¿Qué es la Teoría de Cuerdas?

Tarea 2 — Entregar jueves 20 de octubre

1. El Oscilador Armónico y notación de Dirac
a) Recuerda que el Hamiltoniano de un oscilador armónico en una dimensión es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2,$$

donde los operadores de posición y momento satisfacen la relación de conmutación usual, $[\hat{x}, \hat{p}] = i$. Para obtener el espectro de $\hat{H}$ (y, más adelante en el curso, para llevar a cabo la cuantización de un campo escalar), resulta extremadamente útil definir el operador

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) .$$

Determina el conjugado hermítico de este operador, $\hat{a}^\dagger$, y calcula el conmutador $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$.
b) Reescribe el Hamiltoniano usando $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$, reordenando cada término de manera tal que todas las inserciones del operador $\hat{a}^\dagger$ queden a la izquierda de todas las de $\hat{a}$ (esta manera de ordenar es lo que se conoce como 'orden normal').
c) Muestra que si $|\psi\rangle$ es un estado en el cual el oscilador tiene una energía E_ψ perfectamente definida, entonces $\hat{a}|\psi\rangle$ y $\hat{a}^\dagger|\psi\rangle$ son también autoestados de $\hat{H}$, y calcula las energías correspondientes. Con base en tu resultado te será claro por qué a uno de los operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ se le llama 'operador de subida' (o 'de creación') y al otro 'operador de bajada' (o 'de aniquilación').
d) Usando el resultado de los dos incisos anteriores y pidiendo que la energía no pueda ser arbitrariamente negativa, es fácil mostrar que debe existir algún estado, llamémosle $|0\rangle$, tal que $\hat{a}|0\rangle = 0$. Determina la función de onda correspondiente (correctamente normalizada), $\psi_0(x) \equiv \langle x|0\rangle$. La manera más sencilla es partir de $\langle x|\hat{a}|0\rangle = 0$, escribiendo $\hat{a}$ en términos de $\hat{x}$ y $\hat{p}$ y recordando que $\langle x|\hat{p}|0\rangle = -i\partial_x\langle x|0\rangle$, obteniendo así una ecuación diferencial de primer orden para $\langle x|0\rangle$, que resulta fácil de resolver.
e) Usando el resultado de **c)**, determina la energía del estado $|n\rangle \equiv c_n(\hat{a}^\dagger)^n|0\rangle$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, y calcula el valor que debe tener la constante c_n para que $|n\rangle$ esté correctamente normalizado (suponiendo que $|0\rangle$ lo está).

2. Integral de Trayectoria para la Partícula Libre
La acción para la evolución de una partícula libre no relativista en el intervalo de tiempo (t, t') es

$$S[\vec{x}(t)] \equiv \int_t^{t'} L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \int_t^{t'} dt\, \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 .$$

En clase mostramos que la amplitud de que la partícula se propague de $\vec{x}$ a $\vec{x}'$ en el intervalo en cuestión se puede escribir en la forma

$$\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle = \int_{\vec{x}(t)=\vec{x}}^{\vec{x}(t')=\vec{x}'} \mathcal{D}\vec{x}(t)\, e^{iS},$$

donde la integral funcional se define como una integral múltiple,

$$\begin{aligned} \int_{\vec{x}(t)=\vec{x}}^{\vec{x}(t')=\vec{x}'} \mathcal{D}\vec{x}(t)\, e^{iS} \quad &\equiv \quad \mathrm{Lím}_{N\to\infty} \int d^3x_N \cdots d^3x_1 \left(\frac{m}{2\pi i \Delta t}\right)^{3N/2} \\ &\quad \times \exp\left[i \sum_{n=1}^{N} \Delta t\, L(\vec{x}_n, \frac{\vec{x}_n - \vec{x}_{n-1}}{\Delta t}) \right] \ . \end{aligned}$$

a) Calcula la integral sobre $\vec{x}_1$.
b) Usando el resultado anterior, calcula la integral sobre $\vec{x}_2$.
c) Con base en los dos resultados anteriores, conjetura la forma que tendrá el resultado después de haber llevado a cabo las primeras n integrales. Muestra que tu conjetura es correcta, por inducción.
d) Haciendo todas las integrales y tomando el límite $N \to \infty$, determina el propagador $\langle \vec{x}', t' | \vec{x}, t \rangle$. Verifica que coincide con el resultado que obtuvimos en clase (p. 132) usando el método habitual (la llamada 'cuantización canónica').

3. Electromagnetismo en Notación Relativista
Sea $A^\mu(x) \equiv (\Phi(x), \vec{A}(x))$ el campo de norma (cuadripotencial) electromagnético, y $J^\mu(x) \equiv (\rho(x), \vec{J}(x))$ la cuadri(densidad de)corriente.
a) Calcula las componentes independientes de la intensidad de campo *con índices abajo,*

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

en términos de las componentes E^i y B^j de los campos eléctrico y magnético.
Observa que $F_{\mu\nu}$ (y por tanto $\vec{E}$ y $\vec{B}$) es invariante bajo la *transformación de norma*

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + i \exp(i\theta) \partial_\mu \exp(-i\theta)$$

con $\theta(x)$ una función cualquiera. La fase asociada a dos transformaciones sucesivas de este tipo con parámetros θ_1 y θ_2 sería simplemente $\exp(i\theta_1 + i\theta_2)$, así que tenemos un grupo $U(1)$. Este es justamente el grupo de transformaciones $U(1)_{EM}$ del que hablábamos en la tarea anterior.
b) Muestra explícitamente que

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= -4\pi J^\nu, \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0, \end{aligned}$$

son las ecuaciones de Maxwell habituales (en unidades tales que $c = 1$), donde la intensidad de campo dual se define como

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho},$$

con $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ el tensor totalmente antisimétrico tal que $\epsilon^{0123} = +1$.
c) Muestra que las ecuaciones de Maxwell no son consistentes a menos que la carga se conserve, es decir, que $\partial_\mu J^\mu = 0$.
d)Expresa las combinaciones escalares $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ en términos de los vectores $\vec{E}$ y $\vec{B}$.