Correspondencia Holográfica: Ejercicios

1. a) Considera un espacio anti-de Sitter (AdS) 5-dimensional con radio de curvatura L, en coordenadas de Poincaré, usando la coordenada radial invertida z (en lugar de la radial $u = 1/z$). La frontera de este espacio se encuentra en $z = 0$ ($u \to \infty$). Cuando usamos este espaciotiempo AdS para geometrizar el 'grupo de renormalización' de una CFT en su estado vacío, según lo que explicamos en clase, ¿qué valores de z corresponden a la región de altas energías (UV) de la CFT? ¿Y cuáles valores de z corresponden a la región de bajas energías (IR)?
b) Calcula la distancia propia en AdS para una trayectoria puramente radial (es decir, a lo largo de z) que se extiende desde z_1 hasta z_2.
c) ¿Cómo se comporta esa distancia si $z_1 \to 0$ ($u_1 \to \infty$)? ¿Y si $z_2 \to \infty$ ($u_2 \to 0$)?
d) Para un rayo de luz viajando a lo largo de una trayectoria puramente radial, calcula el tiempo total, en términos de la coordenada t, que toma en llegar desde z_1 hasta z_2. Muestra que ese tiempo es finito aún si z_1 se ubica en la frontera de AdS.
e) Considera ahora una cuerda abierta gigantesca, que se extiende (no necesariamente con un perfil puramente radial) desde z_0 hasta $z \to \infty$. Conviene parametrizarla eligiendo $\tau = t$ y $\sigma = z$ (elección que es un ejemplo particular de lo que se conoce como la norma estática), y describiendo su posición en las coordenadas $\vec{x} \equiv (x^1, x^2, x^3)$ usando las funciones de encaje $\vec{X}(t, z)$. Escribe la acción de Nambu-Goto para esta cuerda, que es completamente análoga a una cuerda de violín infinita, solo que vive en AdS en lugar de en Minkowski.
f) Calcula la ecuación de movimiento para la cuerda.
g) En el caso particular donde la cuerda es puramente radial (solo se extiende a lo largo de z) y está permanentemente en reposo en el punto $\vec{x} = \vec{x}_0$, ¿qué forma toma $\vec{X}(t, z)$? Muestra que esta es una solución de la ecuación de Nambu-Goto que obtuviste antes.
h) Calcula la energía E (con respecto a t) del segmento de esta cuerda que se extiende desde z_1 hasta z_2. ¿Cómo se comporta E si $z_2 \to \infty$? ¿Y si $z_1 \to 0$?

2. a) Del análisis que hizo 't Hooft de las teorías no abelianas (incluyendo a QCD) con N_c grande, se anticipa que si solo hay gluones (o campos que son matrices $N_c \times N_c$ igual que ellos), la descripción en términos de superficies involucra solo a cuerdas cerradas, y que agregar quarks (o campos que son columnas con N_c entradas) corresponden a agregar cuerdas abiertas. En la correspondencia ocurre exactamente eso, y en particular, la cuerda que examinaste en el ejercicio 1, que se extiende desde la frontera de AdS $z = 0$ hasta $z \to \infty$, resulta ser dual a un *quark* infinitamente pesado. Para darle una masa grande pero finita, le permitimos a la cuerda abierta no extenderse hasta la frontera, sino terminar en $z = z_m$ (donde necesariamente debe existir entonces una D-brana). Directamente a partir de tu resultado para el inciso 1h), puedes deducir la energía de tal cuerda cuando está en reposo, es decir, la masa m del quark dual (que dependerá del valor de z_m).
b) Un antiquark aislado y estático es una cuerda igual que la anterior, pero con o-

rientación opuesta. Si ponemos a un quark y un antiquark (cada uno con masa m muy grande) y los mantenemos fijos a una distancia d (p.ej., el quark en $x^1 = -d/2$ y el antiquark en $x^1 = d/2$), esperamos que interactúen a través del campo gluónico, y tengamos entonces una configuración con menor energía que cuando los teníamos por separado. El potencial del par, $V(d)$, se define como la energía del sistema conjunto menos la de un quark y un antiquark aislados. En la descripción gravitacional, esto corresponde a tener una sola cuerda con *ambos* extremos en $z = z_m$, cuya configuración estática de mínima energía tiene forma de U y se encuentra resolviendo la misma ecuación de movimiento que escribiste en el problema 1 (solo que ahora tenemos condiciones de frontera distintas). Calcula el potencial $V(d)$ (es decir, la *diferencia* entre la energía de la cuerda con forma de U y 2 veces la energía de la cuerda del inciso anterior), en el límite donde los quarks se vuelven infinitamente pesados, $m \to \infty$ (en este límite, cada una de las 2 energías que estás restando diverge, pero su diferencia–que te conviene obtener a nivel del *integrando*–es finita). Si necesitas ayuda, puedes apoyarte en la sección 4 del artículo hep-th/9803002 de Maldacena. Como verás, es una cuenta fácil. Lo que vale las más de 1400 citas que tiene el artículo es la conexión entre el lenguaje de cuerdas y el lenguaje de la teoría de norma.

c) Si nuestra teoría de norma confina, para separaciones grandes entre el quark y el antiquark debemos obtener un potencial lineal, $V(d) = \sigma d$, donde σ es la tensión del tubo de flujo (o 'cuerda de QCD') correspondiente, es decir, su energía por unidad de longitud. El primer fondo gravitacional dual a una teoría que confina fue descrito por Witten en el artículo hep-th/9803131, pero probablemente te será más fácil vislumbrarlo en la ecuación (3.1) del artículo hep-th/0311270 de Sakai y Sugimoto (quienes le agregaron quarks a la teoría confinante de Witten, obteniendo así algo que se parece ya mucho más a QCD). En esa fórmula, U es la coordenada radial, y lo que ocurre al repetir la cuenta del potencial quark-antiquark es que la cuerda no puede descender en el fondo más allá de $U = U_{KK}$. La razón por la cual el potencial es lineal es entonces simplemente que el fondo tiene una especie de piso donde la cuerda se sigue y sigue estirando conforme separamos sus extremos. Por esta razón, la tensión σ del tubo de flujo no es otra cosa que la tensión de una cuerda que en la descripción gravitacional se encuentra a profundidad $U = U_{KK}$ y se extiende puramente a lo largo de x^1. Usando la métrica mencionada, calcula σ.

3. a) Escribe la acción de Nambu-Goto para una cuerda que (como en el problema 3) es infinita, pero ahora vive en el fondo Schwarzschild-AdS en lugar de AdS puro. (La métrica la puedes encontrar en la sección del curso donde hablamos de la correspondencia a temperatura finita y posibles conexiones con el plasma de quarks y gluones.) Muestra que la cuerda estática y puramente radial (vertical en mis dibujos) es una solución. Esto corresponde a un quark en reposo dentro de un plasma de gluones y materia exótica.

b) Si arrastramos al quark a través de este plasma con velocidad constante v, esperamos que el plasma resista el movimiento, ejerciendo una fuerza de arrastre $F_{arrastre}$ sobre el quark. El cálculo para determinar esta fuerza fue hecho por primera vez en la sección 3 (basada en la 2) del artículo hep-th/0605182 de Gubser, obteniendo el resultado (14). Reproduce ese cálculo (que fue hecho simultánemente en la sección 3.3 de hep-th/0605158, que quizás encuentres más amigable). Como podrás ver, es una cuenta en verdad muy corta y sencilla, ¡y a pesar de ello su importancia fue tal que el artículo tiene más de 500 citas!

4. a) Para una CFT 1+1 dimensional fuertemente acoplada, que pueda describirse con un dual gravitacional, usa la fórmula de Ryu y Takayanagi (que mencionamos brevemente en clase) para calcular la entropía de entrelazamiento asociada a un intervalo de longitud ℓ. Te resultará útil saber que, en las coordenadas (t, x, z) que hemos estado utilizando (que se conocen como "coordenadas de Poincaré"), las geodésicas a tiempo t constante que llegan a la frontera $z = 0$ son simplemente semicírculos, $(x - x_0)^2 + z^2 = R^2$. Si necesitas ayuda con el cálculo, puedes apoyarte en la sección 3.4.1 del artículo de revisión arXiv:0905.0932 (y/o en los artículos que ahí se citan). El resultado de inicio es infinito, pero para domesticarlo (es decir, para 'regularizarlo') puedes introducir un corte UV en la CFT, restrigiéndote a escalas de distancia mayores que un número pequeño ϵ. Como consecuencia de lo que respondiste en el inciso 1a), en la descripción gravitacional esto se traduce en hacer como si la frontera de AdS estuviera en $z = \epsilon$, en lugar de $z = 0$.
b) Repite para una CFT en $d + 1$ dimensiones, considerando una región esférica de radio ℓ. Como puedes tú mismo verificar, en este caso las superficies de área mínima son hemisferios, $(\vec{x} - \vec{x}_0)^2 + z^2 = R^2$. Naturalmente, conviene centrar nuestra esfera en el origen, $\vec{x}_0 = 0$, y aprovechar la simetría del problema para usar coordenadas esféricas $(r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-1})$ en lugar de las cartesianas $\vec{x}$. Este cálculo viene en la sección 3.5.2 del mismo artículo arXiv:0905.0932.