¿Qué es la Teoría de Cuerdas?

Tarea 3 — Entregar $\leq$ 13:40 del jueves 24 de noviembre

1. Partícula (y Cuerda) Libre en Fondo Curvo

a) En clase (p. 163) dijimos que, en un espacio (o espaciotiempo) D-dimensional con coordenadas arbitrarias x^μ y métrica $g_{\mu\nu}(x)$, el elemento invariante de volumen es $\int d^D x \sqrt{|\det g_{\mu\nu}(x)|}$. Muestra que esto es cierto, es decir, que bajo un cambio de coordenadas genérico $x \to x'(x)$, la raíz cuadrada $\sqrt{|\det g_{\mu\nu}(x)|}$ transforma justo al revés que $d^D x$.

b) La trayectoria de una partícula relativista en un espaciotiempo D-dimensional se puede describir a través de D funciones $X^\mu(\tau)$, con τ un parámetro arbitrario, cuya dinámica es controlada por la acción $S_{\text{part}} = -m \int d\tau \sqrt{-g_{\mu\nu}(X(\tau))\dot{X}^\mu(\tau)\dot{X}^\nu(\tau)}$, donde $\dot{} \equiv \partial_\tau$. En clase (p. 170a) explicamos que, reconociendo a $h_{\tau\tau}(\tau) \equiv g_{\mu\nu}(X)\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu$ como la métrica *inducida* en el espacio ficticio 1-dimensional parametrizado por τ (es decir, la noción natural de distancia que dicho espacio adquiere por la manera en que el mapeo $X^\mu(\tau)$ lo identifica como la línea de mundo de la partícula en el espaciotiempo), la integral que aparece en S_{part} es simplemente un caso particular del elemento invariante de volumen que vimos en el inciso a), para el caso $D = 1$, y es por eso que calcula la *longitud propia* (o, para ser más exactos, el tiempo propio) total de la línea de mundo (que es, por definición, invariante bajo cambios de coordenadas $\tau \to \tau'(\tau)$).

Cuando hablemos de una cuerda relativista, tendremos que usar no 1 sino 2 parámetros arbitrarios, τ (que esencialmente se refiere al instante en que queremos examinar a la cuerda) y σ (que básicamente se refiere al punto específico de la cuerda que queremos considerar), y la *superficie* trazada en el espaciotiempo por la cuerda en movimiento (su 'hoja de mundo') será descrita por D funciones $X^\mu(\tau, \sigma)$. La acción natural para la cuerda libre, S_{cuer} será por supuesto proporcional al *área* propia total de dicha superficie (que es, por definición, invariante bajo cambios de coordenadas arbitrarios $\tau \to \tau'(\tau, \sigma)$, $\sigma \to \sigma'(\tau, \sigma)$). Imitando el patrón descrito en el párrafo anterior, escribe la forma que debe tener S_{cuer}, en términos de los mapeos X^μ y la métrica del espaciotiempo $g_{\mu\nu}$. Explica tu razonamiento.

c) Con la métrica de Minkowski, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, la acción S_{part} implica que la partícula obedece la ecuación de movimiento $\ddot{X}^\mu = 0$, es decir, su línea de mundo es recta, como esperamos para una partícula libre en un fondo plano. Cuando el espaciotiempo es curvo (o plano pero usando coordenadas no cartesianas), la métrica no es ya $\eta_{\mu\nu}$. Determina la ecuación de movimiento resultante para la partícula, y explica por qué coincide con el resultado físicamente esperado.

2. Cálculos Pendientes con Campos

a) Considera un campo escalar real $\phi(x)$, descrito por la acción $S = \int d^D x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Muestra que al extremizar la acción, la ecuación de Euler-Lagrange resultante es en verdad

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\ ,$$

tal como afirmamos en clase (p. 197).

b) Comprueba que, al utilizar las relaciones de conmutación para los operadores 'de escalera' $\hat{a}_{\vec{p}}$ y $\hat{a}^\dagger_{\vec{p}'}$ (que escribimos en la p. 200), y la descomposición en términos de éstos del operador de campo (en el cuadro de Schrödinger) $\hat{\phi}(\vec{x})$ y su (densidad de) momento canónicamente conjugado $\hat{\pi}(\vec{x})$, en efecto se reproducen las relaciones de conmutación canónicas para $\hat{\phi}(\vec{x})$ y $\hat{\pi}(\vec{x}\,')$ (que escribimos en la p. 199).

c) Muestra que el Hamiltoniano de Klein-Gordon, al ser promovido a operador y reescrito en términos de operadores de escalera, en verdad da el resultado esperado para el conjunto infinito de osciladores armónicos (según escribimos en la p. 201).

d) Usando la llamada fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH)

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}=\hat{B}+[\hat{A},\hat{B}]+\frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]+\frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]]+\ldots$$

(que, si acaso tienes curiosidad, puedes demostrar considerando la función $\hat{F}(\lambda)=\exp(\lambda\hat{A})\hat{B}\exp(-\lambda\hat{A})$ y sus derivadas), comprueba que

$$\hat{a}_{\vec{p}}(t)\equiv\exp(i\hat{H}t)\hat{a}_{\vec{p}}\exp(-i\hat{H}t)=\hat{a}_{\vec{p}}\exp(-iE_{\vec{p}}t)$$

(tal como afirmamos en la p. 207).

3. Expansión Perturbativa y Diagramas de Feynman

Se puede entender mejor la expansión perturbativa para campos interactuantes analizando el ejemplo de un campo en $0+0$ dimensiones. En este caso el 'campo' ϕ es una función definida sobre un solo punto, es decir, es simplemente un número. La 'acción' $S(\phi)$ es entonces una función (y no un funcional) de ϕ, y la 'integral de trayectoria' es una integral ordinaria. Para ser concretos, consideremos la integral

$$I(m,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}d\phi\,\exp\left[-\frac{m^2\phi^2}{2}-\frac{\lambda\phi^4}{4!}\right]\ .$$

a) Suponiendo que λ es pequeña, desarrolla en una serie de Taylor la parte cuártica de la exponencial en $I(m,\lambda)$. Después de intercambiar la integral con la serie, llamémosle $I^{(n)}(m,\lambda)$ al enésimo término en esta expansión (con todo y el factor λ^n correspondiente).

b) Reescribe $I^{(n)}(m,\lambda)$ imitando el procedimiento que vimos en la clase, reemplazando las inserciones de ϕ dentro de la integral por derivadas fuera de la integral respecto a un parámetro auxiliar, J.

c) Realiza la integral que aparece en la expresión que obtuviste en **b)**, completando el cuadrado en la exponencial para reducirla a una integral gaussiana.

d) Diferencía tu resultado de **c)** con respecto a J según te indica la receta que obtuviste en **b)**, para encontrar una expresión explícita para $I^{(n)}(m,\lambda)$ (incluyendo los coeficientes numéricos). Has determinado entonces la serie completa para $I(m,\lambda)$ en potencias del parámetro de perturbación λ.

e) Si quisieras expresar la receta de **b)** de manera pictórica, al estilo de las reglas de Feynman, ¿cuál sería el valor del 'propagador'? ¿Qué tipo de 'vértices' tendrías, y que factor asociarías a cada uno de ellos? Explica por qué en este caso los distintos diagramas que contribuyen a $I^{(n)}(m,\lambda)$ (es decir, que son de orden λ^n,) tienen todos exactamente el mismo valor.

f) En vista de esta última propiedad, la suma sobre los diagramas de orden λ^n es proporcional al número de diagramas. Utiliza el resultado explícito que obtuviste en el inciso **d)** para mostrar (usando la fórmula de Stirling) que, para n grande, el coeficiente numérico de $I^{(n)}(m,\lambda)$ crece como $n!$ (me refiero a la dependencia *dominante*). El número de diagramas en una teoría de campos genérica crece de esta misma manera.

g) El resultado anterior implica que, sin importar cuan pequeño sea λ, eventualmente los términos sucesivos de la expansión perturbativa para $I(m,\lambda)$ empiezan a ser cada vez más y más grandes, así que la serie diverge. Con base en la definición original de $I(m,\lambda)$, explica por qué este no es el resultado correcto (y de hecho, desde esta perspectiva, λ grande es *mejor*). A pesar de ello, para un valor dado de λ, la serie perturbativa hasta un cierto orden n da una buena aproximación del resultado exacto (como puedes fácilmente comprobar, si gustas, de forma numérica, usando Mathematica o Maple).

4. Esbozo de Diagramas de Feynman en QCD

El Lagrangiano de QCD (la teoría que describe las interacciones fuertes) se puede escribir de manera esquemática como

$$\mathcal{L} = -\psi(\partial + m)\psi - \partial A \partial A - gA\psi\psi - gAAA - g^2 AAAA ,$$

donde $A(x)$ es el campo (bosónico, vectorial) *de norma* (el cuadripotencial) que describe a los *gluones* (masa= 0, espín= 1), $\psi(x)$ es el campo (fermiónico, espinorial) que corresponde a los quarks de un solo sabor (masa= m, espín= 1/2), y g es la constante de acoplamiento.

Como dijimos al principio del curso, el hecho de que los quarks están cargados (tanto bajo el electromagnetismo como bajo la fuerza fuerte, que es la que importa aquí) implica que el campo $\psi(x)$ es *complejo*, y describe tanto a los quarks como a los antiquarks.

Si $g \ll 1$, podemos trabajar en una expansión perturbativa, donde a orden más bajo,

$$\hat{A}(x) \sim \int d^3p(e^{ip\cdot x}\hat{a}_{\text{gluón},\vec{p}} + e^{-ip\cdot x}\hat{a}^\dagger_{\text{gluón},\vec{p}}) ,$$

es decir, el operador de campo gluónico crea o aniquila gluones (estamos ignorando el hecho de que en realidad se trata de una matriz 3×3 hermitiana y sin traza), y

$$\hat{\psi}(x) \sim \int d^3p(e^{ip\cdot x}\hat{a}_{\text{quark},\vec{p}} + e^{-ip\cdot x}\hat{a}^\dagger_{\text{antiquark},\vec{p}}) ,$$

es decir, el operador del campo del quark crea antiquarks y aniquila quarks, mientras que su conjugado hermitiano $\hat{\psi}^\dagger(x)$ hace lo contrario (en clase vimos por simplicidad el caso de un campo real, $\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}^\dagger(x)$, donde partícula y antipartícula son el mismo objeto, porque no hay carga alguna con la cual se puedan distinguir).

a) Dibuja los vértices correspondientes a cada término de interacción en $\mathcal{L}$, indicando el factor asociado (en términos de la constante de acoplamiento g), y el nombre de las partículas (o campos) asociadas(os) a cada pata.

b) Si quisieras determinar la amplitud de probabilidad para un proceso de dispersión donde 2 quarks iniciales (que llamaremos 1 y 2) interactúan de alguna manera y producen 2 gluones finales (que llamaremos 3 y 4), ¿qué cantidad (en términos del vacío y operadores de campo) tendrías que calcular en el lenguaje canónico?

c) Dibuja todos los diagramas de Feynman que contribuyen a este proceso, desde orden g^0 hasta orden g^4, utilizando un símbolo diferente para el propagador de un quark y el de un gluón, e indicando en cada diagrama (con el número correspondiente) a qué partícula corresponde cada pata externa.