciones conformes especiales,

$$x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2 b_\nu x^\nu + b^2 x^2},$$

también merecen el adjetivo de conformes, con

$$\omega(x) = 1 + 2b\cdot x + b^2 x^2 .$$

Trabajando a nivel infinitesimal, $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$, sabemos que el cambio en la métrica sería

en general — para reparametrización conforme

$$\delta_\epsilon g_{\mu\nu}(x) = \nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu = (\omega^2(x) - 1) g_{\mu\nu}(x)$$

contrayendo ambos lados con $g^{\mu\nu}$

$$2\nabla_\rho \epsilon^\rho = (\omega^2(x) - 1)\, d$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla_\mu \epsilon_\nu + \nabla_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \nabla_\rho \epsilon^\rho g_{\mu\nu}}$$

Ec. de Killing conforme

así que en el fondo plano, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, las transformaciones conformes infinitesimales están parametrizadas por $\epsilon^\mu(x)$ que satisfacen

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \epsilon^\rho .$$

Para $d=2$ existen (a este nivel infinitesimal) infinitas soluciones, pero cuando $d>2$ las soluciones son a lo más cuadráticas en x, y se agotan con las versiones infinitesimales de las transformaciones finitas que ya hemos descrito:

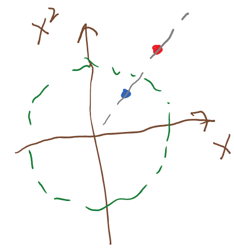
$$\epsilon^\mu = a^\mu \quad (\text{cte.}) \qquad \text{Translaciones}$$

$$\epsilon^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu \quad (\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \text{ cte.}) \qquad \text{Lorentz}$$

$$\epsilon^\mu = \delta s\, x^\mu \quad (\delta s \text{ cte.}) \qquad \text{Dilataciones}$$

$$\epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2 b\cdot x\, x^\mu \quad (b \text{ cte.}) \qquad \text{Especiales}$$

Estas son entonces todas las transformaciones conformes conectadas con la identidad. Pero una novedad es que también es conforme la inversión



$$I : x^\mu \to x'^\mu = \frac{x^\mu}{x^2} \quad (\text{con } \omega(x) = x^2),$$

que es una transformación discreta (tal que $I^2 = 1$), claramente NO conectada con la identidad, y no contenida por tanto en $SO(d,2)$. (Análogamente, podemos recordar que el grupo de Lorentz completo en 3+1 incluye a la paridad P e inversión temporal T además de la componente restringida $SO^+(3,1)$.)

El grupo conforme es de hecho el grupo más pequeño que incluye a Poincaré y la inversión.

Podemos notar que tanto la inversión como las transformaciones conformes especiales mapean a algunos puntos al infinito, así que en sentido estricto, la acción del grupo conforme está bien definida no sobre Minkowski, sino sobre Minkowski + puntos en infinito. Con esto concluimos por ahora nuestra presentación de las teorías conformes, pero tendremos más que decir en el capítulo 2.

9: 20/10/20

Además de que MSYM es invariante bajo Poincaré $\subset$ Conforme, sabemos ya que es invariante bajo transformaciones generadas por las 4 supercargas Q^f ← rep fundam. de $SU(4)$ $f=1,2,3,4$ (y sus conjugados complejos $\bar{Q}_f$ ← rep antifundamental). Estos generadores fermiónicos son espinores de Weyl que por definición satisfacen las relaciones de anticonmutación

$$\boxed{\{Q^f_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta f'}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu \delta^f_{f'}} \qquad (\text{"}Q\text{'s} \sim \sqrt{P}\text{"})$$

$$\{Q^f_\alpha, Q^{f'}_\beta\} = 0 \qquad (\leftrightarrow \{\bar{Q}_{\dot\alpha f}, \bar{Q}_{\dot\beta f'}\} = 0)$$

$$[P^\mu, Q^f_\alpha] = 0 \qquad (\leftrightarrow [P^\mu, \bar{Q}_{\dot\alpha f}] = 0)$$

[ver p.ej. Bailin & Love, Wess & Bagger, Terning o Sohnius] ← Physics Reports bloque 2x2 de $\frac{1}{4}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]$ en base de Weyl

$$\boxed{[J^{\mu\nu}, Q^f_\alpha] = (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q^f_\beta}$$

(es decir, cada Q^f transforma como espinor izquierdo)

$$\equiv \frac{1}{4}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu - \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)$$

$\sigma^\mu \equiv (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$

$\bar{\sigma}^\mu \equiv (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$

$$\left(\leftrightarrow [J^{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}f}] = (\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}{}^{\beta}\bar{Q}_{\dot{\beta}f}\right).$$

Las relaciones de (anti) conmutación entre los generadores bosónicos o "pares" $P_\mu, J_{\mu\nu}$ y fermiónicos o "impares" $Q^f, \bar{Q}_f$ claramente cierran, y tenemos entonces una superálgebra (conjunto de generadores pares/impares (bosónicos/fermiónicos) —álgebra "gradada"— que satisfacen [par, par] = par, [par, impar] = impar, {impar, impar} = par), que llamamos super-Poincaré.

Al reincorporar a D y K_μ al análisis, para cerrar el álgebra se requieren nuevos generadores fermiónicos $S_{\alpha f}$ y $\bar{S}^f_{\dot{\alpha}}$ (índices espinoriales especifican $[J_{\mu\nu}, \cdot]$) conocidos como supercargas conformes. Y figurarán los generadores bosónicos R_A $(A=1,2,\dots,15)$ en el álgebra de $SU(4) \simeq SO(6)$, que antes habíamos identificado como simetría global interna de la teoría. Estos generadores rotan a los Q^f_α entre sí (porque rotan a los ψ^f), y se conocen como cargas R.

(En teorías $\mathcal{N}=1$, la simetría R es solo el U(1) que rota la fase de Q.)

Los (anti)conmutadores no nulos son: Q tiene dimensión 1/2

$$[D, Q^f_\alpha] = -\frac{i}{2} Q^f_\alpha \quad \left(\leftrightarrow [D, \bar{Q}_{\dot\alpha f}] = -\frac{i}{2}\bar{Q}_{\dot\alpha f}\right)$$

$$[K^\mu, Q^f_\alpha] = (\sigma^\mu)_\alpha{}^{\dot\beta}\bar{S}^f_{\dot\beta} \quad \left(\leftrightarrow [K^\mu, \bar{Q}_{\dot\alpha f}] = (\bar\sigma^\mu)_{\dot\alpha}{}^{\beta} S_{\beta f}\right)$$

S tiene dimensión -1/2

$$[D, S_{\alpha f}] = +\frac{i}{2} S_{\alpha f} \quad \left(\leftrightarrow [D, \bar{S}^f_{\dot\alpha}] = +\frac{i}{2}\bar{S}^f_{\dot\alpha}\right)$$

$$\{S_{\alpha f}, \bar{S}^{f'}_{\dot\beta}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} K_\mu \delta^f_{f'} \quad \left(\text{análogo a } \{Q,\bar{Q}\} \sim \sigma\cdot P\right)$$

$$[P^\mu, S_{\alpha f}] = -(\sigma^\mu)_\alpha{}^{\dot\beta}\bar{Q}_{\dot\beta f} \quad \left(\leftrightarrow [P^\mu, \bar{S}^f_{\dot\alpha}] = -(\bar\sigma^\mu)_{\dot\alpha}{}^{\beta} Q^f_\beta\right)$$

$$\{S_{\alpha f}, S_{\beta f'}\} = 0 = \{Q^f_\alpha, \bar{S}^{f'}_{\dot\beta}\} \quad \left(\leftrightarrow \{\bar{Q}_{\dot\alpha f}, S_{\beta f'}\} = 0\right)$$

$$\{Q^f_\alpha, S_{\beta f'}\} = \varepsilon_{\alpha\beta}\left(\delta^f_{f'} D + \sum_A R_A{}^f{}_{f'}\right) + \frac{1}{2}\delta^f_{f'} J_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}_{\alpha\beta}$$

$$[R_A, R_B] = i f_{ABC} R_C$$ constantes de estructura de SU(4)

SU(4) es simetría interna

$$[R_A, P_\mu] = 0 = [R_A, J_{\mu\nu}] = [R_A, K_\mu] = [R_A, D]$$

$$[R_A, Q^f] = R_A{}^f{}_{f'} Q^{f'} \quad \left(\leftrightarrow [R_A, \bar{Q}_f] = R^{*}_{Af}{}^{f'}\bar{Q}_{f'}\right)$$

rep fundamental de SU(4)

$$[R_A, \bar{S}^f] = R_A{}^f{}_{f'}\bar{S}^{f'}, \quad \left(\leftrightarrow [R_A, S_f] = R^{*}_{Af}{}^{f'} S_{f'}\right)$$

Esta estructura se conoce como el álgebra superconforme $\mathcal{N}=4$ en 3+1 dimensiones. Vemos que tiene como subálgebras bosónicas a $SO(4,2) \simeq SU(2,2)$ y a

$SU(4)_R \simeq SO(6)_R$, que conmutan entre sí. La lista completa de relaciones de (anti)conmutación se acomoda en el patrón

multiplicar como matriz para saber (anti)conmutadores

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{par} & \text{impar} \\ \hline \text{impar} & \text{par} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} P_\mu\ K_\mu\ J_{\mu\nu}\ D & Q^f_\alpha\ \bar{S}^f_{\dot\alpha} \\ \hline \bar{Q}_{\dot\alpha f}\ S_{\alpha f} & R_A \end{array}\right),$$

y el supergrupo completo se denota $\underbrace{SU(2,2}_{\simeq SO(4,2)}|\,4)$. $\leftarrow \mathcal{N}$

El subgrupo $SU(4)_R \simeq SO(6)_R$ (Espín(6)) se conoce como simetría R, y como dijimos, se caracteriza por ser un grupo de simetría global interna que rota las supercargas (y supercargas conformes) entre sí. Su aparición no es casual. Sabemos que M SYM tiene secretamente su origen en SYM $\mathcal{N}=1$ en 9+1 dim, y al hacer la reducción dimensional a 3+1 dim el grupo de Lorentz se descompone de acuerdo con

$$SO(9,1) \longrightarrow SO(3,1) \times SO(6).$$

Dado que solo retenemos los modos de Kaluza-Klein que no varían en las direcciones ocultas, el $SO(6)$ que representa la simetría bajo rotaciones en esas direcciones se convierte en una simetría interna global de la teoría en 3+1 dim.

MSYM tiene otra propiedad muy especial. Para presentarla, conviene notar primero que los 2 acoplamientos g_{YM}^2 y Θ_{YM} de la teoría pueden agruparse en 1 solo acoplamiento complejo

$$\tau = \frac{\Theta_{YM}}{2\pi} + i\frac{4\pi}{g_{YM}^2},$$

de tal forma que

$$\mathrm{Tr}\left\{-\frac{1}{2g_{YM}^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\Theta_{YM}}{16\pi^2}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right\}$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\,\mathrm{Im}\left[\tau\,\mathrm{Tr}\left\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\right\}\right].$$

Ahora, tomando un vacío no conforme de MSYM (en la "rama de Coulomb") con $\langle\Phi^e\rangle = \mathrm{diag}(v_1^e, v_2^e, \ldots, v_{N_c}^e) \neq 0$ podemos romper espontáneamente

ctes.

$$\underset{N_c^2-1 \text{ generadores}}{SU(N_c)} \longrightarrow \underbrace{U(1)\times U(1)\times \ldots \times U(1)}_{N_c-1}, \qquad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & e^{i\theta_2} & \\ 0 & & \ddots \; e^{i\theta_N} \end{pmatrix}$$