¿Qué es la Teoría de Cuerdas?

Tarea 1 — Entregar $\leq$ 13:30 del martes 20 de septiembre

1. Análisis dimensional y elección de $\hbar = c = 1$

a) Usando las unidades habituales del sistema internacional (= métrico), construye a partir de la constante de Newton G_N, la constante de Planck $\hbar$, y la velocidad de la luz c, una combinación con unidades de longitud y otra con unidades de masa. Evalúalas en metros y en kilogramos, respectivamente.

b) Si elegimos unidades donde $\hbar = c = 1$, entonces la dimensión de cualquier cantidad física C puede expresarse como una potencia de masa, $[C] = M^d$ (donde $[\ldots]$ quiere decir 'dimensión de ...'), o, equivalentemente, de longitud, $[C] = L^{-d}$. Determina la dimensión (es decir, el exponente d) que corresponde a una aceleración, una fuerza, un momento, una energía, la constante de Newton G_N, una frecuencia, y una acción.

c) En estas unidades, podemos reportar, p.ej., las masas en electronvoltios (1 eV $\equiv$ 1.6×10^{-19} J), y las distancias en electronvoltios inversos (eV^{-1}). Expresado en metros, ¿cuánto es 1 GeV^{-1}?

d) Las partículas fundamentales más pesadas que conocemos (el quark t y los bosones de norma W^+, W^- y Z^0) tienen masas en resposo del orden de $m = 10^2$ GeV. Calcula la velocidad v que debería tener una partícula con esta masa para que su energía sea igual a la escala de Planck, 10^{19} GeV. (¡Recuerda que $v < c$!)

2. El campo electromagnético y la invariancia de norma $U(1)_{EM}$

a) Sea $\Phi(\vec{x}, t)$ cualquier campo con carga eléctrica $q \neq 0$, y por tanto complejo. Como dijimos en clase, su ecuación de movimiento incluye tanto al propio Φ como a sus 4 derivadas $\partial_\mu \Phi \equiv (\partial_0 \Phi, \vec{\nabla}\Phi) \equiv (c^{-1}\partial_t \Phi, \partial_x \Phi, \partial_y \Phi, \partial_z \Phi)$. Bajo la transformación *global* $\Phi(\vec{x}, t) \to \Phi'(\vec{x}, t) \equiv e^{iq\lambda}\Phi(\vec{x}, t)$, obviamente Φ y $\partial_\mu \Phi$ transforman de igual manera (los 5 objetos simplemente se multiplican por la misma fase). Si queremos que la ecuación de movimiento de Φ sea invariante bajo esta transformación, explica por qué no debe entonces incluir términos que involucren factores de Φ^* o $\partial_\mu \Phi^*$ que no estén compensados por correspondientes factores de Φ o $\partial_\mu \Phi$.

b) Si ahora consideramos una transformación *local* $\Phi(\vec{x}, t) \to \Phi'(\vec{x}, t) \equiv e^{iq\lambda(\vec{x},t)}\Phi(\vec{x}, t)$, con $\lambda(\vec{x}, t)$ una función arbitraria, ¿cómo transforman las derivadas $\partial_\mu \Phi$? Claramente esto es muy distinto a la manera como transforma Φ. Debido a esto, la ecuación original de Φ *no* es ya invariante.

c) Muestra sin embargo que las '*derivadas covariantes*'

$$D_\mu \Phi \equiv ([\partial_0 + iqA_0]\Phi, [\vec{\nabla} + iq\vec{A}]\Phi)$$

sí transforman justo como Φ (es decir, $D_\mu \Phi \to D'_\mu \Phi' = e^{iq\lambda} D_\mu \Phi$), siempre y cuando el campo vectorial A_μ cambie de acuerdo con

$$A_\mu(\vec{x}, t) \to A'_\mu(\vec{x}, t) \equiv A_\mu(\vec{x}, t) - \partial_\mu \lambda(\vec{x}, t).$$

Convéncete de que esto es todo lo que se necesita para que, sabiendo que la ecuación de movimiento original de Φ era invariante bajo cambios de fase con λ constante, podamos inmediatamente concluir que la ecuación que se obtiene al simplemente reemplazar las derivadas ordinarias $\partial_\mu\Phi$ con las derivadas covariantes $D_\mu\Phi$ será invariante también bajo cambios de fase con $\lambda(\vec{x},t)$ arbitraria. ¡Lo verdaderamente sorprendente es que este reemplazo $\partial_\mu \to D_\mu$ justo coincide con la manera en que el campo *electromagnético* A_μ se acopla al campo Φ! Fíjate en particular que, dado el lugar donde aparece q, si $q=0$ podemos ver que el campo Φ NO sufre un cambio de fase bajo la transformación de norma, y, de la mano de esto, el campo A_μ NO aparece en su ecuación de movimiento, justo como debe suceder para un campo que es electromagnéticamente neutro.
d) Consideremos ahora una teoría (como el Modelo Estándar) que incluye un cierto número n campos cargados Φ_a $(a=1,2,\ldots,n)$ con cargas eléctricas q_a. Evidentemente no vamos a inventarnos un campo vectorial para cada valor de a, sino que tendremos un solo campo electromagnético A_μ, que estará acoplado a todos los Φ_a. Esto implica que nuestra simetría de norma será un solo factor (y no n) de $U(1)$. ¿De qué manera transformarán ahora los campos Φ_a y A_μ bajo una transformación de norma? Para asegurarnos de que esto sea una simetría de nuestro sistema, ¿qué tendremos que hacer con las derivadas $\partial_\mu\Phi_a$ que aparecen en las diversas ecuaciones de movimiento?

3. Los grupos del Modelo Estándar y el Higgs
$U(N)$ es el conjunto de todas las matrices $\mathcal{U}$, con $N\times N$ entradas complejas, que son 'unitarias', es decir, cuyo inverso $\mathcal{U}^{-1}$ es igual a su 'conjugado hermitiano' $\mathcal{U}^\dagger$ (el conjugado complejo de la matriz transpuesta, $\mathcal{U}^\dagger \equiv (\mathcal{U}^T)^*$): $\mathcal{U}^\dagger\mathcal{U}=I$, donde I es la matriz identidad. Nota en particular que $U(1)$ (uno de los factores que aparecen en el grupo del modelo estándar) es simplemente el conjunto de fases $e^{i\phi}$ (con ϕ real). $U(N)$, con las reglas habituales de multiplicación de matrices, es un ejemplo de lo que los matemáticos llaman un 'grupo', puesto que tiene definido un producto y un inverso que operan dentro del mismo conjunto. (Como puedes fácilmente verificar, el producto de dos matrices unitarias es una tercera matriz unitaria y el inverso de una matriz unitaria es también una matriz unitaria.) Más aún, es un 'grupo de Lie,' puesto que las matrices $\mathcal{U}$ están asociadas a parámetros que varían de manera contínua (de forma tal que $U(N)$ es una 'variedad diferenciable').
$SU(N)$ es el conjunto de matrices complejas $N\times N$ que, además de ser unitarias, son 'especiales,' es decir, tienen determinante 1. Este también es un grupo de Lie.
a) Recuerda que las matrices de Pauli se definen como

$$\sigma_x \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observa que estas matrices satisfacen $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_z^2=I$ (donde I es la matriz identidad), $\sigma_x\sigma_y=-\sigma_y\sigma_x=i\sigma_z$, $\sigma_y\sigma_z=-\sigma_z\sigma_y=i\sigma_x$, $\sigma_z\sigma_x=-\sigma_x\sigma_z=i\sigma_y$.

Definiendo la exponencial de una matriz M a través de la serie de Taylor

$$e^M \equiv 1 + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \ldots\ ,$$

determina la forma de las matrices

$$\mathcal{U}_x(\theta_x) \equiv \exp(i\sigma_x\theta_x/2), \qquad \mathcal{U}_y(\theta_y) \equiv \exp(i\sigma_y\theta_y/2), \qquad \mathcal{U}_z(\theta_z) \equiv \exp(i\sigma_z\theta_z/2).$$

(Para obtener una expresión compacta, será indispensable que recuerdes la forma de la serie de Taylor de las funciones seno y coseno.)
b) Muestra que $\mathcal{U}_x$, $\mathcal{U}_y$ y $\mathcal{U}_z$ pertenecen a $SU(2)$.
De hecho, *cualquier* matriz $\mathcal{U}$ en $SU(2)$ se puede escribir de manera única en la forma de un producto $\mathcal{U} = \mathcal{U}_x(\theta_x)\mathcal{U}_y(\theta_y)\mathcal{U}_z(\theta_z)$, con una cierta elección de los ángulos θ_x, θ_y y θ_z, o si se prefiere, $\mathcal{U} = \exp[i(\phi_x\sigma_x + \phi_y\sigma_y + \phi_z\sigma_z)]$, con una cierta elección de los ángulos ϕ_x, ϕ_y, y ϕ_z (que en general serían distintos a los θ_i, porque cuando 2 matrices A y B no conmutan, tenemos $\exp[A]\exp[B] \neq \exp[A+B]$). Por esta razón, las matrices de Pauli se conocen como los 'generadores' del grupo de Lie $SU(2)$. (Combinaciones lineales de ellas con coeficientes reales dan lo que se conoce como el 'álgebra de Lie' asociada a este grupo, álgebra que a veces se denota como $su(2)$. Lo que encontramos en clase fue que el campo de la interacción débil, $W_\mu(\vec{x}, t)$, toma valores justamente en $su(2)$...) Dado que cualquier elemento de $SU(2)$ está determinado de manera única por los 3 ángulos $\{\theta_i\}$ ó $\{\phi_i\}$, concluimos que $SU(2)$ es un espacio de 3 dimensiones (no es obvio, pero resulta ser una esfera tres-dimensional).
c) Toda esta historia se generaliza a otros valores de N (y también a otros grupos de Lie). Como explicamos en clase, los generadores de $SU(N)$ deben ser matrices $N \times N$ que son hermitianas ($\mathcal{H}^\dagger = \mathcal{H}$) y sin traza. En el caso de $SU(3)$, el grupo de la interacción fuerte, muestra que esto implica que existen exactamente 8 generadores — justo como el número de gluones (lo cual nuevamente se debe a que $G_\mu(\vec{x}, t)$ toma valores en el álgebra de Lie correspondiente, $su(3)$). El grupo $SU(3)$ es entonces un espacio de 8 dimensiones.
d) Recuerda que el campo de Higgs tiene dos componentes complejas,

$$H(x) \equiv \begin{Bmatrix} {}^1H(x) \\ {}^2H(x) \end{Bmatrix},$$

que se mezclan entre sí (justo como el quark u y el d, el electrón y su neutrino, etc.) bajo las transformaciones $SU(2)$ del Modelo Estándar (de acuerdo con $H \to H' \equiv \mathcal{U}H$). La energía potencial asociada a este campo es

$$V(H) = -aH^\dagger H + b(H^\dagger H)^2,$$

donde a y b son parámetros reales positivos y $H^\dagger H \equiv {}^1H^{*1}H + {}^2H^{*2}H$). Es decir, si el campo de Higgs toma un cierto valor H (que para simplificar las cosas tomaremos como independiente de x), el costo energético es $V(H)$. Muestra que $V(H)$ es invariante bajo una transformación arbitraria $\mathcal{U}$ de $SU(2)$. Esto es parte de lo que

queremos decir cuando aseguramos que las *leyes de la física* son invariantes bajo el factor $SU(2)$ del grupo del modelo estándar.
e) Grafica $V(H)$ como función de ${}^1H$ y ${}^2H$ (restringiendo por simplicidad a valores reales de H), indicando la posición de los posibles máximos y mínimos.
f) En un estado *estable*, el valor de fondo de H corresponderá a un mínimo del potencial $V(H)$. Para ser específicos, supongamos que en el estado actual del universo, el campo de Higgs toma, de todos los valores disponibles en el mínimo del potencial, el valor tal que ${}^1H = 0$ y ${}^2H$ es real. Muestra que no hay ninguna transformación de $SU(2)$ que deja este valor invariante. Esto es a lo que nos referimos cuando decimos que el valor de fondo de H *rompe espontáneamente* la simetría $SU(2)$.
g) El factor $U(1)_Y$ del grupo del modelo estándar actúa sobre H de acuerdo con $H \to H' \equiv \exp(i\phi/2)H$ (es decir, mezcla entre sí las componentes reales y complejas de, por separado, ${}^1H$ y ${}^2H$). Esto es a lo que nos referimos cuando decimos que H tiene hipercarga $Y = 1/2$. Muestra que $V(H)$ es invariante bajo $U(1)_Y$, pero el estado actual de nuestro universo (especificado en el inciso anterior) no lo es.
h) Muestra finalmente que, eligiendo el ángulo ϕ de manera apropiada, el estado de nuestro universo sí es invariante bajo una transformación *combinada* $\mathcal{U}_z(\theta_z)\exp(i\phi)$. Esta simetría remanente es justamente el grupo $U(1)_{EM}$ asociado a la interacción electromagnética, que como has visto, claramente acaba siendo una *combinación* de dos transformaciones que de entrada hubiéramos pensado estaban asociadas a la interacción *débil*. Es por esto que el campo electromagnético A_μ, que por definición corresponde a $U(1)_{EM}$, es una cierta combinación lineal de los campos ${}^{1\bar{1}}W_\mu$ (la componente de W_μ a lo largo de σ_z, que es precisamente el generador que se usa para construir $\mathcal{U}_z$) y B_μ. Y es por ello también que es válida la relación entre carga eléctrica, isoespín débil e hipercarga débil que mencionamos en clase, $q = I_3 + Y/2$.
El hecho de que, aún después de que el Higgs toma su valor preferido, tenemos todavía como simetría remanente al $U(1)$ asociado al electromagnetismo es a lo que nos referimos cuando decimos que el Higgs rompe $SU(2) \times U(1) \to U(1)_{EM}$. Por cierto que este tipo de violación de una simetría, debida al *estado*, se llama 'ruptura espontánea' (para distinguirla, p.ej., de una violación directamente en las leyes de la física, que se llama 'ruptura explícita').