

# INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CUERDAS

## 0. Motivación: ¿Por qué cuerdas?

La teoría de cuerdas es uno de nuestros intentos más recientes por entender de qué está hecho nuestro universo.

El lenguaje que hasta ahora utilizamos para responder a estas preguntas es el de la teoría cuántica de campos. Para poder contrastarlo con la teoría de cuerdas, nos conviene iniciar con un breve repaso del lenguaje de campos.

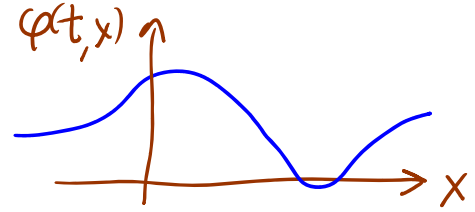
Por definición, un campo es una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante del tiempo:  $\varphi(t, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi_{\vec{x}}(t)$

análogo a  $x_n(t)$  en sistema con  $N$  partículas  
 $\uparrow$  índice discreto  $n=1, \dots, N$   
 $\uparrow$  índice continuo  $\in \mathbb{R}^3$

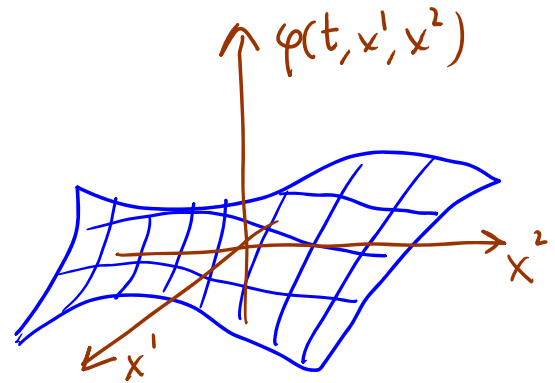
Un 'campo' en  $0+1$  dimensiones  $\varphi(t)$  sería exactamente análogo a un sistema de 1 partícula que se mueve en 1 dim,  $y(t)$ .



Un campo en  $1+1$  dim  $\varphi_x(t)$  es exactamente análogo a una cuerda que puede oscilar en 1 dim transversa,  $y(x,t)$ .



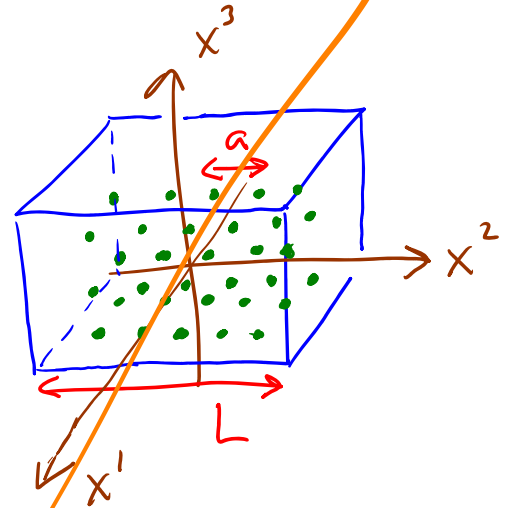
Un campo en  $2+1$  dimensiones  $\varphi(t, x^1, x^2)$  es exactamente análogo a la membrana de un tambor, que oscila en 1 dim transversa,  $y(t, x^1, x^2)$



Un campo en  $3+1$  dim  $\varphi(t, \vec{x})$  es entonces análogo a 1 gelatina / jalea que llena 3 dim espaciales y oscila en 1 dim transversa,  $y(t, \vec{x})$ . Ejemplos sencillos serían los campos que describen a la temperatura o la presión o la densidad o la velocidad del aire en un cuarto.

A partir de la definición vemos que cualquier campo (en  $d+1$  dim con  $d \geq 1$ ) es un sistema con un número infinito (y no denumerable) de grados de libertad.

Se le puede pensar como el límite  $L \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$  del caso con un volumen finito  $L^3$  en un espacio discretizado con espaciado  $a$ , sistemas que tendrían  $(L/a)^3$  grados de libertad.



Podemos describir la dinámica de nuestro campo  $\varphi(x) \equiv \varphi(x^\mu) \equiv \varphi(t, \vec{x})$  especificando su acción

$$S[\varphi] = \int dt \underbrace{L[\varphi(t)]}_{\text{Lagrangiano}} = \int dt \int^3 x \underbrace{\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}_{\text{Densidad Lagrangiana}}.$$

Lagrangiano

$\varphi, \nabla \varphi$

Densidad Lagrangiana

En el caso de un sistema con un número finito de grados de libertad, descriptor por variables canónicas

$q_n$  y  $p_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}$ , siempre que el procedimiento

de cuantización canónica consiste en promover

$q_n, p_m \rightarrow$  Operadores  $\hat{q}_n, \hat{p}_m$  que

satisfacen las relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{q}_n, \hat{q}_m] = 0 = [\hat{p}_n, \hat{p}_m] \quad \forall n, m,$$

$$[\hat{q}_n, \hat{p}_m] = i\hbar \delta_{nm} \quad (\text{trabaja con } \hbar = 1).$$

Operadores en el cuadro de Schrödinger,  
o de Heisenberg a tiempo iguales

$$\delta_{nm} \text{ de Kronecker} \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

Nuestro ejemplo favorito es por supuesto el oscilador armónico

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2}_{\Rightarrow p_j = m \dot{x}_j} - \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{x}^2, \text{ o, equivalentemente,}$$

$$H \equiv \sum_j p_j \dot{x}_j - L = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \vec{x}^2,$$

donde recordamos que con las definiciones

$$a_j \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( x_j + \frac{i p_j}{m\omega} \right), \quad a_j^* \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( x_j - \frac{i p_j}{m\omega} \right),$$

se tiene

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i \delta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 = [\hat{p}_i, \hat{p}_j]$$

$$\leftrightarrow [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0,$$

operadores de descenso y ascenso (bajada y subida)

$$\hat{H} = \sum_j \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{p}_j^2}{m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}_j^2 \right) = \sum_j \omega \left( \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right),$$

operador  
 $\equiv \hat{N}_j$  de número

$$[\hat{N}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \hat{a}_j^\dagger,$$

de tal modo que el espectro completo es

$$|0\rangle \text{ tal que } \hat{a}_j |0\rangle = 0 \quad \forall j, \text{ con } E_0 = \frac{\omega}{2},$$

$$|\vec{n}\rangle \equiv \prod_j \left( \frac{1}{\sqrt{n_j!}} (\hat{a}_j^\dagger)^{n_j} \right) |0\rangle, \quad E_{\vec{n}} = \sum_j \omega (n_j + \frac{1}{2}).$$

de igual manera, para cuantizar canónicamente a un campo  $\varphi(t, \vec{x})$  promovemos

↑ índice, no variable dinámica

$$\varphi(x), \Pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \rightarrow \text{operadores } \hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x})$$

en cuadro de Schrödinger,

o  $\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x})$  en

cuadro de Heisenberg,

↑ densidad de momento canónico

imponiendo las relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}')] = 0 = [\hat{\Pi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')],$$

$$[\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')] = i \underbrace{\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')}_{\text{delta de Dirac}}.$$

El ejemplo más sencillo (con el que llegaremos muy lejos en este curso) es un camp escalar (bajo Lorentz, consistente de un solo número en cada sitio  $\vec{x}$ ) libre ( $\equiv \mathcal{L}$  cuadrática, y por tanto, ec. de movimiento lineal):

$$\eta^{\mu\nu} \equiv \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \equiv \eta_{\mu\nu} \quad \begin{array}{l} \text{Métrica de} \\ \text{Minkowski} \end{array}$$

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \vec{\nabla}\varphi) = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Lagrangiano de Klein-Gordon

$\frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2$  'Término cinético' (Usamos  $c=1$ )

'Término de masa':  $m$  resultará ser la masa de las partículas asociadas a  $\varphi(x)$

Usando la fórmula de Euler-Lagrange,  $\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$ , deducimos la ecuación de movimiento

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + m^2 \varphi = 0$$

Ec. de Klein-Gordon

$$\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 \equiv \partial^2 \equiv \square \quad \text{Laplaciano/D'Alembertiano}$$

Para  $m^2=0$ , esto no es otra cosa que la ec. de ondas, con velocidad de propagación  $= 1$ . Cuando  $m^2 \neq 0$  la ec. de Klein-Gordon todavía describe la propagación de ondas en el campo (en general con velocidad  $\neq 1$ ). Para ver esto, conviene cambiar nuestras variables básicas  $\varphi(t, \vec{x}) \equiv \varphi_x(t)$  a unas nuevas variables  $\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \tilde{\varphi}_p(t)$  obtenidas a través de una transformada de Fourier,

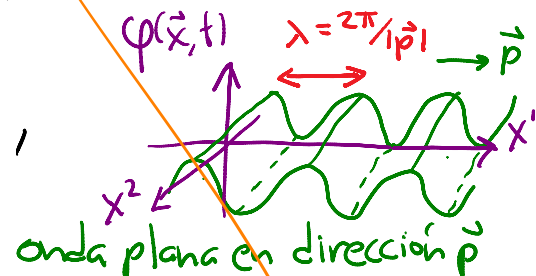
$$\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \varphi(t, \vec{x}) \quad \leftrightarrow \quad \varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \tilde{\varphi}(t, \vec{p}),$$

que satisfacen  $\tilde{\varphi}^*(t, \vec{p}) = \tilde{\varphi}(t, -\vec{p})$ , como consecuencia de  $\varphi^*(x) = \varphi(x)$ .

La ec. de mov.  $(\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2) \varphi(t, \vec{x}) = 0$  se convierte en

$$(\partial_0^2 + \underbrace{\vec{p}^2}_{\equiv E_p^2} + m^2) \tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = 0,$$

es decir,  $\ddot{\tilde{\varphi}}(t, \vec{p}) = -E_p^2 \tilde{\varphi}(t, \vec{p})$ : cada  $\tilde{\varphi}(t, \vec{p})$  es un oscilador armónico con frecuencia  $\omega = E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$



y nuestro campo libre  $\varphi(\vec{x}, t)$  no es entoces más que una colección infinita de osciladores armónicos desacoplados (un sistema completamente análogo a una cuerda de violín o la membrana de un tambor).

En otras palabras, los modos de Fourier / ondas planas  $\tilde{\varphi}(t, \vec{p})$  son los modos normales de oscilación del campo. Con esto entendemos perfectamente la manera en que  $\varphi(t, \vec{x})$  evolucionará a nivel clásico.

Para cuantizar este sistema por el método canónico, convertimos al campo  $\varphi(t, \vec{x})$  y a su momento canónico conjugado  $\Pi(t, \vec{x}) = \dot{\varphi}(t, \vec{x})$  en operadores en el cuadro de Schrödinger,  $\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x})$ , o en el de Heisenberg,

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{\varphi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t}, \quad \hat{\Pi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \hat{\Pi}(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t},$$

e imponemos las relaciones de conmutación canónicas (p.6). Sabiendo ya que  $\hat{\varphi}(\vec{p})$  y  $\hat{\Pi}(\vec{p})$  son análogos a los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  de un oscilador armónico (con masa unidad), naturalmente conviene desarrollar

en operadores de ascenso y descenso:

$$\hat{\varphi}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}))$$

y

$$\begin{aligned} &\uparrow \text{signo tal que } \hat{\varphi}(\vec{p})^{\dagger} = \hat{\varphi}(-\vec{p}) \\ &\Rightarrow \hat{\varphi}(\vec{x})^{\dagger} = \hat{\varphi}(\vec{x}) \text{ (campo real)} \end{aligned}$$

$$\hat{\pi}(\vec{p}) = -i \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{p} = -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^{\dagger})).$$

A partir de las relaciones de conmutación para  $\hat{\varphi}(\vec{x})$  y  $\hat{\pi}(\vec{y})$  es fácil deducir que

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (\text{análogo a } [\hat{a}_i, \hat{a}_j^{\dagger}] = \delta_{ij})$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}].$$

Y el Hamiltoniano clásico

$$H \equiv \int d^3x (\pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}) = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right),$$

al promoverse a operador, toma entonces la forma

$$\hat{H} = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\partial_0 \hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\varphi}^2 \right]$$



$$\hat{H} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger) E_{\vec{p}}$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] E_{\vec{p}} \right)$$

$\int d^3 p$  diverge por  $\vec{p}$  grande  
 ( $\leftrightarrow$  distancias pequeñas)  
 $\sqrt{p^2 + m^2}$   
 $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}) = \int d^3 x e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p})}$   
 volumen del espacio

(cf.  $\hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) = \omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$ )

El segundo término en  $\hat{H}$  claramente representa la energía de punto cero del oscilador armónico etiquetado por  $\vec{p}$ , es decir, la energía que tiene ese oscilador cuando se encuentra sin excitar, en su estado fundamental. Sabemos que, en ausencia de la gravedad, solo importan diferencias de energía, por lo que podemos por simplicidad ignorar estas constantes y trabajar con el Hamiltoniano

$$:\hat{H}: \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$$

Define  $E=0$  como la energía del campo sin excitar

"orden normal": colocar  $\hat{a}^\dagger$ 's a la izquierda de  $\hat{a}$ 's

Podemos entonces obtener una base para el espacio de Hilbert de nuestro sistema/campo vibrante comenzando en el estado sin excitar

$|0\rangle \equiv |0, 0, 0, \dots\rangle$  tal que  $\hat{a}_{\vec{p}} |0, 0, 0, \dots\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$   
 (todos los osciladores en su estado base), y aplicando los operadores de ascenso  $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ . El estado más general es una combinación lineal de estados donde cada uno de los infinitos osciladores ( $\exists$  uno por cada  $\vec{p}$ ) está en alguno de sus infinitos estados de excitación.

Y lo más interesante de todo este asunto es que, usando las expresiones conocidas para la energía y el momento espacial ( $\neq \Pi$ ) del campo,

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + m^2} \hat{N}_{\vec{p}}$$

↖ operador de número

$$\hat{\vec{P}} = - \int d^3x \frac{1}{2} \left( \hat{\Pi} \vec{\nabla} \hat{\varphi} + \vec{\nabla} \hat{\varphi} \hat{\Pi} \right)$$

Carga conservada asociada a invariancia bajo traslaciones (Noether)

$$\vec{P} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{N}_{\vec{p}},$$

podemos comprobar que existe un acuerdo total entre el espacio de Hilbert de nuestro campo de Klein-Gordon y el espacio de Hilbert de un número arbitrario de partículas relativistas libres sin espín, con masa  $m$  y momento  $\vec{p}$ :

- $|0\rangle$  tal que  $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$ , con  $\langle 0|0\rangle = 1$

Estado con el campo sin excitar  $\longleftrightarrow$  Vacío  
(tods los osciladores en su estado base:  $|0, 0, 0, 0, \dots\rangle$ ) (estado sin partículas)  
 $E_{\text{tot}} = 0, \quad \vec{P}_{\text{tot}} = 0$

- $|\vec{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$  (con  $\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}')$ )

Estado con el oscilador (onda plana)  $\vec{p}$  excitado a su primer nivel  $\longleftrightarrow$  Estado con 1 partícula  
( " $|0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots\rangle$ " ) (con momento  $\vec{p}$ )  
 $E_{\text{tot}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad \vec{P}_{\text{tot}} = \vec{p}$

- $|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2E_{\vec{p}_2}} \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle$  (con  $\frac{1}{\sqrt{2!}}$  adicional si  $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ )

Estado con 2 osciladores excitados  $\leftrightarrow$  Estado con 2 partículas  
 al 1er. nivel ("10,0,0,1,0,0,1,0,0...")  
 o, si  $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ , 1 oscilador en el 2do. nivel  
 ("10,0,0,2,0,0,1,0,0...")

con momentos  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$   
 $E_{\text{TOT}} = E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2}, \vec{P}_{\text{TOT}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$   
 partículas No interacción

•  $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\rangle$ , etc.

La correspondencia incluye no solo a los números cuánticos que etiquetan a los estados ( $\vec{p}_n$ 's), sino también a las energías, y por tanto, a la evolución temporal.

Los 2 sistemas resultan ser totalmente indistinguibles!  
 (Similarmente, al cuantizar un campo no escalar — descrito

por varios números en cada lugar, que se mezclan entre sí bajo Lorentz — obtenemos partículas con espín.)

Aprendemos entonces que !! las partículas son en realidad pequeñas excitaciones cuánticas de un campo !!

(se trata de estados con energía definida, de modo que las ondas planas en cuestión No son eigenestados de  $\hat{\Phi}(\vec{p})$  ni  $\hat{\Pi}(\vec{p})$  (ni  $\hat{\Phi}(\vec{x})$  ni  $\hat{\Pi}(\vec{x})$ ).)

El universo está hecho de campos, no de partículas.

En este contexto, es natural llamar a  $\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}$  y  $\hat{a}_{\vec{p}}$  operadores de creación y aniquilación, respectivamente, porque crean/aniquilan partículas en momento definido. (Habríamos que crear/aniquilar espinos a nivel del formalismo teórico. En la teoría libre, la evolución temporal está controlada por  $\hat{H} \sim \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}$ , que en conjunto mantiene constante el número de partículas.)

Y podemos notar que

$$\hat{\psi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}} e^{i p \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} e^{-i p \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

crea una partícula en posición definida:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) |0\rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-i p \cdot x} \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} |\vec{p}\rangle} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i p \cdot x} |\vec{p}\rangle \equiv |x\rangle. \end{aligned}$$

operador en el  
caso de Heisenberg

covariante bajo Lorentz, y  $\propto \int \frac{d^3 p}{\vec{p}^2 \ll m^2}$

Como las partículas en esta teoría son libres, el único dato de interés es la amplitud de probabilidad de que una partícula se propague de un punto en el espaciotiempo a otro,

$$\langle t, \vec{x} | t', \vec{x}' \rangle = \langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x') | 0 \rangle.$$

↖ estado en el cuadro de Heisenberg (no evolucionan)

Es útil/habitual concentrarse en el propagador de Feynman

$$G(x, x') \equiv \langle x | x' \rangle \theta(x^0 - x'^0) + \langle x' | x \rangle \theta(x'^0 - x^0)$$

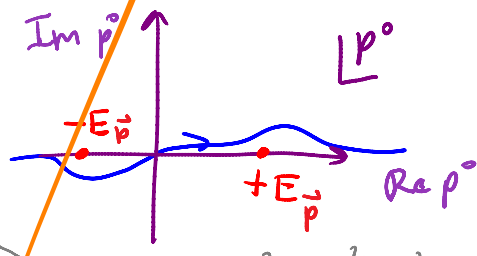
$$\underbrace{\langle x' | x \rangle}_{= \langle x | x' \rangle^*}$$

$$\equiv \langle 0 | T \{ \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x') \} | 0 \rangle$$

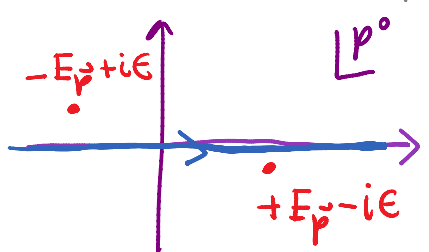
$$\uparrow \text{orden temporal} \equiv \begin{cases} \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x') & \text{si } x^0 > x'^0 \\ \hat{\psi}(x') \hat{\psi}(x) & \text{si } x'^0 > x^0 \end{cases}$$

El resultado del cálculo se puede resumir (consultar textos) utilizando una integral sobre una variable auxiliar  $p^0$  que en general difiere de la energía física  $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$  (y que incluso permitimos que sea compleja, para que al utilizar el teorema de Cauchy podamos pensar el residuo

del polo en  $p^0 = E_{\vec{p}}$  ó  $p^0 = -E_{\vec{p}}$  para obtener el término en  $G(x, x')$  con  $\Theta(x^0 - x'^0)$  o  $\Theta(x'^0 - x^0)$ ):

$$G(x, x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x - x')} \underbrace{\frac{-i}{p^2 + m^2}}_{\equiv \tilde{G}(p)}$$


poles en  $p^2 = -\vec{p}^2 + p^0^2 = -m^2$ , es decir,  $p^0 = \pm E_{\vec{p}}$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x - x')} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$$


Hasta ahora hemos hablado de un

campo libre  $\leftrightarrow$   $\mathcal{L}$  cuadrático (ec. de mov. lineal)

$\leftrightarrow$  Modos de Fourier desacoplados

$\leftrightarrow$  Partículas no interactuantes

(En cuerdas, podremos llegar muy lejos solo con este caso.)

Si agregamos a  $\mathcal{L}$  términos cúbicos en  $\varphi$  o más altos, la ec. de mov. para  $\varphi$  ya no será lineal, y los modos de Fourier  $\varphi(\vec{p}, t)$  no estarán ya desacoplados ( $\therefore$  no serán modos normales). Llamamos a esto una teoría de campo interactuante. La situación se vuelve bastante

confusa porque este cambio no solo hace que las partículas interactúen entre sí, sino también que interactúen "consigo mismas", de tal modo que modifica incluso la definición misma de lo que es una partícula  $|\vec{p}\rangle$  (y.: también del vacío  $|0\rangle$ ) en relación con el campo.

P.ej., en este nuevo contexto se encuentra que  $\hat{\phi}$  no solo crea una partícula:

$$\hat{\phi}(\vec{p})|0\rangle \sim \alpha_1|\vec{p}\rangle + \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E(\vec{p}')} \alpha_2(\vec{p}')|\vec{p}-\vec{p}', \vec{p}'\rangle + \dots$$

(Nota que en el formalismo de campos no tiene nada de raro tener una superposición con distintos números de partículas, puesto que se trata simplemente de una indeterminación en el estado del campo deo.)

Y en general, el número de partículas no se mantiene constante: existen procesos físicos de creación/aniquilación.

(Básicamente, el generador de evolución en el tiempo

$\hat{H}$  choca sí incluye términos del tipo



$$\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}-\vec{p}'}^{\dagger} \quad \text{o} \quad \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}+\vec{p}'+\vec{p}''}^{\dagger}, \text{ etc. ,}$$

que no conservan el número de partículas.)

En cualquier teoría de campos, el objetivo principal es calcular las llamadas funciones de correlación o correladores

$$G_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}(x_n) \} | 0 \rangle$$

$\uparrow$  orden temporal  $\uparrow$  vacío (esta es base)  
 $(x_i$ : aumenta de derecha a izquierda)

que físicamente representan esencialmente la amplitud de probabilidad de empezar en cierto número de partículas en algunos puntos del espaciotiempo y terminar con otro número en los sitios restantes. P.ej.,  $G_5(x_1, \dots, x_5)$  contiene información sobre  $1+2 \rightarrow 3+4+5$ . (Salvo que para definir adecuadamente a las partículas necesitamos separarlas mucho y pasar al espacio de momentos: amplitudes de dispersión.)

Toda la información física de la teoría puede extraerse de estas funciones de correlación; "resolver" la teoría equivale a ser capaz de determinar  $G_n$  (o  $\tilde{G}_n$ )  $\forall n$ .

Tomemos como ejemplo

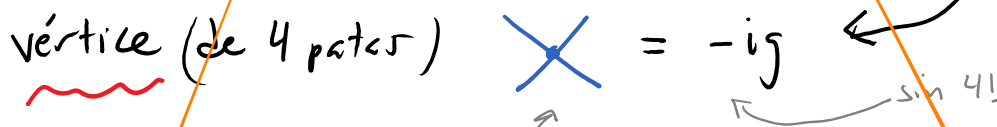
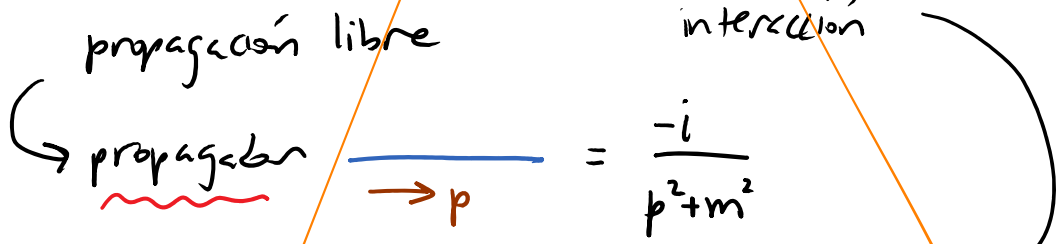
$$S(\varphi) = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{g}{4!} \varphi^4 \right)$$

Teoría  $\varphi^4$

$g$  es la constante de acoplamiento, y  $g$  controla la intensidad de las interacciones.

Si la teoría está débilmente acoplada (es decir, las constantes de acoplamiento son pequeñas), la teoría está cerca de ser libre, y es posible calcular las  $G_n(x_1, \dots)$  en una expansión perturbativa (una serie en potencias de las constantes de acoplamiento). La receta se basa en diagramas de Feynman, construido a partir de 2 tipos de ingredientes que se leen directamente del Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2}_{\text{propagación libre}} - \underbrace{\frac{g}{4!} \varphi^4}_{\text{interacción}}$$



proceso con  $0 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1$  ó  $4 \rightarrow 0$  partículas

p.ej.

$$G_4(x_1, \dots, x_4) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_4) \} | 0 \rangle$$

Suma sobre todos los diagramas con 4 puntos  
= externos (y sin pezones completamente desconectados de esos puntos)

$$\begin{aligned}
 &= \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \end{array} \quad \mathcal{O}(g^0) \\
 &+ \begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \\ \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array}} \right\} \mathcal{O}(g^1) \\
 &+ \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \end{array} \quad \mathcal{O}(g^2) \\
 &+ \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Cada diagrama se traduce en una fórmula, pero además nos cuenta la historia de un proceso en el espaciotiempo, donde vemos que en etapas intermedias partículas ("virtuales") aparecen y desaparecen.

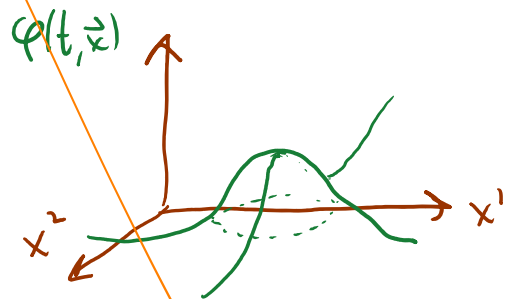
Para  $g \ll 1$ , es una buena aproximación quedarnos solo con unos cuantos diagramas de los más sencillos; pero cuando

la teoría está fuertemente acoplada ( $g \gg 1$ ), la expansión perturbativa se vuelve completamente inútil, y perdemos nuestros métodos de cálculo y de visualización. Importante, aún cuando  $g \ll 1$  la serie perturbativa NO converge: a orden  $n$  en la expansión tenemos un factor  $g^n \ll 1$ , pero el número de diagramas distintos crece como  $\sim n!$ , de modo que, sin importar que tan chiquito es  $g$ , la serie comienza a diverger cuando  $n \sim 1/g$ . Esto indica que dicha serie NO captura toda la física de la teoría - existen efectos "no perturbativos".

Un ejemplo es la existencia en algunas teorías de excitaciones grandes pero localizadas del campo (soluciones no triviales de la ec. de mov. no lineal, estáticas y con energía finita  $E \sim 1/g^2$ )

conocidos como solitones.

Estos estados/objetos físicos de la teoría, que se comportan como partículas livianas y pesadas. La existencia de solitones (junto con varios otros fenómenos)



nos deja claro que el campo es el concepto primario, y las partículas usuales son apenas un tipo de excitaciones de él. **El mundo está hecho de campos.**

[Clase 1: 29/01/13]

El lenguaje de teoría cuántica de campos impone algunas restricciones genéricas sobre nuestra descripción del micromundo (p.ej., existencia de antipartículas, simetría CPT, conexión entre espín y estadísticas, cancelación de "anomalías" de norma), pero permite gran arbitrariedad: existe un número infinito de teorías de campo distintas, que difieren por el tipo y número de campos, interacciones, masas y acoplamiento, simetrías, la dimensión del espaciotiempo, etc. (Para nuestros propósitos, vale la pena enfatizar en particular que todo lo que hemos dicho se puede generalizar fácilmente de  $3+1$  a  $D$  dimensiones.)

La teoría de campos específica que resume todo lo que sabemos hasta ahora respecto a la composición

microfísica de nuestro universo es el Modelo Estándar, que tiene las siguientes propiedades.

• Dimensión: 3+1

• Campos: 2 escalares complejos  $\phi_+, \phi_0$  Higgs Espín 0

24 (48) campos de Dirac (Weyl)

$u^{c=1,2,3}, d^c; c^c, s^c; t^c, b^c$  Quarks Espín  $\frac{1}{2}$   
4 componentes complejos c/u  
 $\nu_e, e; \nu_\mu, \mu; \nu_\tau, \tau$  Leptones

12 campos vectoriales

$W_\mu^{a=1,2,3}, B_\mu$  bosones electrodébiles Espín 1  
cuadri-vectores  $\mu=0,1,2,3$   
 $G_\mu^{b=1,\dots,8}$  gluones

• Simetría/redundancia local o 'de norma':

$$\mathcal{G}_{ME} = \underbrace{SU(3)_c \times SU(2)_I \times U(1)_Y}_{\det=1} \quad \leftarrow M^T = M^{-1}$$

'Rotaciones' que actúan sobre los campos, y pueden ser distintas en cada x

P.ej.,  $\exp[i\theta^a(x) \frac{\sigma^a}{2}] \in SU(2)_I$

$SU(3)_c$  está asociado a (y determina) la interacción fuerte, transmitida por el campo gluónico  $G_\mu^b$  y generada/experimentada por objetos con el tipo de carga que llamamos color (índice  $c, b$ ).

$SU(2)_I \times U(1)_Y$  está asociado/determina la interacción electrodébil con la parte de  $SU(2)_I$  transmitida por  $W_\mu^a$  y generada por la carga que llamamos isospín débil, y el factor  $U(1)_Y$  transmitida por  $B_\mu$  y generada por la carga que llamamos hipercarga.

• Representaciones de  $\mathcal{G}_{ME}$ :

$G_\mu^b, W_\mu^a, B_\mu$  transforman como campos de norma (rep. 'adjunta')

$$\text{p.ej.}, W_\mu^a(x) \frac{\sigma^a}{2} \rightarrow U(x) \left[ W_\mu^a(x) \frac{\sigma^a}{2} + \frac{i}{g_2} \partial_\mu \right] U^\dagger(x)$$

$\uparrow$   
 $\exp[i\theta^a(x) \frac{\sigma^a}{2}] \in SU(2)_I$

Quarks  $\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix}, \dots \in$  rep. fundamental (3) dim  
de  $SU(3)_c$

(matrices  $3 \times 3$  multiplican desde izquierda)

Leptones y Higgs  $\nu_e, e, \dots, \varphi_+, \varphi_0 \in$  rep. trivial (1) dim  
de  $SU(3)_c$  (neutros).

Quarks de "quiralidad" izquierda  $(\psi_I(x) \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi_{Dirac}(x))$   
Matriz de Dirac  $i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$   
espinor de Weyl izquierdo  
 $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_I, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_I, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_I \in \text{rep. fundamental } (\underline{2})$   
 de  $SU(2)_I$   
 y tienen (hiper)carga  $Y = +1/6$  bajo  $U(1)_Y$ .

Quarks 'derechos'  $(\psi_D(x) \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi_{Dirac}(x))$   
espinor de Weyl derecho  
 $u_b, d_b, c_b, s_b, t_b, b_b \in \text{rep. trivial } (\underline{1})$  de  $SU(2)_I$   
 (neutros), y tienen  $Y = +2/3, -1/3, +2/3, -1/3, +2/3, -1/3$ .

El Modelo Estándar distingue entre derechos e izquierdos,  
 es decir, es una teoría "quiral".

Leptones izquierdos

$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_I, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_I, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_I \in \text{rep. fundamental } (\underline{2})$   
 de  $SU(2)_I$ , y tienen  $Y = -1/2$  bajo  $U(1)_Y$ .

Leptones derechos  $\nu_{eD}, e_D, \nu_{\mu D}, \mu_D, \nu_{\tau D}, \tau_D$   
 $\in \text{rep. trivial } (\underline{1})$  de  $SU(2)_I$  (neutros), y  
 tienen  $Y = 0, -1, 0, -1, 0, -1$ .



Notar triplicación de propiedades de quarks y leptones:  
 decir que existen 3 generaciones (cada una debe aparecer completa para tener cancelación de "anomalías").

Higgs  $\Phi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \in \text{rep. fundamental } (2) \text{ de } SU(2)_I$   
 y tiene  $Y = +1/2$ .

- Lagrangiano: esencialmente la expresión más general para los campos, grupo y reps. dadas, con el requisito de ser 'renormalizable'.

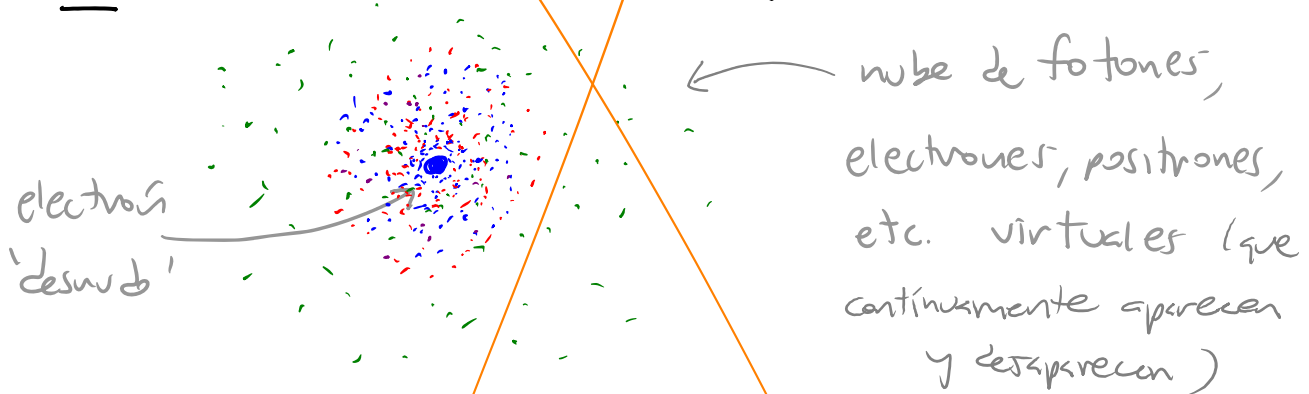
Renormalizar significa reescribir las predicciones de una teoría de campos en términos de parámetros (masas, acoplamientos, etc.) experimentalmente medibles (parámetros 'vertidos' o renormalizados), en lugar de los parámetros abstractos que figuran en  $\mathcal{L}$  (parámetros 'desnudos').

Pej., lo que en ausencia de interacciones hubiera sido el propagador de un electrón,  $\longrightarrow$ , en la teoría

Con interacciones (digamos, en QED) es reemplazado por




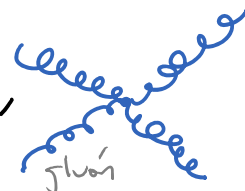
(donde la constante de acoplamiento en cada vértice es proporcional a la carga eléctrica del electrón). Es decir, en términos de los ingredientes básicos de la expansión perturbativa, debemos visualizar a una partícula física (o 'vestida') como un objeto bastante complicado,



cuyas propiedades (masa, carga eléctrica, etc.) dependen de la distancia a la cual lo examinemos.

Se dice que una teoría cuántica de campos es renormalizable si todos los predicamentos se pueden expresar en términos de un número finito de

cantidades "medibles" (p.ej., en el caso de QED, serían la masa y carga del electrón físico, así como la normalización de los campos  $A_\mu(x), e(x)$ ), y no renormalizable si hacen falta un número infinito de datos experimentales (situación que claramente no es muy feliz).

En el caso del ME, la renormalizabilidad solo nos permite tener ciertos vértices de interacción cúbicos (p.ej., ) y cuárticos (p.ej., ) .

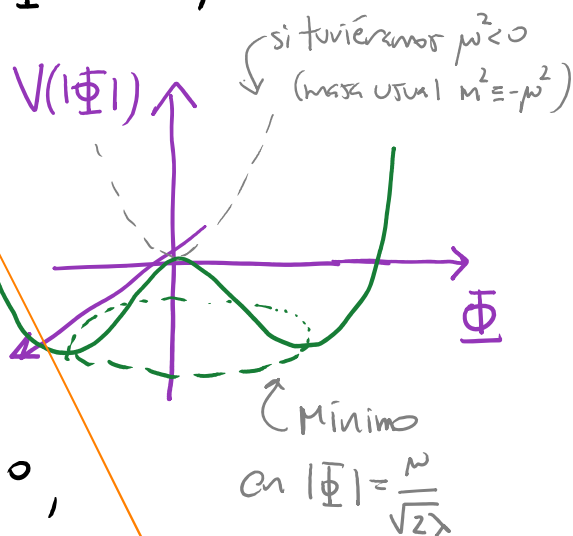
- Simetría del vacío: invariante bajo  $SU(3)_c$ , y solo bajo 1 cierta combinación de las 4 rotaciones independientes en  $SU(2)_I \times U(1)_Y$ .

Para lograr esto,  $\mathcal{L}$  incorpora

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2,$$

$\mu^2 > 0$  ( $m^2 \equiv -\mu^2 < 0$ , "taquión")

de tal forma que el valor energéticamente preferido no es  $\Phi = 0$ ,



que hubieran sido el único valor invariante bajo la simetría electrodébil. Así como la presencia de los silleros, etc. en este salón hace que no sea obvia la invariancia bajo rotaciones espaciales, al adoptar el campo de Higgs un valor esperado en el vacío,

$$\langle 0 | \hat{\Phi} | 0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

solo queda manifiesta una combinación específica de las 'rotaciones' asociadas a  $W_\mu^3$  y  $B_\mu$ .

Decimos que el vacío rompe (esconde) 'espontáneamente' la simetría electrodébil,

$$SU(2)_\pm \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{EM}.$$

La simetría remanente  $U(1)_{EM}$  tiene asociado como campo de norma a

$$A_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left( g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu \right),$$

← cter. de replamieto de  $U(1)_Y$  y  $SU(2)_\pm$

que se mantiene SIN masa. Este resulta ser el

Campo electromagnético, que se acopla a la carga

eléctrica  $Q \equiv T^3 + Y$

↖ generador de  $SU(2)_I = \begin{cases} 0 & \text{en } \frac{1}{2} \text{ de } SU(2)_I \\ \frac{\sigma^3}{2} & \text{en } \frac{3}{2} \text{ de } SU(2)_I \end{cases}$

La combinación ortogonal

$$Z_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu)$$

así como  $W^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2)$ , adquieren masas

$$m_Z = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \frac{\mu}{2\sqrt{\lambda}} \quad \text{y} \quad m_W = g_2 \frac{\mu}{2\sqrt{\lambda}} \quad . \quad \text{Este es}$$

el famoso 'mecanismo de Higgs'.

• Parámetros:

\* 3 constantes de acoplamiento  $g_1, g_2, g_3$

o, equivalentemente,  $\alpha_n \equiv \frac{g_n^2}{4\pi}$ , para interacciones asociadas a  $U(1)_Y, SU(2)_I, SU(3)_C$ , respectivamente.

(P.ej., para la interacción fuerte, la derivada

covariante  $D_\mu \equiv \partial_\mu - ig_3 T^b G_\mu^b$  ↖ suma sobre índice repetido

↖ generadores de  $SU(3)_C$  ↖ campo gluónico

da lugar a términos en el lagrangiano  $\mathcal{L}_{HE}$  como

$$g_3 \bar{\psi}_M^b \gamma^\mu T_{cc'}^b \psi_{c'}$$



$\propto g_3$ , magnitud de la carga fuerte de un quark.)

Los acoplamientos/cargas  $g_1, g_2, g_3$  de hecho no son constantes: por efecto de la nube de partículas virtuales, dependen de la energía del proceso.

Para energías  $E \gg$  masas, los acoplamientos 'corren' de acuerdo con

$$\alpha_n(E) = \frac{\alpha_n(E_0)}{1 + \frac{b_n}{2\pi} \alpha_n(E_0) \ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}$$

← energía arbitraria de referencia

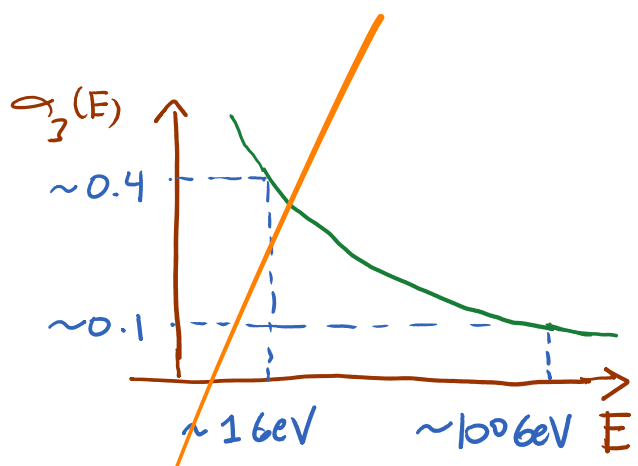
rank n de  $SU(n)$

número de fermiones en rep. fundamental

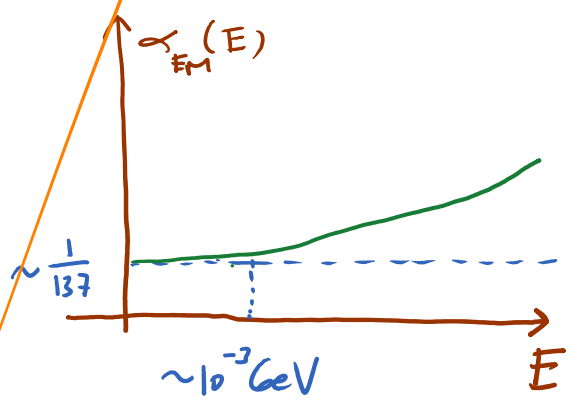
$$\text{con } b_n = \begin{cases} \frac{11}{3} \cdot 3 - \frac{2}{3} N_f & n=3 \\ \frac{11}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} N_f & n=2 \\ 0 - \frac{2}{3} N_f & n=1 \end{cases}$$

$b_n > 0 \Rightarrow \alpha_n(E) \downarrow$   
 "Libertad asintótica"  
 $b_n < 0 \Rightarrow \alpha_n(E) \uparrow$   
 "Esclavitud asintótica"

En particular,  
 - QCD se vuelve fuertemente acoplada en  $E \lesssim \Lambda_{QCD} \sim 0.2 \text{ GeV}$



- QED por sí sola se vuelve fuertemente acoplada en  $E \sim E_{\text{polo de Landau}} \sim 10^{250} \text{ GeV}$



\*  $9+3$  parámetros de masa  $m_e, m_u, \dots, m_{\nu_e}, \dots$ , que, a través de la historia del Higgs, provienen de 'acoplamiento de Yukawa' ( $\sim$  escalar  $\cdot$  fermión  $\cdot$  fermión).

P.ej.,  $m_e \bar{e} e = m_e (\bar{e}_I e_D + \bar{e}_D e_I)$  proviene de

$\sim \lambda_e (\bar{\nu}_e \bar{e})_I \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix} e_D + \text{conjugado hermitiano}$ ,

$\leftarrow$  no invariante bajo  $SU(2)_I$   
 $\leftarrow$  adquiere valor esperado  $\frac{\mu}{\sqrt{2}\lambda}$

de tal forma que  $m_e = \lambda_e \frac{\mu}{\sqrt{2}\lambda}$ .

\* 3 ángulos  $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$  y 1 fase en la llamada matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa ( $\equiv$  CKM)

o matriz de mezcla de los quarks  
 + 3 ángulos y 1 fase en la llamada matriz de  
Pontecovo-Maki-Nakagawa-Sakata ( $\equiv$  PMNS)

o matriz de mezcla de los leptones,  
 que parametrizan la relación entre los estados de  
 quarks/leptones que tienen masas bien definidas y  
 aquéllas que figuran de manera simple en la  
 interacción débil (unos son combinaciones lineales  
 de los otros).

\* 2 parámetros  $\mu$  y  $\lambda$  del potencial  $V(\Phi)$ ,  
 (o equivalentemente,

1 masa del bosón de Higgs  $m_H = \sqrt{2}\mu^2$  ↙ clásicamente

$$\left( \Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu/\sqrt{2}\lambda \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) \end{pmatrix} \right)$$

↑ valor de fondo

↑ fluctuación

y 1 masa del  $Z$   $m_Z = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \frac{\mu}{2\sqrt{\lambda}}$  ) -

Total  $\sim 3 + 12 + 8 + 2 = 25$  parámetros.



El Modelo Estándar funciona estupendamente: sus predicciones han sido confirmadas con muy alta precisión en cientos de experimentos (incluyendo, hasta ahora, los del LHC).

Aún así, tenemos claro que No puede ser la última palabra, porque posee limitaciones como las siguientes.

### "Problemas" Estéticos

- ¿Por qué  $\sim 26$  (16) campos? } ¿Acaso podemos describir el  
 - ¿Por qué 3 generaciones? } universo con menor  
 ingredientes básicos?

- ¿Por qué los  $\sim 25$  parámetros tienen los valores que tienen? P.ej.,  $\frac{m_{\nu_e}}{m_t} \sim 10^{-11}$ ,  $\frac{m_u}{m_t} \sim 10^{-5}$ ,  $\theta_{QCD} < 10^{-9}$ .

¿Explicación para números pequeños?

↗ "Problema de CP fuerte"

- ¿Por qué simetría  $M_{Dirac}$ ? ¿Acaso podemos descubrir mayor unificación de las fuerzas?

P.ej., en las Teorías de Gran Unificación (GUT), las interacciones fuerte y electrodébil se combinan en una sola,

$$SU(3)_C \times SU(2)_I \times U(1)_Y \subset SU(5), SO(10), E_8$$

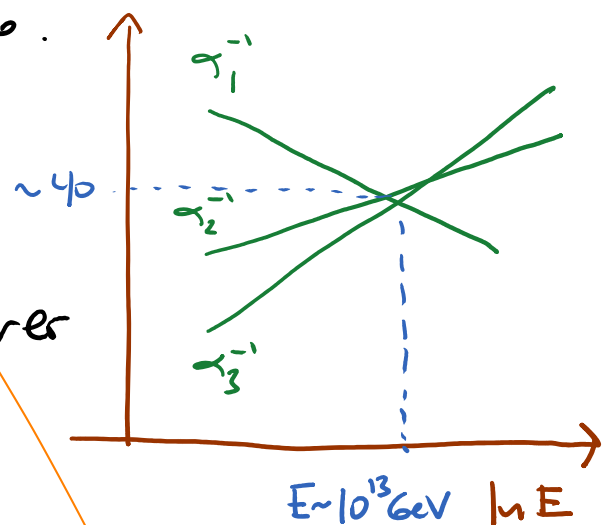
← ruptura espontánea a escala  $M_{GUT}$ .

En este caso,  $g_1, g_2, g_3$  no serían independientes.

Pej., en  $SU(5)$ ,  $g_5 = g_3 = g_2 = \sqrt{\frac{5}{3}} g_1$  a  $E = M_{GUT}$ .

El crecimiento creciente de los acoplamiento implicaría entonces que  $g_3 > g_2 > g_1$  a energías más bajas, lo cual concuerda con lo observado.

En más detalle, se encuentra que al extrapolar los valores crecientes de las  $g_n$  hacia mayores energías, casi se cruzan, con  $M_{GUT} \sim 10^{13}$  GeV.



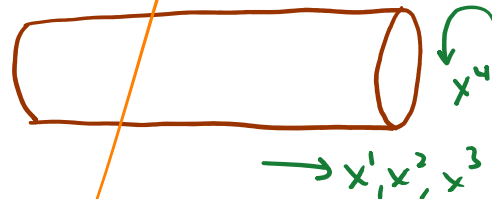
Pero no funciona del todo. (Además, el modelo  $SU(5)$  más sencillo predice decaimiento del protón demasiado rápido.)

Si somos más ambiciosos, buscaríamos unificar también con la interacción gravitacional, cuya escala característica

parece ser la escala de Planck,  $M_p = \frac{1}{\sqrt{G_N}} \sim 10^{19} \text{ GeV}$ .

Una objeción curiosa en esta dirección fue hecha por Kaluza y Klein hace 80-90 años: si postulamos la existencia de una cuerda dimensión especial que es circular con circunferencia  $2\pi R$ ,

$$x^4 \simeq x^4 + 2\pi R$$



entonces al desarrollar los campos en modos de Fourier, el momento 4 debe ser discreto,  $p_4 = \frac{n}{R}$ ,

$$\phi(x^\mu, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{n}{R}x^4} \phi_n(x^\mu)$$

↑ serie, en lugar de transformada, de Fourier

y un observador ignorante de la existencia de  $x^4$  interpretaría a cada campo 5-dimensional  $\phi(x^\mu, x^4)$  como una colección de un número infinito de campos 4-dimensionales  $\phi_n(x^\mu)$ , conocidos como modos de Kaluza-Klein (KK). Si la masa 5-dimensional es

$$m_{(5)}^2 \equiv p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 - p_4^2, \text{ entonces para el}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv m_{(4)}^2} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\left(\frac{n}{R}\right)^2}$$

observador 4-dimensional el campo  $\varphi_n$  tiene masa

$$m_{(4)}^2 = m_{(5)}^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2.$$

Si  $R$  es suficientemente pequeño, entonces solo puede detectar el modo con  $n=0$ , que es constante a lo largo de  $x^4$ . Es decir, la quinta dimensión se vuelve indetectable. (Este truncamiento se conoce como reducción dimensional.)

En el caso de campos con índices espaciotemporales, el observador 4-dimensional interpreta los diversos componentes como distintos campos, dependiendo de si el índice se toma a lo largo de las direcciones visibles  $x^\mu$  o la oculta  $x^4$ .

La importancia de esto para la gravedad es que, en el caso de la métrica que describe la dinámica del

espaciotiempo 5-dimensional,  $g_{MN}^{(5)}(x^M, x^N)$   $M, N = 0, 1, 2, 3, 4$ ,  
 el espacio 4-dimensional encuentras:

- una métrica 4-dim  $g_{\mu\nu}^{(4)}(x^\mu)$  (+ modo KK)

- un campo vectorial  $A_\mu^{(4)}(x^\mu) \sim g_{\mu 4}^{(5)}(x^\mu)$  (+ KK)

- un campo escalar  $\varphi^{(4)}(x^\mu) \sim g_{44}^{(5)}(x^\mu)$  (+ KK)

¡ Y Kaluza mostró que la dinámica de  $A_\mu^{(4)}$

coincide con la del campo electromagnético!

Esta fue la primera propuesta de unificación de la gravedad con otra fuerza fundamental. Propone más dimensiones con formas más complicadas que círculos, se pueden obtener campos de normas no abelianos.

(Desafortunadamente, la carga es precisamente  $n$ , y además no se pueden obtener teorías de normas quirales, como es el caso del Modelo Estándar.)

- Problema de Jerarquía: ¿Por qué la escala de rompimiento electrodébil,  $M_{ED} \sim 10^2 \text{ GeV}$ , es tan

ridículamente pequeña comparada con los supuestos  
escalas fundamentales  $M_{\text{cut}}$  ó  $M_P \sim 10^{13} - 10^{19}$  GeV?

Más técnicamente, esto se manifiesta como una  
situación muy poco natural en la masa del bosón  
de Higgs:

$$m_{H,\text{fis}}^2 = m_{H,0}^2 + \delta m_H^2$$

Masa física                      Masa desnuda                      Correcciones por partículas virtuales en energías arbitrariamente altas

Esperamos  $\delta m_H^2 \sim M_P^2 \sim (10^{19} \text{ GeV})^2$  o similar,  
así que para lograr  $m_{H,\text{fis}}^2 \sim (10^2 \text{ GeV})^2$ , hace falta  
una cancelación en precisión de muchos dígitos.  
(Este problema se manifiesta específicamente en el  
Higgs porque es el único campo escalar. Para  
fermiones y campos de norma, se conciben razones  
por las cuales resulta más natural que sean ligeros.)

Entre las soluciones propuestas, destacan 2:

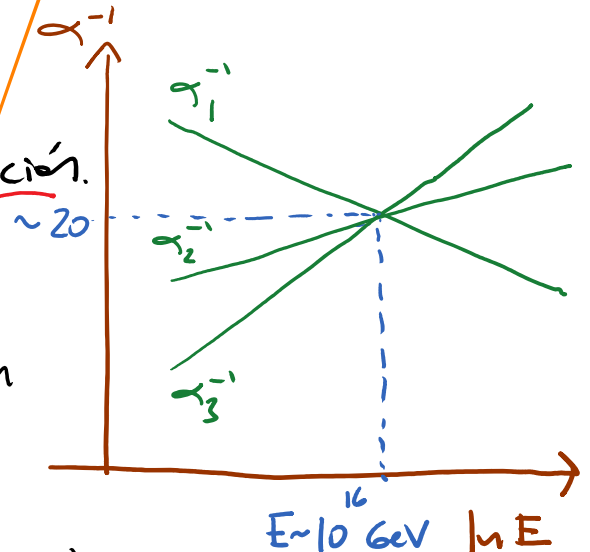
\* Supersimetría, es decir, una simetría novedosa que emparejaría bosones con fermiones. Concretamente, por cada bosón (fermión) que conozcamos existirá un fermión (bosón) que no conozcamos, conocida como su 'superpareja' (para el electrón, el selectrón; para el fotón, el fotino; etc.), y la acción será invariante bajo 'rotaciones fermiónicas' que los mezclan. Esto implica en particular que las superparejas tienen la misma masa y los mismos acoplamientos.

En este caso, las contribuciones cuánticas de bosones y fermiones  $\propto \delta m_H^2$  se cancelan (porque los lazos fermiónicos incluyen un factor de  $-1$ ), y tendríamos  $m_H^2 = m_{H,0}^2$  si la supersimetría no estuviera rota. Pero, por supuesto, tiene que estar rota a cierta escala  $M_{SUSY} > M_{ED}$  (porque no hemos visto aún a las superparejas) y tendríamos entonces  $\delta m_H^2 \sim M_{SUSY}^2$ .

De este modo, resolvemos el problema de jerarquía si  $M_{SUSY} \sim 1 \text{ TeV} = 10^3 \text{ GeV}$ .

Como regalo adicional, la supersimetría (SUSY) mejora las perspectivas de las teorías de Gran Unificación.

P.ej., en la versión SUSY de SU(5), se encuentra un acuerdo perfecto entre los acoplamiento (y el decaimiento del protón puede ser suficientemente lento.)

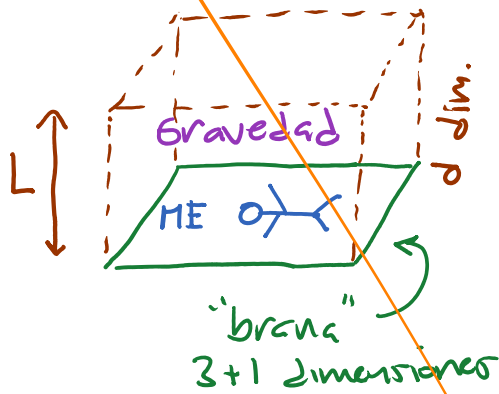


Y encima, la SUSY es un buen candidato para explicar la materia oscura (que explicaremos más adelante). ¡Así que resolvemos 3 problemas por el precio de 1!

Desafortunadamente, los resultados de LHC hasta ahora van haciendo cada vez más difícil que exista SUSY con  $M_{SUSY} \sim 1-10 \text{ TeV}$ .



\* Mundo Brana: se propone la existencia de  $d$  dimensiones adicionales que son empíricamente grandes ( $L \lesssim 0.1 \text{ mm}$ ), en las que solo se propaga la gravedad, y NO las partículas del Modelo Estándar.



En este caso, la ley de Newton sería

$$F_{\text{grav}} = \begin{cases} G_N^{(4)} \frac{mm'}{r^2} & r \gg L \\ G_N^{(4+d)} \frac{mm'}{r^{2+d}} & r \ll L \end{cases}$$

y  $G_N^{(4)}$  y por lo tanto  $M_p^{(4)}$  serían escalares derivados, no fundamentales:

$$S_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G_N^{(4+d)}} \int d^4x d^d y \sqrt{-g^{(4+d)}} R^{(4+d)}$$

Einstein-Hilbert  
(ver p. 50)

$\uparrow$  determinante de la métrica  $4+d$        $\uparrow$  escalar de curvatura  $4+d$  ( $\sim \partial\partial g^{(4+d)}$ )

$$= \frac{L^d}{16\pi G_N^{(4+d)}} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} R^{(4)}$$

$\uparrow$   $\det g_{\mu\nu}^{(4)}$        $\leftarrow$  escalar de curvatura en 4 dim

$$\equiv \frac{1}{16\pi G_N^{(4)}}$$

Con este escenario se puede tener para la  
 verdadera escala de Planck  $M_p^{(4+n)} \sim 1-10 \text{ TeV}$ , con  
 lo cual desaparecería el problema de jerarquía.

Desafortunadamente, hasta ahora los resultados del  
 LHC no han encontrado indicios en este  
 sentido.

Claramente, ninguno de estos (y otros) problemas  
 "estéticos" del ME hacen indispensable buscar una  
 nueva teoría.

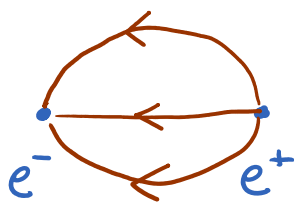
### • Problemas "Prácticos"

- ¿Cómo entender a la interacción fuerte a bajas energías?

Recordar que en QCD (parte  $SU(3)_c$  de ME),  $\alpha_3(E) \gtrsim 1$  para  
 $E \lesssim \Lambda_{\text{QCD}} (\sim 200 \text{ MeV})$ . Relacionado con esto, nunca  
 observamos quarks o gluones de manera individual,  
 sino confinados dentro de hadrones (mesones,  
 bariones, glubals, etc.) ¿Cómo podemos describir  
 confinamiento / desconfinamiento de manera cuantitativa?

Numéricamente, QCD en la red nos permite hacer muchos cálculos exactos (p.ej., masas del protón, etc.); pero no en situaciones dinámicas (p.ej., amplitudes de dispersión). Y en cualquier caso, preferiríamos comprensión analítica.

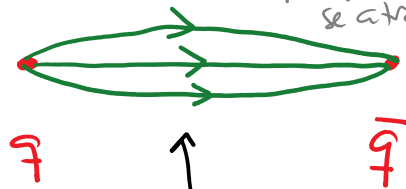
Una manera intuitiva de entender el confinamiento es a partir de las líneas de flujo del campo gluónico:



Líneas se espacian porque fotones no interactúan entre sí

en QED vs.

Líneas glomeras porque gluones sí se atraen



Tubo de flujo

Esto sugiere que, en alguna aproximación, los hadrones podrían quizás entenderse en términos de objetos unidimensionales — la llamada cuerda de QCD. Este fue el origen histórico de la teoría de cuerdas (~ finales de los años 60 y principios de los 70), como un intento (pre-QCD) de entender la interacción fuerte. (Casi 30 años

más tarde, retomamos esta meta gracias a la "Correspondencia holográfica" o "norma/gravedad").

- ¿Cómo incorporar las masas y ángulos de mezcla de los neutrinos?
- ¿El Higgs es fundamental o compuesto? ¿Existen uno o varios?

De nuevo, ninguno de estos problemas "prácticos" hace indispensable (hasta ahora) ir más allá del ME.

### Problemas Fundamentales

- ¿Definición de la interacción U(1) (y la interacción cuántica del Higgs) a altas energías?

Recordar que  $\alpha_1(E)$  crece con la energía, de tal modo que eventualmente la teoría se vuelve fuertemente acoplada. ¿En verdad está bien definida (y en particular, es renormalizable) a nivel no perturbativo?

(Notar que la situación análoga en QCD NO pone en riesgo la definición de la teoría, porque en ese caso el acoplamiento fuerte ocurre a distancias grandes.)

- ¿Cuál es la composición de la materia oscura?

Solo alrededor de la 6ta. parte del contenido de las galaxias y los cúmulos de galaxias (detectada a través de su influjo gravitacional) es materia ordinaria (bariónica). El resto,  $\sim 23\%$  del contenido energético del universo, es materia oscura "fría" (es decir, no relativista), que a lo más siente la interacción débil. No está hecha de los neutrinos del MF. Podría quizás estar hecha de las partículas supersimétricas más ligeras (del tipo conocido genéricamente como "neutralino").

- ¿Cuál es la naturaleza de la energía oscura?

Nuestro universo se encuentra en una fase de expansión acelerada, por efecto de su componente

dominante ( $\sim 73\%$ ), con tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu} \sim -\rho_{\Lambda} g_{\mu\nu}$  (densidad de energía  $\rho_{\Lambda} > 0$ , pero presión  $-\rho_{\Lambda} < 0$ ). Parece deberse directamente a la famosa constante cosmológica  $\Lambda$ , o a la energía potencial de un campo escalar. En cualquier caso, representa esencialmente la energía del "vacío".

Hemos visto ya (p.10) que desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos, el vacío tendría naturalmente una energía debido a las fluctuaciones de punto cero de todos los osciladores de todos los campos existentes. (Además, podría haber una energía, también  $\propto \eta_{\mu\nu}$ , asociada al campo de Higgs; al "condensado quiral" en QCD, responsable de la ruptura de la "simetría quiral"; etc.) El misterio entonces no es por qué  $\rho_{\Lambda} \neq 0$ , sino por qué detectamos un valor tan pequeño.

$$\text{ii } \rho_{\Lambda}^{\text{obs}} \sim (10^{-12} \text{ GeV})^4 \sim 10^{-124} M_{\text{P}}^4 \quad !!$$

(La SUSY implicaría cancelaciones entre las energías de punto cero de bosones y fermiones; pero de cualquier manera estaría rota a  $M_{\text{SUSY}} \gtrsim 10^3 \text{ GeV}$ , ¡y se tiene  $\rho_{\Lambda}^{\text{obs}} \sim 10^{-60} M_{\text{SUSY}}^4$ !)

- ¿Descripción cuántica de la gravedad??

A nivel macroscópico, la gravedad se describe a través de la

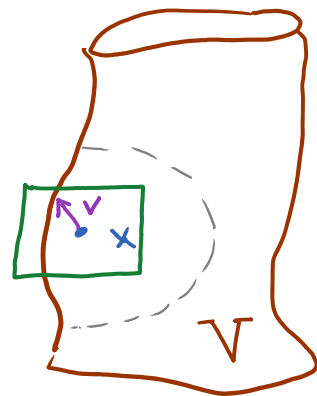
Relatividad General, donde el espaciotiempo es una variedad

diferenciable  $V$  (donde es posible definir coordenadas locales  $x^{\mu}$   $\mu=0,1,\dots,D-1$ , y los vectores son esencialmente desplazamientos infinitesimales:

$v^{\mu}$  es un vector en  $x$  si bajo  $x \rightarrow x'(x)$  se tiene

$$v^{\mu} \rightarrow v'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \Big|_x v^{\nu}$$

métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  (noCIÓN de producto interno



$V \cdot W \equiv \int_{\mu\nu} V^\mu W^\nu$ , y de convertir vectores a vectores duales (covectores) y viceversa:

$V_\mu \equiv g_{\mu\nu} V^\nu$ ,  $V^\mu \equiv g^{\mu\nu} V_\nu \equiv (g^{-1})^{\mu\nu} V_\nu$ , que codifica las distancias, ángulos y estructura causal (distinción entre tiempo y espacio) sobre  $V$ .

La métrica nos permite definir una derivada

covariante

$$\nabla_\mu t^\nu_\lambda \equiv \partial_\mu t^\nu_\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu t^\sigma_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma t^\nu_\sigma,$$

usando los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}).$$

La información esencial sobre la curvatura está contenida en el tensor de Riemann ( $\sim [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ )

$$R_{\mu\nu\rho}^\sigma \equiv \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma$$

$$\sim \partial\partial g + \dots$$

Las ecuaciones de Einstein,



$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G_N T_{\mu\nu}$$

$\underbrace{R_{\mu\nu}}_{\text{tensor de Ricci}} \equiv R_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda$ 
 $\uparrow$ 
 $\underbrace{R}_{\text{escalar de curvatura}} \equiv R_\lambda{}^\lambda$ 
 $\uparrow$ 
 $T_{\mu\nu}$  (Tensor de energía-momento (o energía-esfuerzos))

determinan la dinámica del campo gravitacional.

Si lado izquierdo (el "tensor de Einstein") se

obtiene al variar la acción de Einstein-Hilbert

$$S_E \equiv \frac{1}{16\pi G_N} \int d^D x \sqrt{-g} R$$

$\underbrace{\int d^D x \sqrt{-g}}_{\text{elemento de volumen invariante}}$ 
 $\uparrow \equiv \det g_{\mu\nu}$

y el lado derecho, de variar la acción de la materia,

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

A nivel microscópico, al menos ingenuamente pensaríamos que hay que cuantizar la métrica. Para esto existen cuando menos 2 perspectivas:

I) Un particulero ve en primera instancia a  $g_{\mu\nu}(x)$  como un campo más, que puede separarse en un valor de fondo y pequeñas fluctuaciones,

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{G_N} h_{\mu\nu}(x)$$

Fondo: espacio plano (p.ej.)

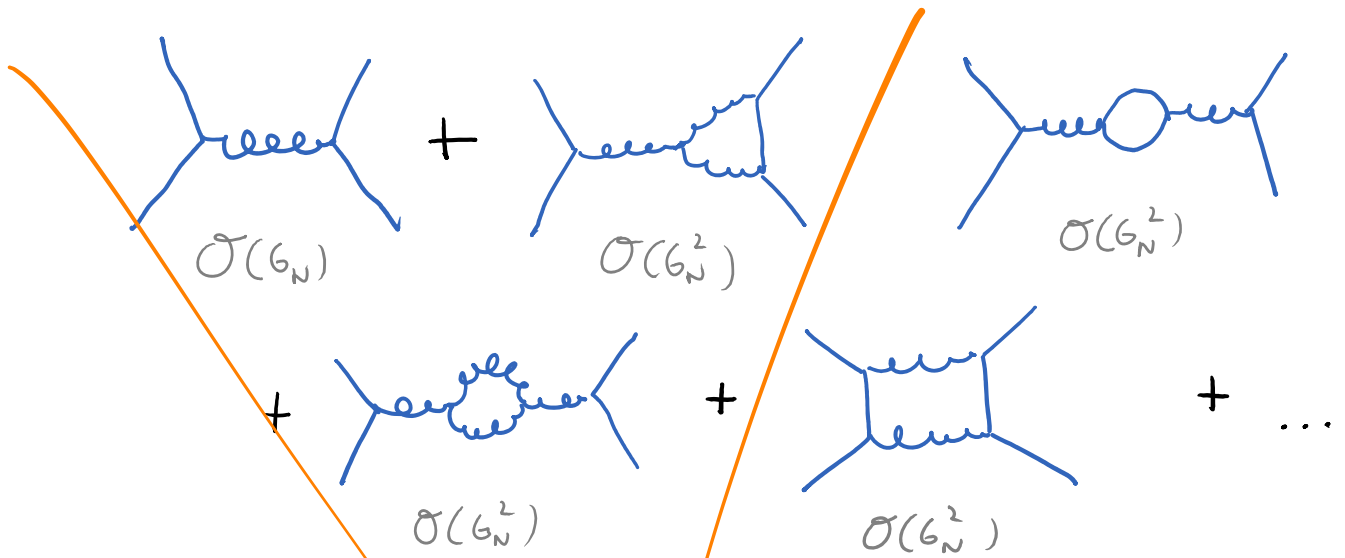
Fluctuación: campo del gravitón

Se tiene entonces

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$$

$$\sim \int d^4x (\underbrace{\partial h \partial h}_{\text{partícula de espín 2 sin masa}} + \underbrace{\sqrt{G_N} h \partial h \partial h}_{\sim \sqrt{G_N}} + \dots + \underbrace{\partial \varphi \partial \varphi}_{\text{—}} + \underbrace{\sqrt{G_N} h \partial \varphi \partial \varphi}_{\sim \sqrt{G_N}} + \dots)$$

Con estos ingredientes podemos concebir diagramas de Feynman. P.ej., la amplitud de dispersión por 2 partículas de materia estanca cada por



En realidad  $\sqrt{G_N}$  no es por sí sola la constante de acoplamiento, porque tiene dimensión de  $(\text{masa})^{-1}$  (o  $(\text{masa})^{-\frac{D-2}{2}}$  en  $D$  dimensiones). Lo relevante es la combinación adimensional

$$g_N \equiv G_N E^2 = \left( \frac{E}{M_p} \right)^2 \quad (G_N E^{D-2}).$$

↑ es la energética característica del proceso

Con esto vemos que  $g_N \ll 1$  cuando  $E \ll M_p$ , lo cual explica por qué la gravedad es despreciable en nuestros aceleradores de partículas (¡a menos que vivamos en un mundo brana, y  $M_p \sim 1-10 \text{ TeV}$ !).

Pero  $g_N$  crece a altas energías (mucho más

rápido que  $g_1(E)$  de  $U(1)_Y$ , y la teoría resulte ser No renormalizable (al menos perturbativamente). Es decir, para extraer predicciones sensibles se requieren un número infinito de datos experimentales, relacionados con los parámetros  $c_i$  en la acción extendida

$$S \sim \int d^4x \sqrt{-g} \left( R + c_1 G_N R^2 + c_2 G_N R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_3 G_N^2 R^3 + \dots \right. \\ \left. + \text{constantes similares en } \mathcal{L}_{\text{mat}} \right).$$

¿Qué podría implicar la no renormalizabilidad perturbativa de la relatividad general? Hay básicamente 2 posibilidades:

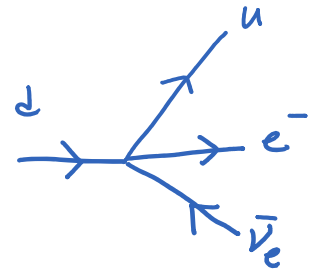
a) La teoría es solo "efectiva", es decir, es una aproximación útil a bajas energías, pero no captura correctamente la física existente a energías  $E \gtrsim M_p$ .

Existe un antecedente histórico: para describir

pej. el decaimiento del neutrón,  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ,  
udd uud

Fermi postuló un vértice cúbico de campos fermiónicos, que en lenguaje moderno sería

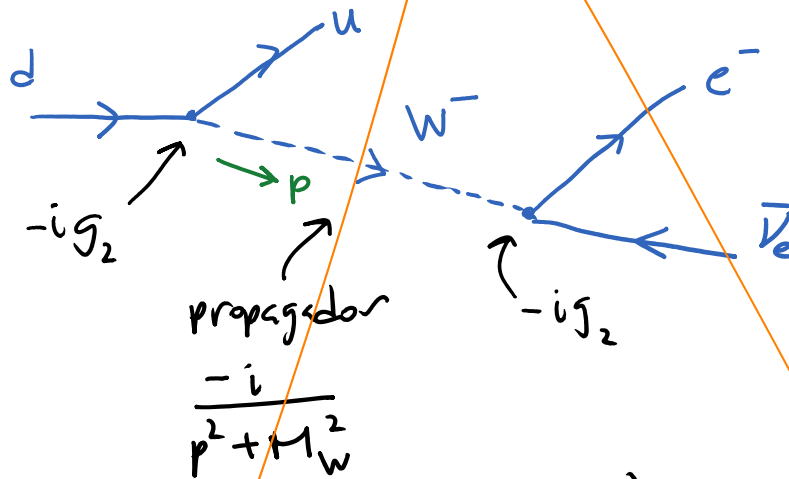
$$\sim \int d^4x G_F (\bar{u}_I \gamma^\mu d_I) (\bar{e}_I \gamma_\mu \nu_{eI}) \leftrightarrow$$



↑ constante de Fermi  $\sim 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$

↑ notar:  $(\text{mass})^{-2}$ .

Esto es una buena aproximación a bajas energías, pero es no renormalizable, y fue reemplazado por acoplamiento cúbico  $SU(2)_I$  del Modelo Estándar:

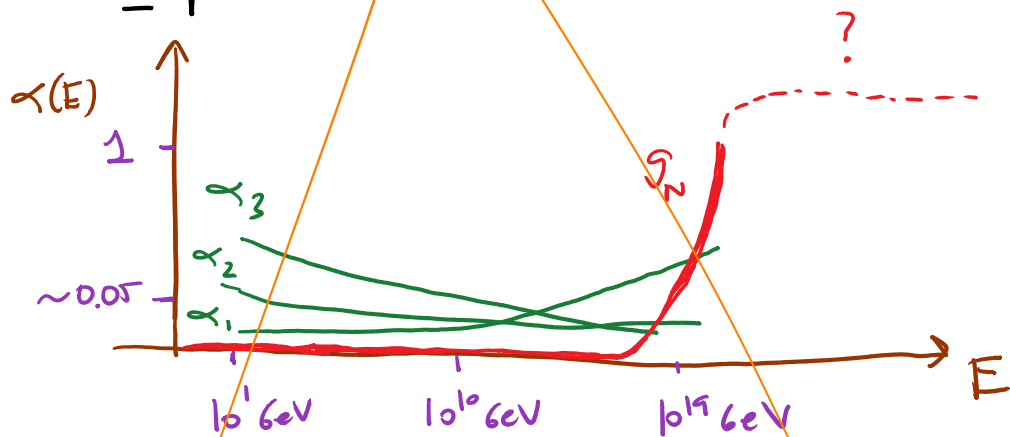


$$\left. \frac{g_2^2}{p^2 + M_W^2} \right\} \rightarrow \begin{cases} \sim \frac{g_2^2}{M_W^2} \sim G_F \text{ para } p^2 \ll M_W^2 \\ \sim \frac{g_2^2}{p^2} (\ll G_F) \text{ para } p^2 \gg M_W^2 \end{cases}$$

Es decir, a la escala  $M_W \sim 10^2 \text{ GeV} \sim \frac{1}{\sqrt{G_F}}$  existen nuevos efectos físicos que 'ablandan' la interacción, de tal modo que ya es (perturbativamente) renormalizable.

Quizás algo similar podría ocurrir para la gravedad (aunque no algo idéntico, porque en RG el vértice problemático ya es cúbico).

b) Quizás es solo el análisis perturbativo el que es inútil; pero la teoría si está bien definida a nivel no perturbativo:



Es decir, las correcciones en la región de acoplamiento fuerte podrían ser tan drásticas que la teoría acabe estando bien definida para energías arbitrariamente altas. Técnicamente,

el comportamiento regular es lo que se conoce como un "punto fijo" ( $\sim$  invariancia bajo rescalamiento) UV (es decir, a altas energías). Este es el programa conocido como "seguridad asintótica" ("asymptotic safety") [Ver, p.ej., arXiv:1110.6389]. Por culpa del acoplamiento fuerte, es difícil hacer un análisis muy contundente.

L2: 05/02/13

II) Un relativista enfatiza desde un principio que la gravedad no es una interacción, sino una manifestación de la geometría del espaciotiempo. La métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  no es entonces un campo más - define el propio espaciotiempo, y en particular la estructura causal, sobre la que viven los otros campos.

Lo que necesitamos entonces es cuantizar al espaciotiempo, preferiblemente en un formalismo que (como la Rel. Gral.) sea independiente del fondo (por lo menos hasta cierto punto). Es decir, no es deseable

cuantizar a una fluctuación  $h_{\mu\nu}(x)$  ( $\Leftrightarrow$  gravitón) que se propaga sobre un fondo (p.ej. Minkowski) preexistente. Quisiéramos que el valor de fondo de la métrica sea un concepto derivado de la teoría. Esto nos obliga a buscar un enfoque No perturbativo.

La pregunta básica es entonces ¿qué es un espaciotiempo cuántico? ¿Necesitamos aprender a definir campos en una variedad diferencial SIN métrica? ¿O podría quizás haber fluctuaciones incluso en la topología a distancias pequeñas ("espumas cuánticas")? ¿O algo todavía más novedoso?

Esperáramos que la teoría fuera invariante bajo difeomorfismos (cambio de coordenadas sobre la variedad). Esto origina al menos 2 problemas:

- i) Las observables tendrán que ser necesariamente no locales. ¿Cuál son? ¿Cómo recuperamos la física local en el límite semiclásico?
- ii) La evolución temporal  $t \rightarrow t + \delta t$  es un difeo,



así que todo estado físico debe ser invariante bajo la acción del generador correspondiente, el Hamiltoniano  $\hat{H}$  ( $\hat{H}|fis\rangle = 0$  es una construcción que define a los estados físicos).

¿Cómo definiremos entonces al tiempo?

Además, ¿qué significa hablar de "la función de onda del universo"? ¿Le falta modificar la mecánica cuántica para resolver el "problema de la medición"?

Por todas estas razones, formular una teoría de gravedad cuántica es una empresa conceptual y técnicamente muy complicada. Pero claramente es necesaria: resulta indispensable para entender el origen del universo y las propiedades de los agujeros negros, y, en sentido estricto, incluso para entender cualquier región del espacio a nuestro alrededor, a nivel de su estructura microscópica.

Se cree que las propiedades de los agujeros negros constituyen una pieza importante en la búsqueda de la gravedad cuántica.

Concretamente, a partir de un análisis de teoría cuántica de campos en el fondo curvo fijo de un hoyo negro, Hawking mostró que estos objetos NO son completamente negros, sino que emiten radiación como cuerpos calientes, con temperatura

$$T_H = \frac{\hbar K}{2\pi} \leftarrow \text{"gravedad superficial"}$$

Esto, combinado con una estrecha analogía entre las leyes clásicas de agujeros negros (provenientes de la RG) y las leyes de la termodinámica, condujo a la conclusión de que los hoyos negros tienen también una entropía

$$S_{BH} = \frac{A_h}{4\hbar G_N} \leftarrow \text{área del horizonte}$$

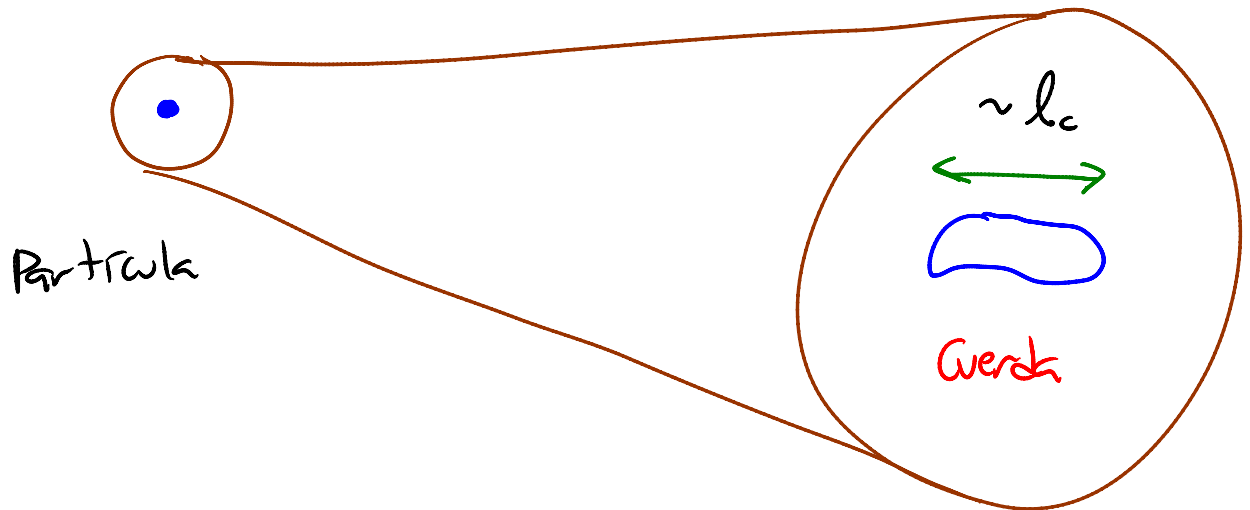
~~Se considera que cualquier teoría que pretenda dar una descripción cuántica de la gravedad debe ser capaz de reproducir estos resultados con un conteo explícito (mecánica-estadística) de estados microscópicos. (Y de paso, debería resolver la llamada "paradoja de la información" asociada a la evaporación del agujero negro.)~~

Con este panorama, estamos por fin listos para preguntarnos ¿qué es una teoría de cuerdas?

La respuesta corta: ¡no sabemos! (Se encuentra todavía en construcción. Conocemos pedazos interesantes, pero no tenemos una definición completa.)

La respuesta larga: es una generalización de las teorías cuánticas de campo, cuyo punto de partida es proponer que las excitaciones básicas no son ya partículas (objetos 0-dimensionales), sino cuerdas (objetos 1-dimensionales), que podemos visualizar

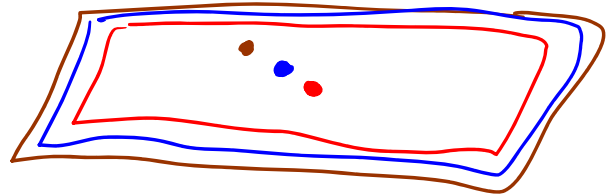
como 'ligas' infinitesimalmente delgadas, que tienen una cierta longitud característica  $l_c$  (en inglés,  $l_s$ ):



Semejante objeto podría, además de moverse como un todo, oscilar en un número infinito de maneras distintas (análogas a las distintas notas de una cuerda de violín). En una descripción cuántica, cada uno de estos modos de vibración resulta tener las propiedades básicas de un tipo específico de partícula (masa, espín, carga). Así que, a partir de lo que en realidad es 1 solo tipo de cuerda, ¡obtenemos lo que parecen ser un número infinito de partículas!

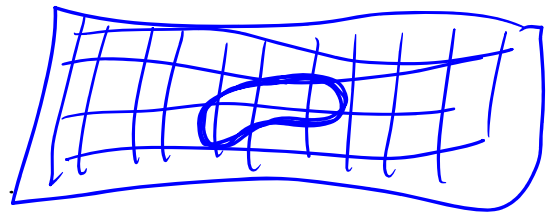
Es importante resaltar que, así como entendemos que las partículas de cada tipo son pequeñas 'onditas' en una 'gelatina' determinada (el campo asociado), las cuerdas representan igualmente pequeñas fluctuaciones de una especie de 'gelatina' mucho más complicada, que es básicamente lo que llamamos el "campo de cuerdas".

En esencia, la propuesta de la teoría de cuerdas es entonces



reemplazar al espaciotiempo y a los campos usuales (p.ej., los del Modelo Estándar)

por un solo 'multicampo'



('multigelatina') con excitaciones unidimensionales.

~~¿Qué ganamos con esta sencilla pero rara modificación?~~

## ~~I) Virtudes de la Teoría de Cuerdas~~

- ~~1) Predicción (o, en realidad, 'retro-dicción') de la existencia de la gravedad: al intentar describir consistentemente~~

a una cuerda cuántica relativista,  
 (Mecánica cuántica usual)  $\uparrow$   $\uparrow$  (Relatividad especial) usual)

se encuentra automáticamente que uno de sus modos de oscilación tiene masa cero, espín 2, y participa en precisamente los procesos básicos que dan lugar a la Relatividad General. Es decir la teoría de cuerdas necesariamente incluye a un gravitón, una 'ondita' en la métrica.

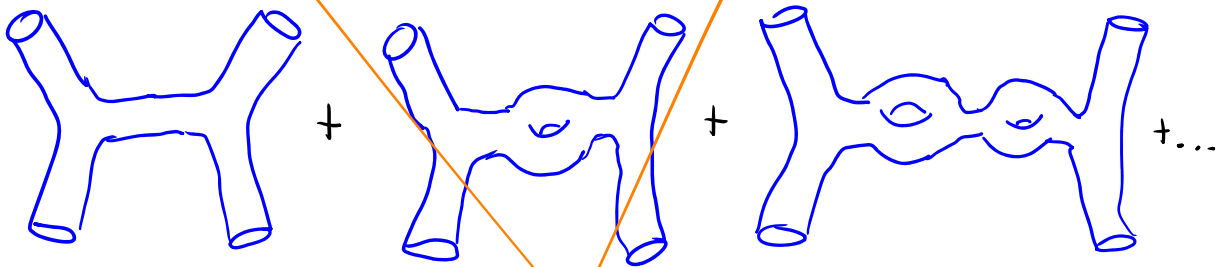
Esto explica por qué afirmamos que el propio espaciotiempo es parte del 'campo de cuerdas'.

2) descripción consistente de la gravedad cuántica

(desarrollada por particulares) : resuelve el problema de la no renormalizabilidad de la gravedad a través de la existencia de nueva física — la idea nueva es que, a la escala energética  $M_c \equiv 1/l_c$ , nos damos cuenta de que el gravitón no es en realidad una partícula, sino apenas un modo de vibración de una cuerda.

En este sentido, se han realizado avances en los 2 niveles requeridos:

i) A nivel perturbativo, la teoría de cuerdas resuelve por completo el problema de cuantizar la gravedad. Existe expansión perturbativa sensata en 'diagramas de Feynman',



(que podría describir, p.ej., a 2 electrones interactuando a través del intercambio de gravitones). El parámetro adimensional que controla la expansión (y  $\therefore$  codifica la propensión de las cuerdas a 'dividirse' en 2) se conoce como la **constante de acoplamiento de cuerdas**,  $g_c$  (o en inglés,  $g_s$ ). Por supuesto, la expansión perturbativa es útil solo si  $g_c \ll 1$ . Y, al igual que en campos, la expansión perturbativa no converge, lo cual indica que existen efectos no perturbativos.

ii) A nivel no perturbativo, en las últimas 2 décadas se han realizado avances importantes. A pesar de que NO tenemos todavía la última palabra, se han encontrado indicios que sugieren que la teoría de cuerdas podría en verdad resolver por completo el problema de la gravedad cuántica:

- A través de diversas 'dualidades' ( $\equiv$  equivalencias entre teorías aparentemente distintas), hemos podido entender algunas propiedades de la teoría fuertemente acoplada,  $g_c \gg 1$ .
- Hemos logrado entender algunas propiedades microscópicas (entropía, probabilidad de absorción, radiación de Hawking) de ciertas clases de agujeros negros — los objetos paradigmáticos de la Relatividad General.
- Tenemos propuestas para una definición no perturbativa de la teoría, que parecen indicar que la noción usual de espaciotiempo es solo una aproximación válida a 'bajas' energías.



A pesar de estos indicios, No tenemos aún una descripción completa y manifiestamente independiente del fondo (en el sentido más amplio).

Existen por supuesto propuestas alternativas para cuantizar la gravedad. En este tema la principal competencia de las cuerdas es la teoría conocida como Gravedad Cuántica de Lazos (desarrollada por relativistas). Su objetivo es cuantizar solo a la relatividad general en 3+1 dimensiones, de manera no perturbativa. Su principal logro ha sido desarrollar un formalismo manifiestamente 'independiente del fondo', donde la geometría del espaciotiempo está cuantizada (de tal manera que las áreas y los volúmenes solo pueden tomar ciertos valores discretos). Se han conseguido también avances en la descripción microscópica de los agujeros negros. A la fecha, la principal limitación de esta propuesta es que no ha sido todavía capaz de describir estados donde el espaciotiempo esté solo levemente

curvado, como sucede a nuestro alrededor. Vale la pena también tener en mente que si bien entendemos perfectamente que a 'bajas' energías ( $E \ll M_p$ ) es una buena aproximación describir a las interacciones del Modelo Estándar despreciando a la gravedad, no resulta obvio que exista algún límite en el cual sea útil cuantizar solamente a la gravedad, sin tomar en cuenta a las otras interacciones...

- 3) Al cuantizar a las cuerdas, se encuentran modos de oscilación que tienen masa cero, espín 1 y las propiedades necesarias para poder describir a las partículas mensajeras de las interacciones del Modelo Estándar. En este contexto, es posible obtener de manera natural algunas propuestas de teorías de Gran Unificación (GUTs).
- 4) Se pueden obtener también estados de vibración de la cuerda con masa cero y espín  $\frac{1}{2}$ , es decir, fermiones como los bloques básicos de materia en el Modelo Estándar.

Existe también manera de obtener ingredientes del tipo de el (o los) Higgs, así que la teoría de cuerdas pudiera QUÍZAS reproducir todos los ingredientes del Modelo Estándar, ¡¡a partir de **1 solo componente básico** !!

5) La teoría de cuerdas incorpora naturalmente la existencia de la supersimetría, y ¡¡ una posible solución al problema de jerarquías, un fuerte candidato para la materia oscura, etc. (Pero, No predice necesariamente que la escala de supersimetría  $M_{SUSY} \sim 1-10 \text{ TeV}$ . )

6) La teoría de cuerdas 'predice' la existencia de 6 (ó 7) dimensiones adicionales. Para esconderlas, debemos postular que son muy pequeñas (como en el "mundo branquero" propuesto por Kaluza y Klein) o que vivimos en un "mundo brana" (idea que de hecho emergió de la teoría de cuerdas de manera natural).

Lo interesante es que, aún después de esconderlas, las dimensiones extra pudieran influenciar indirectamente la física que conocemos. P.ej., la existencia de 3 generaciones,

podría deberse a la 'forma' (topología) de las dimensiones adicionales.

7) La teoría de cuerdas no tiene ningún parámetro adimensional libre. En particular, la constante de acoplamiento de cuerdas,  $g_c$ , resulta estar determinada por el valor de fondo de un campo escalar, el "dilaton"  $\varphi(t, \vec{x})$  (que como todo lo demás es parte de la 'multijeta' que llamamos "campo de cuerdas"), a través de  $g_c = e^{\varphi}$ .

(Como ya mencionamos, existe 1 solo parámetro dimensional, la longitud de cuerdas  $l_c$ , pero esto simplemente representa una elección de unidades básicas.)

Quizás será posible entonces que la teoría de cuerdas predijera el valor de los  $\sim 25$  parámetros libres del Modelo Estándar (aunque, a la fecha, esto no parece muy probable).

8) Con el paso de los años se fueron descubriendo distintas teorías de cuerdas (IIA, IIB, I, Heterótica  $SO(32)$  ó  $E_8 \times E_8, \dots$ )

pero en 94-95 se entendió que, sorprendentemente, todas ellas son en realidad parte de una teoría única, que tiene el nombre provisional de "Teoría M" (por magia, misterio, membrana, madre, matriz, ...).

Con esto terminamos nuestra enumeración de las propiedades atractivas de las cuerdas. Por supuesto, la teoría presenta también, al menos en su estado actual, algunas limitaciones...

## II) Problemas Abiertos de la Teoría de Cuerdas

- 1) No tenemos aún una definición no perturbativa (es decir, completa) de la teoría que sea general (e, idealmente, manejable). Los avances que nos llevaron a descubrir el hecho de que la teoría es única también nos enseñaron con claridad que las cuerdas no son en realidad los grados de libertad fundamentales! Después de más de 25 años de estudiarla intensamente,

nuestro objetivo central sigue siendo responder a la pregunta ¿qué es la teoría de cuerdas? y más concretamente ¿de qué están hechas las cuerdas??

A la fecha, la avenida más prometedora para responder esta pregunta es la llamada correspondencia holográfica (o 'norma/gravedad' o 'AdS/CFT'), la cual establece una muy sorprendente equivalencia entre teorías cuánticas CON y SIN gravedad, y borra la frontera entre las teorías de cuerdas y las teorías de campos (nos dice que las primeras son, esencialmente, versiones drásticamente resuscitadas de las segundas).

- 2) ¿Cómo podemos obtener una descripción manifiestamente 'independiente del fondo', donde el espaciotiempo sea un concepto 'emergente'? Nuevamente, nuestra mejor apuesta a la fecha es la correspondencia norma/gravedad.
- 3) Al menos a nivel perturbativo, existe un enorme número de soluciones a las ecs. de mov. de cuerdas, que determinan

los 'valores de fondo' de los diversos campos (incluyendo a la métrica). Al igual que en la Relatividad General, cada solución representaría un posible universo. ¿Cuántas y cuáles de las soluciones aproximadas que tenemos corresponden a soluciones exactas? ¿1? ¿300? ¿ $10^{500}$ ?

4) Quisiéramos encontrar al menos 1 solución que a 'bajas' energías ( $E \ll M_c$ ) reproduzca exactamente al Modelo Estándar (+ pequeñas correcciones), para hacer contacto definitivo con la física que conocemos.

A pesar de que se conocen muchas soluciones con estructuras muy parecidas al Modelo Estándar (incluyendo, p.ej., el grupo de norma  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  y 3 generaciones de fermiones quirales), no se tiene aún ninguna que esté en total acuerdo con la lista completa de ingredientes y el valor de los  $\sim 25$  parámetros requeridos.

5) Nos falta conocer el mecanismo de ruptura de la supersimetría (existen varias propuestas).

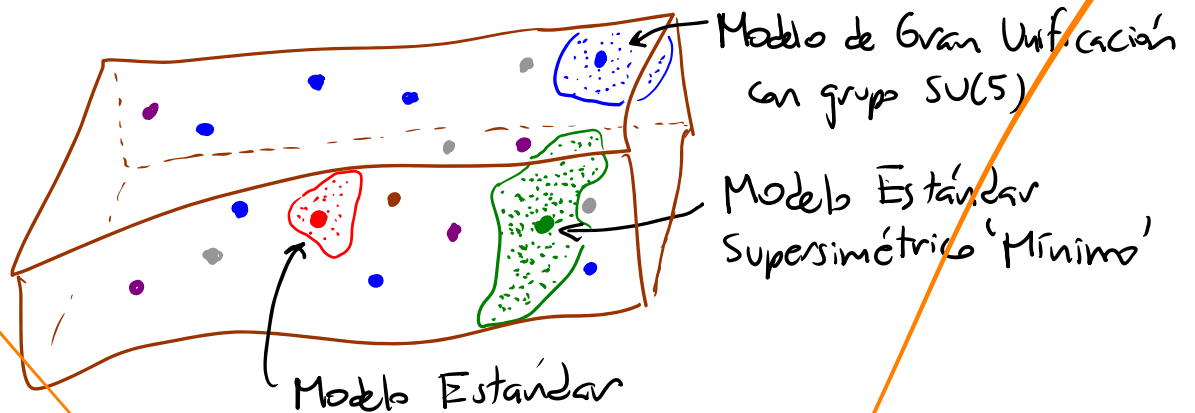
6) Nos falta entender mejor a las dimensiones adicionales.  
¿Por qué 4 visibles + 6 (o 7) ocultas? ¿Existe algún mecanismo que fije su forma y tamaño?

7) NO hay todavía predicciones experimentales definitivas. Esto se debe en parte a que, como hemos dicho, la teoría está todavía en etapa de desarrollo. Pero, en lo que respecta a la falta de predicciones, hace falta aclarar un frecuente malentendido...

Para ello, recordemos que al definir una teoría de partículas/campos, se tiene una gran (aunque no total) arbitrariedad: hace falta elegir a mano la dimensión del espaciotiempo, el tipo y número de campos que se incluyen, las simetrías, los valores de masas, constantes de acoplamiento, etc.

El conjunto de todas las teorías de partículas/campos posibles es entonces un espacio de dimensión infinita:

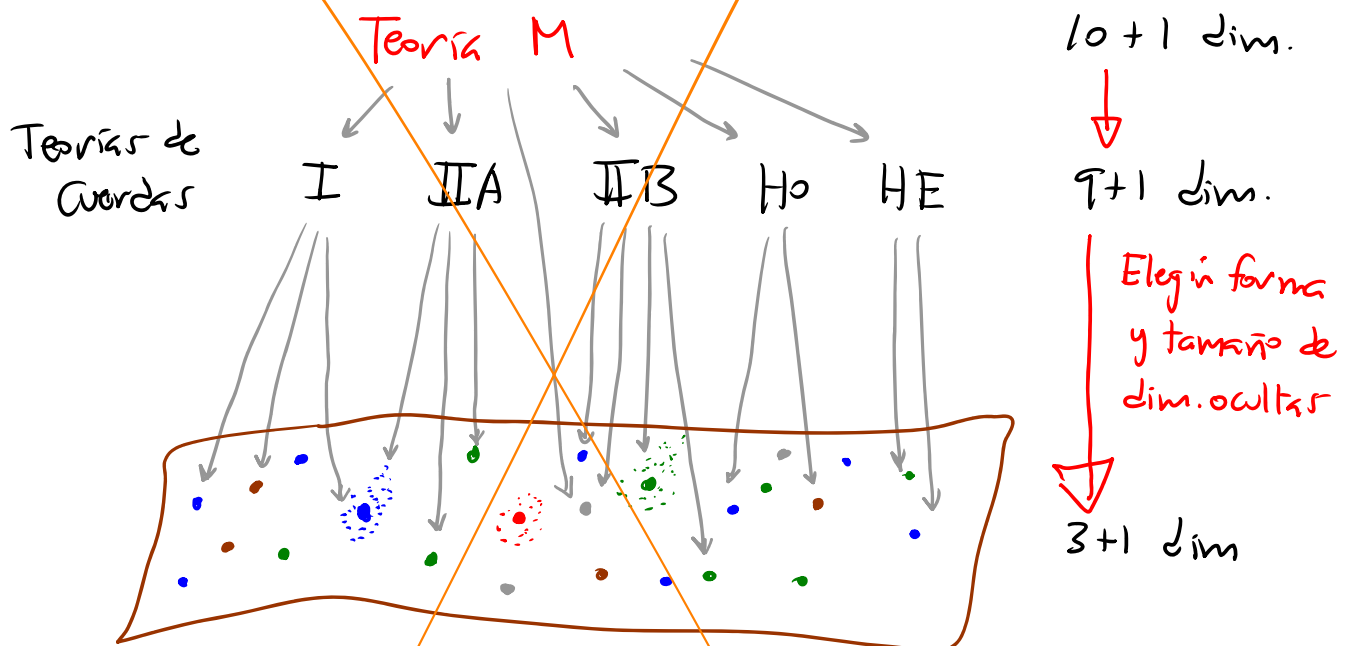




Es solo después de elegir un punto específico en este espacio (lo cual requiere en particular seleccionar valores específicos de los diversos parámetros de la teoría en cuestión) que podemos hacer predicciones detalladas capaces de ser comparadas con datos experimentales. Algunas veces es posible también hacer predicciones más genéricas que aplican a toda una clase de teorías. Y existe solo un número muy limitado de propiedades genéricas que aplican incluso a todas las teorías de particular posibles: la existencia de antipartículas, la conexión espín-estadística y la 'invariancia CPT.'

Ahora, ¿cómo se compara la situación en aerías?  
 En ese caso la teoría es única, pero tiene muchas soluciones.  
 Para intentar hacer contacto con la física que observamos,

debemos escoger a mano aquellas soluciones en las cuales las dimensiones adicionales están escondidas de algún modo. El punto a resaltar es que, después de hacer una elección específica, obtenemos un modelo que, a 'bajas' energías, coincide con una cierta teoría de partículas específica:



De esta manera, podemos sin duda seguir haciendo física tal como la hemos hecho hasta ahora: una vez que hemos elegido a mano todo lo que hay que elegir, tenemos un modelo concreto de nuestro universo, que sí hace predicciones específicas, y puede por tanto ser validado o refutado por los datos experimentales. Lo que NO tenemos (paradoja)

son predicciones completamente genéricas. Pero el punto que estamos enfatizando es que, por lo menos al nivel de conocimiento actual, querer refutar/confirmar experimentalmente la teoría de cuerdas completa es análogo a querer descartar/validar todas las teorías de partículas (campos) juntas. Solo será posible si eventualmente obtenemos predicciones verdaderamente genéricas, o si encontramos que en realidad existen solo unas pocas soluciones exactas.

A nivel de la física en  $3+1$  dim. y a 'bajas' energías, la 'fenomenología' de cuerdas es esencialmente un subconjunto de la 'fenomenología' de particular. En este contexto, la teoría de cuerdas debe ser entendida simplemente como un nuevo lenguaje teórico, análogo al lenguaje general de la teoría de campos (en lugar de a un ejemplo específico como el Modelo Estándar), que resulta útil para construir modelos unificados de la estructura microscópica de nuestro universo, incluyendo a la gravedad, a partir

~~de un conjunto sencillo de principios (no de resultados!)~~

Resumiendo todo lo dicho hasta aquí: en su vertiente 'fenomenológica', la teoría de cuerdas es a la fecha nuestro más prometedor candidato para obtener lo que arrogantemente se llama una

"teoría de todo".

Pero es importante señalar que, independientemente de si eventualmente logra o no alcanzar esta ambiciosa meta, en el transcurso de los años ha desarrollado ya una vertiente 'teórica' de enorme utilidad, constituyéndose en un conjunto de herramientas que han hecho ya contacto con un buen número de ideas y problemas importantes de la física teórica moderna (teoría de norma, acoplamiento fuerte, supersimetría, gran unificación, agujeros negros, mundos brana, no conmutatividad,  $N$  grande, cosmología... ) e incluso matemáticas.

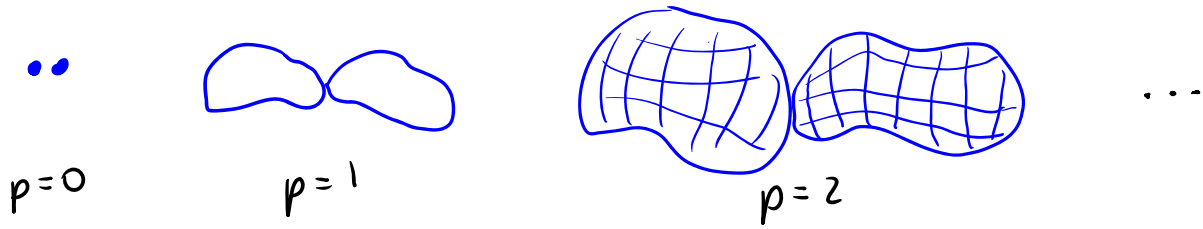
Estos 'logros teóricos' son a mi juicio la principal razón por la cual la teoría de cuerdas ha sido intensamente

estudiada durante más de 25 años.

( Y lo que es más, una en particular de estas herramientas, la ya mencionada correspondencia holográfica, parece capaz de ayudarnos a entender a al menos primas de QCD en el régimen de acoplamiento fuerte, o a teorías de campo similares a algunos sistemas de materia condensada.)

Por último, podemos plantearnos una pregunta que resulta bastante natural: si estamos dispuestos a considerar que los objetos básicos pudieran no ser 0-dimensionales (partículas), sino 1-dimensionales (cuerdas), ¿por qué no contemplar también la posibilidad de que fueran en realidad 2-dimensionales ('membranas'), o más en general,  $p$ -dimensionales ('p-branas')?

Entre mayor sea el valor de  $p$ , más "blandas" serán las interacciones, en el sentido de que el punto donde un objeto básico hace contacto con otro es cada vez de menor importancia en comparación con el objeto en su conjunto:



Pero por otro lado, a mayor  $p$  el objeto básico tendrá más grados de libertad intrínsecos, de tal forma que los casos  $p \geq 2$  resultan muy difíciles de cuantizar.

En este sentido las cuerdas ( $p=1$ ) son el caso óptimo.

A pesar de ello, sabemos desde hace casi 2 décadas que

• La teoría "de cuerdas" (Teoría M) incluye p-branas con  $p=0,1,\dots,9$  que están todas emparentadas entre sí a través de 'dualidades'.

• Las "cuerdas" son membranas enrolladas en  $x^{10}$ ; las "Dp-branas" se describen con cuerdas...  
¿Teoría de Branas??

En este curso nos enfocaremos en la descripción de la teoría de cuerdas (mayormente bosónica) en la aproximación perturbativa. En el camino, nos toparemos con los objetos no perturbativos conocidos como D-branas. Las dualidades, otras braneras y la Teoría M tendrán que esperar al siguiente semestre.

# 1. Cuerdas Básicas I

## \* Partículas Puntuales

Para describir a una partícula relativista libre a nivel cuántico, existen 2 caminos distintos:

① Cuantizar un campo (lo que, por razones históricas, se hace a veces como "segunda cuantización")

Los grados de libertad básicos (en el ejemplo de espín 0)

$$\text{son } \varphi(x) \equiv \varphi(x^\mu) \equiv \varphi(t, \vec{x})$$

↪ tiempo y espacio entran en el mismo pie

y su dinámica se describe

en la acción (de Klein-Gordon)

$$S[\varphi] = \int d^D x \left( -\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right)$$

↪ con patines (serif):  
convención para  
la acción en el  
espaciotiempo  $\int d^D x$

$$\equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \quad \text{en fondo plano}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$$

En las pp. 5-16, hemos visto cómo, al cuantizar este campo canónicamente  $(\varphi, \pi \rightarrow \hat{\varphi}, \hat{\pi})$ , se obtienen estados con un número arbitrario de partículas, y es

posible calcular el propagador de Feynman

$$G(x, x') \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') \} | 0 \rangle$$

↑ orden temporal

↑ vacío: estado sin partículas

↙ incluye  $\int d p^0$

$$= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{i p \cdot (x - x')} \frac{-i}{p^2 + m^2}$$

↙  $-(p^0)^2 + \vec{p}^2$

Feynman descubrió un método alternativo de cuantización, que da los mismos resultados que la cuantización canónica: la llamada cuantización por integral funcional o integral de trayectorias, que usaremos mucho en este curso.

~~En este método, No utilizamos operadores:  $\varphi(x)$  (y  $\Pi(x)$ ) es en todo momento una función ordinaria. Lo que Feynman mostró es que la evolución temporal se puede reexpresar en la forma~~



$$\langle \varphi_f(\vec{x}) | e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} | \varphi_i(\vec{x}) \rangle = N \int \mathcal{D}\varphi(x) e^{iS[\varphi]}$$

de. de normalización

$\varphi(t_f, \vec{x}) = \varphi_f(\vec{x})$   
 $\varphi(t_i, \vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})$

$\int_{t_i}^{t_f} \int d^{D-1}x \mathcal{L}$

donde  $\int \mathcal{D}\varphi(x)$  denota una integral "sobre todas las funciones  $\varphi(x)$ ". Más concretamente, sabemos que si discretizamos el espaciotiempo en

p.ej. una red con espaciamiento  $\epsilon$ ,

$$x_n^\mu \equiv \epsilon n^\mu \quad n^\mu \in \mathbb{Z}^D$$

y consideramos el espacio dentro de

una caja  $(D-1)$ -dimensional de

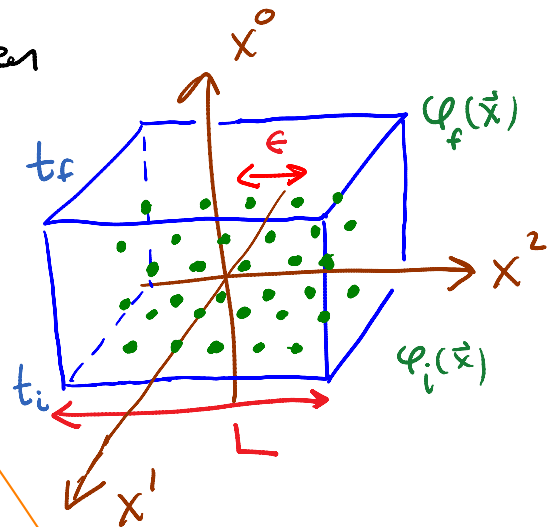
lado  $L$ , nuestro campo  $\varphi(x^\mu)$  se reduce a un

número grande pero finito de datos  $\varphi_n \equiv \varphi(x_n^\mu)$ .

Definimos la integral funcional (o de trayectorias,

o de caminos) sobre  $\varphi(x)$  como una integral múltiple

$$\int \mathcal{D}\varphi(x) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} \prod_{n^\mu} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_{n^\mu} = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_2 \dots$$



(y de la mano de esto, en el integrando escribiremos la acción en versión discretizada).

NOTA: Siendo más precisos, la anterior fórmula para la evolución temporal, que involucra a la "versión lagrangiana" de la integral funcional,  $\int \mathcal{D}\varphi \exp[i \int d^D x \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \nabla\varphi)]$ , es válida solo cuando el Hamiltoniano del campo es cuadrático en el momento  $\Pi$ , con un coeficiente que es independiente del campo. Lo que es válido en total generalidad es la "versión Hamiltoniana"

$$\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\Pi \exp[i \int d^D x (\Pi \dot{\varphi} - \mathcal{H})].$$

Cuando nos topamos con una integral con inserciones como  $\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(x') e^{iS[\varphi]}$ , esperamos alguna conexión con una expresión en el lenguaje canónico que involucra a los operadores correspondientes  $\hat{\varphi}(x)$  y  $\hat{\varphi}(x')$ . Pero éstos en general no conmutan, así que debe ser que la integral funcional hace contacto con los operadores en cierto orden específico.

~~Se puede mostrar que se trata del orden temporal,  
y más en detalle, que la fórmula para funciones de  
correlación en términos de la integral de trayectorias  
(sea libre o no la teoría) es~~

$$G_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \} | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned} & \begin{array}{l} \text{Condiciones} \\ \text{inicial/final} \\ \text{se cancelan} \end{array} \rightarrow \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) e^{iS[\varphi]} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{L}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]}} \end{aligned}$$

En particular, en la teoría libre se encuentra que

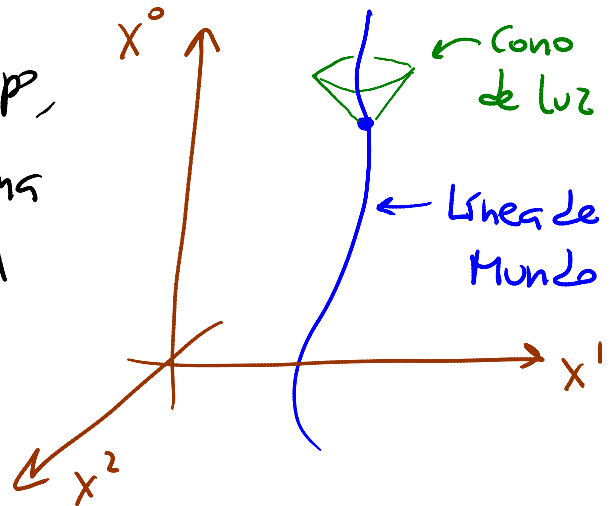
$$\begin{aligned} G_2(x, x') &= \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(x') e^{i \int d^D x \frac{1}{2} \varphi (\partial^2 - m^2) \varphi}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^D x \frac{1}{2} \varphi (\partial^2 - m^2) \varphi}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{integral} \\ \text{gaussianas} \\ \text{(es básicamente} \\ \text{la única que} \\ \text{sabemos hacer!)} \end{array} \\ &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot (x-x')} \frac{-i}{p^2 + m^2}, \end{aligned}$$

en acuerdo con el propagador de Feynman (libre) que  
escribimos en la p. 16 (y p. 81). Veremos ahora otro  
camino por el cual podemos recuperar este resultado.

[3: 12/02/13]

## ② Cuantizar una partícula ("primera cuantización")

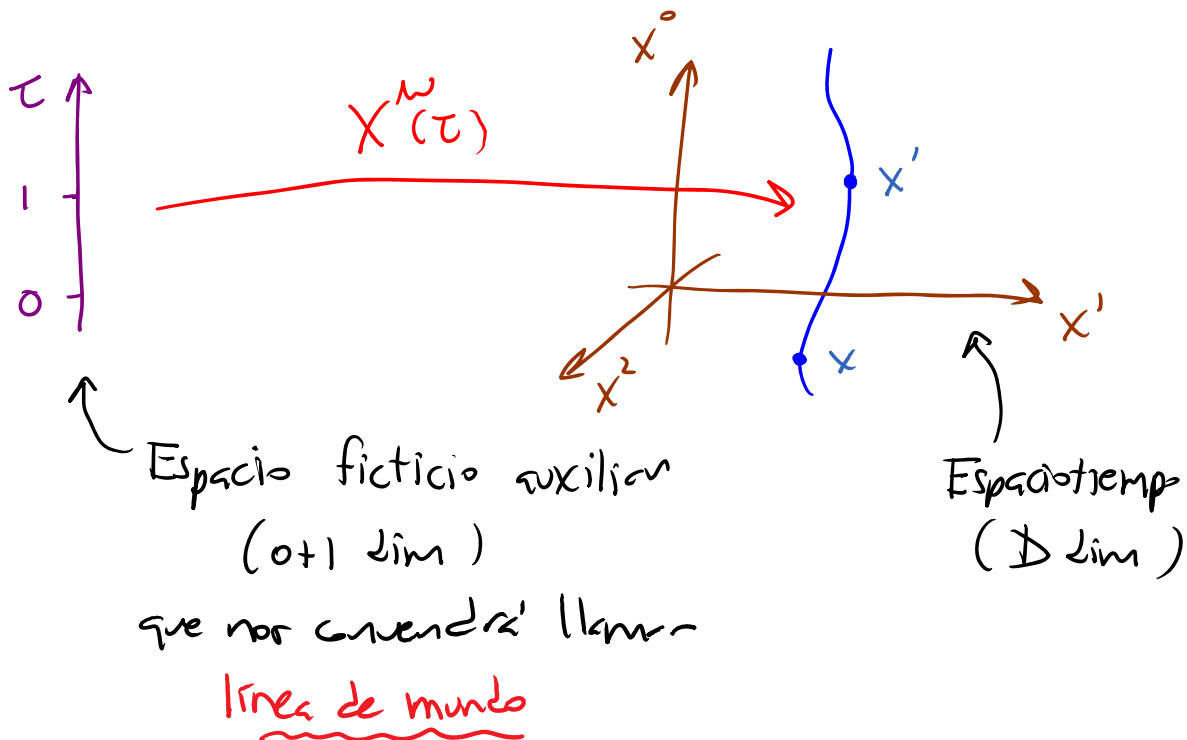
Conforme transcurre el tiempo, una partícula clásica traza una curva (tipo tiempo) en el espaciotiempo, que se conoce como su línea de mundo.



Podemos describirla especificando la función  $\vec{X}(x^0)$  en un sistema de coordenadas dado (p.ej., inercial), pero esta descripción no es covariante bajo cambios de coordenadas (p.ej., bajo transformaciones de Lorentz), porque trata a  $x^0$  de manera distinta a  $\vec{X}$ .

Podemos obtener una descripción manifiestamente covariante si nos inventamos un parámetro auxiliar (arbitrario)  $\tau$  para etiquetar a los distintos puntos a lo largo de la línea de mundo, y especificamos la trayectoria de la partícula dando  $X^\mu(\tau)$ :

$\tau$  y  $\vec{X}$  en el mismo pie



Ojo con nuestra notación:  $x^\mu$  minúscula denota un punto cualquier en el espaciotiempo, y  $X^\mu$  mayúscula denota a las funciones que describen el encaje de la línea de mundo de la partícula en el espaciotiempo.

La acción de la partícula relativista libre es

$$S[X] = -m \int dt \sqrt{1 - (\partial_t \vec{x})^2}$$

$$= -m \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu}$$

$\tau = X^0 = t$

sin paréntesis  
(sans serif): convención  
para acción en líneas de mundo  $\int d\tau$

$\hat{=}$  0, más en general,  $g_{\mu\nu}(X(\tau))$

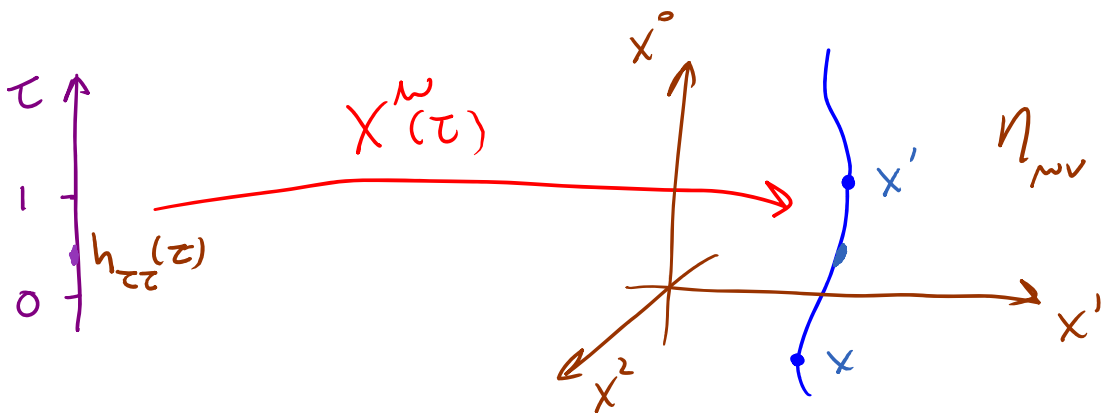
$$= -m \times (\text{tiempo propio})$$

$$= -m \int d\tau \sqrt{-h} \equiv \det h_{\tau\tau} = h_{\tau\tau}$$

"volumen" invariante (p.50)

con  $h_{\tau\tau}(\tau) \equiv \eta_{\mu\nu} \partial_{\tau} X^{\mu} \partial_{\tau} X^{\nu}$  la métrica inducida

sobre la línea de mundo, es decir, la retracción (pullback) de la métrica  $\eta_{\mu\nu}$  del espaciotiempo:



$S[X]$  es invariante bajo Poincaré (= Lorentz + traslaciones),

$$X^{\mu}(\tau) \rightarrow X'^{\mu}(\tau) = \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu}(\tau) + b^{\mu}, \quad \eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$$

(o más en general, bajo cambios de coordenadas arbitrarios en el espaciotiempo,

$$\partial_\tau X^\mu \rightarrow \partial_{\tau'} X'^\mu = \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu} \partial_\tau X^\nu \quad \text{vector } \equiv \text{tensor de rango } (1,0)$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\lambda}{\partial X'^\mu} \frac{\partial X^\rho}{\partial X'^\nu} g_{\lambda\rho} \quad \text{tensor } (0,2)$$

y también bajo cambios de coordenadas en la línea de mundo,  $\tau \rightarrow \tau'(z)$

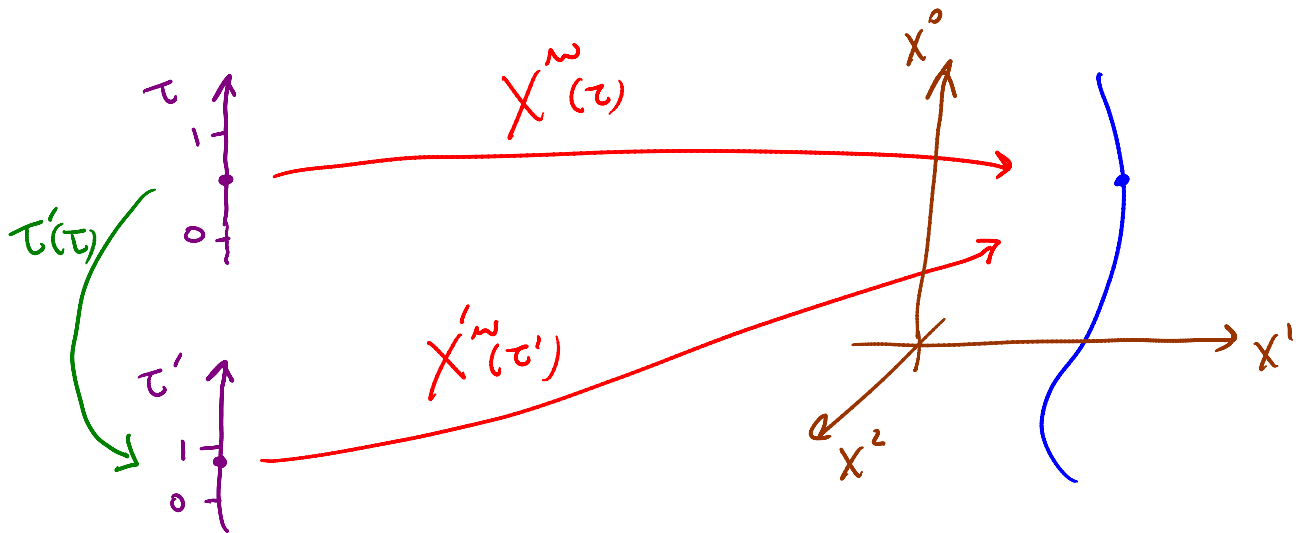
$$X^\mu(z) \rightarrow X'^\mu(\tau') = X^\mu(z) \quad \text{escalar}$$

$$\Rightarrow \partial_\tau X^\mu \rightarrow \partial_{\tau'} X'^\mu = \frac{\partial \tau}{\partial \tau'} \partial_\tau X^\mu \quad \text{vector dual} \\ \equiv \text{tensor } (0,1)$$

Ésta es una simetría local desde el punto de vista de la línea de mundo, y  $\therefore$  tenemos una teoría de norma, es decir, una teoría redundante, con más variables que grados de libertad físicos, como resultado de haber promovido el tiempo  $t$  a una variable  $X^0(z)$ . (Es bien conocido que QED, QCD y el ME son también teorías de norma, redundantes por usar p.ej.  $A_\mu(x)$  para describir a las 2 polarizaciones transversales físicas.)

El punto aquí es simplemente que  $X^\mu(z)$  y  $X'^\mu(\tau') = X^\mu(z)$  son 2 funciones diferentes que describen

la misma trayectoria física:



Que tengamos esta redundancia por supuesto no es sorprendente: es el precio que pagamos por haber inventado el parámetro  $\tau$  para lograr una descripción covariante.

La redundancia que vemos en  $S[X^\mu(\tau)]$  es simplemente un recordatorio de que, entre las  $D$  funciones  $X^\mu(\tau)$  que usamos, solo  $D-1$  representan grados de libertad físicos.

Esto genera novedades al cuantizar. Si queremos hacerlo canónicamente, necesitamos primero calcular los momentos conjugados

$$P_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\tau X^\mu)} = + \frac{m \partial_\tau X_\mu}{\sqrt{-(\partial_\tau X)^2}} .$$



Podemos notar aquí que no todos los  $p_\mu$  son independientes, puesto que satisfacen la constricción ("de primera clase")

$$p^2 \equiv p_\mu p^\mu = -m^2$$

$\uparrow$  conmutan bajo paréntesis de Poisson

Esta es por supuesto la esperada "condición de capa de masa" (mass shell), que nos dice que, dado  $\vec{p}$ , conocemos  $p^0$  (y NO podemos despejar  $\dot{X}^\mu(p)$ ).

Podemos ahora calcular el Hamiltoniano,

$$H \equiv p_\mu \dot{X}^\mu - L = \frac{m \dot{X}_\mu \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} - (-m\sqrt{-\dot{X}^2}) = 0!$$

Esto nos dice que la evolución en  $\tau$  NO está determinada de manera única, lo cual es razonable porque  $\tau$  es un invento.

Tenemos ahora una disyuntiva: podemos primero eliminar la redundancia y después cuantizar, o primero cuantizar y después eliminar la redundancia. La primera opción requiere "fijar la norma", es decir,

imponer una condición que elimine la redundancia, especificando de una vez por todas una elección de  $\tau$ .  
 Pej., podemos decir que  $X^0 = \tau$ . En este caso volvemos a la situación familiar (desde mecánica cuántica no relativista): solo quedan como variables dinámicas  $\vec{X}(t)$ , cuantizamos imponiendo

$$[\hat{X}^i, \hat{p}^j] = i \delta^{ij},$$

de modo que una base para nuestro espacio de Hilbert está dada por  $\{|\vec{p}\rangle\}$ , y obtenemos la evolución temporal esperada a partir de

$$S = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{\vec{X}}^2}$$

$$\begin{aligned} \leftrightarrow H &= \underbrace{\vec{p}}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{X}}}} \cdot \dot{\vec{X}} - L = \frac{m \dot{\vec{X}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{X}}^2}} \cdot \dot{\vec{X}} - (-m \sqrt{1 - \dot{\vec{X}}^2}) \\ &= \frac{m}{\sqrt{1 - \dot{\vec{X}}^2}} = \underbrace{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}_{\equiv E_{\vec{p}}} \neq 0. \end{aligned}$$

La segunda opción es cuantizar con todo y redundancia, promoviendo las  $D$  variables  $X^\mu$  y sus momentos  $p_\mu$  a operadores, e imponiendo

$$[\hat{X}^\mu, \hat{P}_\nu] = i \delta_{\nu}^{\mu} \quad \leftarrow \text{delta de Kronecker} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases},$$

o lo que es lo mismo,

$$[\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu] = i \eta^{\mu\nu} \quad \leftarrow \text{métrica inversa} = \begin{cases} -1 & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ 1 & \text{si } \mu = \nu = i \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}.$$

Una base para nuestro espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es entonces

$$|p\rangle \equiv |p^\mu\rangle \quad \text{tal que} \quad \hat{P}_\nu |p\rangle = p_\nu |p\rangle.$$

Esta descripción es manifiestamente covariante bajo Lorentz, pero el precio que pagamos es que  $\mathcal{H}$  es demasiado grande: la mayoría de los estados que contiene NO son físicos.

Para distinguir los que sí son físicos, debemos imponer la constricción ("de primera clase")  $p^2 + m^2 = 0$  a nivel cuántico, exigiendo que

$$\boxed{(\hat{p}^2 + m^2) |fís\rangle = 0}.$$

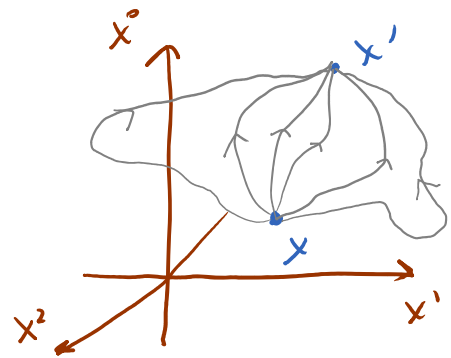
(Esto es análogo a la cuantización "de Gupta-Bleuler" para QED en la norma de Lorentz, si acaso la conoces.)  
 Los estados físicos forman entonces parte de un espacio de Hilbert reducido  $\mathcal{H}_{\text{fís}}$  con base dada por  $\{ |E_{\vec{p}}, \vec{p}\rangle \}$  (si elegimos  $p^0 = +E_{\vec{p}}$  en lugar de  $-E_{\vec{p}}$ , como condición física adicional, que claramente es covariante bajo Lorentz), de modo que recuperamos la física correcta.

En este esquema, es importante tener presente que la evolución temporal importante no es con respecto a  $T$  (arbitrario), sino a  $X^0$  (en algún marco de referencia elegido), a través del operador de traslación en el espaciotiempo  $\exp(i\hat{p} \cdot X)$ . Al calcular el propagador, obtenemos el resultado esperado.

Es posible también cuantizar a  $X^\mu(z)$  por medio de la integral de trayectoria. Siguiendo a Feynman, esperaríamos que el propagador libre

está dado por

$$G_2(x', x) \sim \int_{X^w(0)=x^w}^{X^w(1)=x'^w} \mathcal{D}X^w(z) e^{iS[X]}$$

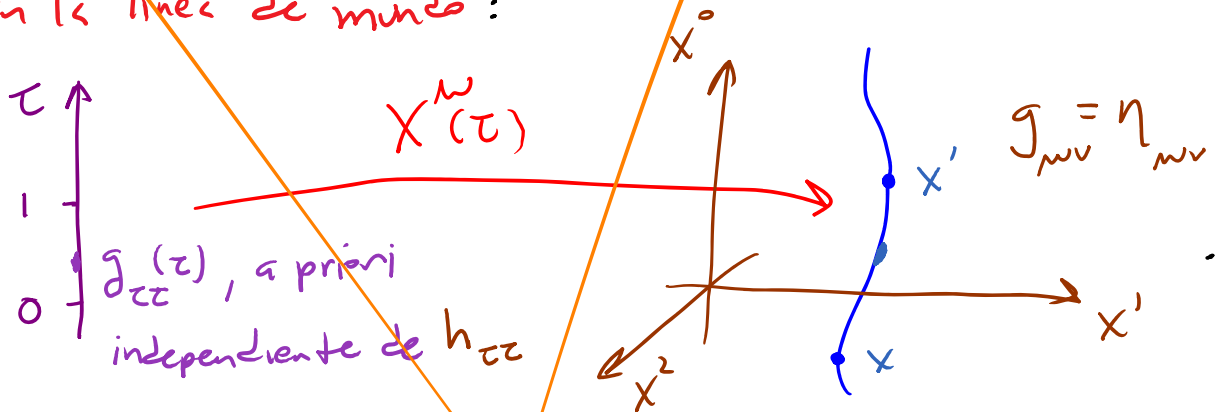


Notar que las variables de integración son claramente distintas a las que tenemos en la descripción en "segunda cuantización",  $\int \mathcal{D}\phi(x)$ . Desde la perspectiva de la línea de mundo, podemos de hecho interpretar a la expresión de arriba como una teoría cuántica de campos en 0+1 dimensiones, con  $D$  "campos" escalares  $X^m$ .

A través de un análisis un poco largo, se puede recuperar el propagador conocido (p. 81) a partir de este integral  $\int \mathcal{D}X^m$ . Para no alentar demasiado, aquí solo resaltaremos los pasos principales (una descripción detallada puede encontrarse p.ej. en [Polyskov, cap. 9]).

Un primer obstáculo es que  $\int \mathcal{D}X^m e^{iS[X]}$  no es

una integral gaussiana. Para remediar esto, conviene inventarse una nueva variable auxiliar  $g_{zz}(z)$  (no confundir con  $g_{\mu\nu}(x)$ ), que juega el papel de métrica intrínseca en la línea de mundo:



(Bajo  $z \rightarrow z'(z)$ , se tiene entonces

$$g_{zz}(z) \rightarrow g'_{zz}(z') = \frac{\partial z}{\partial z'} \frac{\partial z}{\partial z'} g_{zz}(z) \quad \text{tensor } (0,2).$$

Con ella podemos reescribir la acción de la partícula de modo que sea covariante en  $X$ :

$$\bar{S}[X, g] = -\frac{m}{2} \int dz \sqrt{-g_{zz}} \left( g^{zz} \partial_z X^\mu \partial_z X_\mu + 1 \right)$$

$\uparrow \equiv (g_{zz})^{-1}$

(Es habitual escribir esto en términos no de  $g_{zz}$ ,

sino de la "unopata", "mónada" o "einbein"  $e \equiv \sqrt{-g_{zz}}$ .)

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 unopata              tetrada              vierbein      en  $D=4$

Esta acción es también invariante bajo Poincaré (más en general, bajo difeos en espaciotiempo) y bajo reparametrizaciones en la línea de mundo, y es equivalente a  $S[X]$  en el sentido de que la ecuación de movimiento para  $g_{zz}(z)$  (que aparece sin derivadas, y es por tanto un "campo" no dinámico),

$$\frac{\delta \bar{S}}{\delta g_{zz}} = \partial_z \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial (\partial_z g_{zz})} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial g_{zz}} = 0$$

$\uparrow$  "derivada funcional"

$\swarrow$  Ecuación algebraica

$$\Rightarrow + \frac{1}{2} (-g_{zz})^{-3/2} \partial_z X^\mu \partial_z X_\mu + \frac{1}{2} (-g_{zz})^{-1/2} = 0$$

$$\Rightarrow g_{zz} = + \partial_z X^\mu \partial_z X_\mu \equiv h_{zz}$$

$\uparrow$  métrica intrínseca                       $\uparrow$  métrica inducida

y tenemos

$$\partial_z X^\mu \partial_z X_\mu \equiv \dot{X}^2$$

$$\begin{aligned} \bar{S}[X, g_{zz} = h_{zz}] &= -\frac{m}{2} \int dz \sqrt{-\dot{X}^2} \left( \frac{1}{\dot{X}^2} \dot{X}^2 + 1 \right) \\ &= -m \int dz \sqrt{-\dot{X}^2} \\ &= S[X] \quad \checkmark \end{aligned}$$

Podemos notar que

$$\bar{S} = -\frac{m}{2} \int dz \sqrt{-g_{zz}} \left( g^{zz} \partial_z X^\mu \partial_z X_\mu + 1 \right)$$

describe el "campo" escalar libre no masivos (es decir, Klein-Gordon sin masa), en un fondo curvo no dinámico 0+1 dim (con etc. cosmológica).

Ahora escribiremos

$$G_2(x', x) \sim \int Dg_{zz}(z) \int DX^\mu(z) e^{i\bar{S}[X, g]}$$

↑ integral no gaussianas
↑ integral gaussianas

pero quedan todavía 2 sutilezas. Una es que sería un error definir  $\int DX^\mu(z)$  o  $\int Dg_{zz}(z)$  simplemente dividiendo el intervalo  $0 \leq z \leq 1$  en



~~N subintervalos iguales de duración  $\Delta\tau = \frac{1}{N}$  y postulando que (p.ej.)~~

~~$$\int \mathcal{D}X^\mu(z) \equiv \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \int d^D X_{N-1} \cdots d^D X_1, \text{ con } X_n^\mu \equiv X^\mu(\tau_n).$$~~

~~Esto violaría la invariancia bajo  $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$ .~~

~~El procedimiento correcto es construir la integral invariante usando la métrica apropiada para las  $X^\mu(z)$ , que se hereda de la métrica intrínseca en la línea de mundo,  $g_{\alpha\beta}(z)$ .~~

~~Concretamente, sabemos que sobre una variedad  $d$ -dimensional con coordenadas  $\{x^i\}$   $i=1, \dots, d$ , la métrica  $\gamma_{ij}(x)$  define en particular la norma de los vectores ( $\sim$  desplazamientos infinitesimales)  $\delta x^i$ ,~~

~~$$\|\delta x\| \equiv \sum_{i,j=1}^d \gamma_{ij} \delta x^i \delta x^j,$$~~

~~y determina la integral invariante bajo difeos~~

$$\int \prod_i dX^i \sqrt{|g|} \equiv \int \prod_i dX^i \sqrt{|\det \gamma_{ij}|}$$

A nosotros nos interesa definir (en particular) la integral  $\mathcal{D}X^M \sim \prod_{i=1}^N dX_{i-1}^M \dots dX_{N-1}^M$  (con  $N \equiv 1/\Delta\tau$ ),  
 $\uparrow \equiv X^M(\tau_{i-1})$   $\uparrow \equiv X^M(\tau_{N-1})$

de modo que estamos lidiando con una variedad  $d = \mathcal{D}(N-1)$  dimensional. En este espacio, la única definición local posible para la norma de un vector  $\delta X_n^M$  ( $\xrightarrow{\Delta\tau \rightarrow 0} \delta X^M(\tau)$ ) que es invariante bajo Poincaré y reparametrizaciones de  $\tau$  es

$$\|\delta X\|^2 \equiv \sum_{n=1}^{N-1} \Delta\tau \sqrt{-g_{\frac{\tau}{\tau}}(\tau_n)} \eta_{\mu\nu} \delta X_n^\mu \delta X_n^\nu$$

salvo una cte.

$$\xrightarrow{\Delta\tau \rightarrow 0} \int_0^1 d\tau \sqrt{-g_{\frac{\tau}{\tau}}(\tau)} \eta_{\mu\nu} \delta X^\mu(\tau) \delta X^\nu(\tau)$$

De aquí podemos leer la métrica  $\gamma_{ij}$  en el espacio de funciones  $X^M(\tau)$ : por definición,

$$\|\delta X\|^2 \equiv \sum_{\substack{\mu, \nu \\ m, n}} \gamma_{\mu, \nu}^{m, n} \delta X_m^\mu \delta X_n^\nu,$$

así que nuestra métrica es diagonal,

$$Y_{m,n}^{\mu,\nu} = \eta_{\mu\nu} \delta_{m,n} \Delta\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_n)}.$$

Concluimos entonces que la integral funcional invariante debe utilizar

$$\sqrt{|\det Y|} = \prod_{\mu=1}^D \prod_{n=1}^{N-1} (\Delta\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_n)})^{1/2} :$$

$$\mathcal{D}_g X^{\mu} \equiv \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \int (\Delta\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_1)})^{D/2} d^D X_1 \cdots (\Delta\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_{N-1})})^{D/2} d^D X_{N-1}$$

Medida de integración 'ultralocal' (diseñada para preservar las propiedades usuales de la integral funcional)

De manera similar, la medida invariante  $\mathcal{D}_g g_{\tau\tau}(\tau)$  se deduce a partir de la norma

$$\| \delta g_{\tau\tau} \|^2 \equiv \int d\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau)} g^{\tau\tau}(\tau) g^{\tau\tau}(\tau) \delta g_{\tau\tau}(\tau) \delta g_{\tau\tau}(\tau).$$

La segunda sutileza es que, debido a la invariancia bajo reparametrizaciones de  $\tau$ , la integral

$\int Dg_{\mu\nu} Dg^{\mu\nu} Dg X^{\mu}$  incluye cada trayectoria física infinita de la partícula un número infinito de veces. Concretamente,

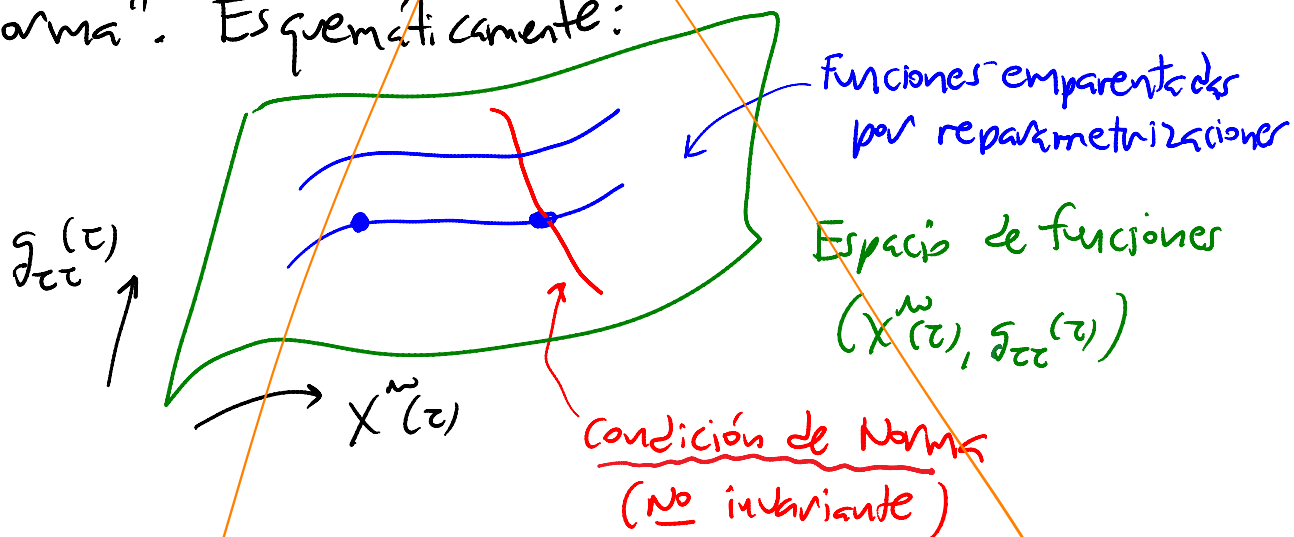
$$(X^{\mu}(\tau), g_{\mu\nu}(\tau)) \quad \text{y} \quad (X^{\mu}(\tau'), g'_{\mu\nu}(\tau'))$$

describen la misma trayectoria física si existe una función  $\tau'(\tau)$  tal que  $X^{\mu}(\tau') = X^{\mu}(\tau)$  y  $g'_{\mu\nu}(\tau') = \left(\frac{\partial\tau}{\partial\tau'}\right)^2 g_{\mu\nu}(\tau)$ .

No debemos entonces integrar libremente sobre todas las funciones  $X^{\mu}(\tau)$  y  $g_{\mu\nu}(\tau)$ , sino definir

$$G_2(x', x) = \int_{\substack{X^{\mu}(0)=x^{\mu} \\ X^{\mu}(1)=x'^{\mu} \\ \text{Reparametrizaciones}}} \frac{Dg_{\mu\nu} Dg^{\mu\nu} Dg X^{\mu}}{e^{iS[X, g]}}$$

Es decir, necesitamos eliminar la redundancia, "fijar la norma". Esquemáticamente:



Lo interesante es que, ahora que además del parámetro  $\tau$

nos hemos inventado la variable auxiliar  $g_{\tau\tau}(\tau)$ , podemos fijar la norma (= especificar  $\tau$ ) de manera invariante bajo Lorentz, imponiendo una condición no sobre una de las  $X^\mu(z)$ , sino sobre  $g_{\tau\tau}(\tau)$ . Eliminamos la redundancia por completo si pedimos p.ej. que  $g_{\tau\tau}(z) = \text{cte.}$ : dada cualquier métrica en 1 dim, existe una y solo una reparametrización de  $\tau \in [0, 1]$  que la hace independiente de  $\tau$ .

Notar sin embargo que

$$\int_0^1 d\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}} \equiv T \quad \begin{array}{l} \text{"tiempo" propio total} \\ \text{es invariante bajo reparametrizaciones} \end{array}$$

en  $\tau$ , así que no podemos elegir libremente el valor constante de la métrica: debemos poner  $g_{\tau\tau}(\tau) = -T^2$ , y, para incluir todas las trayectorias físicas distintas, integrar sobre todos los valores posibles de  $T$ .

Es decir,

$$\int_{\text{Reparametrizaciones}} \frac{D_g g_{\tau\tau} D_g X^\mu}{\sqrt{-g_{\tau\tau}}} = \int_0^\infty dT \underbrace{\omega(T)}_{\text{función por determinar}} \int_{\uparrow} D_T X^\mu$$

(Notar que, de hecho, podríamos reparametrizar

$\tau \rightarrow \tau'(z) = Tz$  para lograr que  $g'(z) = -1$ ;  
pero entonces tendríamos  $\tau \in [0, T]$ , y habría falta  
por tanto sumar de cualquier manera sobre todos los  
posibles valores de  $T$ .)

Es muy buena noticia que al final no resulte necesario  
hacer la integral  $\int \mathcal{D}g_{zz}$ , porque no era gaussiana.  
La deducción de  $\rho(T)$  es sutil, e involucra el  
procedimiento para fijar la norma dentro de la integral  
funcional, conocido como método de Faddeev-Popov  
(que veremos más adelante, en el contexto de la cuerda),  
pero al final arroja el sencillo resultado  $\rho(T) = 1$ .

Así que nuestros 2 inventores,  $\tau$  ( $\leftrightarrow$  difeo)  
y  $g_{zz}(z)$ , se cancelan casi por completo uno a la  
otra, y al final tenemos

$$G_2(x', x) = \int_0^a \int_0^T \int_{\mathcal{D}_T X} \int_{X(0)=x}^{X(1)=x'} \exp \left[ i \frac{m}{2} \int_0^1 d\tau \left( \frac{\dot{X}^2}{T} - T \right) \right],$$

es decir, una integral funcional puramente gaussianas.

La ec. de mov. que se deduce del lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} \left( \frac{\dot{X}^m}{T} - T \right) \text{ es } \ddot{X}^m = 0, \text{ cuyas soluciones}$$

son líneas rectas en el espaciotiempo, justo como esperaríamos clásicamente para una partícula libre.

Podemos extraer de la integral funcional  $\int \mathcal{D}_T X^m$  la dependencia de  $x^m$  y  $x'^m$  haciendo un cambio de variable (función) de integración  $X^m(\tau) \rightarrow Y^m(\tau)$ , con

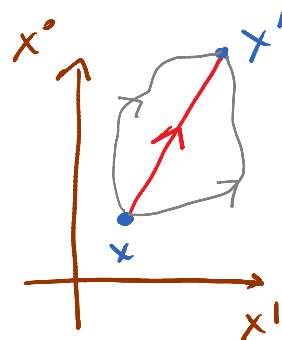
$$X^m(\tau) \equiv \underbrace{x^m + (x'^m - x^m)\tau}_{\text{Solución de ec. de mov. que satisface } X^m(0) = x^m, X^m(1) = x'^m} + \underbrace{Y^m(\tau)}_{\text{Función arbitraria (fluctuación) tal que } Y^m(0) = 0 = Y^m(1)}$$

Solución de ec. de mov. que satisface

$$X^m(0) = x^m, X^m(1) = x'^m$$

Función arbitraria (fluctuación) tal que

$$Y^m(0) = 0 = Y^m(1)$$



$$\Rightarrow \dot{X}^m(\tau) = (x'^m - x^m) + \dot{Y}^m(\tau)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 d\tau \dot{X}^2 = (x' - x)^2 + 2(x' - x)_m \int_0^1 d\tau \partial_\tau Y^m + \int_0^1 d\tau \dot{Y}^2$$

Se analiza por qué extremizamos la acción

Dado que

$$\mathcal{D}_T X^w(z) \propto \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^D X(z_1) \cdots d^D X(z_{N-1}),$$

$$\mathcal{D}_T Y^w(z) \propto \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^D Y(z_1) \cdots d^D Y(z_{N-1}),$$

y en cada  $\tau_n$  dado,  $X^w(\tau_n)$  y  $Y^w(\tau_n)$  difieren solo por una constante,

$$X^w(\tau_n) = (x^{i_w} - x^w) \tau_n + Y^w(\tau_n),$$

tenemos  $\mathcal{D}_T X^w(z) = \mathcal{D}_T Y^w(z)$  (el jacobiano es 1).

Obtenemos entonces:

$$\Theta_2(x', x) = \int dT e^{i \frac{m}{2T} (x' - x)^2 - i \frac{m}{2} T \int_{Y(0)=0}^{Y(1)=0} \mathcal{D}_T Y^w e^{i \frac{m}{2T} \int_0^1 d\tau \dot{Y}^2}$$

Nos interesa solo la dependencia de  $T$

Como mencionamos antes,  $\mathcal{D}_T X^w \equiv \mathcal{D}_g X^w$  se define usando  $\hat{g}_{\tau\tau} = -T^2$ . La receta apropiada es insertar  $(\sqrt{\Delta\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_n)}})^D = (\sqrt{T/N})^D$  en cada punto de la discretización ( $\Delta\tau \equiv 1/N$ ,  $\tau_0 \equiv 0$ ,  $\tau_n \equiv n\Delta\tau$ ,  $\tau_N \equiv 1$ ):



$$\begin{aligned}
 \int \mathcal{D}_T Y^M e^{i \frac{m}{2T} \int_0^1 d\tau \dot{Y}^2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^D y_1 \dots d^D y_{N-1} \left( \sqrt{\frac{T}{N}} \right)^{D(N-1)} \exp \left[ i \frac{m}{2T} \sum_{n=1}^N \Delta\tau \left( \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta\tau} \right)^2 \right] \\
 z_n &\equiv \frac{y_n}{\sqrt{T}} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{T}{N}} \cdot \sqrt{T} \right)^{D(N-1)} \int d^D z_1 \dots d^D z_{N-1} \exp \left[ i \frac{m}{2} \sum_{n=1}^N \Delta\tau \left( \frac{z_n - z_{n-1}}{\Delta\tau} \right)^2 \right] \\
 &\propto \prod_{n=1}^{\infty} T^D, \quad \text{independiente de } T, \propto \sqrt{\Delta\tau}^{D(N-1)}
 \end{aligned}$$

Otra perspectiva: podemos eliminar a  $T$  de la medida de integración  $\mathcal{D}_T Y^M \sim \sqrt{T}^D d^D y_1 \dots \sqrt{T}^D d^D y_{N-1}$  definiendo  $W^M \equiv \sqrt{T} Y^M$ . Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
 \int \mathcal{D}_T Y^M \exp \left[ i \frac{m}{2T} \int_0^1 d\tau \partial_\tau Y \cdot \partial_\tau Y \right] &= \int \mathcal{D}W^M \exp \left[ i \frac{m}{2T^2} \int_0^1 d\tau \partial_\tau W \cdot \partial_\tau W \right] \\
 &\text{independiente de } T \quad \uparrow \quad \text{partes} \\
 &= \int \mathcal{D}W^M \exp \left[ \frac{i}{2} \int_0^1 d\tau W \cdot \left( -\frac{m}{T^2} \partial_\tau^2 \right) W \right]. \\
 &\quad \quad \quad \equiv \Delta_\tau
 \end{aligned}$$

El operador diferencial  $\Delta_z \equiv -\frac{m}{T^2} \partial_z^2$  tiene un conjunto completo de funciones propias

$$f_n(z) = \sqrt{2} \sin(n\pi z)$$

$\leftarrow n=1, 2, \dots$

$\leftarrow$  satisfacen condiciones de borde  
 $f_n(0) = 0 = f_n(1)$

con valores propios  $\lambda_n \equiv \frac{m}{T^2} n^2 \pi^2$ .

Desarrollando

$$W^M(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^M f_n(z), \quad \text{podemos reinterpretar}$$

$$\int \mathcal{D}W^M(z) \propto \int_{-\infty}^{\infty} d^D c_1 d^D c_2 \dots,$$

quedando entonces con las integrales gaussianas

$$\int \mathcal{D}W^M \exp \left[ \frac{i}{2} \int_0^1 dz \underbrace{W \cdot \Delta_z W}_{\sum_n c_n f_n} \right]$$

$$\sum_n c_n f_n, \quad \sum_n \lambda_n c_n f_n, \quad \text{con} \quad \int dz f_n f_m = \delta_{n,m}$$

$$\propto \int_{-\infty}^{\infty} d^D c_1 d^D c_2 \dots \exp \left[ \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2 \right].$$

Recordando que  $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2} ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$  (válido para  $a$  imaginaria, por continuación analítica), concluimos entonces que, en general,

$$\int \mathcal{D}W^\mu \exp \left[ \frac{i}{2} \int_0^1 \dot{z}^\tau W \cdot \Delta_\tau W \right] \propto \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \right)^D$$

$$= \left( \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \dots}} \right)^D \equiv \left( \frac{1}{\sqrt{\det \Delta_\tau}} \right)^D,$$

(determinante funcional)

y en nuestro caso particular,

$$\int \mathcal{D}_T Y^\mu e^{i \frac{m}{2T} \int_0^1 \dot{z}^\tau \dot{Y}^2} \propto \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m}{T^2} n^2 \pi^2 \right)^{-D/2}$$

$$\propto \prod_{n=1}^{\infty} T^D = T^{D \sum_{n=1}^{\infty} 1},$$

que coincide con lo que tendríamos en la p. 106.

La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$  claramente diverge, y se trata de un efecto de distancias pequeñas / energías grandes, es decir, una divergencia ultravioleta (UV). Para lidiar con ella, procedemos de la manera habitual en teoría cuántica de campos:

I) Primero regularizamos, es decir, modificamos a menos la teoría en el UV de tal modo que el resultado

sea finito, y por tanto manejable.

II) después renormalizamos, es decir, cambiamos a parámetros más directamente físicos, lo cual acaba teniendo como consecuencia que cancelamos las divergencias UV y podemos entonces retirar la regularización.

[4: 19/02/13

En el caso que nos interesa, podemos por ejemplo regularizar reemplazando

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\epsilon n} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{suprime modos} \\ \text{UV} \\ \text{con } n \gg 1/\epsilon \end{array}$$

↑ "parámetro de corte"

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 - e^{-\epsilon}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1 - (1 - \epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2 - \dots)} - 1 \right)$$

$$\frac{1}{\epsilon(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \dots)} \approx \frac{1}{\epsilon} \left( 1 + \frac{1}{2}\epsilon + \dots \right)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right)$$

"Regularizaremos" descartando la parte divergente, para quedarnos con

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \rightarrow -\frac{1}{2} \quad (!!),$$

lo cual, como veremos, conduce al resultado correcto para el propagador.

Conviene mencionar que es posible extraer este mismo resultado con un truco matemático: el procedimiento de continuación analítica conocido como regularización por función zeta. Para ello, recordemos la definición de la función zeta (delta) de Riemann

$$\zeta(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} du \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}$$

para  $\text{Re } z > 1$ , que puede continuarse analíticamente a todo el plano complejo, a través de la relación

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \text{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z).$$

El resultado es una función que es holomorfa, o analítica, en todo  $z \in \mathbb{C}$ , excepto en  $z=1$ , donde tiene un polo simple (correspondiente a  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ ).

Por continuación analítica, podemos entonces definir

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^0} \rightarrow J(0) = -\frac{1}{2},$$

que, según lo que afirmamos antes, ¡es el resultado deseado! (Notar que esto requirió solamente un paso, que empaqueta entonces regularización y renormalización.)

La regularización por función zeta parece magia negra; pero desde los '70s y '80s es de hecho un método respetable [ver p.ej. hep-th/9308028 y refs. ahí citados].

Usando este "resultado", podemos proceder ahora a la etapa final de nuestro cálculo:

$$G_2(x', x) = \int_0^{\infty} dT T^{-D/2} e^{i \frac{m}{2T} (x' - x)^2 - i \frac{m}{2} T}$$

$$\propto \int_0^{\infty} dt t^{-D/2} e^{i \frac{(x' - x)^2}{2t} - \frac{i}{2} m^2 t}$$




$$\propto \int_0^{\infty} dt \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\frac{i}{2} (m^2 + p^2) t + i p \cdot (x' - x)}$$

Completar  
cuadrado  
y hacer  
D integrales  
gaussianas

Haciendo la integral sobre  $t$ , obtenemos finalmente

$$G_2(x', x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot (x-x')} \frac{-i}{p^2 + m^2} \quad \checkmark$$

que efectivamente es el resultado correcto, p. 81 (salvo que en esta cuenta no le hemos seguido la pista a la constante de normalización).

Hasta aquí apenas hemos mostrado que cuantizando directamente a una partícula se puede reproducir el propagador de Feynman para una teoría de campos libre. Para reproducir los diagramas de Feynman de una teoría de campos interactuante, es posible agregar los vértices de interacción a mano (p.ej., , donde  denota la propagación libre y  =  $-i\lambda$  es una interacción cúbica).

Así que, si uno se pone necio, es posible hablar de partículas cuánticas relativistas SIN usar campos [ver p.ej. Bjorken & Drell, vol. 1]. Pero el resultado

es torpe (p.ej., una batalla para asegurarse de que la descripción sea unitaria), y necesariamente perturbativo, y por tanto, incompleto.

¡Por eso usamos campos!

(Aunque, por otro lado, algunos cálculos de diagramas en loop se procesan más eficientemente con este método de "primera cuantización", que es una versión inspirada por las técnicas de cuerdas, se conoce también como "formalismo de la línea de mundo")

(ver, p.ej. Schubert, hep-th/9610108, 0703186].)

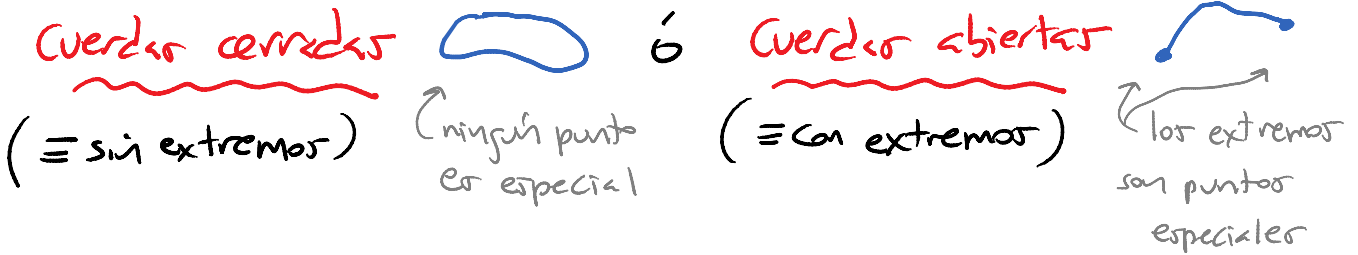
### \* Cuerdas

Para describir a objetos unidimensionales cuánticos y relativistas, existen nuevamente 2 opciones.

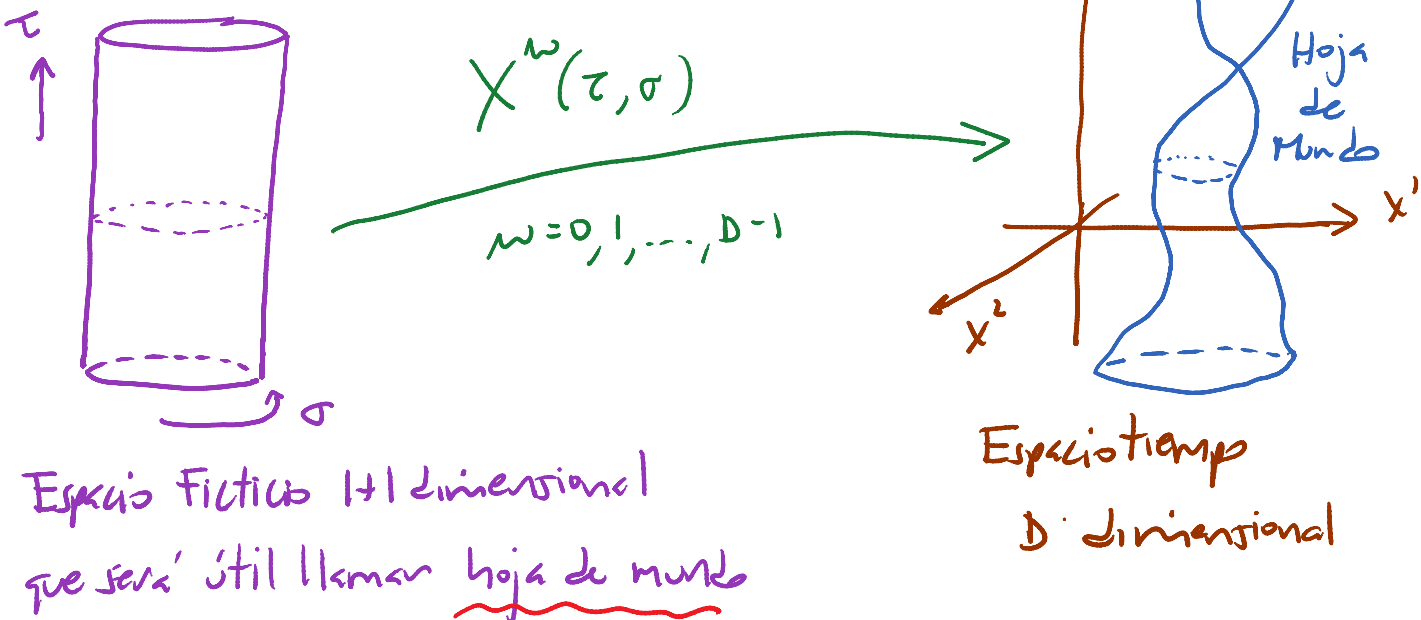
#### ① Cuantizar Cuerdas ("primera cuantización")

Por generalidad, podemos considerar

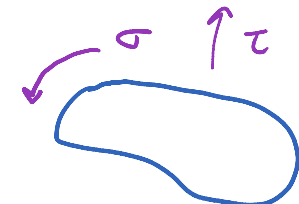




En cualquier caso, necesitaremos algunas etiquetas para ubicar a los distintos puntos sobre la cuerda a un tiempo dado. Pero además nos falta incorporar la evolución temporal. Por ser la cuerda un objeto unidimensional, su trayectoria al transcurrir el tiempo traza una superficie en el espaciotiempo, que llamamos su hoja de mundo. Análogamente al caso de la partícula, para describir a la cuerda covariantemente nos inventamos 2 parámetros arbitrarios  $\tau, \sigma$  y consideramos  $D$  mapeos  $X^\mu(\tau, \sigma)$ :



Esencialmente,  $\tau$  es una etiqueta que indica en qué instante estamos examinando a la cuerda, mientras que  $\sigma$  indica cuál punto de la cuerda nos interesa.



En este método, necesitamos escribir una acción para la cuerda en la hoja de mundo,  $S[X] = \int d\tau d\sigma L$  (cuya forma explícita veremos en breve), y cuantizar, ya sea canónicamente (fijando o no la norma antes) o con la integral de trayectoria,  $\int DX^M(\tau, \sigma) e^{iS[X]}$ .

Podremos así hablar de la propagación libre de una cuerda, y eventualmente agregar interacciones (¿a mano?).

## ② Cuantizar un Campo de Cuerdas ("segunda cuantización")

¿Qué cosa es un campo de cuerdas? Un campo ordinario es una función que asigna un número (o varios) a cada punto en el espaciotiempo,  $\varphi(x^M)$ . Es decir, es un mapeo que como los datos que podrían describir a una partícula a un instante dado,  $x^M = X^M(\tau)$ .

← fijo

Análogamente, un campo de cuerdas es un mapeo que como los datos que podrían describir a una cuerda en un instante dado,  $x^\mu(\sigma) = X^\mu(\tau, \sigma)$ . Es decir, es no una función sino un funcional  $\Phi[X^\mu(\sigma)]$ , que mapea configuraciones de la cuerda a números.

Para perderle el miedo a este objeto, imaginemos desarrollar a las  $x^\mu(\sigma)$  en un conjunto completo de funciones, como p.ej. modo de Fourier,

$$x^\mu(\sigma) = x_0^\mu + \sum_{n \neq 0} \tilde{x}_n^\mu e^{in\sigma} \quad (\text{con } \tilde{x}_n^* = \tilde{x}_{-n}).$$

↙ modo cero

Tenemos entonces  $\Phi[x^\mu(\sigma)] = \Phi(x_0^\mu, \tilde{x}_n^\mu)$ , y podemos pensar en descomponer

$$\Phi[x^\mu(\sigma)] = \sum_{L=1}^{\infty} \varphi_L(x_0^\mu) \Phi_L[\tilde{x}_n^\mu]$$

↗ conjunto completo  
de funcionales,  
especificado de antemano

(p.ej.,  $\Phi_L[\tilde{x}_n] = \tilde{x}_L, \tilde{x}_L \tilde{x}_{L'}, \text{ etc.}$ )

Reconocemos así al campo de cuerdas  $\Phi[x^\mu(\sigma)]$  como una colección de un número infinito de campos convencionales  $\phi_i(x)$ .

Para codificar la dinámica del campo de cuerdas, necesitamos una acción en el espacio de  $x^\mu(\sigma)$ 's. Existen varias opciones y enfoques [Witten; Zwiebach; Berkovits; Kaku, Kikkawa; Siegel; ...]

Un ejemplo es la acción de Witten (y Kato, Kugo, Ojawa, Uehara) para cuerdas abiertas,

$$S[\Phi] = \frac{1}{2} \int \Phi * Q_B \Phi + \frac{2g}{3} \int \Phi * \Phi * \Phi$$

"producto estrella"
"carga BRST"
"acción formal de integración"

[ver p.ej. hep-th/0311017, 0102085].

La "segunda cuantización" de las cuerdas debería ser un formalismo más poderoso que la "primera cuantización"; pero es más complicado, y durante muchos años, lo único que se pudo hacer con él fue reproducir

La expansión perturbativa conocida ya a partir de las cuerdas en "primera cuantización".

Hacia finales de los 90 hubo nuevos sucesos que por fin dejaron claro que la teoría del campo de cuerdas (string field theory) en verdad incluye más información, no perturbativa. Desde entonces ha seguido habiendo avances, pero el tema sigue siendo bastante complicado, y en cualquier caso No parece ser el camino para encontrar la respuesta completa a la pregunta clave, ¿de qué están hechas las cuerdas? (Si las cuerdas no son fundamentales, tampoco debemos esperar que lo sea el campo de cuerdas.)

---

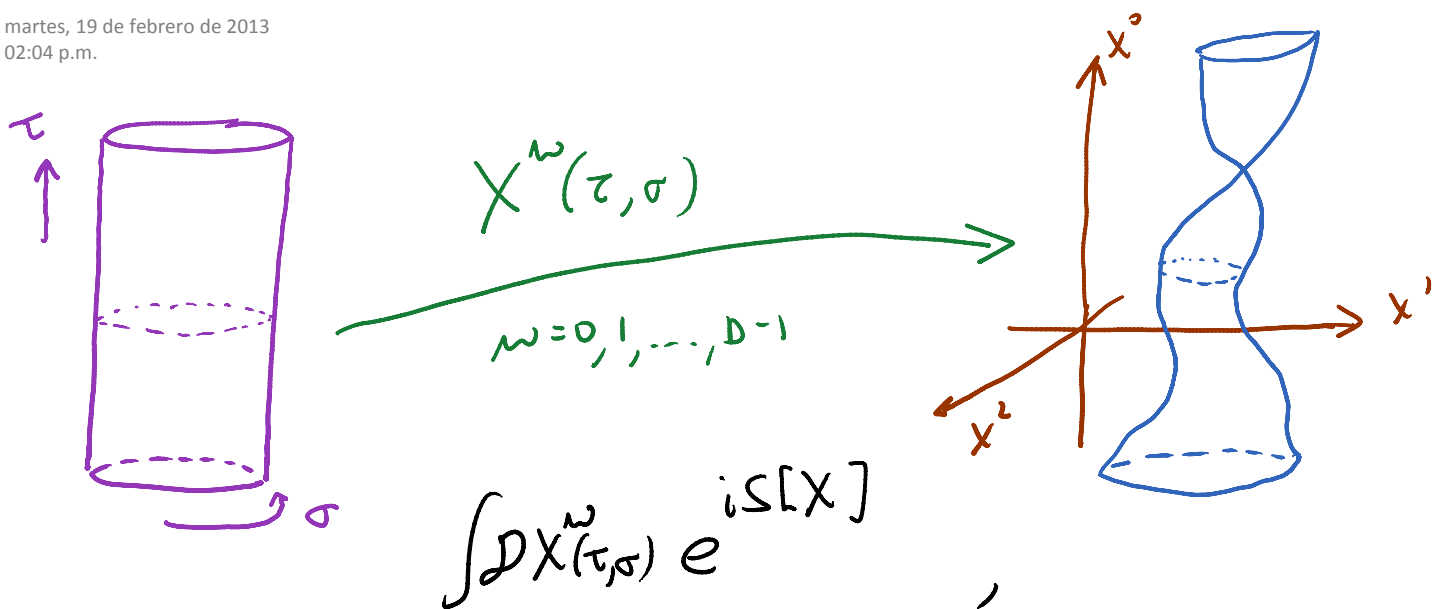
En lo que resta del curso trabajaremos con las cuerdas en "primera cuantización", conocida también en este contexto como el formalismo de la hoja de mundo. Como ya hemos dicho, para desarrollar la expansión perturbativa, que es nuestro objetivo central aquí, este camino arroja

los mismos resultados que la teoría del campo de cuerdas, con la ventaja de ser más fácil.

Además, como iremos viendo, en cuerdas (a diferencia de partículas) la "primera cuantización" nos permite llegar bastante lejos, y en particular, las interacciones se pueden agregar de manera muy natural.

Hablaremos de la cuerda bosónica, donde  $X^\mu(\tau, \sigma)$  son los únicos grados de libertad, es decir, el estado de la cuerda está completamente caracterizado por su forma/ubicación en el espaciotiempo. Para obtener física más realista necesitaremos estudiar más adelante a la súpercuerda, que tiene grados de libertad adicionales. Pero para iniciar, la cuerda bosónica es un útil modelo de juguete, análogo al campo escalar real.

En todo lo sucesivo, resultará provechoso notar que el sistema que nos interesa, la cuerda encajada en un espaciotiempo  $D$ -dimensional, descrita en "primera cuantización",



pueden reinterpretarse como teorías cuánticas de  $D$  campos escalares (con nombre  $X^\mu$  en vez de  $\phi_n$ ) que viven en  $1+1$  dimensiones (con coordenadas que denotamos  $\tau, \sigma$  en vez de  $t, x$ ). Este sería el punto de vista natural para un observador con domicilio en la hoja de mundo, que para nosotros es un espacio puramente ficticio/auxiliar, pero de gran utilidad.

Para proceder, necesitamos conocer la acción que controla la dinámica de la cuerda. En el caso de la partícula relativista, vimos que la acción natural es

$$S_{\text{partícula}} = - \text{masa} \times \left( \begin{array}{l} \text{longitud} \\ \text{propia} \end{array} \right),$$

↖ energía en reposo

así que la generalización obvia para una cuerda relativista es

$$S_{\text{cuerda}} = - \text{tensión} \times \left( \begin{array}{l} \text{Área} \\ \text{propia} \end{array} \right),$$

↖ ≡ energía por unidad de longitud para cuerda en reposo

es decir, la acción de (Dirac-) Nambu-Goto

$$S_{\text{NG}}[X] = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)}$$

↖  $a, b = 0, 1; \sigma^0 \equiv \tau, \sigma^1 \equiv \sigma$  ↗ métrica en el espaciotiempo

$$T \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'}$$

↖ "pendiente de Regge"

}  $\equiv h_{ab}(\tau, \sigma)$

define (con  $\hbar = c = 1$ )

$$l_c \equiv \sqrt{\alpha'} \quad \text{longitud de cuerdas}$$

$$m_c \equiv l_c^{-1} \quad \text{escala de cuerdas}$$

Métrica inducida en la hoja de mundo (retracción de la del espaciotiempo)



Notar que

$$-\det h_{ab} = -\det \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ X' \cdot \dot{X} & X'^2 \end{pmatrix} = (\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2,$$

donde  $\cdot \equiv \partial_\tau \equiv \partial_0$ ,  $' \equiv \partial_\sigma \equiv \partial_1$  y el producto punto involucra a la métrica en el espaciotiempo, p.ej.,  $X' \cdot \dot{X} = X'^\mu \dot{X}^\nu g_{\mu\nu}(X)$ .

Elegiremos trabajar con coordenadas adimensionales en la hoja de mundo:  $[\tau] = [\sigma] = M^0$  (en lugar de  $M^{-1}$ ).

La acción de Nambu-Goto es invariante bajo:

i) Reparametrizaciones en el espaciotiempo

$$x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu(x), \quad g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\lambda\rho}(x)$$

(lo cual implica

$$X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow \bar{X}^\mu(\tau, \sigma) = \bar{x}^\mu(X(\tau, \sigma)),$$

$$\partial_a X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow \partial_a \bar{X}^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \partial_a X^\nu(\tau, \sigma).$$

En particular, en un espaciotiempo plano,

$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ ,  $S_{NG}$  es invariante bajo transformaciones de Poincaré (= Lorentz + traslaciones)

$$X^\mu(\sigma) \rightarrow \bar{X}^\mu(\sigma) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\sigma) + C^\mu$$

$\uparrow$   
quiero decir  $\sigma^a \equiv (\tau, \sigma)$

(bajo las cuales  $\eta_{\mu\nu}$  no cambia).

ii) Reparametrizaciones en la hoja de mundo

$$\sigma^a \rightarrow \bar{\sigma}^a(\sigma), \quad X^\mu(\sigma) \rightarrow \bar{X}^\mu(\bar{\sigma}) = X^\mu(\sigma)$$

$X^\mu$  son  
campos  
escalares

Estas últimas son 2 simetrías "locales" o

"de norma" en la hoja de mundo, que se manifiestan a través de 2 constricciones ("de primera clase")

$$\Pi_\mu \Pi^\mu + T^2 X'_\mu X'^\mu = 0, \quad \Pi_\mu X'^\mu = 0,$$


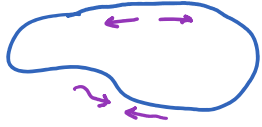
donde  $\Pi_\mu(\sigma) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial \dot{X}^\mu(\sigma)} = T \frac{X'^2 \dot{X}_\mu - \dot{X} \cdot X' X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$

es el momento canónico conjugado a  $X^\mu(\sigma)$ .

(Análogamente, para la partícula tenemos

1 simetría local,  $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$ , asociada a  
1 construcción  $p^2 + m^2 = 0$ .)

Esto expresa la redundancia existente en nuestra descripción covariante: tenemos  $D$  variables  $X^\mu(\sigma)$ , pero solo  $D-2$  grados de libertad físicos. Tal como en el caso de la partícula,  $X^\sigma(\sigma)$  NO es un grado de libertad verdadero, pero aquí tampoco lo es la dirección longitudinal sobre la cuerda,  $\frac{X'^\mu(\sigma)}{\sqrt{X'^2(\sigma)}} X^\mu(\sigma)$ , es decir, aquella a lo largo del cuerpo de la cuerda.

Por ej., la rotación rígida , o la compresión/expansión con forma constante  NO son movimientos físicos, puesto que nuestra cuerda pretende ser fundamental / elemental: a diferencia de un mecate, NO está hecha de partículas a las cuales les podríamos seguir la pista individualmente. Cada pequeño trozo de la cuerda es igual a todos los demás, y está caracterizado únicamente por su

tensión = energía/longitud. (Notar que, mientras que para una cuerda no relativista la tensión = fuerza y la densidad de masa  $\mu = \text{masa}/\text{longitud}$  son 2 conceptos independientes, y la velocidad de propagación de las ondas es  $v = \sqrt{T/\mu}$ , en el caso de una cuerda relativista  $\mu = T$ , y por tanto,  $v = 1$ .)

Otra manifestación de la invariancia bajo difeo en la hoja de mundo es el hecho de que la densidad hamiltoniana es

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &\equiv \pi_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L} \\ &= -T \frac{(\dot{X} \cdot X')^2 - X'^2 \dot{X}^2}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - X'^2 \dot{X}^2}} - (-T \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - X'^2 \dot{X}^2}) = 0, \end{aligned}$$

y más en general, el tensor de energía-momento en la hoja de mundo ( $\equiv$  corriente de Noether asociada a la invariancia bajo traslaciones  $\sigma^a \rightarrow \sigma^a + \delta \sigma^a$ ; recordar que a estas alturas no hay métrica  $g_{ab}$ ) se anula:

$$T^a_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a X)} \cdot \partial_b X - \mathcal{L} \delta^a_b$$

$$T^0_0 = \Pi_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L} = \mathcal{H} = 0,$$

$$T^0_1 = \Pi_\mu X'^\mu = 0,$$

$$T^1_0 = -T \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - \dot{X}^2 X'^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \dot{X}^\mu = 0,$$

$$T^1_1 = -T \frac{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

$$-(-T \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}) = 0.$$

$S_{NG}[X]$  es no polinomial; pero podemos quitarle la raíz de manera análoga al caso de la partícula: nos inventamos como variable auxiliar a la métrica intrínseca en la hoja de mundo  $g_{ab}(\tau, \sigma)$ , y reescribimos la acción en la forma  $\uparrow 2 \times 2$ , simétrica

$$S_p[X, g_{ab}] = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)$$

Acción de Polyakov (Brink-Di Vecchia-Howe - Deser-Zumino)

Bajo  $g^{ab} \rightarrow g^{ab} + \delta g^{ab}$  se tiene  $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}$ ,  
de modo que la ecuación de movimiento de la  
métrica  $g^{ab}$  es

$$\begin{aligned} -\frac{2}{T} \frac{\delta S_p}{\delta g^{ab}} &= \underbrace{\sqrt{-g} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}}_{h_{ab} \text{ métrica inducida}} \quad \leftarrow \text{no confundir con } g_{ab} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} g^{cd} \underbrace{\partial_c X^\lambda \partial_d X^\rho g_{\lambda\rho}}_{h_{cd}} \\ &= \sqrt{-g} \left( h_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} h_{cd} \right) = 0. \end{aligned}$$

Esto no determina  $g_{ab}$  por completo; pero sí

implica que  $\equiv \sigma^a = (z, \sigma)$  función arbitraria

$$g_{ab}(\sigma) = \lambda(\sigma) h_{ab}(\sigma) = \lambda(\sigma) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X) :$$

$$h_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} h_{cd} = h_{ab} - \frac{1}{2} \lambda h_{ab} \lambda^{-1} \underbrace{h^{cd} h_{cd}}_{\delta_c^c = 2} = 0.$$

es decir, la métrica intrínseca y la inducida están relacionadas por un rescalamiento local ( $\equiv$  transformación 'de Weyl' o 'conforme' - ver más adelante).

Y podemos verificar que

$$\begin{aligned} S_p[X, g_{ab} = \lambda h_{ab}] &= \\ &= -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \underbrace{\sqrt{-\det(\lambda h_{ab})}}_{\lambda^2 \det h_{ab}} \underbrace{(\lambda^{-1} h^{ab}) h_{ab}}_{\delta_a^a = 2} \\ &= -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \lambda \sqrt{-\det h_{ab}} \end{aligned}$$

$$= -T \int d^2\sigma \sqrt{-h} = S_{NG}[X]. \quad \checkmark$$

Ahora que ya tenemos una métrica intrínseca en la hoja de mundo, la definición estándar del tensor de energía-momento correspondiente (con una convención útil para la constante de normalización) es

$$T_{ab} \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_p}{\delta g^{ab}}$$

↙ *contracción con  $g_{\mu\nu}$*  ↘

$$= - \frac{1}{\alpha'} \left( \partial_a X \cdot \partial_b X - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c X \cdot \partial_d X \right)$$

$x_c^2 \rightarrow x_c$

(lo cual coincide con la definición como corriente de Noether asociada a transformaciones  $\sigma^a \rightarrow \sigma^a + \delta\sigma^a$ ), así que la ecuación de movimiento para  $g_{ab}$ , que debemos imponer para garantizar que  $S_p = S_{NG}$ , dice simplemente que

$$T_{ab} = 0,$$

lo cual justo coincide con lo que encontraremos (como identidad) a partir de la acción de Nambu-Goto.



$S_p$  tiene las mismas simetrías que  $S_{NB}$ , y una adicional:

1) Reparametrizaciones en el espaciotiempo (y en particular, el grupo de Poincaré cuando  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ).

2) Reparametrizaciones en la hoja de mundo (con

$$\bar{g}_{ab}(\bar{\sigma}) = \frac{\partial \sigma^c}{\partial \bar{\sigma}^a} \frac{\partial \sigma^d}{\partial \bar{\sigma}^b} g_{cd}(\sigma) \text{ ) .}$$

3) Transformaciones de Weyl (= conformes, pero relativistas)

$$\sigma^a \rightarrow \bar{\sigma}^a = \sigma^a, \quad X^\mu(\sigma) \rightarrow \bar{X}^\mu(\sigma) = X^\mu(\sigma),$$

$$g_{ab}(\sigma) \rightarrow \bar{g}_{ab}(\sigma) = \Omega(\sigma) g_{ab}(\sigma)$$

↑ función arbitraria

$$\Rightarrow \bar{g}^{ab} = \Omega^{-1} g^{ab}, \quad \det \bar{g}_{ab} = \Omega^2 \det g_{ab},$$

$$\sqrt{-g} g^{ab} \rightarrow \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{ab} = \cancel{\Omega \sqrt{-g}} \cancel{\Omega^{-1}} g^{ab} = \sqrt{-g} g^{ab} \text{ ) .}$$

Esta nueva simetría local es una propiedad especial de  $S_p$  en 2 dimensiones, y su existencia explica

por qué la ecuación de movimiento de  $g_{ab}$  solo determinó a  $g_{ab}$  módulo un factor arbitrario  $\lambda(\sigma)$ .

Las simetrías locales nuevamente están asociadas a sendas constricciones hamiltonianas ("de primera clase" = conmutan bajo paréntesis de Poisson).

$$\pi_{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{x}^{\mu}} = -T \sqrt{-g} g^{0a} \partial_a X_{\mu}$$

implica, a través de la ecuación de movimiento  $T_{ab} = 0$ , las constricciones que teníamos (como identidades) a partir de  $S_{NG}$ :

$$\begin{aligned} & \pi^2 + T^2 X'^2 \\ &= T^2 \left( \underbrace{-g g^{0a} \partial_a X \cdot \partial_b X g^{0b}}_{h_{ab}} + \underbrace{\partial_t X \cdot \partial_t X}_{h_{tt}} \right) \\ & \quad \underbrace{-\lambda^2 h \quad \lambda^{-1} \delta_b^0 \quad \lambda^{-1} h^{0b}}_{-h h^{00} = -h_{tt}} \leftarrow h^{ab} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} h_{tt} & -h_{t1} \\ -h_{1t} & h_{00} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= 0,$$

$$\pi_{\mu} X'^{\mu} = \sqrt{-g} g^{0a} \underbrace{\partial_a X \cdot \partial_1 X}_{h_{a1}} = \sqrt{-h} \delta_1^0 = 0,$$

$\underbrace{\quad}_{\lambda\sqrt{-h}} \quad \underbrace{\quad}_{\lambda^{-1}h^{0a}}$

es decir,

$$\begin{aligned} \pi^2 + T^2 X'^2 &= 0 \\ \pi_{\mu} X'^{\mu} &= 0 \end{aligned}$$

Y adicionalmente, para los momentos conjugados a las 3 nuevas variables  $g_{ab}$  tenemos directamente

$$\pi_{ab} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{g}^{ab}} = 0.$$

Podemos notar que esto da el conteo correcto de grados de libertad físicos:

$$(D+3) - (2+3) = D-2 \quad \checkmark$$

Variables  
 $\uparrow$  en espacio  
configuración

Constricciones      grados de libertad  
 $\uparrow$  cada construcción "de primera  
 clase" cuenta doble en el espacio fase

Podemos notar que, desde el punto de vista de la hoja de mundo,

$$S_p = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)$$

es una teoría de campos con  $D$  campos escalares (con término cinético no trivial si  $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ ) en  $1+1$  dimensiones, el operador es una métrica no dinámica.  $g_{ab}(\sigma)$  es un campo no dinámico porque aparece sin derivadas en  $S_p$ , y entendamos que esto se debe a que cumple exclusivamente la función de campo auxiliar.

Pensaríamos entonces que el contacto descrito con la acción natural de la cuerda relativista,  $S_{NG}$ , se perdería si agregáramos un término cinético para  $g_{ab}$ , es decir, la acción de Einstein-Hilbert

$$S_E[g_{ab}] = c \int d^2\sigma \sqrt{-g} R$$

↑  
cte. de  
normalización

↑  
escalar de curvatura  
en  $1+1$  dim

(que, por otra parte, respeta correctamente la invariancia bajo difeomorfismos y Weyl).

Dado que

$$\frac{\delta S_E}{\delta g^{ab}} = c \sqrt{-g} \underbrace{\left( R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right)}_{\text{tensor de Einstein}},$$

si tomamos como acción a  $S_p + S_E$  la ecuación de movimiento para  $g_{ab}$  será la ec. de Einstein,

$$\underbrace{R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R}_{\text{de } \delta S_E} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{T_{ab}}_{\text{de } \delta S_p},$$

lo cual luce muy distinto a  $T_{ab} = 0$  ( $\Rightarrow g_{ab} = \lambda h_{ab}$ ), que nos permitiría recuperar  $S_{NG}$ .

Pero, curiosamente, en  $1+1$  dimensiones se tiene

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 0 \quad \text{idénticamente,}$$

porque las simetrías del tensor de Riemann determinan de manera única

$$R_{abcd} = \frac{1}{2} (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) R .$$

En este caso se tiene entonces  $\delta S_E / \delta g^{ab} = 0$  para cualquier  $g_{ab}$ , es decir, la acción

$$S_E = c \int d^2\sigma \sqrt{-g} R \text{ es de hecho } \underline{\text{independiente}}$$

de la métrica, y depende solo de la topología de la hoja de mundo. (Como veremos más adelante, este es el contenido del teorema de Gauss-Bonnet.)

En resumen, podemos agregar  $S_E$  sin poner en riesgo el contacto entre  $S_p$  y  $S_{NG}$ . Más adelante en el curso entenderemos la utilidad de  $S_E$ .

De ahora en adelante (hasta nuevo aviso), tomaremos por simplicidad  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ .

Para cuantizar a la cuerda, de una manera u otra conviene fijar una norma. Justo como en el caso de la partícula, podemos hacerlo de manera covariante

bajo Poincaré imponiendo condiciones sobre  $g_{ab}(\sigma)$ .  
 Ésta tiene 3 componentes independientes, que  
 podemos especificar por completo utilizando nuestras  
 3 invariancias locales (2 difeo + 1 Weyl).

Elegiremos trabajar en la norma plana

$$g_{ab}(\sigma) = \begin{cases} \eta_{ab} & \text{en signature lorentziana} \\ \delta_{ab} & \text{en signature euclidea} \end{cases}$$

Para ser más precisos: dada cualquier  $\bar{g}_{ab}(\sigma)$ , siempre  
 es posible transformar a  $\eta_{ab}$  o  $\delta_{ab}$  localmente  
 (en un parche de coordenadas a la vez). Globalmente  
 habrá en general restricciones ("módulos" análogos al  
 "tiempo" propio  $T$  en el caso de la partícula); pero  
 eso solo será importante más adelante.

Será conveniente para nosotros hacer además una  
rotación de Wick en la hoja de mundo, renombrando

$$\tau \equiv \sigma^0 = -i\sigma^2,$$

de modo que  $g_{ab} = \eta_{ab} \rightarrow \delta_{ab}$ . Al hacer  
 $\underbrace{\quad}_{a,b=0,1}$   $\underbrace{\quad}_{a,b=1,2}$

esto, es habitual definir la acción euclídeana con el signo invertido con respecto a la lorentziana, de forma que  $\exp(i \int d\sigma d\sigma' \mathcal{L}_{\text{Lor.}}) = \exp(- \int d\sigma' d\sigma^2 \mathcal{L}_{\text{Eucl.}})$ .

Nuestro sistema es entonces

$$S_p[X] = + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X^\mu \partial_a X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

$\uparrow$   
 $\underbrace{\quad}_{T/2}$

$\curvearrowright$  suma implícita  
 (contráctos con  $\delta^{ab}$ )

que describe simplemente  $D$  campos escalares libres (Klein-Gordon) no masivos en  $1+1$  dimensiones!

Pero no puede ser esta la historia completa, porque tenemos aquí todavía  $D$  variables.

El punto es que, antes de fijar  $g_{ab} = \delta_{ab}$ , la acción  $S_p[X, g]$  contiene la información sobre la ecuación de  $g_{ab}$ ,  $T_{ab} = 0$ , que como vimos, resulta clave para reproducir  $S_{\text{NG}}$ . Al fijar  $g_{ab}$  perderíamos



esta información, así que para recuperar la física correcta debemos imponerla a mano (ver p. 129),

$$T_{22} = \mathcal{H} = \frac{1}{\alpha'} \left( \frac{1}{2} \dot{X}^2 - \frac{1}{2} X'^2 \right) = 0,$$

$$T_{11} = \frac{1}{\alpha'} \left( \frac{1}{2} \dot{X}^2 + \frac{1}{2} X'^2 \right) = 0,$$

$$T_{12} = \frac{1}{\alpha'} \dot{X} \cdot X' = 0.$$

Sabemos que estas condiciones equivalen a decir que  $h_{ab}(\sigma) = \lambda(\sigma) g_{ab}(\sigma) = \lambda(\sigma) \delta_{ab}$ , es decir, que la métrica inducida es conformalmente plana (plana salvo Weyl). Y de hecho, si en  $S_{N6}$  elegimos  $\sigma^1, \sigma^2$

talos que  $h_{12} = \dot{X} \cdot X' = 0$  y  $\leftarrow \equiv \partial_2$  aquí

$$h_{11} = \dot{X}^2 = \lambda = \dot{X}^2 = h_{22}, \text{ obtenemos}$$

$$S_{N6}[X] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} \cdot X')^2} \rightarrow 0 = S_p[X].$$

$$\dot{X}^2 = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + X'^2)$$

Podemos notar que las 3 ecuaciones de movimiento  $T_{ab} = 0$  en realidad nos dan solo 2 constricciones independientes, puesto que  $T_{11} + T_{22} = \delta^{ab} T_{ab} = 0$ , o en versión lorentziana,  $T_{11} - T_{00} = \eta^{ab} T_{ab} = 0$ .

El hecho de que la traza de  $T_{ab}$  sea en automático cero es consecuencia directa de la invariancia de Weyl: bajo  $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta g_{ab}$  se tiene

$\delta S_p \propto \int d^2\sigma \sqrt{-g} \delta g^{ab} T_{ab}$ , y para una transformación de Weyl  $\underbrace{w(\sigma) g^{ab}}_{(g^{ab} \rightarrow (1+w(\sigma))g^{ab})}$ , así que  $\delta S_p = 0$  para cualquier  $w(\sigma)$  implica que  $\boxed{g^{ab} T_{ab} = 0}$ .

Esto es importante porque nos da el conteo correcto:  $D$  variables - 2 constricciones =  $D-2$  grados de libertad. ✓

Las 2 constricciones expresan el hecho de que, aún después de haber fijado  $g_{ab} = \delta_{ab}$ , tenemos todavía un lenguaje redundante, que se manifiesta también en la existencia de 2 simetrías locales remanentes.

Es decir, hemos fijado las normas (eliminado la redundancia) casi por completo; pero (localmente) existen unas cuantas transformaciones en el grupo Dif x Weyl que no cambian la métrica  $g_{ab} = \delta_{ab}$ , y por tanto siguen vivas.

Para entender esto, conviene usar las coordenadas del cono de luz en las hojas de mundo

$$\left. \begin{aligned} \sigma^+ &\equiv \tau + \sigma = -i\sigma^2 + \sigma^1 \\ \sigma^- &\equiv \tau - \sigma = -i\sigma^2 - \sigma^1 \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \begin{cases} \tau = \frac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^-) \\ \sigma = \frac{1}{2}(\sigma^+ - \sigma^-) \end{cases}$$

de modo que la métrica plana  $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  se reescribe en la forma  $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$ :

$$g_{++} = \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma^+} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma^+}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \underbrace{g_{\tau\tau}}_{\eta_{\tau\tau} = -1} + \underbrace{\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^+} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^+}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \underbrace{g_{\sigma\sigma}}_{\eta_{\sigma\sigma} = +1} = 0,$$

$$g_{--} = \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma^-} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma^-}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \underbrace{g_{\tau\tau}}_{\eta_{\tau\tau} = -1} + \underbrace{\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^-} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^-}}_{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} \underbrace{g_{\sigma\sigma}}_{\eta_{\sigma\sigma} = +1} = 0,$$

$$g_{+-} = \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma^+} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma^-}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} g_{\tau\tau} + \underbrace{\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^+} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^-}}_{-\left(\frac{1}{2}\right)^2} g_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2},$$

$\eta_{\tau\tau} = -1$        $\eta_{\sigma\sigma} = +1$

es decir,  $ds^2 \equiv g_{ab} d\sigma^a d\sigma^b = -d\tau^2 + d\sigma^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-$ .

( $-\tau^2 + \sigma^2 = -\sigma^+ \sigma^-$ )

Definiendo a los reparametrizaciones conformes

$$\begin{cases} \sigma^+ \\ \sigma^- \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{\sigma}^+(\sigma^+) \\ \underline{\sigma}^-(\sigma^-) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{en lugar de} \\ \underline{\sigma}^\pm(\sigma^+, \sigma^-) \end{array},$$

veremos que su efecto sobre la métrica es

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{g}_{ab} = \frac{\partial \sigma^c}{\partial \underline{\sigma}^a} \frac{\partial \sigma^d}{\partial \underline{\sigma}^b} g_{cd} = \begin{cases} 0 & \text{si } a=b \\ \frac{\partial \sigma^+}{\partial \underline{\sigma}^+} \frac{\partial \sigma^-}{\partial \underline{\sigma}^-} \left(-\frac{1}{2}\right) & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

es decir,  $\underline{g}_{ab} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma^+}{\partial \underline{\sigma}^+} & \frac{\partial \sigma^-}{\partial \underline{\sigma}^-} \end{pmatrix} g_{ab}$ ,

efecto que podemos eliminar con una transformación de Weyl con  $\Omega^{-1} = (\partial\sigma^+ / \partial\underline{\sigma}^+) (\partial\sigma^- / \partial\underline{\sigma}^-)$ .

Llamamos transformación conforme a la combinación

$$\left( \begin{array}{l} \text{Weyl con} \\ \Omega^{-1} = \frac{\partial\sigma^+}{\partial\underline{\sigma}^+} \frac{\partial\sigma^-}{\partial\underline{\sigma}^-} \end{array} \right) \circ \left( \begin{array}{l} \text{reparametrización} \\ \text{conforme} \\ \underline{\sigma}^+(\sigma^+), \underline{\sigma}^-(\sigma^-) \end{array} \right)$$

(un subgroup de medida cero en  $\text{Dif} \times \text{Weyl}$ ),

y vemos entonces que las transformaciones conformes preservan la norma plana  $g_{ab} = \delta_{ab}$ , y son por tanto las simetrías resistentes aún después de fijar esta norma.

[5:26/02/13]

Para seguir adelante, tenemos entonces 2 opciones:

- i) Eliminar la redundancia por completo antes de cuantizar. La elección obvia  $X^0 = \tau$  (que habría que complementar con una condición adicional) no

es muy manejable para la cuerda. El método más conveniente y tradicional es definir las coordenadas del cono de luz en el espaciotiempo

$$x^{\pm} \equiv \pm x^0 + x^{D-1} \quad \Rightarrow \quad X^{\pm}(\sigma) \equiv \pm X^0(\sigma) + X^{D-1}(\sigma),$$

y fijar las normas del cono de luz

$$X^{\pm}(\tau, \sigma) = x^{\pm} + p^{\pm} \tau.$$

A partir de las constricciones se puede entonces despejar  $X^{-}$  en términos de  $X^{+}$  y las coordenadas transversales  $X^i$   $i=1, \dots, D-2$ , de tal modo que quedamos solo con las  $D-2$   $X^i(\tau, \sigma)$  como grados de libertad físicos (ya sin constricciones), que uno procede a cuantizar.

Este método constituye un atajo útil para deducir el espectro de la cuerda y el valor requerido para  $D$  (la llamada dimensión crítica); pero no tiene invariancia de Poincaré manifiesta.

[Ver p.ej. Green-Schwarz-Witten cap. 2, Polchinski cap. 1, Brink-Henneaux cap. 12, Becker-Becker-Schwarz cap. 2.]

ii) Cuantizar los  $D$  campos  $X^M$ , y eliminar la redundancia después, imponiendo las constricciones a nivel cuántico, como condiciones para identificar a los estados físicos, análogamente a lo que hicimos para la partícula. Este es el método que usaremos en el resto del curso, y se le conoce como cuantización covariante "antigua" (para contrastar con la cuantización covariante "moderna", o BRST, que mencionaremos brevemente más adelante).

Por ahora nos olvidemos entonces de las 2 constricciones, y el sistema que debemos cuantizar es simplemente

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X^M \partial_a X_M, \quad \leftarrow a=1,2$$

que como ya dijimos no es otra cosa que  $D$

campos escalares libres (Klein-Gordon) reales y no masivos. La ecuación de movimiento para cada campo es la ec. de Klein-Gordon sin masa,

$$\partial^2 \chi^N = 0$$

↪ Laplaciano / D'Alembertiano  $\partial_1^2 + \partial_2^2 = \partial_1^2 - \partial_0^2$

mejor conocida como la ecuación de ondas.

De la p. 14, esperamos entonces poder desarrollar a los  $\chi^N$  en modo de Fourier, en analogía directa con la expresión clásica

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( a_{\vec{p}} e^{i p \cdot x} + a_{\vec{p}}^* e^{-i p \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

↕

$$\chi^N(\tau, \sigma) = \int \frac{d^D p}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left( a_p^N e^{i p \cdot \sigma} + a_p^{*N} e^{-i p \cdot \sigma} \right) \Big|_{p^0 = E_p \equiv |p|}$$

↖  $p = p'$  momento espacial en la hoja de mundo



donde, al cuantizar, los coeficientes  $a_p^\mu$  y  $a_p^{\mu*}$  se convertirán en operadores de aniquilación y creación  $\hat{a}_p^\mu$  y  $\hat{a}_p^{\mu\dagger}$ .

Esto es esencialmente correcto; pero habrá diferencias en 2 aspectos: las condiciones de frontera para  $X^\mu$ , y la notación que es tradicional en cuerdas.

Las condiciones de frontera se deducen, justo como la ecuación de movimiento, a partir del principio variacional: comenzando con

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \partial_a X^\mu \partial_a X_\mu, \quad M \leftarrow \text{hoja de mundo}$$

al variar  $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$  obtenemos

$$\delta S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \partial_a X^\mu \partial_a (\delta X_\mu)$$

$$\stackrel{\text{partes}}{=} \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma (-\partial^2 X^\mu) \delta X_\mu + \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \partial_a (\partial_a X^\mu \delta X_\mu)}$$

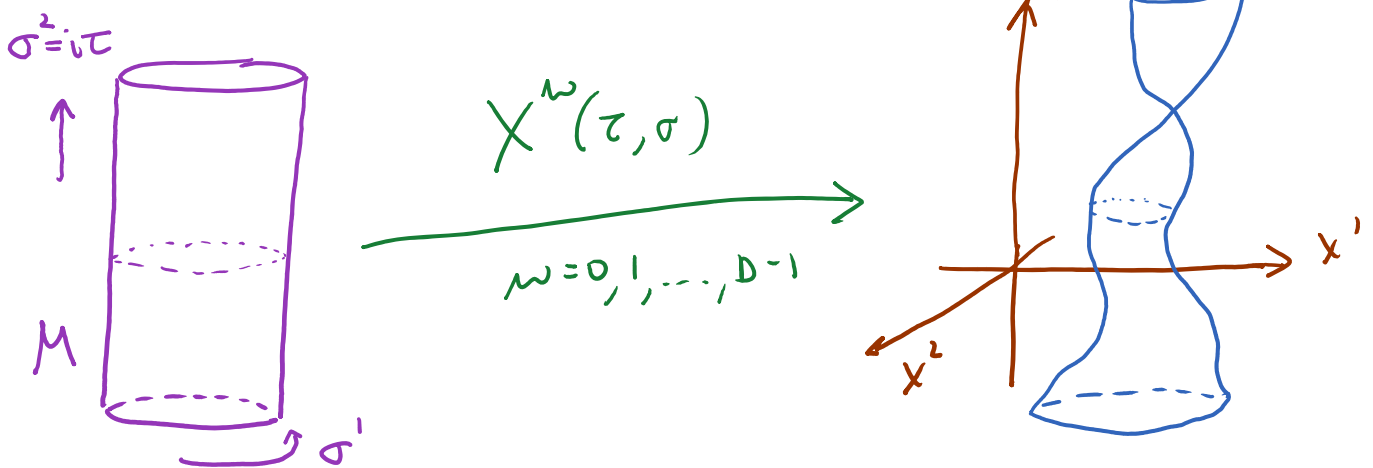
(posible) frontera de hoja de mundo  $\rightarrow \partial M$

$$\int ds \partial_n X^m \delta X_m$$

$\uparrow$   
 $\equiv n^a \partial_a$   
 $\uparrow$   
vector normal a  $\partial M$

Llegados a este punto, el análisis es distinto dependiendo de si estamos hablando de una cuerda cerrada o abierta.

Analizemos primero la propagación libre de una cuerda cerrada. En este caso, la hoja de mundo  $M$  es un cilindro,



que elegiremos parametrizar con  $-\infty < \sigma^2 < \infty$ ,  $0 \leq \sigma^1 \leq 2\pi$ ,  $\sigma^1 \simeq \sigma^1 + 2\pi$ . Nuestra hoja de

mundo no tiene entonces frontera,  $\partial M = \emptyset$ . (Si  
 acaso pensáramos en algún momento en trabajar  
 en un intervalo finito de la coordenada "temporal"  
 $\sigma^2 \in [\sigma_i^2, \sigma_f^2]$ , de cualquier manera no habría  
 contribución de los bordes  $\sigma^2 = \sigma_{i,f}^2$ , porque en  
 el principio variacional fijamos las condiciones  
 inicial y final para  $X^M(\sigma^1, \sigma^2)$ , de modo que  
 $\delta X^M \Big|_{\sigma^2 = \sigma_{i,f}^2} = 0$ . )

No tenemos entonces condiciones de frontera en  
 sentido estricto, pero sí debemos tomar en cuenta  
 que nuestros campos  $X^M$  están definidos sobre un  
círculo  $S^1$  ( $\sigma^1 \approx \sigma^1 + 2\pi$ ), y obedecen condiciones de  
periodicidad

$$X^M(\sigma^1, \sigma^2) = X^M(\sigma^1 + 2\pi, \sigma^2) \quad (\text{cuerda cerrada}).$$

Así que, en lugar de desarrollar nuestros campos con una transformada de Fourier,

$$X^\mu(\tau, \sigma) \sim \int \frac{d^2 p}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left( a_p^\mu e^{i p \cdot \sigma} + a_p^{*\mu} e^{-i p \cdot \sigma} \right) \Big|_{p^0 = \varepsilon_p = |p'|}$$

$\uparrow$   $p = p'$  momento espacial en la hoja de mundo

teremos una serie de Fourier: el momento  $p'$  se discretiza a la Kaluza-Klein (p. 36),

$$p' = \frac{n}{R} = n \in \mathbb{Z}, \quad \text{de tal modo que}$$

$\leftarrow$  radio del círculo = 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp' \rightarrow \frac{1}{R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \quad (\text{y } \delta(p-p') \rightarrow \delta_{n,n'}),$$

y quedamos entonces con

$$X^\mu(\tau, \sigma) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{2|n|}} \left( a_n^\mu e^{-in|\tau| + in\sigma} + a_n^{*\mu} e^{in|\tau| - in\sigma} \right),$$

$\uparrow$   $p^0 = \varepsilon_p = |p'|$

que claramente respeta la condición de periodicidad.

Como siempre, el modo con  $p' = n = 0$  representa una excitación constante del campo. Pero podemos notar

que la expresión anterior no es de hecho la solución más general a la ecuación de movimiento

$$(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2) X^\mu = 0 : \text{ es posible agregar además}$$

un término lineal en  $\sigma$  o  $\tau$ . (Esto no sería posible si estuviéramos tratando con la ecuación

de Klein-Gordon con masa. El caso sin masa lo usamos p.ej. para el campo electromagnético  $A_\mu$ .

En ese contexto, términos lineales en  $x^0$  o  $x^i$  representan una intensidad de campo constante  $F_{0i} = E_i$  ó  $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$ , posibilidad que normalmente descartamos por condiciones de frontera en  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ .)

La condición de periodicidad prohíbe un término lineal en  $\sigma$ , pero no en  $\tau$ .

Tomando en cuenta además que  $X^\mu$  tiene unidades de longitud, mientras que un campo escalar  $\varphi$  en  $1+1$  dimensiones ( $\frac{1}{2} \int d^2\sigma \partial_a \varphi \partial^a \varphi$ ) tendrá dimensión 0,

reescribimos nuestra expresión anterior por  $\sqrt{2\pi\alpha'}$   
 $(\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X \cdot \partial^a X)$ , quedando entonces con

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu + \alpha' p^\mu \tau$$

$$\sum_{n \neq 0} \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{4\pi|n|}} \left( a_n^\mu e^{-in\tau + in\sigma} + a_n^{\mu*} e^{in\tau - in\sigma} \right)$$

El coeficiente del término lineal en  $\tau$  merece ese nombre porque es la carga conservada asociada a la invariancia bajo traslaciones  $X^\mu \rightarrow X^\mu + c^\mu$ , es decir, el momento espaciotemporal. Para ver esto, recordemos que para deducir la corriente de Noether asociada a una simetría podemos razonar como sigue.

Al considerar

$$X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow X^\mu(\tau, \sigma) + \underbrace{\delta X^\mu(\tau, \sigma)}_{\equiv E^\nu(\tau, \sigma) \delta_\nu^\mu},$$

tenemos  $\delta S_p = 0$  si  $E^\nu$  es constante, porque en ese caso  $\delta X^\mu$  es una traslación, que constituye una simetría de  $S_p$ . Cuando  $E^\nu$  no es constante,

$$\delta S_p = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \ 2 \partial_a X^\mu \underbrace{\partial^a \delta X_\mu}_{E_\mu(\tau, \sigma)} \neq 0$$

en general. Pero si ahora pedimos que  $X^\mu$  satisfaga su ecuación de movimiento, entonces tenemos  $\delta S_p = 0$  bajo variaciones  $\delta X^\mu$  arbitrarias. Denotando

$$\boxed{J_a^\mu \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_a X^\mu}, \text{ tenemos entonces}$$

$$\delta S_p = - \int d^2\sigma J_a^\mu \partial^a \epsilon_\mu$$

$$\stackrel{\text{partes}}{=} \int d^2\sigma \partial^a J_a^\mu \epsilon_\mu = 0 \quad \forall \epsilon_\mu(\tau, \sigma).$$

Decimos de aquí que  $\partial^a J_a^\mu = 0$ , es decir,  $J_a^\mu$  es la corriente de Noether asociada a traslaciones a lo largo de  $X^\mu$ . En este caso, es de hecho obvio que  $\partial^a J_a^\mu \propto \partial^a \partial_a X^\mu = 0$  como consecuencia de la ec. de movimiento, pero el mismo procedimiento es útil también en otros casos.

La carga total asociada a esta simetría es entonces

$$\int_0^{2\pi} d\sigma J_\tau^\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau X^\mu}_{\propto p^\mu + \text{términos periódicos en } \sigma} = p^\mu. \quad \checkmark$$

Otra manera de decir lo mismo es notar que

$$\Pi_{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{X}^{\mu}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^{\mu} \quad \leftarrow \partial_{\tau}$$

es la densidad de momento canónico conjugado al campo  $X^{\mu}$ . Para un campo arbitrario  $\varphi$ , el  $\Pi$  correspondiente no guarda relación con el momento espaciotemporal; pero en este caso  $X^{\mu}$  es la posición en el espaciotiempo, así que  $\Pi_{\mu}$  es directamente la densidad de momento espaciotemporal sobre la cuerda. Y el momento total que porta la cuerda es entonces, efectivamente,

$$\int_0^{2\pi} d\sigma \Pi_{\mu} = \int_0^{2\pi} d\sigma \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_{\tau} X_{\mu}}_{J_{\tau\mu}} = P_{\mu} \quad \checkmark$$

La expansión en modos de Fourier de la p. 151,

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = X^{\mu} + \alpha' p^{\mu} \tau$$

$$\sum_{n \neq 0} \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{4\pi|n|}} \left( a_n^{\mu} e^{-inl\tau + in\sigma} + a_n^{\mu*} e^{inl\tau - in\sigma} \right),$$

que como hemos visto es exactamente la esperada



para campos escalares no masivos en  $1+1$  dim, nos servirá de punto de partida al cuantizar los campos  $X^\mu$  (si cuantizamos canónicamente, tendremos entonces a  $\hat{X}^\mu$ ,  $\hat{p}^\mu$ ,  $\hat{a}_n^\mu$  y  $\hat{a}_n^{\mu\dagger}$  como operadores). Pero, por razones históricas y prácticas, es habitual reescribirlos en otra notación.

Recordando que la solución general a la ecuación de ondas debe poderse expresar como una suma de términos independientes que describen ondas viajeras hacia la izquierda y hacia la derecha, separaremos

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \underbrace{\frac{X^\mu}{2} + \frac{\alpha'}{2} p^\mu(\tau - \sigma) + \sum_{n>0} \sqrt{\frac{\alpha'}{4\pi n}} \left( a_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)} + c.c. \right)}_{\text{Modos Derechos}}$$

$$\equiv X_{\text{D}}^\mu(\tau - \sigma) \equiv \tilde{X}^\mu(\sigma^-)$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\equiv \sigma^-}$

$$+ \underbrace{\frac{X^\mu}{2} + \frac{\alpha'}{2} p^\mu(\tau + \sigma) + \sum_{n<0} \sqrt{\frac{\alpha'}{4\pi(-n)}} \left( a_n^\mu e^{in(\tau + \sigma)} + c.c. \right)}_{\text{Modos Izquierdos}}$$

$$\equiv X_{\text{I}}^\mu(\tau + \sigma) \equiv X^\mu(\sigma^+)$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\equiv \sigma^+}$

Y a continuación definiremos

$$\alpha_0^{\omega} \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^{\omega}, \quad \tilde{\alpha}_0^{\omega} \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^{\omega},$$

y, para todo  $n > 0$ ,

$$\alpha_n^{\omega} \equiv -i \sqrt{\frac{n}{2\pi}} a_{-n}^{\omega}, \quad \alpha_{-n}^{\omega} \equiv i \sqrt{\frac{n}{2\pi}} a_n^{\omega*},$$

operadores de aniquilación  $\left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\}$

operadores de creación  $\left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\}$

$$\tilde{\alpha}_n^{\omega} \equiv -i \sqrt{\frac{n}{2\pi}} a_n^{\omega}, \quad \tilde{\alpha}_{-n}^{\omega} \equiv i \sqrt{\frac{n}{2\pi}} a_{-n}^{\omega*}.$$

Notar que esto implica que  $(\alpha_n^{\omega})^* = \alpha_{-n}^{\omega}$  y  $(\tilde{\alpha}_n^{\omega})^* = \tilde{\alpha}_{-n}^{\omega}$ .

Con esto, nuestro campo puede ser escrito como

$$X^{\omega}(z, \sigma) = \underbrace{\frac{X^{\omega}}{2} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \tilde{\alpha}_0^{\omega} \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^{\omega} e^{-in\sigma^-}}_{X_D^{\omega}(\sigma^-) = \tilde{X}^{\omega}(\sigma^-)} + \underbrace{\frac{X^{\omega}}{2} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^{\omega} \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{\omega} e^{-in\sigma^+}}_{X_I^{\omega}(\sigma^+) = X^{\omega}(\sigma^+)}.$$

Podemos ver que la notación para  $\alpha_0^\mu$  y  $\tilde{\alpha}_0^\mu$  se ha elegido de forma tal que

$$\partial_{\sigma^-} X^\mu(\tau, \sigma) = \partial_{\sigma^-} \tilde{X}^\mu(\sigma^-) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^-}$$

induce  $n=0$

$$\partial_{\sigma^+} X^\mu(\tau, \sigma) = \partial_{\sigma^+} X^\mu(\sigma^+) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^+}$$

La interpretación física de los coeficientes en esta expansión es clara (y era clara ya antes del cambio de notación):

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu + \alpha' p^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left( \alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \right)$$

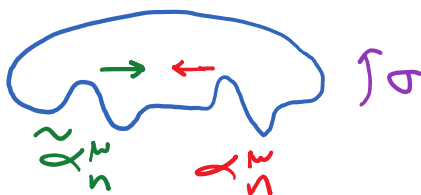
posición del centro de masa (en  $\tau=0$ )  
 momento del centro de masa

ondas hacia la "izquierda"  
 ondas hacia la "derecha"

Grados de libertad de partícula


Osciladores: ondas sobre la cuerda

$$(X^\mu(\tau), \dot{X}^\mu(\tau) = 0)$$



Al cuantizar canónicamente, tendremos operadores  $\hat{X}^\mu, \hat{p}^\mu, \hat{\alpha}_n^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\mu$ , asociados a un espacio de estados que pueda construirse actuando sobre

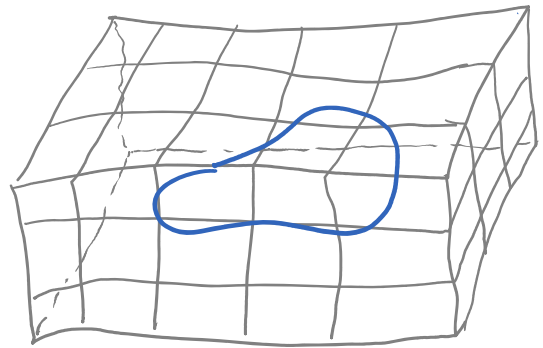
el estado base  $|0, 0; p\rangle$  en los operadores de creación  
 estado base  $\uparrow$  estado base  
 para  $\alpha_n$  para  $\tilde{\alpha}_n$   
 $\hat{\alpha}_{-n}^\mu (\propto \hat{a}_{-n}^{\mu\dagger})$  y  $\hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^\mu (\propto \hat{\tilde{a}}_n^{\mu\dagger})$ .  
 $\leftarrow n > 0 \rightarrow$   $\leftarrow n > 0 \rightarrow$

Desde la perspectiva de la hoja de mundo (donde estamos haciendo 2da. cuantización de los campos  $X^\mu$ ), esto nos daría estados con distintos números de partículas; pero desde el punto de vista del espaciotiempo (donde estamos haciendo 1a. cuantización de la trayectoria  $X^\mu$  de la cuerda), todos los estados representan a una sola cuerda cerrada, con mayor o menor grado de excitación. 

Como hemos dicho, esta cuerda representa a su vez la excitación más pequeña posible del campo de cuerdas cerradas. Para obtener el espectro físico de estados de cuerdas.

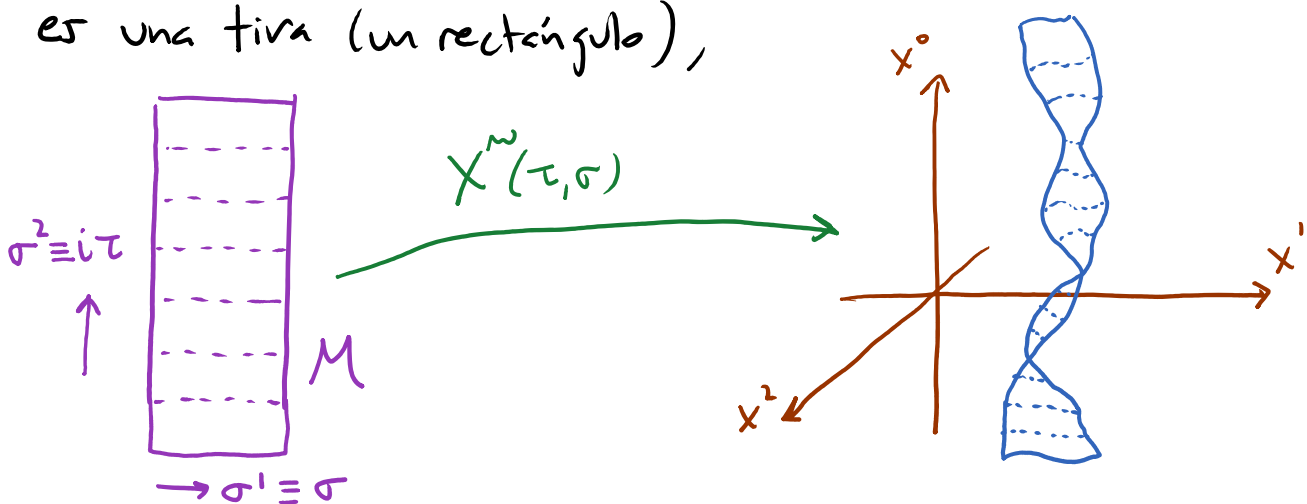
vibración de la cuerda (y por tanto, del campo de cuerdas), tendríamos todavía que imponer a nivel cuántico las restricciones  $\dot{X} \cdot X' = 0$ ,  $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$ .

Veremos eventualmente que en el caso de la cuerda cerrada, uno de los estados físicos es un gravitón, con lo cual quedará claro que el campo de cuerdas cerradas es la generalización cuerdica del propio espaciotiempo.



Analizemos ahora el caso de la cuerda abierta.

En este caso, la hoja de mundo  $M$  para propagación libre es una tira (un rectángulo),



de modo que ahora sí tiene una frontera ( $\partial M \neq \emptyset$ ), que está dada por las líneas de mundo de los 2 extremos de la cuerda.

Elegiremos trabajar en  $0 \leq \sigma' \leq \pi$ ,  $-\infty < \sigma^2 < \infty$ , de tal modo que la frontera esté en  $\sigma' = 0, \pi$ . El término de frontera en  $\delta S_p$  que obtuvimos en la p. 147,

$$\int_M d^2\sigma \partial^{\hat{a}} (\partial_{\hat{a}} X^{\mu} \delta X_{\mu}) = \int_{\partial M} ds \partial_n X^{\mu} \delta X_{\mu}$$

$\uparrow \equiv n^{\hat{a}} \partial_{\hat{a}}$ , con  $n^{\hat{a}} \perp \partial M$ ,

usa  $ds \equiv d\tau$  y  $\partial_n \equiv \partial_{\sigma}$ , y se reescribe entonces como

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \partial_{\sigma} (\partial_{\sigma} X^{\mu} \delta X_{\mu}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[ \partial_{\sigma} X^{\mu} \delta X_{\mu} \right]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}.$$

Para que esta contribución de borde a  $\delta S_p$  se anule, debemos imponer entonces condiciones de frontera tales que

$$\partial_{\sigma} X^{\mu} \delta X_{\mu} = 0 \quad \text{en } \sigma = 0, \pi.$$

La única opción covariante bajo Poincaré es pedir

$$\left. \partial_\sigma X^\mu \right|_{\sigma=0, \pi} = 0 \quad \forall \tau \quad \left( \left. \partial_n X^\mu \right|_{\sigma=M} = 0 \right) \quad \forall \mu,$$

es decir, condiciones de Neumann, o de extremo

libre. Físicamente, estas condiciones significan que

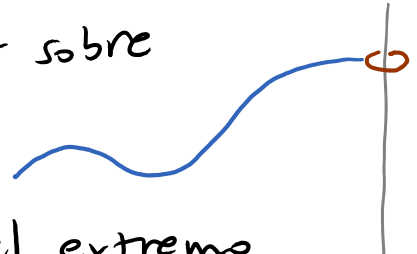
no hay momento espaciotemporal  $p^\mu$  fluyendo por los extremos de la cuerda, de modo que  $p^\mu$  se conserva, lo cual va de la mano de la invariancia bajo traslaciones.

(Al estudiar en la licenciatura las ondas sobre

una cuerda, la condición de Neumann

se nos presenta como asociada a que el extremo

de la cuerda está atado a un anillo que se desliza sin fricción sobre una varilla.)



Otra segunda posibilidad es pedir que

$$\left. X^\mu \right|_{\sigma=0, \pi} = c^\mu \quad \forall \tau \quad \left( \left. X^\mu \right|_{\sigma=M} = c^\mu \right),$$

↪ cte.

o lo que es lo mismo,

$$\partial_\tau X^\mu \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0 \quad \forall \tau \quad \left( \partial_t X^\mu \Big|_{\partial M} = 0 \right),$$

$$\uparrow \partial_t \equiv t^a \partial_a \text{ con } t^a \perp \partial M$$

para al menos algunos valores de  $\mu$ . Estos son

condiciones de Dirichlet, o de extremo fijo, y

tienen como consecuencia  $\delta X^\mu \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0$ , con lo

cual también se logra  $\delta S_p = 0$ . Esta condición

de frontera nos resulta muy familiar, pues es la que satisfacen las cuerdas de guitarra, violín, etc.

Pero en el contexto de la cuerda relativista, tienen la

peculiaridad de que violan la invariancia bajo Lorentz

si no todos los  $X^\mu$  son Dirichlet, y además,

violan la invariancia bajo traslaciones.

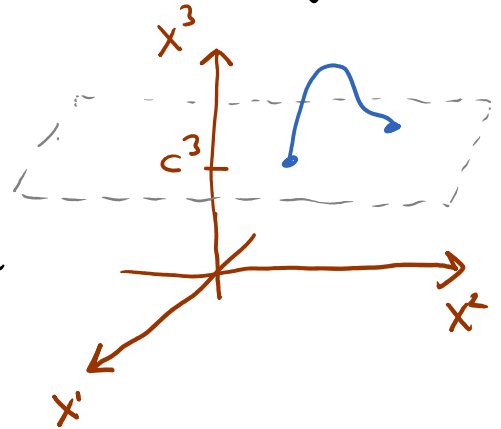
Efectivamente, si pedimos que

$$\begin{cases} \partial_\sigma X^\alpha \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0 & \text{para } \alpha = 0, 1, \dots, p \\ X^i \Big|_{\sigma=0, \pi} = c^i & \text{para } i = p+1, \dots, D-1 \end{cases} \quad (\text{con } p = -1, \dots, D-2),$$



estamos estipulando que  $x^i = c^i$  es un lugar especial, y las cuerdas abiertas deben tener sus extremos justo ahí.

P.ej., el caso  $p=2$  sería como en la figura de la derecha: los extremos de la cuerda solo podrían desplazarse libremente a lo largo de  $x^1$  y  $x^2$ ,



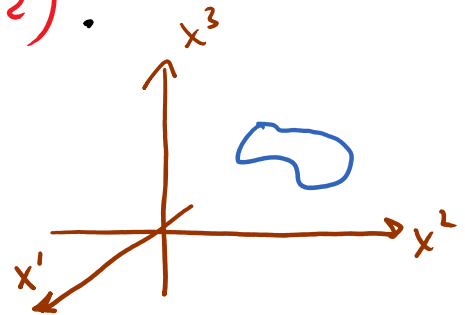
pero en las direcciones restantes están restringidos a no salirse nunca del plano 2-dimensional definido por  $x^3 = c^3, \dots, x^{D-1} = c^{D-1}$ . (El caso  $p=-1$ , donde todos los  $X^M$  serían Dirichlet, es todavía más peculiar, pues ambos extremos estarían atados en un solo evento  $x^M = c^M$  en el espaciotiempo.) Vale la pena enfatizar que esta restricción aplica solo para los extremos: los puntos en el cuerpo de la cuerda abierta son indistinguibles de los puntos en una cuerda cerrada, y pueden por tanto moverse en todo el espacio. Aunque, por supuesto, incurrirán en un costo energético grande si se alejan mucho de

$x^i = c^i$ , porque la cuerda tendrá que estirarse/crecer.

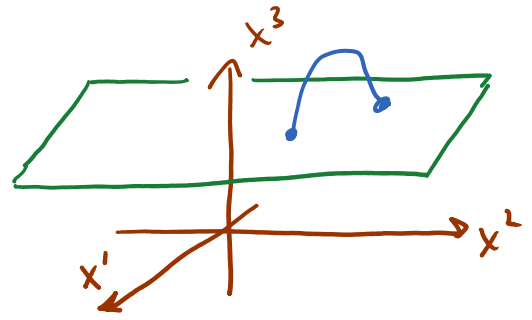
Durante muchos años, esto pareció demasiado extraño como para tomarse en cuenta. Pero en 1989, Dai, Leigh y Polchinski, y por separado Hořava, entendieron la verdadera naturaleza de estas condiciones: mostraron (utilizando la llamada "dualidad T") que el plano  $p$ -dimensional en  $x^i = c^i$  es un objeto físico que debe considerarse parte del espectro no perturbativo, un solitón, de la teoría de cuerdas. Dai, Leigh y Polchinski lo bautizaron D-brana (o más específicamente,  $D_p$ -brana, si se quiere indicar su dimensionalidad).

La idea es entonces que, así como una cuerda cerrada es una pequeña excitación de (la generalización

cuerdas de) el propio espaciotiempo, una cuerda abierta es una pequeña excitación de un objeto físico extendido en  $p$  dimensiones espaciales ( $-1 \leq p \leq D-1$ ),



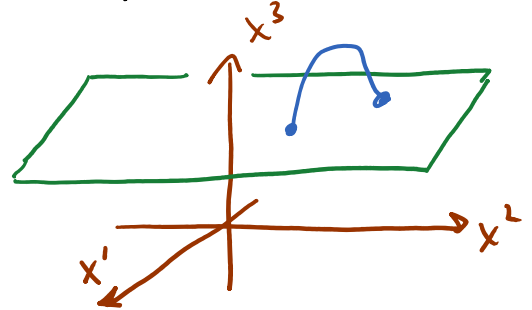
que llamamos una D-brana. Esto explica por qué los extremos de la cuerda abierta solo pueden deslizarse libremente a lo largo



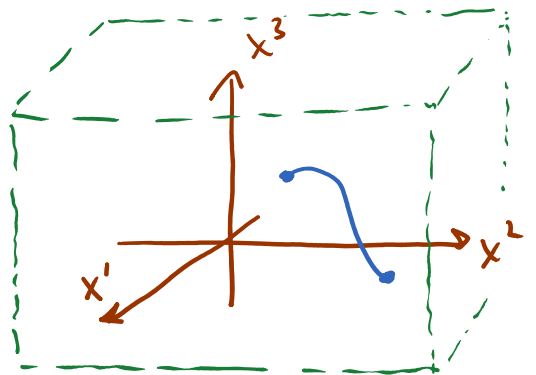
de algunas direcciones  $x^\alpha$  ( $\alpha=0, \dots, p$ ): la D-brana está localizada en  $x^i = c^i$  ( $i=p+1, \dots, D-1$ ), y la cuerda abierta es una excitación de ella —podemos pensarla como un hilito (filamento) de la propia D-brana.

Dicho a la inversa, así como el espaciotiempo es un objeto cuyos pequeños excitaciones son cuerdas cerradas (que pueden, naturalmente, moverse por todo el espacio), y siempre que hablamos de cuerdas cerradas estamos en última instancia hablando del espaciotiempo cuerdero, una D-brana es un objeto cuyos pequeños excitaciones son cuerdas abiertas (que, naturalmente, solo pueden moverse sobre la D-brana), y siempre que hablamos de cuerdas abiertas estamos en última instancia hablando de una (o varias) D-brana(s).

Queda claro entonces que el hecho de que las condiciones de Dirichlet violen la invariancia bajo Poincaré no es un crimen, sino una consecuencia natural de la



presencia de la D-brana. Y entendemos también que incluso en el caso  $p=D-1$ , donde todos los  $x^\mu$  son Neumann y sí se tiene invariancia de Poincaré, las cuerdas abiertas deben interpretarse de cualquier manera como excitaciones de una D-brana que llene todo el espacio, una  $D(D-1)$ -brana.



letra: Dirichlet  $\uparrow$   $\curvearrowright$  número: dimensión del espaciotiempo (eventualmente  $\mathbb{Z}_6$ )

En ausencia de D-branas, NO puede haber cuerdas abiertas, solo cerradas.

El grueso de la comunidad cuerdas no aceptó a las D-branas como objetos intrínsecos de la teoría de cuerdas sino hasta 1995, cuando Polchinski publicó un trabajo clave [hep-th/9510017] donde demostró contundentemente

su relevancia. Desde entonces, los D-branes han sido pieza crucial en muchos avances dentro de la teoría.

Procedamos ahora a implementar explícitamente las condiciones de frontera de Dp-brane,

$$\left. \partial_\sigma X^\alpha \right|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad (\alpha=0, \dots, p), \quad \left. X^i \right|_{\sigma=0,\pi} = c^i \quad (i=p+1, \dots).$$

Ahora nuestros campos viven no sobre un círculo, sino sobre un intervalo; pero de cualquier manera, el hecho de que  $\sigma$  tenga un rango finito vuelve a hacer que el momento en la hoja de mundo sea discreto,  $p' = n$ .

La diferencia importante con respecto a la cuerda cerrada es que ahora los modos izquierdos y derechos NO son independientes, porque las condiciones de borde hacen que los ondas derechas se conviertan en izquierdas (y viceversa) al rebotar en los extremos de la cuerda ( $\Rightarrow$  ondas estacionarias).

Concretamente, para satisfacer las condiciones de

Neumann y Dirichlet necesitamos tener, respectivamente,

$$\tilde{\alpha}_n^\alpha = \alpha_n^\alpha \quad \forall n, \quad \tilde{\alpha}_n^i = -\alpha_n^i \quad \forall n,$$

no confundir

así que la expansión toma la forma

$$X^\alpha(\tau, \sigma) = x^\alpha + 2\alpha' p^\alpha \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\alpha e^{-in\tau} \cos(n\sigma)$$

$$\uparrow \text{ porque ahora } p_\mu = \int_0^\pi d\sigma \pi_\mu = \int_0^\pi d\sigma \frac{\dot{X}_\mu}{2\pi\alpha'}$$

$$X^i(\tau, \sigma) = c^i + 0 + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^i e^{-in\tau} \sin(n\sigma).$$

no confundir

no se permite término lineal en  $\tau$

$$(\alpha_0^i + \tilde{\alpha}_0^i = 0), \text{ así que } p^i = 0:$$

la cuerda No puede portar un momento

neto en las direcciones transversales

a la Dp-brana.

Es claro entonces que, al cuantizar, el espacio de Hilbert resultante para la cuerda abierta será más pequeño que

el de la cuerda cerrada (y en particular, veremos que no incluye a un gravitón).

Hemos entendido ya las condiciones de frontera para la cuerda cerrada y abierta, así como el cambio de notación de  $a_s$  y  $a_s^\dagger$  a  $\alpha_s$  y  $\tilde{\alpha}_s$ .

Vimos en las pp. 141-2 que, incluso después de fijar la norma plana  $g_{ab} = \eta_{ab}$  ó  $\delta_{ab}$ ,  $S_p$  tiene todavía a las transformaciones conformes como simetría local remanente. En efecto,

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma^1 d\sigma^2 \partial_a X \cdot \partial_a X$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma^+ d\sigma^- \partial_{\sigma^+} X \cdot \partial_{\sigma^-} X,$$

con  $\sigma^+ \equiv \tau + \sigma \equiv -i\sigma^2 + \sigma^1$ ,  $\sigma^- \equiv \tau - \sigma \equiv -i\sigma^2 - \sigma^1$ ,  
es invariante bajo

$$\sigma^+ \rightarrow \underline{\sigma}^+(\sigma^+), \quad \sigma^- \rightarrow \underline{\sigma}^-(\sigma^-):$$

$$\begin{aligned}
 \underline{S}_p &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma^+ d\sigma^- \partial_{\sigma^+} X \cdot \partial_{\sigma^-} X \\
 &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma^+ d\sigma^- \underbrace{\left| \frac{\partial(\sigma^+, \sigma^-)}{\partial(\underline{\sigma}^+, \underline{\sigma}^-)} \right|}_{\frac{\partial\sigma^+}{\partial\underline{\sigma}^+} \frac{\partial\sigma^-}{\partial\underline{\sigma}^-}} \frac{\partial\sigma^+}{\partial\underline{\sigma}^+} \partial_{\sigma^+} X \cdot \partial_{\sigma^-} X \frac{\partial\sigma^-}{\partial\underline{\sigma}^-} \\
 &= S_p .
 \end{aligned}$$

Esta NO es una reparametrización: la métrica no cambia (sigue siendo  $g_{11} = 1 = g_{22}$ ,  $g_{12} = 0$ , o lo que es lo mismo,  $g_{++} = 0 = g_{--}$ ,  $g_{+-} = -1/2$ ), así que las distancias propias SÍ cambian. Como vimos,

$$\left( \begin{array}{c} \text{Transformación} \\ \text{Conforme} \end{array} \right) \equiv \left( \begin{array}{c} \text{Transformación} \\ \text{de Weyl} \end{array} \right) \circ \left( \begin{array}{c} \text{Reparametrización} \\ \text{conforme} \end{array} \right)$$

$$g_{ab} \rightarrow \Omega g_{ab} \quad g_{ab} \rightarrow \underbrace{\frac{\partial\sigma^+}{\partial\underline{\sigma}^+} \frac{\partial\sigma^-}{\partial\underline{\sigma}^-}}_{\equiv \Omega^{-1}} g_{ab}$$

Reserva localmente distancias propias, pero preserva ángulos.

A pesar de que las reparametrizaciones conformes son



un subconjunto de medida cero del grupo de difeos, en 2 dimensiones las transformaciones conformes (definidas a nivel local) forman un grupo de dimensión infinita: infinitesimalmente,  $\underline{\sigma}^+(\sigma^+) = \sigma^+ + \sum_r \varepsilon_r(\sigma^+)^r$ .

$S_p$  es un ejemplo de lo que llamamos una teoría de campos conforme (TCC  $\equiv$  CFT) en 2 dimensiones.

Las teorías conformes son también importantes en  $d > 2$  dimensiones (p.ej., las teorías de campos bien definidas se reducen a una TCC a ultra-altas energías, y frecuentemente se reducen a TCC a ultra-bajas energías). Pero en  $d > 2$ , la dimensión del grupo conforme es solo  $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ . [6:05/03/13]

El caso  $d=2$  es especial, y la simetría conforme se vuelve entonces una herramienta muy poderosa.

Para hacerla manifiesta y aprovecharla más fácilmente, conviene hacer un nuevo cambio de

notación, para pasar a coordenadas complejas en la hoja de mundo:

$$\left. \begin{aligned} w &\equiv \sigma^2 + i\sigma^1 \quad (= i(\tau + \sigma) = i\sigma^+) \\ \bar{w} &\equiv \sigma^2 - i\sigma^1 \quad (= i(\tau - \sigma) = i\sigma^-) \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \begin{cases} \sigma^2 = \frac{1}{2}(w + \bar{w}) \\ \sigma^1 = \frac{i}{2}(\bar{w} - w) \end{cases}$$

↖ *convenciones diferentes de Polchinski*

↖  $\equiv w^*$

$$\Rightarrow \partial_w = \frac{1}{2}(\partial_2 - i\partial_1), \quad \partial_{\bar{w}} = \frac{1}{2}(\partial_2 + i\partial_1),$$

$$\begin{aligned} g_{w\bar{w}} &= \frac{\partial\sigma^1}{\partial w} \frac{\partial\sigma^1}{\partial \bar{w}} (1) + \frac{\partial\sigma^2}{\partial w} \frac{\partial\sigma^2}{\partial \bar{w}} (1) = \frac{1}{2}, \\ g_{ww} &= \frac{\partial\sigma^1}{\partial w} \frac{\partial\sigma^1}{\partial w} (1) + \frac{\partial\sigma^2}{\partial w} \frac{\partial\sigma^2}{\partial w} (1) = 0, \\ g_{\bar{w}\bar{w}} &= \frac{\partial\sigma^1}{\partial \bar{w}} \frac{\partial\sigma^1}{\partial \bar{w}} (1) + \frac{\partial\sigma^2}{\partial \bar{w}} \frac{\partial\sigma^2}{\partial \bar{w}} (1) = 0, \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{fuera} \\ \text{de la} \\ \text{diagonal,} \\ \text{justo} \\ \text{como} \\ g_{+-} \end{array} \right\}$$

$$d^2w \equiv dw d\bar{w} = \left| \frac{\partial(w, \bar{w})}{\partial(\sigma^1, \sigma^2)} \right| d\sigma^1 d\sigma^2 = 2 \underbrace{d\sigma^1 d\sigma^2}_{d^2\sigma}.$$

↑

La acción de Polyakov se reescribe entonces como

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2w \partial_w X \cdot \partial_{\bar{w}} X.$$

↖ *contracción en  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$*

Adoptaremos la notación  $f(w, \bar{w})$  para una función

genérica,  $f(w)$  para una función analítica/holomorfa y  $f(\bar{w})$  para una función antianalítica/antiholomorfa.

Por ejemplo, la separación que tenemos entre en modo izquierdo y derecho adopta la forma

$$X^{\mathcal{N}}(w, \bar{w}) = X^{\mathcal{N}}(w) + \tilde{X}^{\mathcal{N}}(\bar{w}).$$

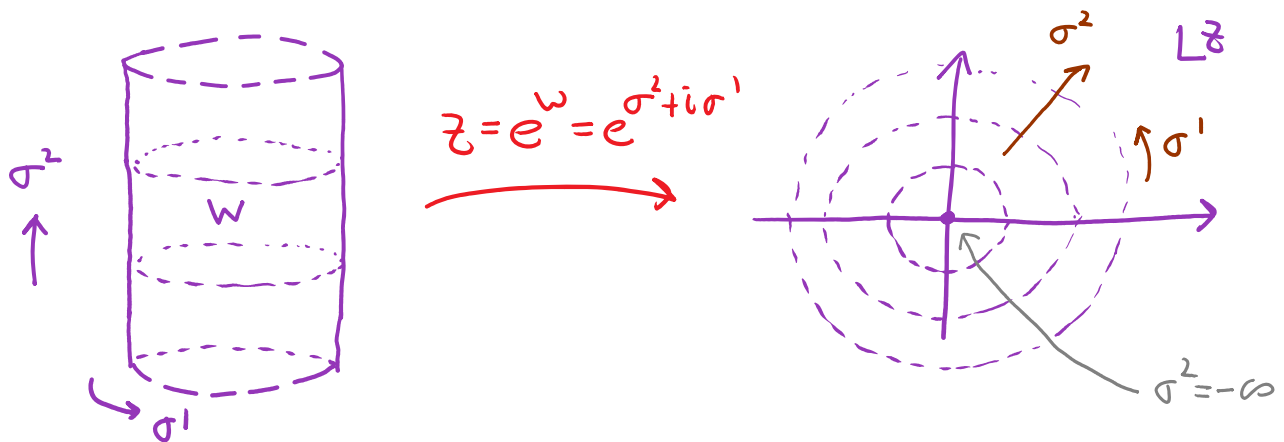
En este lenguaje, una transformación conforme corresponde a un mapeo analítico/holomorfo

$$w \rightarrow w' = w'(w), \quad \bar{w} \rightarrow \bar{w}'(\bar{w}),$$

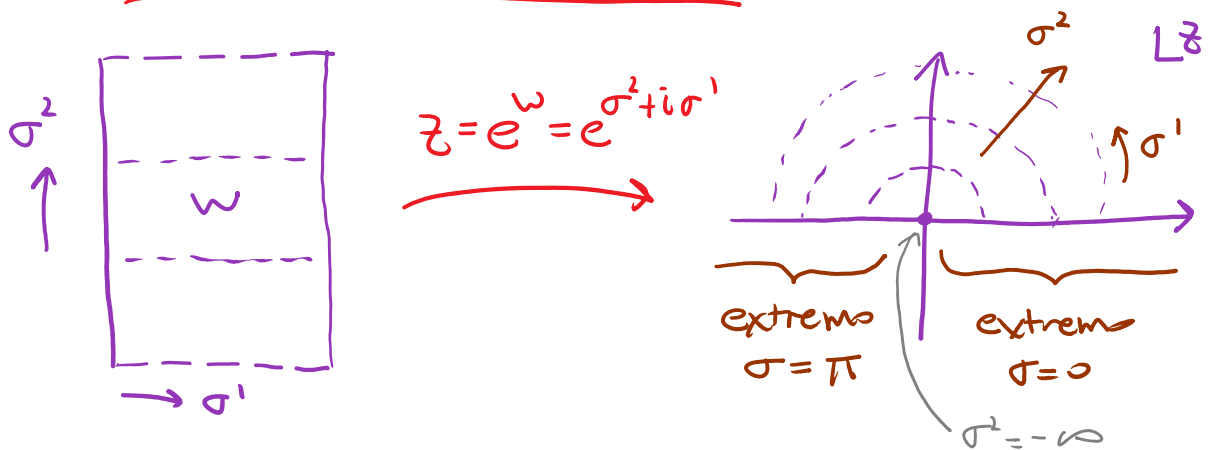
$$\text{con } X^{\mathcal{N}}(w, \bar{w}) \rightarrow X'^{\mathcal{N}}(w', \bar{w}') = X^{\mathcal{N}}(w, \bar{w}) \quad (\text{escalar})$$

(y  $S_p' = S_p$ , por el mismo argumento de antes).

Nos convendrá, de hecho, cambiar de hoja de mundo por medio de una transformación conforme específica  $z = e^w$ , que para la cuerda cerrada tiene el efecto de mapear el cilindro (infinito) al plano complejo  $\mathbb{C}$ ,



y para la cuerda abierta, mapea la tira (infinita) a la mitad superior del plano complejo,



Notar que las transiciones en el tiempo  $\sigma^2$  en la hoja de mundo original se convierten en reescalamiento en el plano complejo, así que lo que desde el punto de vista de  $w$  es el Hamiltoniano  $H$ , el generador de la evolución temporal, se reinterpreta en

$\bar{z}$  como el generador  $\mathbb{D}$  de dilataciones ( $z \rightarrow \lambda z$ ).  $\swarrow \in \mathbb{R}$

Por esta razón, al cuantizar la teoría en el plano complejo coordinatizado con  $z$ , elegiremos imponer las relaciones de conmutación a  $|z|$  constante (es decir, a  $\sigma^2$  constante). Este procedimiento se conoce como cuantización radial.

La acción tiene por supuesto la misma forma que antes, que abreviaremos en lo sucesivo como

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X \cdot \bar{\partial} X ,$$

donde  $\partial \equiv \partial_z$ ,  $\bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}}$ .

Al extremizarla,  $\delta S_p / \delta X_\mu = 0$ , obtenemos la ecuación de movimiento

$$\partial \bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z}) = 0 \quad \text{Laplace/ondas,}$$

que nos informa de inmediato que  $\partial X^\mu(z)$  es analítica, y  $\bar{\partial} X^\mu(\bar{z})$  antianalítica.

Esto nos permite desarrollar a estas funciones en una expansión de Laurent (no puramente de Taylor, por el carácter singular que tiene el origen  $z=0$ ):

$$\partial X^{\omega}(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n^{\omega}}{z^{n+1}},$$

$$\bar{\partial} X^{\omega}(\bar{z}) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_n^{\omega}}{\bar{z}^{n+1}}.$$

Integrando, obtenemos entonces

$$X^{\omega}(z, \bar{z}) = X^{\omega}(z) + \tilde{X}^{\omega}(\bar{z}), \quad \text{con}$$

$$X^{\omega}(z) = \frac{1}{2}X^{\omega} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left( -\alpha_0^{\omega} \ln z + \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{\omega}}{nz^n} \right),$$

$$\tilde{X}^{\omega}(\bar{z}) = \frac{1}{2}X^{\omega} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left( -\tilde{\alpha}_0^{\omega} \ln \bar{z} + \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^{\omega}}{n\bar{z}^n} \right).$$

Es fácil verificar que esta expansión de Laurent coincide perfectamente con la expansión de Fourier que dedujimos para la cuerda cerrada en la p. 155.

Igual que antes, para la cuerda cerrada la condición de periodicidad

$$X^M(e^{2\pi i} z, e^{-2\pi i} \bar{z}) = X^M(z, \bar{z})$$

nos obliga a tener  $\alpha_0^M = \tilde{\alpha}_0^M$ .

Para agarrar algo de práctica con estas variables complejas, repetiremos ahora la deducción de la carga de Noether asociada a transformaciones espaciotemporales.

Bajo  $X^M(z, \bar{z}) \rightarrow X^M(z, \bar{z}) + \epsilon^M(z, \bar{z})$  tenemos

$$\delta S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z (\partial X^M \bar{\partial} \epsilon_M + \partial \epsilon_M \bar{\partial} X^M)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int d^2z \left[ \underbrace{\left(\frac{i}{\alpha'} \partial X^M\right)}_{\equiv J_z^M} \bar{\partial} \epsilon_M + \partial \epsilon_M \underbrace{\left(\frac{i}{\alpha'} \bar{\partial} X^M\right)}_{\equiv J_{\bar{z}}^M} \right]$$

$\uparrow$   
 dejando fuera,  
 por convención

$$\stackrel{\text{partes}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \int d^2z (\bar{\partial} J_z^M + \partial J_{\bar{z}}^M) \epsilon_M(z, \bar{z}) = 0$$

$\uparrow$   
 si usamos la  
 ec. de movimiento  
 para  $X^M(z, \bar{z})$

$\Rightarrow (J_z^M, J_{\bar{z}}^M)$  son  $\mathcal{D}$  corrientes conservadas en la hoja de mundo,

$$\underbrace{\bar{\partial} J_z^M}_{\propto \partial X^M} + \underbrace{\partial J_{\bar{z}}^M}_{\propto \bar{\partial} X^M} = 0. \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Así se ve el enunciado} \\ \partial_a J^{M a} = g^{ab} \partial_a J_b^M = 0 \\ \text{en estas coordenadas} \end{array}$$

Podemos notar que, en este caso, es posible de hecho definir  $2(\times \mathcal{D})$  corrientes respectivamente analíticas/antianalíticas que se conservan por separado:

$$\tilde{j}^M \equiv (J_z^M, 0) = \frac{i}{\alpha'} \partial X^M, \quad \tilde{\bar{j}}^M \equiv (0, J_{\bar{z}}^M) = \frac{i}{\alpha'} \bar{\partial} X^M$$

satisfieren

$$\bar{\partial} \tilde{j}^M = 0, \quad \partial \tilde{\bar{j}}^M = 0.$$

Sabemos que la carga conservada es el momento espaciotemporal. Usando

$$\begin{aligned} J_\tau^M &= i J_{\sigma^1}^M = i (J_w^M + J_{\bar{w}}^M) \\ &= i (\bar{z} J_z^M + \bar{\bar{z}} J_{\bar{z}}^M), \quad \text{esto es} \end{aligned}$$



$$p^{\omega} = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{J_z^{\omega}}{2\pi i} = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma'}{2\pi} (\bar{z} J_z^{\omega} + \bar{\bar{z}} J_{\bar{z}}^{\omega}) ,$$

↖ por normalización elegida (p.176)

$$\text{y dado que } z = e^{\sigma^2 + i\sigma'} \Rightarrow dz = iz d\sigma' ,$$

$$\bar{z} = e^{\sigma^2 - i\sigma'} \Rightarrow d\bar{z} = -i\bar{z} d\sigma' ,$$

$$p^{\omega} = \frac{1}{2\pi i} \oint (dz J_z^{\omega} - d\bar{z} J_{\bar{z}}^{\omega})$$

↖ indica sentido de  $z$  (opuesto a  $\bar{z}$ )

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint (dz j^{\omega} - d\bar{z} \tilde{j}^{\omega}) .$$

Recordando ahora que

$$j^{\omega} \equiv J_z^{\omega} \equiv \frac{i}{\alpha'} \partial X^{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \frac{\alpha_n^{\omega}}{z^{n+1}} ,$$

$$\tilde{j}^{\omega} \equiv J_{\bar{z}}^{\omega} \equiv \frac{i}{\alpha'} \bar{\partial} X^{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \frac{\tilde{\alpha}_n^{\omega}}{\bar{z}^{n+1}} ,$$

tenemos entonces

$$p^{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \left( \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{\alpha_n^{\omega}}{z^{n+1}} - \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \frac{\tilde{\alpha}_n^{\omega}}{\bar{z}^{n+1}} \right)$$

y usando el teorema de Cauchy, nos quedamos por último con el residuo de los polos simples ( $n=0$ ),

$$p^{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} (\alpha_0^{\omega} + \tilde{\alpha}_0^{\omega}) = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^{\omega} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\alpha}_0^{\omega},$$

en acuerdo con el resultado de la p.152 y 155.

Para una cuerda abierta asociada a una Dp-brana extendida a lo largo de  $x^1, \dots, x^p$ , las condiciones de borde son

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\sigma} X^{\alpha} \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0 \quad \leftarrow \alpha=0, \dots, p \\ \partial_{\tau} X^i \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0 \quad \leftarrow i=p+1, \dots, D-1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \partial X^{\alpha}(z) \Big|_{z=\bar{z}} = \bar{\partial} X^{\alpha}(\bar{z}) \Big|_{z=\bar{z}} \\ \partial X^i(z) \Big|_{z=\bar{z}} = -\bar{\partial} X^i(\bar{z}) \Big|_{z=\bar{z}} \end{array} \right.$$

$\curvearrowright i(\partial_{\omega} - \partial_{\bar{\omega}}) = i(\tau\partial - \bar{\tau}\bar{\partial})$   
 $\curvearrowright i(\partial_{\omega} + \partial_{\bar{\omega}}) = i(\tau\partial + \bar{\tau}\bar{\partial})$

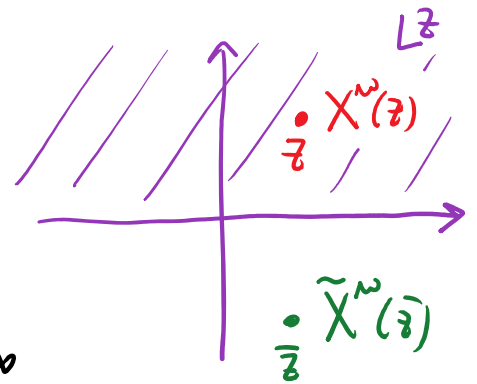
Usando las expansiones de Laurent de la p. 175, esto implica igual que antes

$$\alpha_n^\alpha = \tilde{\alpha}_n^\alpha, \quad \alpha_n^i = -\tilde{\alpha}_n^i \quad \forall n,$$

de modo que en lugar de ondas viajeras tenemos ondas estacionarias.

Una manera conveniente de reexpresar esta conexión es implementar las condiciones de frontera a través de lo que en electrostática llamamos el método de imágenes, y en cuerdas se llama usualmente el truco de duplicación

("dubbling trick"). Comenzando con  $X^\mu(z)$  definida en la mitad superior del plano, y  $\tilde{X}^\mu(\bar{z})$  en la mitad inferior, extendemos  $X^\mu(z)$  al plano entero definiendo



$$X^\alpha(\bar{z}) \equiv +\tilde{X}^\alpha(\bar{z}), \quad X^i(\bar{z}) \equiv -\tilde{X}^i(\bar{z}).$$

Las condiciones de borde  $\partial X^\alpha(z) \Big|_{z=\bar{z}} = \bar{\partial} \tilde{X}^\alpha(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}=\bar{z}}$ ,

$\partial X^i(z) \Big|_{z=\bar{z}} = -\bar{\partial} \tilde{X}^i(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}=\bar{z}}$  se traducen entonces simplemente en el enunciado de que  $\partial X^M(z)$  sea una función continua ( $X^M(z)$  diferenciable) al cruzar el eje real  $z=\bar{z}$ .

Podemos notar que en este caso

$$p^\alpha = \int_0^\pi d\sigma \frac{J_\tau^\alpha}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \left( \underbrace{\int d\bar{z} J_{\bar{z}}^\alpha}_{\frac{i}{\alpha} \partial X^\alpha(z)} - \underbrace{\int d\bar{z} J_{\bar{z}}^\alpha}_{\frac{i}{\alpha} \bar{\partial} \tilde{X}^\alpha(\bar{z})} \right)$$

y dado que

$$- \int d\bar{z} \bar{\partial} \tilde{X}^\alpha(\bar{z}) = +i \int_0^\pi d\sigma' e^{\sigma' - i\sigma'} \partial X^\alpha(e^{\sigma' - i\sigma'})$$

$\partial X^\alpha(\bar{z})$  por truco de duplicación

$$\begin{aligned} \sigma' &\equiv 2\pi - \sigma' & 2\pi \\ &= i \int_\pi^{2\pi} d\sigma' e^{\sigma' + i\sigma'} \partial X^\alpha(e^{\sigma' + i\sigma'}) \end{aligned}$$

$\int d\bar{z}' \quad \partial X^\alpha(z')$

podemos reescribir

$$p^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \underbrace{\frac{i}{\alpha'} \partial X^\alpha(z)}_{\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \frac{\alpha_n^\alpha}{z^{n+1}}} = \frac{\alpha_0^\alpha}{\sqrt{2\alpha'}}.$$

Concluimos entonces que para la cuerda abierta

$$X^\alpha(z, \bar{z}) = X^\alpha - i\alpha' p^\alpha \ln |z|^2 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\alpha}{n} (z^{-n} + \bar{z}^{-n})$$

$$X^i(z, \bar{z}) = c^i + 0 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^i}{n} (z^{-n} - \bar{z}^{-n}),$$

expresión que naturalmente coincide con la que tenemos en la p. 167.

Avanzamos ahora hacia la cuantización de la cuerda.

Para cuantizar canónicamente, promovemos

$$X^\mu(\tau, \sigma), \Pi_\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow \hat{X}^\mu(\tau, \sigma), \hat{\Pi}_\mu(\tau, \sigma),$$

e imponemos las relaciones de conmutación a  $\tau$  constante

$$[\hat{X}^\mu(\tau, \sigma), \hat{\Pi}_\nu(\tau, \sigma')] = i \delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma'),$$

o lo que es lo mismo,

$$[\hat{X}^\mu(\tau, \sigma), \partial_\tau \hat{X}^\nu(\tau, \sigma')] = i 2\pi \alpha' \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma').$$

Como es de esperarse, esto implica que los coeficientes

$$x^\mu, p^\mu, \alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu, \hat{p}^\mu, \hat{\alpha}_n^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\mu$$

satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu}$$

$$[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = m \delta_{m, -n} \eta^{\mu\nu}$$

$$[\hat{\tilde{\alpha}}_m^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\nu] = m \delta_{m, -n} \eta^{\mu\nu}$$

← grados de libertad de partícula

$$\left. \begin{array}{l} [\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \\ [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = m \delta_{m, -n} \eta^{\mu\nu} \\ [\hat{\tilde{\alpha}}_m^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\nu] = m \delta_{m, -n} \eta^{\mu\nu} \end{array} \right\} [\hat{a}_m^\mu, \hat{a}_n^\nu] = 2\pi \delta_{m, n} \eta^{\mu\nu}$$

(ver p. 155)

Verificaremos esto explícitamente en la Tarea 2.

Como ya habíamos mencionado, en las coordenadas  $z, \bar{z}$  lo anterior equivale a hacer cuantización radial, donde las relaciones de conmutación se imponen a  $|z|$  constante.

Con estos operadores podemos construir el espacio de Hilbert completo, comenzando con

← eigenestados de  $\hat{p}^M$  (para tener energía definida)

$|0, p\rangle$

↑ estado base de los infinitos osciladores  $\hat{\alpha}_n^M, \hat{\tilde{\alpha}}_n^M \forall \mu, n$   
(aniquilado por  $\hat{\alpha}_{n>0}^M, \hat{\tilde{\alpha}}_{n>0}^M$ )

y actuando en los operadores de creación  $\hat{\alpha}_{-n}^M, \hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^M$ .  
↑  $n>0$  ↑

Recordemos por supuesto que, entre todos estos estados, solo serán físicos aquellos que satisfacen las constricciones a nivel cuántico, que básicamente tomarán la forma

$$\sim \hat{T}_{ab}(\tau, \sigma) | \text{físico} \rangle = 0 \quad \forall \tau, \sigma. \quad (\text{pero, ver más adelante.})$$

2 componentes independientes } ↑ número infinito de condiciones

Podemos además calcular correladores

$$\langle 0 | T \{ \hat{X}^{\mu_1}(\tau_1, \sigma_1) \dots \hat{X}^{\mu_n}(\tau_n, \sigma_n) \} | 0 \rangle, \quad \leftarrow p^M=0$$

↑ orden temporal

que, en virtud de que la teoría en la hoja de mundo es libre, quedan determinados por completo una vez que obtenemos el propagador ( $\equiv$  función de correlación de 2 puntos)

$$\langle 0 | T \{ \hat{X}^\mu(\tau, \sigma) \hat{X}^\nu(\tau', \sigma') \} | 0 \rangle,$$

o, en coordenadas complejas,

$$\langle 0 | R \{ \hat{X}^\mu(z, \bar{z}) \hat{X}^\nu(z', \bar{z}') \} | 0 \rangle.$$

↑ orden radial (campos valores en puntos más lejanos del origen aparecen más a la izquierda)

Pero nosotros, en el resto del curso, preferiremos aprender a llevar a cabo este tipo de cálculos en cuantización por integral de trayectorias.

En ese contexto, los  $X^\mu(z, \bar{z})$  son funciones ordinarias, no operadores, y sumamos sobre todos ellos en la integral  $\int \mathcal{D}X^\mu(z, \bar{z})$ , sin restringirnos a aquellos que satisfacen la ecuación de movimiento. Esto pone en riesgo la definición de los coeficientes  $x^\mu, p^\mu, \alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu$ , que en la descripción canónica figuran en la expansión de la solución más general a la ecuación de movimiento.

Pero una propiedad importante es que, dentro de



La integral funcional, la ecuación de movimiento si se satisface "en promedio", lo cual es de hecho indispensable para que exista el contrato que ya vamos con el formalismo canónico (p. 84):

↙ |z| aumenta hacia la izquierda

$$\langle 0 | R \{ \hat{\sigma}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \hat{\sigma}_N(z_N, \bar{z}_N) \} | 0 \rangle$$

funciones locales  
construidas en  $X^\mu$  y/o  
sus derivadas

ec. de mov. es relevante aquí

$$= \frac{\int \mathcal{D}X \sigma_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \sigma_N(z_N, \bar{z}_N) e^{-S[X]}}{\int \mathcal{D}X e^{-S[X]}}$$

$$\equiv \frac{\langle \sigma_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \sigma_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle}{\langle 1 \rangle}$$

ec. de mov. debe ser relevante aquí también

Concretamente, tenemos

$$0 = \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X^\mu(z, \bar{z})} \left( e^{-S[X]} \sigma_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \sigma_N(z_N, \bar{z}_N) \right)$$

$$0 = \int \mathcal{D}X \left( - \underbrace{\frac{\delta S}{\delta X^\mu(z, \bar{z})}}_{\frac{1}{2\pi\alpha'}} \sigma_1 \dots \sigma_N + \underbrace{\frac{\delta \sigma_1(z_1, \bar{z}_1)}{\delta X^\mu(z, \bar{z})}}_{\propto \delta^{(2)}(z-z_1)} \sigma_2 \dots \sigma_N + \dots \right) e^{-S[X]}$$

p.ej.  $\frac{\delta X^\nu(z_1, \bar{z}_1)}{\delta X^\mu(z, \bar{z})} = \delta_{\mu\nu}^{\nu} \delta^{(2)}(z-z_1)$

es decir, se cumplen las ecuaciones de Schwinger-Dyson

$$\partial \bar{\partial} \langle X^\mu(z, \bar{z}) \sigma_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \sigma_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \sum_{r=1}^N \underbrace{\langle \sigma_1 \dots \frac{\delta \sigma_r}{\delta X^\mu} \dots \sigma_N \rangle}_{\propto \delta^{(2)}(z-z_r)}$$

"términos de contacto"

de modo que

$$\partial \bar{\partial} \langle X^\mu(z, \bar{z}) \sigma_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \sigma_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle = 0 \text{ si } z \neq z_r \forall r.$$

Este es el sentido en el cual la ecuación de movimiento se cumple dentro de la integral de trayectoria.

Usando esta propiedad, podemos desarrollar

$$\partial X^\mu(z) = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}}, \quad \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^{n+1}},$$

dentro de  $\langle \rangle$ . Equivalentemente, podemos definir

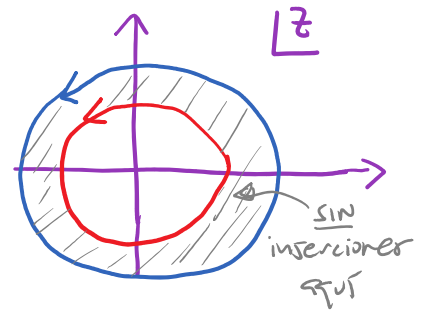
$$\alpha_n^{\mu} \equiv i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n \partial X^{\mu}(z),$$

$$\tilde{\alpha}_n^{\mu} \equiv -i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^n \bar{\partial} X^{\mu}(\bar{z})$$

dentro de la integral funcional sobre todos los  $X^{\mu}$ .

Por Cauchy, estas integrales dan el mismo resultado para cualquier contorno que incluye el origen, y en particular,

para 2 círculos  $|z| = e^{\sigma^2}$  y  $|\bar{z}| = e^{\sigma'^2}$  con  $\sigma^2 \neq \sigma'^2$ .



Es decir,  $\alpha_n^{\mu}$  y  $\tilde{\alpha}_n^{\mu}$  son independientes del tiempo  $\sigma^2 = i\tau$ , o lo que es lo mismo, son cargas conservadas.

Esto en realidad es obvio: los  $\alpha$ 's y  $\tilde{\alpha}$ 's son los coeficientes de Laurent/Fourier de los campos  $X^{\mu}$ , y son independientes del tiempo  $\tau \leftrightarrow |z|$  como consecuencia de la ecuación de movimiento. (Lo mismo aplica para los coeficientes  $a, a^*$  en la expansión del campo de K6.)

Ahora, ¿cómo determinaríamos aquí las relaciones de conmutación entre los  $\alpha$ 's,  $\tilde{\alpha}$ 's, que son simples

números?

Nos conviene primero calcular el propagador

$$\begin{aligned} \langle X^{\mu}(z_1, \bar{z}_1) X^{\nu}(z_2, \bar{z}_2) \rangle &\equiv \int \mathcal{D}X \quad X^{\mu}(1) X^{\nu}(2) e^{-\frac{1}{2\pi\alpha'} \int \mathcal{L}_2 \partial X \cdot \bar{\partial} X} \\ &\stackrel{\text{partes}}{=} -\frac{1}{2} \int \mathcal{L}_2 X \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{\pi\alpha'} \partial \bar{\partial}\right)}_{\equiv \Delta_2} X \end{aligned}$$

Esta integral es análoga (idéntica) a la integral múltiple

$$\begin{aligned} &\int dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad x_n x_{n'} \exp\left[-\sum_{m,m'} x_m \Delta_{mm'} x_{m'}\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial u_n} \frac{\partial}{\partial u_{n'}} \left[ \int dx_1 \dots dx_n \quad e^{-\sum_{m,m'} x_m \Delta_{mm'} x_{m'} + \sum_m x_m J_m} \right]_{J_m=0} \end{aligned}$$

Integral gaussiana (que sabemos hacer completando el cuadrado)

De igual forma, podemos agregar aquí un término fuente

$$\int \mathcal{L}_2 J_{\mu}(z, \bar{z}) X^{\mu}(z, \bar{z}), \text{ para reescribir}$$

↑ una fuente lineal para cada campo

$$\langle X^{\mu}(1) X^{\nu}(2) \rangle = \int \mathcal{D}X X^{\mu}(1) X^{\nu}(2) e^{-\frac{1}{2} \int \mathcal{D}z X \cdot \Delta_z X}$$

$$= \frac{\delta}{\delta J_{\mu}(1)} \frac{\delta}{\delta J_{\nu}(2)} \left[ \int \mathcal{D}X e^{-\frac{1}{2} \int \mathcal{D}z X \cdot \Delta_z X + \int \mathcal{D}z J \cdot X} \right]_{J=0}$$

$\uparrow z_1, \bar{z}_1$      $\uparrow z_2, \bar{z}_2$      $\equiv Z[J]$     función  
generatriz

Para completar el cuadrado, definiremos

$$X^{\mu}(z, \bar{z}) = Y^{\mu}(z, \bar{z}) + \int \mathcal{D}z' \Delta^{-1}(z, \bar{z}; z', \bar{z}') J^{\mu}(z', \bar{z}'),$$

con  $\Delta^{-1}$  la función de Green que satisface

$$\Delta_z \Delta^{-1}(z, \bar{z}; z', \bar{z}') = \delta^{(2)}(z - z').$$

Tenemos entonces

$$-\frac{1}{2} \int \mathcal{D}z X \cdot \Delta_z X = -\frac{1}{2} \int \mathcal{D}z Y \cdot \Delta_z Y$$

$$-\frac{1}{2} \int \mathcal{D}z Y \cdot \Delta_z \underbrace{\int \mathcal{D}z' \Delta^{-1} J}_{J(z, \bar{z})} - \frac{1}{2} \int \mathcal{D}z \underbrace{\int \mathcal{D}z' \Delta^{-1} J \cdot \Delta_z Y}_{\text{parte } J(z, \bar{z})}$$

$$-\frac{1}{2} \int \mathcal{D}z \int \mathcal{D}z' \Delta^{-1} J \cdot \Delta_z \underbrace{\int \mathcal{D}z'' \Delta^{-1} J}_{J(z, \bar{z})}$$

es decir,

$$-\frac{1}{2} \int d^2z X \cdot \Delta_2 X = -\frac{1}{2} \int d^2z Y \cdot \Delta_2 Y - \int d^2z Y \cdot J - \frac{1}{2} \int d^2z d^2z' J \cdot \Delta^{-1} J$$

y además

se cancelan

se suman

$$\int d^2z J \cdot X = \int d^2z J \cdot Y + \int d^2z J \cdot \int d^2z' \Delta^{-1} J$$

de modo que

$$\int d^2z \left( -\frac{1}{2} X \cdot \Delta_2 X + J \cdot X \right) = -\frac{1}{2} \int d^2z Y \cdot \Delta_2 Y \quad \leftarrow \text{no hay ya término lineal en } Y$$

$$+ \frac{1}{2} \int d^2z d^2z' J(z, \bar{z}) \cdot \Delta^{-1}(z, \bar{z}; z', \bar{z}') J(z', \bar{z}')$$

Con esto concluimos que

$$Z[J] = \int \mathcal{D}X e^{-\frac{1}{2} \int X \cdot \Delta_2 X + \int J \cdot X}$$

$$= e^{\frac{1}{2} \iint J \cdot \Delta^{-1} J} \int \mathcal{D}Y e^{-\frac{1}{2} \int Y \cdot \Delta_2 Y}$$

↑ hemos usado  $\mathcal{D}X^m = \mathcal{D}Y^m$

$$\equiv \langle 1 \rangle = \left( \frac{1}{\sqrt{\text{Det } \Delta_2}} \right)^D \quad (\text{p. 108})$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\langle X^{\mu}(1) X^{\nu}(2) \rangle &= \frac{\delta}{\delta J_{\mu}(1)} \frac{\delta}{\delta J_{\nu}(2)} Z[J] \Big|_{J=0} \\
&= \frac{\delta}{\delta J_{\mu}(1)} \frac{\delta}{\delta J_{\nu}(2)} \left[ \underbrace{\exp\left(\frac{1}{2} \int d^2z d^2z' J(z) \cdot \Delta^{-1}(z; z') J(z')\right)}_{1 + \frac{1}{2} \int d^2z d^2z' J(z) \cdot \Delta^{-1}(z; z') J(z') + \dots} \right]_{J=0} \langle 1 \rangle \\
\frac{\delta J_{\lambda}(z)}{\delta J_{\nu}(z_2)} &= \delta_{\lambda}^{\nu} \delta^{(2)}(z - z_2) \quad (\text{análogo a } \frac{\partial J_n}{\partial J_m} = \delta_{n,m}) \\
&= \eta^{\mu\nu} \Delta^{-1}(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2) \langle 1 \rangle \quad . \\
&\quad \uparrow \text{ignorar por ahora (constante)}
\end{aligned}$$

Este es un resultado muy conocido en teoría cuántica de campos: el propagador libre es la función de Green asociada al operador diferencial en la parte cuadrática de la acción.

Podríamos haber llegado a la misma conclusión mucho más rápido observando que

$$0 = \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X_{\mu}(z_1, \bar{z}_1)} \left[ e^{-S[X]} X^{\nu}(z_2, \bar{z}_2) \dots \right]$$

$\uparrow$  posibles inserciones en  $z_r \neq z_1$

$$0 = \int \mathcal{D}X \left( \frac{1}{\pi\alpha'} \partial \bar{\partial} X^\mu(z_1, \bar{z}_1) X^\nu(z_2, \bar{z}_2) + \eta^{\mu\nu} \delta^{(2)}(z_1 - z_2) \right) e^{-S} \dots,$$

es decir, podemos sacar las derivadas de  $\int \mathcal{D}X$

$$\underbrace{-\frac{1}{\pi\alpha'} \partial \bar{\partial}}_{\equiv \Delta_z} \langle X^\mu(1) X^\nu(2) \dots \rangle = \eta^{\mu\nu} \delta^{(2)}(z_1 - z_2) \langle \dots \rangle.$$

En el caso sin inserciones,  $\dots = 1$ , esto coincide con lo que obtuvimos arriba: el propagador es la función de Green.

De la discusión usual del campo de Klein-Gordon, podemos explicitamente al propagador en espacio de momentos (p. 16):

$$\underbrace{-(\partial_{\sigma_1}^2 + \partial_{\sigma_2}^2)}_{4|z|^2 \partial \bar{\partial}} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{e^{i p \cdot (\sigma - \sigma')}}{\underbrace{p^2 - i\epsilon}_{(p^1)^2 + (p^2)^2}} = \underbrace{\delta^{(2)}(\sigma - \sigma')}_{2|z|^2 \delta^{(2)}(z - z')}$$

A nosotros nos será directamente útil la expresión en espacio de posiciones,

$$\int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{e^{i p \cdot (\sigma - \sigma')}}{p^2} \sim \ln |\sigma - \sigma'|^2$$

↑ por análisis dimensional



Podemos mostrar directamente que

$$\partial\bar{\partial} \ln|z|^2 = \partial\left(\frac{1}{z}\right) = \bar{\partial}\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi \delta^{(2)}(z)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0 \text{ para } z \neq 0}$$

usando el teorema de Gauss/Stokes/Green

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx dy (\partial_x v^x + \partial_y v^y) = \oint_{\partial R} (v^x dy - v^y dx),$$

que en coordenadas complejas  $z = x+iy$ ,  $\bar{z} = x-iy$  dice que

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2z (\partial_z v^z + \partial_{\bar{z}} v^{\bar{z}}) = i \oint_{\partial R} (v^z d\bar{z} - v^{\bar{z}} dz).$$

Tenemos entonces

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2z \underbrace{\partial\bar{\partial} \ln|z|^2}_{\frac{1}{z} = v^z \quad (v^{\bar{z}}=0)} \stackrel{\text{Gauss}}{=} i \oint d\bar{z} \frac{1}{z} = i(-2\pi i) = 2\pi,$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\stackrel{?}{=} 2\pi \delta^{(2)}(z)} \quad \checkmark$$

lo cual confirma el resultado prometido.

Sabemos pues que  $\Delta^{-1}(z; z') = -\frac{\alpha'}{2} \ln |z - z'|^2$ ,

y por tanto

[7:12/03/13]

$$\langle X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z - z'|^2 \langle 1 \rangle .$$

Para todo lo sucesivo, nos será muy conveniente definir el orden normal conforme en orden temporal / radial, dentro de  $\int dx$

$$: X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \equiv X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') + \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z - z'|^2$$

↑ restamos el propagador

(que como veremos después, está relacionado con el orden normal usual - de operadores de creación / aniquilación - en el formalismo canónico).

Con esta definición tenemos en subíndice

$$\langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \rangle = 0 .$$

Por otro lado,

$$\langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle \neq 0 \quad \text{en general, pero}$$

$$\begin{aligned}
 \partial \bar{\partial} \langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle & \\
 \uparrow \text{inserciones en } z_r \neq z & \\
 \equiv \underbrace{\partial \bar{\partial} \langle X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') \dots \rangle}_{\text{p. 193}} + \underbrace{\partial \bar{\partial} \langle \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z-z'| \dots \rangle}_{\Pi \alpha' \eta^{\mu\nu} \delta^{(2)}(z-z') \langle \dots \rangle} & \\
 \equiv -\Pi \alpha' \eta^{\mu\nu} \delta^{(2)}(z-z') \langle \dots \rangle & \\
 = 0 . &
 \end{aligned}$$

El hecho de que  $\langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle$  es una función que satisface la ecuación de Laplace con respecto a  $z$  (y también  $z'$ ) implica que (a diferencia de la función  $\langle X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') \dots \rangle$ ) es la suma de una parte analítica y una anti-analítica, y podemos desarrollarlas alrededor de  $z=z'$ :

$$\begin{aligned}
 \langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle &= \langle : \underbrace{X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}')}_{\equiv X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}')} : \dots \rangle \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z')^n}{n!} \langle : \partial^n X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\bar{z}-\bar{z}')^n}{n!} \langle : \bar{\partial}^n X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle .
 \end{aligned}$$

Nótese que esta es una expansión de Taylor, no de Laurent, pues de otro modo no sería solución a Laplace en  $z=z'$ .

Con esto vemos en particular que

$$\lim_{z \rightarrow z'} \langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle = \langle : X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle$$

es no singular, a diferencia de  $\lim_{z \rightarrow z'} \langle X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') \dots \rangle$ .

En conjunto, tenemos entonces la expansión (válida dentro de funciones de correlación)

$$\begin{aligned} X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') &= -\frac{\alpha'}{2} \ln|z-z'| + : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \\ &= -\frac{\alpha'}{2} \ln|z-z'| + : X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}') : \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ (z-z')^n : \partial^n X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}') : + (\bar{z}-\bar{z}')^n : \bar{\partial}^n X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}') : \right\}. \end{aligned}$$

Este es un ejemplo particular de un concepto más general en teoría de campo: la expansión del producto de operadores (FPO = OPE),

$$O_i(z, \bar{z}) O_j(z', \bar{z}') \xrightarrow{z \rightarrow z'} \sum_k f_{ij}^k(z-z', \bar{z}-\bar{z}') O_k(z', \bar{z}').$$

En el caso general, se trata solo de una expansión asintótica

(se vuelve mejor y mejor conforme  $|z-z'| \rightarrow 0$ , aunque no converge cuando  $z \neq z'$ ); pero en teoría de campos conformes de hecho converge (con un radio de convergencia dado por la distancia a la inserción más cercana).

Para tener estas mismas propiedades en el producto de 3 o más operadores (funciones) locales, el orden normal se debe definir por analogía con el teorema de Wick, que relaciona los productos en orden temporal (el cual es en sí mismo implementado por la integral funcional) y normal (en el sentido usual, de  $\hat{a}^r$  y  $\hat{a}^{+r}$ ):

$$X^{\omega_1}(1) \dots X^{\omega_n}(n) = :X^{\omega_1}(1) \dots X^{\omega_n}(n):$$

$$+ :X^{\omega_1}(1) X^{\omega_2}(2) X^{\omega_3}(3) \dots X^{\omega_n}(n): + \text{otros términos con 1 contracción}$$

$$\text{Contracción} \equiv -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu_1 \mu_2} \ln |z_1 - z_2|^2 \quad (\text{propagador})$$

$$+ :X^{\omega_1}(1) X^{\omega_2}(2) X^{\omega_3}(3) X^{\omega_4}(4) X^{\omega_5}(5) \dots : + \text{términos con 2 contracciones}$$

$$+ \text{términos con } \geq 3 \text{ contracciones.}$$

(Más formalmente, para cualquier función  $F[X]$ , podemos escribir

$$F[X] \exp\left(-\frac{\alpha'}{4} \int dz dz' \ln|z-z'|^2 \frac{\delta}{\delta X^{\mu}(z, \bar{z})} \frac{\delta}{\delta X^{\nu}(z', \bar{z}')}\right) : F[X] : .)$$

Con esto podemos calcular cualquier  $F_{po}$ . P.ej.,

$$:\partial X \cdot \partial X(z) : \partial X^{\mu}(z') = : \partial X \cdot \partial X(z) \partial X^{\mu}(z') :$$

$$+ : \partial X \cdot \partial X(z) \partial X^{\mu}(z') : + : \partial X \cdot \partial X(z) \partial X^{\mu}(z') :$$

$$\partial \partial' \left( -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\nu\mu} \ln|z-z'|^2 \right) : \partial X_{\nu}(z) : \quad \text{ídem}$$

$$-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\nu\mu} \partial \left( -\frac{1}{z-z'} \right) \quad \frac{1}{(z-z')^2}$$

Notar que el término

$$:\partial X \cdot \partial X(z) \partial X^{\mu}(z') :$$

No se agrega, porque ya está incluido en  $:\partial X \cdot \partial X :$

$$= -\alpha' \frac{1}{(z-z')^2} : \partial X^{\mu}(z) : + : \partial X \cdot \partial X(z) \partial X^{\mu}(z') :$$

↑ desarrollar en Taylor alrededor de  $z=z'$

$$= -\frac{\alpha'}{(z-z')^2} \partial X^{\mu}(z') - \frac{\alpha'}{(z-z')} \partial^2 X^{\mu}(z') + \text{términos finitos cuando } z \rightarrow z'.$$

Como veremos en la Tarea 2, se puede mostrar similarmente

que

$$: e^{ik \cdot X(z, \bar{z})} : : e^{ik' \cdot X(z', \bar{z}')}$$

$$= : e^{ik \cdot X(z, \bar{z})} e^{ik' \cdot X(z', \bar{z}')} : \exp \left[ i^2 k \cdot k' \left( -\frac{\alpha'}{2} \ln |z-z'|^2 \right) \right].$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{|z-z'|^{-\alpha' k \cdot k'}}$

En la formulación canónica podemos definir de la manera usual el orden normal de creación/aniquilación, que en este curso denotaremos

$$\begin{aligned} \circ \circ &\equiv \text{colocar los operadores de creación } \hat{\alpha}_{-m}^{\mu} \\ &\text{a la izquierda de los de aniquilación } \hat{\alpha}_n^{\nu} \quad (\forall m, n > 0) \\ &\text{y } \hat{x}^{\mu} \text{ a la izquierda de } \hat{p}^{\mu}. \end{aligned}$$

En la Tarea 2 confirmaremos también que las 2 definiciones de orden normal coinciden (es decir,  $: : = \circ \circ$ ) para nuestra teoría

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X \cdot \bar{\partial} X \quad (\text{no necesariamente})$$

para otros teorías), en las coordenadas  $z, \bar{z}$  (pero no, p.ej., en  $w, \bar{w}$ ).

Podemos regresar ahora a las preguntas de la p. 188: cómo calcular las relaciones de conmutación en el formalismo de la integral de camino?

Usando la conexión con el orden temporal/radial (p. 186) y la definición  $\alpha_m^\mu = i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \partial X^\mu(z)$  (p. 188), tenemos

$$[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = \langle 0 | [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] | 0 \rangle$$

$$= \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} \left( \alpha_m^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_n^\nu \alpha_m^\mu \right) / \langle 1 \rangle$$

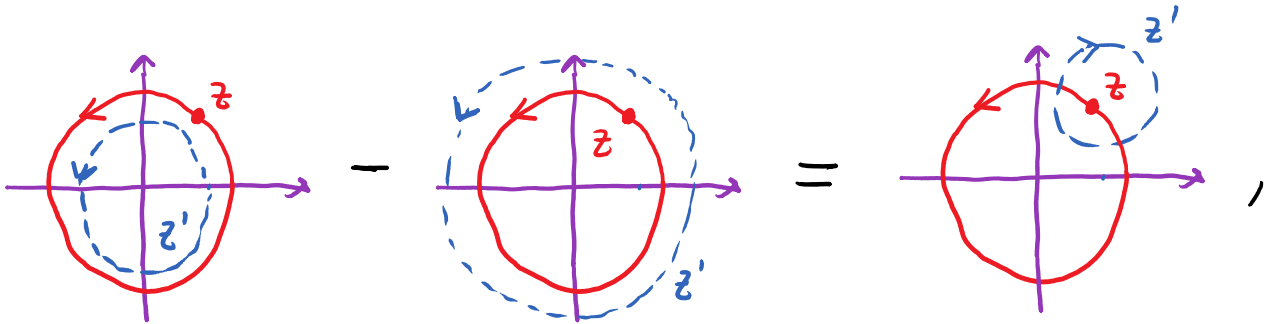
$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 calculados en  $|z|$  en  $|z| > |z'|$       calculados en  $|z|$  en  $|z| < |z'|$

$$= -\frac{2}{\alpha'} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \left\{ \oint_{|z'|=|z|-\epsilon} \frac{dz'}{2\pi i} - \oint_{|z'|=|z|+\epsilon} \frac{dz'}{2\pi i} \right\} z'^n \langle \partial X^\mu(z) \partial X^\nu(z') \rangle$$

$$= \underbrace{\partial \partial' \langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \rangle}_{-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z-z'|^2} \underbrace{-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \frac{1}{(z-z')^2}}$$



Dado que



lo anterior equivale a

$$\begin{aligned}
 [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] &= -\frac{2}{\alpha'} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \left\{ - \oint_{|z'-z|=\epsilon} \frac{dz'}{2\pi i} z'^n \left( -\frac{\alpha'}{2} \frac{\eta^{\mu\nu}}{(z-z')^2} \right) \right\} \\
 &= \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \oint_{|z'-z|=\epsilon} \frac{dz'}{2\pi i} \left( \frac{z^n}{(z-z')^2} + \frac{n z^{n-1}}{z-z'} + \dots \right) \\
 &= -n \eta^{\mu\nu} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+n-1} \delta_{m,-n}
 \end{aligned}$$

es decir,

$$[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = m \eta^{\mu\nu} \delta_{m,-n},$$

tal como afirmamos en la p. 183. ✓

Este resultado se puede resumir en términos más generales: si  $Q_i \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} J_i(z)$   $i=1,2,\dots$  son cargas conservadas (como lo eran las  $\alpha$ 's - ver p. 188), al repetir el argumento anterior se encuentra que

$$[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] = \oint \frac{dz_j}{2\pi i} \text{Res}_{z_i \rightarrow z_j} J_i(z_i) J_j(z_j).$$

≡ coeficiente del término  $\frac{1}{z_i - z_j}$  en la EPO

Lo que vimos para las  $\alpha$ 's es un caso particular de esta fórmula, con  $\alpha_m^\mu \leftrightarrow J_m^\mu = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} z^m \partial X^\mu(z)$ .

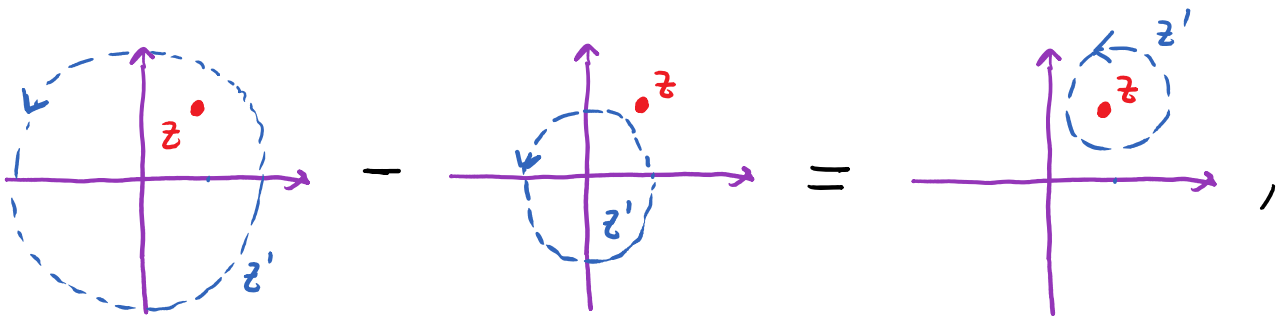
Podemos por cierto deducir la simetría que generan

estas cargas conservadas (cargas de Noether): se trata de  $X^{\mu} \rightarrow X^{\mu} + \delta X^{\mu}$ , con

$$\delta X^{\mu}(z, \bar{z}) = i \epsilon_{\nu} \left[ \alpha_{\nu}^{\mu}, X^{\nu}(z, \bar{z}) \right],$$

parámetro  $\uparrow$  forma de variación

que usando nuevamente



se reescribe como

$$\delta X^{\mu}(z, \bar{z}) = i \epsilon_{\nu} \oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i} T_{\nu}^{\mu}(z') X^{\nu}(z, \bar{z})$$

$$= i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \epsilon_{\nu} \oint_{|z'-z|=\delta} z'^m \partial' X^{\nu}(z')$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \epsilon_{\nu} \oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i} z'^m \underbrace{\partial' X^{\nu}(z') X^{\nu}(z, \bar{z})}_{\partial' \left( -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z'-z|^2 \right) + \dots}$$

$$= z^m + \dots \quad \underbrace{-\frac{\alpha'}{2} \frac{\eta^{\mu\nu}}{z'-z}}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \epsilon^{\mu\nu} \tilde{z}^{\mu} ,$$

que efectivamente es una simetría (conociamos ya el caso particular  $m=0$ , generado por  $\alpha_0^{\mu} \leftrightarrow p^{\mu}$ ).

Podemos ahora regresar a examinar en más detalle el espacio de Hilbert de nuestra teoría.

Definimos el estado base  $|0, k\rangle$  tal que

$$\alpha_n^{\mu} |0, k\rangle = 0 \quad \forall n > 0 \quad \text{y} \quad \forall \mu$$

(junto con la condición  $\tilde{\alpha}_n^{\mu} |0, k\rangle = 0$ , si estamos hablando de una cuerda cerrada), y

$$p^{\mu} |0, k\rangle = k^{\mu} |0, k\rangle .$$

Para estos estados, tomamos el producto interno usual

$$\langle 0, k | 0, k' \rangle \equiv (2\pi)^D \delta^{(D)}(k - k') .$$

El espacio de Hilbert (espacio de Fock) completo se genera actuando repetidamente con los operadores de

creación  $\alpha_{-n}^{\mu}$  (y  $\tilde{\alpha}_{-n}^{\mu}$ ) con  $n > 0$ .

Recordando que  $(\alpha_n^{\mu})^{\dagger} = \alpha_{-n}^{\mu}$  (p. 155), podemos notar de inmediato que existen estados con normas negativas, como p.ej.  $\alpha_{-n}^{\circ} |0, k\rangle$  ( $n > 0$ ):

$$|\alpha_{-n}^{\circ} |0, k\rangle|^2 = \langle 0, k | \underbrace{\alpha_n^{\circ} \alpha_{-n}^{\circ}}_{[\alpha_n^{\circ}, \alpha_{-n}^{\circ}] = n\eta^{\circ\circ}} |0, k\rangle = -n(2\pi)^D \delta^{(D)}(0).$$

Los estados de este tipo se conocen como fantasmas (en una de las 2 acepciones de este término dentro de la física teórica), y claramente son patológicos: ¡están asociados a probabilidades negativas!

El problema claramente se origina de tener  $X(z, \bar{z})$  en la descripción, lo cual fue necesario para preservar la covariancia bajo Lorentz. Sabemos que el precio que pagamos es tener una descripción redundante, donde la mayoría de los estados NO son físicos.

Para identificar a los estados que sí son físicos, nos

falte promover a nivel cuántico a las construcciones clásicas  $T_{ab} = 0$ . Dado que  $T^a_a = 0$  por invariancia de Weyl (p.139), éstas son solo 2 (x  $\infty$ ) construcciones, que en la norma plana  $g_{ab} = \delta_{ab}$  toman la forma (p.138)

$$T_{\sigma\sigma} \propto \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \quad \text{y} \quad T_{\sigma\tau} \propto \dot{X} \cdot X' = 0 \quad \forall \sigma, \tau.$$

Dado que  $T_{ab}$  es la corriente de Noether asociada a la invariancia bajo traslaciones en la hoja de mundo, sabemos que se conserva,  $\partial^a T_{ab} = 0$ . (Más en general, con una métrica arbitraria  $g_{ab}$ , la invariancia bajo difeo implica que  $T_{ab}$  se conserva covariantemente,  $\nabla^a T_{ab} = 0$ .)

En coordenadas complejas  $z, \bar{z}$  (tal que  $g_{z\bar{z}} = 1/2$ ), la nulidad de la traza equivale a  $T_{z\bar{z}} = 0$ , y la conservación de  $T_{ab}$  se traduce entonces en

$$\bar{\partial} T_{zz} + \cancel{\partial T_{z\bar{z}}}^{\circ} = 0 \quad \text{y} \quad \partial T_{\bar{z}\bar{z}} + \cancel{\bar{\partial} T_{z\bar{z}}}^{\circ} = 0.$$

Es decir,

$T(z) \equiv T_{zz}(z)$  es analítica, y  $\tilde{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$  antianalítica.

Podemos entonces desarrollar estas funciones en series

de Laurent (tal como hicimos antes para  $\partial X$  y  $\bar{\partial} X$ ):

$$T(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad \leftrightarrow \quad L_n \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z)$$

$$\tilde{T}(\bar{z}) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{L}_n}{\bar{z}^{n+2}} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{L}_n \equiv -\oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^{n+1} \tilde{T}(\bar{z})$$

Itemos adaptado aquí una convención con +2 en el denominador, para cancelar el factor de  $z^2$  ( $\bar{z}^2$ ) que aparece al transformar  $T_{zz} \rightarrow T_{ww}$  ( $T_{\bar{z}\bar{z}} \rightarrow T_{\bar{w}\bar{w}}$ ). En las coordenadas originales, estos son simplemente expansiones de Fourier, tomando en cuenta que  $T_{++}$  ( $T_{--}$ ) contiene solo modos izquierdos (derechos).

Los coeficientes/operadores  $L_n$  se conocen como modos de Virasoro, y nos dan una manera conveniente de listar nuestras construcciones: pedir que  $T(z)=0 \forall z$  equivale a pedir que  $L_n=0 \forall n$  (y similarmente para  $\tilde{T}(\bar{z})$ ,  $\tilde{L}_n$ ).

En el caso concreto de la teoría definida por  $S_g$  en la norma plana, se tiene (p. 138)

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X \cdot \partial X(z) : , \quad \tilde{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'} : \bar{\partial} X \cdot \bar{\partial} X(\bar{z}) :$$

↑ orden normal utilizado para definir el producto de 2 operadores en un mismo punto.

Justo como las  $\alpha$ 's y  $\tilde{\alpha}$ 's, las  $L_n$  y  $\tilde{L}_n$  constituyen un número infinito de cargas conservadas (por Cauchy).

Resultan de integrar las corrientes de Noether

$$J_n(z) \equiv z^{n+1} T(z) \quad \text{y} \quad \tilde{J}_n(\bar{z}) \equiv \bar{z}^{n+1} \tilde{T}(\bar{z})$$

(que evidentemente se conservan por separado,  $\bar{\partial} J_n = 0$ ,  $\partial \tilde{J}_n = 0$ , tanto como  $T$  y  $\tilde{T}$  ( $n=-1$ ) lo hacen).

Las transformaciones que generan son

$$X^\mu(z, \bar{z}) \rightarrow X^\mu(z, \bar{z}) + \delta X^\mu(z, \bar{z}) ,$$

con

$$\frac{1}{\epsilon} \delta X^\mu(z, \bar{z}) = [L_n, X^\mu(z, \bar{z})]$$



$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon} \delta X^{\mu}(z, \bar{z}) &= \left\{ \oint_{|z'| > |z|} \frac{dz'}{2\pi i} - \oint_{|z'| < |z|} \frac{dz'}{2\pi i} \right\} \left( z'^{n+1} T(z') X^{\mu}(z, \bar{z}) \right) \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{-\frac{1}{\alpha'} : \partial' X \cdot \partial' X(z') :} \\
&\quad \underbrace{\oint_{|z'-z| = \delta} \frac{dz'}{2\pi i}}_{\leftarrow z^{n+1} + \dots} \\
&= -\frac{1}{\alpha'} \oint_{|z'-z| = \delta} \frac{dz'}{2\pi i} \underbrace{z'^{n+1} : \partial' X \cdot \partial' X(z') : X^{\mu}(z, \bar{z})}_{2 \partial' \left( -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z-z'|^2 \right) : \partial' X_{\nu}(z') : + \dots} \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{-\alpha' \frac{1}{z'-z} \partial X^{\mu}(z) + \dots}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\delta X^{\mu}(z, \bar{z}) = \epsilon z^{n+1} \partial X^{\mu}(z),$$

que (junto con  $\delta X^{\mu} = \bar{\epsilon} \bar{z}^{n+1} \bar{\partial} X^{\mu} = \bar{\epsilon} [\tilde{L}_n, X^{\mu}]$ )

es el cambio derivado de la transformación conforme

$$z \rightarrow z' = z + \epsilon z^{n+1}.$$

(Más en general,  $J_f(z) = f(z) T(z)$  es la corriente de

Noether asociada a la transformación conforme

$$z \rightarrow z' = z + \epsilon f(z).$$

Vemos en particular que:

$L_{-1}$  genera traslaciones  $z' = z + b$  (lo cual concuerda con el hecho de que  $J_{-1} = T(z)$ ),

$L_0$  genera dilataciones/rotaciones  $z' = a z$ ,  
o, para ser más precisos,

$L_0 + \tilde{L}_0$  genera dilataciones  $z' = \lambda z$  (traslaciones en  $\sigma^2$ ),

$L_0 - \tilde{L}_0$  genera rotaciones  $z' = e^{i\theta} z$  (traslaciones en  $\sigma^1$ ),

y  $L_1$  genera los llamados transformaciones conformes especiales  $z' = \frac{z}{cz+1}$ .

La composición de estas 3 transformaciones de lugar a la transformación más general

$$z \rightarrow z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

que es invertible solo si  $ad-bc \neq 0$ , y podemos por tanto ajustar  $ad-bc=1$ . La regla de composición de estas transformaciones corresponde justamente a la multiplicación de las matrices  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , así que  $L_{-1}, L_0$  y  $L_1$  (junto con  $\tilde{L}_{-1}, \tilde{L}_0$  y  $\tilde{L}_1$ ) generan un grupo isomorfo a  $SL(2, \mathbb{C})$ .

Este es de hecho el único subgrupo propio del grupo conforme en 2 dimensiones (la única colección de  $L_n$ 's cuyos conmutadores cierran entre sí).

Dado que los  $L_n$  (y  $\tilde{L}_n$ ) son los generadores de las transformaciones conformes, tiene mucho sentido que las constricciones  $T_{ab}=0$  equivalgan a pedir que los modos de Virasoro aniquilen a los estados físicos ( $L_n |fis\rangle = 0 = \tilde{L}_n |fis\rangle$ ), puesto que ello tiene como consecuencia que la física NO dependerá de nuestra elección del marco conforme (dado que  $z \rightarrow z'(z) \Rightarrow |fis\rangle' \equiv \exp\left(\sum_n \epsilon_n L_n\right) |fis\rangle = |fis\rangle$ ).

Pero en este procedimiento, encontraremos una pequeña obstrucción:  $[L_m, L_n]$  incluye un término constante, así que no será consistente pedir que  $L_n |f\rangle = 0 \quad \forall n$ .

Para entender mejor la interpretación de esta constante, nos conviene desarrollar un poco más de tecnología.

Notemos primero que, de forma similar a lo que vimos arriba para  $X^\mu(z, \bar{z})$ , la manera como se comporta un operador ( $\equiv$  "campo") arbitrario  $\mathcal{O}(z, \bar{z})$  bajo transformaciones conformes está determinada por su EPO con  $T(z)$  y  $\tilde{T}(\bar{z})$ , a través de

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{O}(z, \bar{z}) &= -\epsilon [L_n, \mathcal{O}(z, \bar{z})] - \bar{\epsilon} [\tilde{L}_n, \mathcal{O}(z, \bar{z})] \\ &= -\epsilon \oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i} z'^{n+1} T(z') \mathcal{O}(z, \bar{z}) - \bar{\epsilon} \oint_{|\bar{z}'-\bar{z}|=\delta} \frac{d\bar{z}'}{2\pi i} \bar{z}'^{n+1} \tilde{T}(\bar{z}') \mathcal{O}(z, \bar{z}) \\ &= -\epsilon \operatorname{Res}_{z' \rightarrow z} z'^{n+1} \underbrace{T(z')}_{\text{usar EPO}} \mathcal{O}(z, \bar{z}) - \bar{\epsilon} \operatorname{Res}_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} \bar{z}'^{n+1} \underbrace{\tilde{T}(\bar{z}')}_{\text{usar EPO}} \mathcal{O}(z, \bar{z}). \end{aligned}$$

Nos conviene tomar una base de operadores tales que

$$T(z')\sigma(0,0) = \dots + \frac{\hbar}{z'^2}\sigma(0,0) + \frac{1}{z'}\partial\sigma(0,0) + \dots$$

$$\tilde{T}(\bar{z}')\sigma(0,0) = \dots + \frac{\tilde{\hbar}}{\bar{z}'^2}\sigma(0,0) + \frac{1}{\bar{z}'}\bar{\partial}\sigma(0,0) + \dots$$

El término de orden  $1/z'$  ( $1/\bar{z}'$ ) implica que

$$[L_{-1}, \sigma(0,0)] = \partial\sigma(0,0), \quad [\tilde{L}_{-1}, \sigma(0,0)] = \bar{\partial}\sigma(0,0),$$

lo cual expresa que bajo una translación  $z \rightarrow z' = z + b$

tenemos el resultado esperado  $\sigma(0,0) \rightarrow \sigma'(b, \bar{b}) = \sigma(0,0)$ ,

y más en general,

$$\sigma(z, \bar{z}) \rightarrow \sigma'(z', \bar{z}') = \sigma(z, \bar{z}).$$

El término de orden  $1/z'^2$  ( $1/\bar{z}'^2$ ) implica que

$$[L_0, \sigma(0,0)] = \hbar\sigma(0,0), \quad [\tilde{L}_0, \sigma(0,0)] = \tilde{\hbar}\sigma(0,0)$$

así que bajo dilatación/rotación  $z \rightarrow z' = \lambda z$  ( $\lambda \in \mathbb{C}$ ) tenemos

$$\sigma(0,0) \rightarrow \sigma'(0,0) = \lambda^{-\hbar} \bar{\lambda}^{-\tilde{\hbar}} \sigma(0,0),$$

y más en general,

$$\sigma(z, \bar{z}) \rightarrow \sigma'(z', \bar{z}') = \lambda^{-h} \bar{\lambda}^{-\tilde{h}} \sigma(z, \bar{z}) .$$

Llamamos a  $(h, \tilde{h})$  las dimensiones (o pesos) conformes de  $\sigma$ . Más específicamente,

$h + \tilde{h}$  es la dimensión de  $\sigma$  (controla el comportamiento bajo reescalamiento),

$h - \tilde{h}$  es el espín de  $\sigma$  (controla el comportamiento bajo rotaciones).

P.ej., es fácil comprobar que los pesos conformes de

$X^\omega$  son  $(h=0, \tilde{h}=0)$ ,

$\partial X^\omega$   $(1, 0)$ ,  $\bar{\partial} X^\omega$   $(0, 1)$ ,

$\partial^n X^\omega$   $(n, 0)$ ,  $\bar{\partial}^n X^\omega$   $(0, n)$ ,

$: e^{ik \cdot X} :$   $\left( \frac{\alpha' k^2}{4}, \frac{\alpha' k^2}{4} \right) !!$  (ver tarea 2).

En cualquier teoría de campo conforme (TCC  $\equiv$  CFT),

juegan un papel especial los llamados operadores primarios (o tensoriales), que bajo una transformación conforme arbitraria  $z \rightarrow z'(z)$  transforman de acuerdo con

$$\sigma(z, \bar{z}) \rightarrow \sigma'(z', \bar{z}') = (\partial_z z')^{-h} (\partial_{\bar{z}} \bar{z}')^{-\tilde{h}} \sigma(z, \bar{z}) .$$

Es decir,  $\sigma$  transforma como si fuera un tensor de rango  $h + \tilde{h}$ , con  $h$  subíndices  $z$  y  $\tilde{h}$  subíndices  $\bar{z}$ .

La versión infinitesimal de esta regla de transformación es que bajo  $z \rightarrow z' = z + \epsilon f(z)$  se tiene

$$\begin{aligned} \delta \sigma(z, \bar{z}) &\equiv \sigma'(z, \bar{z}) - \sigma(z, \bar{z}) \\ &= -\epsilon (h \partial f + f \partial) \sigma(z, \bar{z}) - \bar{\epsilon} (\tilde{h} \bar{\partial} \bar{f} + \bar{f} \bar{\partial}) \sigma(z, \bar{z}) . \end{aligned}$$

Tomando  $f(z) = z^{n+1}$ , esto implica que

$$[L_n, \sigma(z, \bar{z})] = (h(n+1)z^n + z^{n+1} \partial) \sigma(z, \bar{z}) ,$$

$$[\tilde{L}_n, \sigma(z, \bar{z})] = (\tilde{h}(n+1)\bar{z}^n + \bar{z}^{n+1} \bar{\partial}) \sigma(z, \bar{z}) ,$$

y en particular,

$$[L_n, \sigma_{(0,0)}] = 0 = [\tilde{L}_n, \tilde{\sigma}_{(0,0)}] \quad \forall n > 0.$$

Esto es equivalente a la EPO

$$T(z)\sigma_{(0,0)} = 0 + \frac{\hbar}{z^2}\sigma_{(0,0)} + \frac{1}{z}\partial\sigma_{(0,0)} + \dots$$

↑ No hay términos más singulares que  $z^{-2}$   
(y análogamente con  $\tilde{T}(\bar{z})$ ).

Es fácil verificar, peej., que  $\partial X^\mu$  y  $:e^{ik \cdot X}:$  son primarios, pero  $\partial^2 X^\mu$  no lo es.

Más en general, los derivados  $\partial^n \bar{\partial}^m \sigma$  de un operador primario  $\sigma$  nunca son operadores primarios, y se conocen como descendientes de  $\sigma$ . Todos los operadores en una TCC se pueden expresar como combinaciones de los operadores primarios y sus descendientes.

Curiosamente, el propio tensor de energía-momento en la hoja de mundo,  $T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X \cdot \partial X :$ , no es un operador primario:



$$\begin{aligned}
 T(z)T(0) &= \frac{1}{\alpha'^2} \left( 2 \underbrace{\partial X \cdot \partial X(z) \partial X(0) \cdot \partial X(0)}_{\left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z^2}\right)^2 \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}} + 4 \underbrace{\partial X \cdot \partial X(z) \partial X \cdot \partial X(0)}_{-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z^2} \partial X(z) \cdot \partial X(0)} + \dots \right) \\
 &= \frac{D}{2z^4} + \frac{2}{z^2} \left(-\frac{1}{\alpha'}\right) \partial X \cdot \partial X(0) + \frac{2}{z} \left(-\frac{1}{\alpha'}\right) \partial^2 X \cdot \partial X(0) + \dots
 \end{aligned}$$

es decir,

tensor bajo dilataciones, con  $h=2$   
 (resultado esperado para  $T \equiv T_{z\bar{z}}$ )

$$T(z)T(0) = \frac{D}{2z^4} + \frac{2}{z^2} T(0) + \frac{1}{z} \partial T(0) + \dots$$

$\uparrow [L_2, T(0)] \neq 0$  tensor bajo traslaciones  
 $\Rightarrow T$  no es primario

En una teoría conforme arbitraria, se tiene

$$T(z')T(z) = \frac{c}{2(z'-z)^4} + \frac{2}{(z'-z)^2} T(z) + \frac{1}{(z'-z)} \partial T(z) + \dots$$

$$\left( \text{y } \tilde{T}(\bar{z}')\tilde{T}(\bar{z}) = \frac{\tilde{c}}{2(\bar{z}'-\bar{z})^4} + \dots \right), \text{ con } c \text{ (y } \tilde{c}) \text{ un}$$

número conocido como la carga central de la teoría.

Hemos aprendido entonces que en la teoría que nos ocupa,  
 $S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X \cdot \bar{\partial} X$ , la carga central es

$$C = D = \tilde{C}.$$

En general, el valor de  $c$  nos da una indicación del número de campos ( $\sim$  grados de libertad) en la teoría.

La EPO de  $T$  con  $T$  implica que bajo  $z \rightarrow z + \epsilon f(z)$  (que corresponde a la corriente de Noether  $j(z') = i f(z') T(z')$ ) se tiene

$$\delta T(z) = -\epsilon \left( \frac{c}{12} \partial^3 f(z) + 2 \partial f(z) T(z) + f(z) \partial T(z) \right)$$

(que es la transformación más general que es lineal en  $f$  y con 2 subíndices  $z$ ). La versión finita de esta transformación resulta ser

$$T'(z') = (\partial_z z')^{-2} \left[ T(z) - \frac{c}{12} \mathcal{D}_z z' \right],$$

donde

← factor esperado para tensor con peso  $h=2$

$$\Phi_z z' \equiv \frac{\partial_z^3 z'}{\partial_z^2 z'} - \frac{3}{2} \left( \frac{\partial_z^2 z'}{\partial_z z'} \right)^2$$

se conoce como la derivada Schwarziana

(y satisface  $\Phi_z z'' = \Phi_z z' + (\partial_z z')^2 \Phi_{z'} z''$ , lo cual es necesario para tener la regla de composición correcta al transformar  $z \rightarrow z' \rightarrow z''$ ).

Así que (si  $c \neq 0$ )  $T(z)$  NO transforma como tensor bajo transformaciones conformes arbitrarias, sino solo bajo aquellas que satisfacen  $\Phi_z z' = 0$ . Éstas resultan ser precisamente las transformaciones  $SL(2, \mathbb{C})$  que mencionamos en la p. 212,

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con } ad-bc=1.$$

Por esta razón,  $T$  es lo que se conoce como un operador

cuasi-primario.

(Por supuesto,  $T_{ab}$  SÍ es un tensor bajo reparametrizaciones — conformes o no —, porque ahí la métrica SÍ cambia.)

En particular, bajo  $w \rightarrow z = e^w$ , tenemos  $\Phi_w z = -1/2$ ,

así que

$$z^2 T_{z\bar{z}}(z) = T_{w\bar{w}}(w) + \frac{c}{24}.$$

De aquí se puede ver que los modos de Fourier originales  $T_{ww} \equiv \sum_n T_n e^{-nw}$   $\leftarrow \sigma^2 + i\sigma'$  y los de Laurent  $T_{zz} \equiv \sum_n L_n / z^{n+2}$  se relacionan a través de

$$T_n = L_n - \frac{c}{24} \delta_{n,0} ,$$

así que el Hamiltoniano original (generador de traslaciones en  $\sigma^2$ ) en realidad es

$$\mathcal{H} \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma'}{2\pi} T_{zz} = \underbrace{T_0 + \tilde{T}_0}_{T_{ww} + T_{\bar{w}\bar{w}}} = \underbrace{L_0 + \tilde{L}_0}_{\text{generador de dilataciones}} - \frac{c + \tilde{c}}{24} .$$

$\leftarrow$  OJO  $\textcircled{D}$

Notar por cierto que, dado que

$$T_{\tau\tau} = -T_{ww} - T_{\bar{w}\bar{w}} = T_{\sigma\sigma} \quad \text{y} \quad T_{\sigma\tau} = -T_{w\bar{w}} + T_{\bar{w}w} \text{ son}$$

hermiticos, sabemos que  $T_{ww} = \sum_n T_n e^{-ni(\tau+\sigma)}$  es hermitico,

$$\text{y por tanto } T_n^\dagger = T_{-n} \quad \leftarrow \quad L_n^\dagger = L_{-n} .$$

En coordenadas complejas  $z = e^{\sigma^2 + i\sigma'}$ , tenemos entonces

$$[T(z)]^\dagger = \sum_n \frac{L_n^\dagger}{\bar{z}^{n+2}} = \sum_n \frac{L_{-n}}{\bar{z}^{n+2}} \stackrel{n \rightarrow -n}{=} \sum_n \frac{L_n}{\bar{z}^{-n+2}} = \bar{z}^{-4} T(1/\bar{z}) .$$

Más en general, para un operador cuasiprimario ( $\Rightarrow$  primario)  
 $\sigma(z, \bar{z})$ , definimos

$$[\sigma(z, \bar{z})]^{\dagger} = \bar{z}^{-2h} z^{-2\tilde{h}} \sigma\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\right)$$

$\uparrow$  inversión  $z \rightarrow 1/z$  necesaria  
 para cambiar el signo enfrente de  $\sigma^2 = iT$

En términos de la expansión en modos

$$\sigma(z, \bar{z}) \equiv \sum_{m, n} \frac{\sigma_{m, n}}{z^{m+h} \bar{z}^{n+\tilde{h}}}$$

esto equivale a  $\sigma_{m, n}^{\dagger} = \sigma_{-m, -n}$ . (Un operador analítico

(antianalítico)  $\sigma(\tilde{\sigma})$  es un caso particular con solo

$$n=0 \quad (m=0): \quad \sigma(z) = \sum_m \frac{\sigma_m}{z^{m+h}} \Rightarrow \sigma_m^{\dagger} = \sigma_{-m}.$$

$\leftarrow$  usar  $h=1$  para  $\partial X(z)$   
 $h=2$  para  $T(z)$

A partir de la EPO

$$T(z_1)T(z_2) = \frac{c}{2(z_1 - z_2)^4} + \frac{2}{(z_1 - z_2)^2} T(z_2) + \frac{1}{z_1 - z_2} \partial T(z_2) + \dots$$

podemos deducir de inmediato el conmutador entre  
 los modos de Virasoro,

$$\begin{aligned}
 [L_m, L_n] &= \oint \frac{dz_2}{2\pi i} \text{Res}_{z_1 \rightarrow z_2} z_1^{m+1} T(z_1) z_2^{n+1} T(z_2) \\
 &\quad \left[ z_2^{m+1} + (m+1)z_2^m (z_1 - z_2) \right. \\
 &\quad \quad + \frac{1}{2} (m+1)m z_2^{m-1} (z_1 - z_2)^2 \\
 &\quad \quad \left. + \frac{1}{3!} (m+1)m(m-1) z_2^{m-2} (z_1 - z_2)^3 + \dots \right] \\
 &= \frac{c}{2} \frac{1}{3!} (m+1)m(m-1) z_2^{m+n-1} + 2(m+1) z_2^{m+n+1} T(z_2) \\
 &\quad + z_2^{m+n+2} \underbrace{\partial T(z_2)}_{\sum_k \frac{-(k+2)L_k}{z_2^{k+3}}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m,-n} + 2(m+1) L_{m+n} - (m+n+2) L_{m+n},$$

es decir, obtenemos la llamada álgebra de Virasoro

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2-1) \delta_{m,-n}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Álgebra de Witt}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{"Extensión central"}}$

(Y análogamente para los  $[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n]$ , usando  $\tilde{c}$ .)

Aquí podemos ver, en particular, que  $L_{-1}, L_0, L_{+1}$  efectivamente forman una subálgebra (sin extensión central) es decir, sus conmutadores cierran entre sí.

En la teoría que nos interesa,

$$L_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} \left(-\frac{1}{\alpha'}\right) \underbrace{\partial X \cdot \partial X(z)}_{\left(-i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\right)^2 \sum_{n,k} \frac{1}{z^{n+k+2}} : \alpha_n \cdot \alpha_k :}$$

resulta en

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_n \cdot \alpha_{m-n} :$$

Recordar dicho ya que, para esta teoría y en el marco conforme  $z$ , el orden normal conforme  $: : \text{ coincide con el orden normal de creación/aniquilación } : : .$

Podemos notar que, incluso si hubiese habido una diferencia entre  $: : \text{ y } : : \text{ (como la hay, p.ej., en el marco conforme } w \text{), tenemos } [\alpha_n, \alpha_{m-n}] = 0 \forall n \text{ si } m \neq 0, \text{ así que reemplazamos } : : \text{ con } : : \text{ en la$

definición de  $L_m$  sería válida si  $m \neq 0$ . Pero para  $m=0$ , en general, hubiera podido haber una constante de orden,

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} + A^x$$

$$= \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n>0} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + A^x$$

← resulta ser = 0

$$\frac{\alpha_0^2}{4}$$

en el caso de la cuerda cerrada ( $\alpha_0^2$  abierto)

$\equiv N$  llamado convencionalmente el operador de número (aunque en realidad es el Hamiltoniano)

$$N = \sum_{n>0} n |a_n^\dagger \cdot a_n|$$

$$\uparrow \epsilon_n = |p|$$

Podemos verificar que  $A^x = 0$  usando el conmutador

$$[L_1, L_{-1}] = 2L_0 \text{ para notar que}$$

$$A^x |0;0\rangle = L_0 |0;0\rangle = \frac{1}{2} L_1 L_{-1} |0;0\rangle - \frac{1}{2} L_{-1} L_1 |0;0\rangle$$

↑ osciladores  $p^N$

$$\frac{1}{2} \sum_n \alpha_n \cdot \alpha_{-n}$$

$$\frac{1}{2} \sum_n \alpha_n \cdot \alpha_{-n}$$

$$= 0 - 0 .$$



LB: 19/03/13



Podemos por fin regresar a la pregunta de cómo imponer las restricciones a nivel cuántico. Dado que tenemos  $c \neq 0$ , No podemos identificar a los estados físicos pidiendo simplemente que

$$T(z) |f\rangle = 0 \quad \forall z \iff L_n |f\rangle = 0 \quad \forall n,$$

porque esto contradiría el álgebra de Virasoro,

$$[L_n, L_{-n}] = 2nL_0 + \frac{c}{12}(n^3 - n).$$

Pero lo que en realidad nos interesa es asegurar que  $T_{ab}$  se anule dentro de los elementos de matriz,

$$\langle f | \underbrace{T(z)}_{\sum_n L_n / z^{n+2}} | f' \rangle = 0 \quad \forall z, \quad \forall |f\rangle, |f'\rangle \text{ físicos,}$$

no solo en valores esperados  $|f'\rangle = |f\rangle$

y usando  $L_n^\dagger = L_{-n}$ , vemos que esto se logra si imponemos las condiciones de estado físico

$$\boxed{\begin{aligned} L_n |f\rangle &= 0 \quad \forall n > 0 \\ (L_0 - a) |f\rangle &= 0 \end{aligned}} \implies \langle f | L_{-n} = 0$$

(y similarmente,  $\tilde{L}_{n>0} |f\rangle = 0 = (\tilde{L}_0 - \tilde{a}) |f\rangle$ ),

donde  $a$  (y  $\tilde{a}$ ) es una posible constante de orden (necesaria por generalidad, después de que hemos elegido trabajar en el marco conforme  $\tilde{z}$  y definido  $T(z)$  usando el orden normal  $::: = \circ \circ$ ).

Como consecuencia de esta definición, el conjunto de estados físicos forma un subespacio vectorial del espacio de Hilbert completo,  $\mathcal{H}_{\text{fis}} \subset \mathcal{H}$ .

Podemos notar además que un estado del tipo

$$|\psi\rangle \equiv L_{-n} |\chi\rangle$$

$n > 0 \rightarrow \uparrow$  cualquier estado

es automáticamente ortogonal a todos los estados físicos,

$$\langle \text{fis} | \psi \rangle = \langle \text{fis} | L_{-n} |\chi\rangle = 0 \quad \forall |\text{fis}\rangle \in \mathcal{H}_{\text{fis}}.$$

Esto es lo que se conoce como un estado espurio.

Si un estado es espurio y físico, entonces es ortogonal a sí mismo, es decir, tiene norma cero:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | L_{-n} |\chi\rangle = 0.$$

Lo llamamos un estado nulo. Si existen en  $\mathcal{H}_{\text{fis}}$

estados nulos, debemos tener presente que

$$|f_{\text{fis}}\rangle \quad \text{y} \quad |f_{\text{fis}}\rangle + |nulo\rangle$$

son físicamente equivalentes, puesto que dan el mismo resultado al tomar su producto interno con cualquier estado físico.

Para expresar esto, definiremos formalmente una relación de equivalencia

$$|f_{\text{fis}}\rangle \approx |f_{\text{fis}}'\rangle \quad \text{si} \quad |f_{\text{fis}}\rangle - |f_{\text{fis}}'\rangle = \sum_i L_{-n_i} |\chi_i\rangle$$

o, usando las relaciones de conmutación,

$$\text{si} \quad |f_{\text{fis}}\rangle - |f_{\text{fis}}'\rangle = L_{-1} |\chi_1\rangle + L_{-2} |\chi_2\rangle.$$

El espacio de Hilbert que en realidad nos interesa en este procedimiento de cuantización covariante antigua (CCA) es entonces finalmente el conjunto de clases de equivalencia

$$\mathcal{H}_{\text{CCA}} \equiv \frac{\mathcal{H}_{\text{fis}}}{\mathcal{H}_{\text{nulo}}} = \{ |f_{\text{fis}}\rangle \text{ sujeto a } \approx \}.$$

(Se tiene una historia muy similar al cuantizar el campo de Maxwell en la norma de Lorentz.)

Apliquemos ahora este procedimiento para obtener el espectro de la cuerda. Consideraremos primero el caso de la cuerda abierta ( $\equiv$  excitación de una D-brana), que es más sencilla porque hay un solo conjunto de modos.

En efecto, sabemos ya (p. 167, 180) que las condiciones de Neumann y Dirichlet asociadas a una Dp-brana,

$$\begin{aligned} \partial X^\alpha &= \bar{\partial} X^\alpha & \forall z = \bar{z} & \quad (\alpha = 0, \dots, p), \\ \partial X^i &= -\bar{\partial} X^i & \forall z = \bar{z} & \quad (i = p+1, \dots, D-1), \end{aligned}$$

implican que

$$\alpha_n^\alpha = \tilde{\alpha}_n^\alpha, \quad \alpha_n^i = -\tilde{\alpha}_n^i \quad \forall n.$$

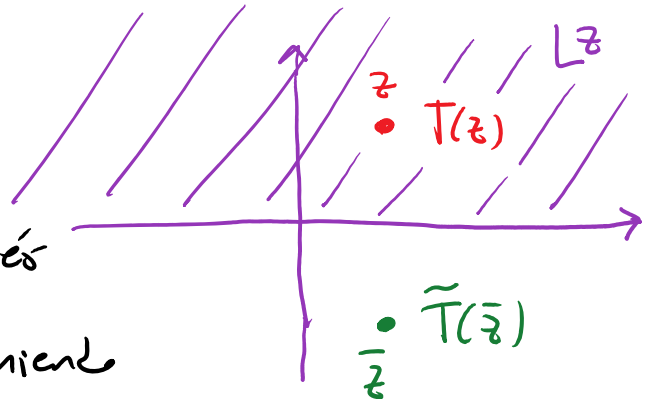
Podemos notar además que estas mismas condiciones tienen como consecuencia que

$$T(z) \Big|_{z=\bar{z}} = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X \cdot \partial X(z) : = -\frac{1}{\alpha'} : \bar{\partial} X \cdot \bar{\partial} X(\bar{z}) : = \tilde{T}(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}=\bar{z}}$$

es decir,

$$L_n = \tilde{L}_n \quad \forall n.$$

Esta conexión se puede implementar nuevamente a través del truco de duplicación, definiendo



$T(\bar{z}) \equiv \tilde{T}(\bar{z})$ , de modo que nos quedamos con una sola función  $T(z)$  definida sobre todo el plano complejo, que es continua al cruzar el eje real  $z = \bar{z}$ .

De la mano de esto, tenemos un solo conjunto de modos de Virasoro,

$$\begin{aligned} L_n &\equiv \frac{1}{2\pi i} \oint (dz z^{n+1} T(z) - d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \tilde{T}(\bar{z})) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_n \cdot \alpha_{M-n} : , \end{aligned}$$

que usaremos para imponer las condiciones de estado físico.

En particular,

$$L_0 = \underbrace{\frac{1}{2} \alpha_0^2}_{\alpha' p^2} + \underbrace{\sum_{n>0} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n}_{\equiv N}$$

$$\begin{aligned} & \leftarrow p^\mu p_\mu \\ & (p^0=0) \end{aligned}$$

↪ "operador de número" satisface

$$[N, \alpha_{-m}^\mu] = m \alpha_{-m}^\mu$$

$$\left( \text{porque } \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = n a_{-n}^\dagger a_n \right),$$

así que la construcción

$$(L_0 - a) | \text{fís} \rangle = 0$$

no es otra cosa que la condición de capa de masa

$$m^2 \equiv -p^2 = \frac{N-a}{\alpha'} \quad N=0, 1, 2, \dots$$

válida para los operadores y sus eigenvalores

(análogo a la partícula relativista, donde teníamos una sola construcción, que era justamente  $(p^2 + m^2) | \text{fís} \rangle = 0$ ).

Así que, dependiendo de la manera en que esté vibrando la cuerda (valor de  $N$ ), tendrá una cierta masa  $m$  (de entre un conjunto infinito pero discreto de posibilidades),

tal como si fueran una partícula relativista (en decir, su energía será  $E_{\vec{p}} \equiv p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$   $\leftarrow p^{\alpha \neq 0}$ ).

Para identificar en completo detalle a los estados físicos, nos falta todavía imponer las construcciones restantes,  $L_{n>0} |fis\rangle = 0$ . Analizaremos por separado los estados en distintos eigenvalores de  $N$ .

•  $N=0 \leftrightarrow m^2 = -\frac{g}{\alpha'}$  : estado  $|0; k\rangle$  con  $k^2 = \frac{g}{\alpha'}$ .

oscilador  $\downarrow$  momento  $\downarrow$   
 $\uparrow k^\alpha$

Es fácil ver que en este caso las construcciones se cumplen automáticamente,

$$L_{n>0} |0; k\rangle = \frac{1}{2} \sum_l \alpha_l \cdot \alpha_{n-l} |0; k\rangle = 0,$$

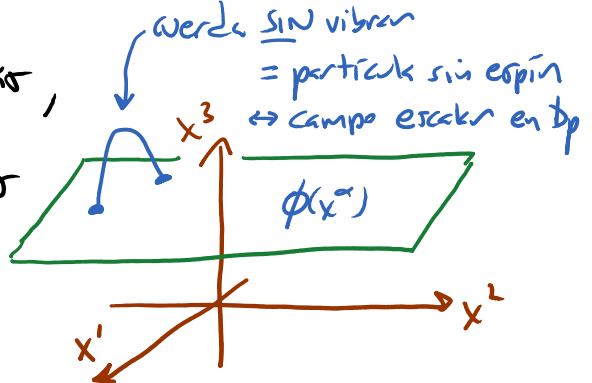
$$\frac{1}{2} (\alpha_0 \cdot \alpha_n + \alpha_{n-1} \cdot \alpha_1 + \alpha_{n-2} \cdot \alpha_2 + \dots + \alpha_{-1} \cdot \alpha_{n+1} + \alpha_{-2} \cdot \alpha_{n+2} + \dots)$$

así que todos los estados  $|0; k\rangle$  son físicos.

Felizmente, todos tienen norma positiva. ✓

Claramente son idénticos a los estados  $|k^\alpha\rangle$  de una partícula sin espín (en decir, sin estado interno) con

masa  $m^2 = -a/\alpha'$  que se mueve en  $p+1$  dimensiones, la cual a su vez reconocemos como una pequeña fluctuación en un campo escalar  $\phi(x^\sigma)$  definido sobre la  $D_p$ -brana. En otras palabras,  $\phi(x^\sigma)$  es uno de los modos en que la  $D_p$ -brana puede ser excitada. Es un escalar del grupo de Lorentz longitudinal,  $SO(p,1)$ .



- $N=1 \leftrightarrow m^2 = \frac{1-a}{\alpha'}$  : estados  $\alpha_{-1}^\mu |0;k\rangle$  con  $k^2 = \frac{a-1}{\alpha'}$ .

La combinación más general es  $\sum_\mu \epsilon_\mu \alpha_{-1}^\mu |0;k\rangle \equiv |\epsilon;k\rangle$ .

Este estado tiene norma

↑ Constante arbitrario:  
vector de polarización

$$\langle \epsilon;k | \epsilon;k \rangle = \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu \langle 0;k | \underbrace{\alpha_{-1}^\mu \alpha_{-1}^\nu}_{= [\alpha_{-1}^\mu, \alpha_{-1}^\nu]} | 0;k \rangle = \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu (2\pi)^D \delta^{(D)}(0),$$

$$= [\alpha_{-1}^\mu, \alpha_{-1}^\nu] = \eta^{\mu\nu}$$

que es negativa si  $\epsilon^* \cdot \epsilon < 0$  (p.ej., para  $\epsilon_\mu = (1, 0, 0, \dots)$ ).

Para tener una teoría sensata, necesitamos asegurarnos que los estados con norma negativa (= fantasmas) NO sean físicos. Podemos verificar que



$L_{n>2} |\epsilon; k\rangle = 0$  en subn tica,  $\forall \epsilon, k$ ; pero

$$L_1 |\epsilon; k\rangle = (\sqrt{2\alpha'} p \cdot \alpha_1 + \dots) \epsilon_\mu \alpha_{-1}^\mu |0; k\rangle$$

$\uparrow$  términos que se anulan

$$= \sqrt{2\alpha'} \epsilon_\mu k_\nu \underbrace{\alpha_1^\nu \alpha_{-1}^\mu}_{[\alpha_1^\nu, \alpha_{-1}^\mu] = \eta^{\mu\nu}} |0; k\rangle$$

$$= \sqrt{2\alpha'} \epsilon \cdot k |0; k\rangle$$

$$= 0 \text{ solo si } \epsilon \cdot k = 0. \quad \begin{array}{l} \text{polarización} \\ \text{transversal} \end{array}$$

Además,

$$L_{-1} |0; k\rangle = (\sqrt{2\alpha'} p \cdot \alpha_{-1} + \dots) |0; k\rangle = \sqrt{2\alpha'} k \cdot \alpha_{-1} |0; k\rangle,$$

así que  $|\epsilon; k\rangle$  con  $\epsilon_\mu = \lambda k_\mu$  es espurio.

Consideremos ahora las 3 distintas posibilidades para el valor de la constante de orden  $a$ .

i) Si  $a < 1$ , entonces  $m^2 = -k^2 > 0$ .

El estado espurio  $|\lambda k; k\rangle$  tiene  $\epsilon \cdot k = \lambda k^2 \neq 0$ , y por tanto no es físico (es decir, no existen estados nulos).

Con un empujón adecuado, podemos ir al marco en reposo para la cuerda, donde  $k^\mu = (m, 0, 0, \dots)$ . La condición de estado físico  $\epsilon \cdot k = \epsilon_0 = 0$  elimina entonces a los estados con  $\epsilon_0 \neq 0$ , de modo que el estado con norma negativa  $\alpha_{-1}^0 |0; k\rangle$  No es físico. ✓

Nos quedamos entonces con  $D-1$  estados de partícula en las  $p+1$  dimensiones de la  $D_p$ -brana, que se dividen en 2 conjuntos con base en sus propiedades de transformación bajo el grupo de Lorentz longitudinal  $SO(p, 1)$ ,

$\epsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0; k\rangle \leftrightarrow p$  estados de partícula masiva con espín 1 ( $m^2 = \frac{1-g}{\alpha'}$ )  
 ↗ en polarización transversal,  $\epsilon \cdot k = 0$  ↔ fluctuación de un campo vectorial masivo  $A_\alpha(x^\beta)$  sobre  $D_p$   
 y

$\epsilon_i \alpha_{-1}^i |0; k\rangle \leftrightarrow D-p-1$  partículas masivas sin espín ( $m^2 = \frac{1-g}{\alpha'}$ )  
 ↗  $\epsilon \cdot k = 0$  es automático

↔ fluctuación de  $D-p-1$  campos  
escalares masivos  $\Phi^i(x^\alpha)$  sobre  $D_p$ .

ii) Si  $a=1$ , entonces  $m^2 = -k^2 = 0$ .

El estado espurio  $|\lambda k; k\rangle$  tiene ahora  $\epsilon \cdot k = \lambda k^2 = 0$ ,  
 y por lo tanto es nulo. Como resultado, tenemos  
 la relación de equivalencia

$$|\epsilon; k\rangle \simeq |\epsilon'; k\rangle \quad \text{si} \quad \epsilon'_\mu = \epsilon_\mu + \lambda k_\mu.$$

Con un empujón podemos ir al marco donde  
 $k^\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$ , y la condición de estado  
 físico  $\epsilon \cdot k = 0$  implica entonces  $\epsilon_1 = -\epsilon_0$ .

Dado que el estado con

$$\epsilon_\mu = (\epsilon_0, -\epsilon_0, 0, 0, \dots) \propto k_\mu = (-k, k, 0, 0, \dots)$$

es nulo, tenemos

$$(\epsilon_0, -\epsilon_0, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots) \simeq (0, 0, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots),$$

es decir, cualquier estado físico es equivalente a  
 una combinación lineal de estados  $|\epsilon_{-1}^\mu; k\rangle$  con  
 $\mu \neq 0, 1$ . No hay estados con normas negativas. ✓

Los estados físicos nuevamente son de 2 tipos  
con respecto a  $SO(p, 1)$ ,

$\epsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0; k\rangle \leftrightarrow p-1$  estados de partículas

no masiva con espín 1  
 $\uparrow$  con polarización transversal  $\epsilon \cdot k = 0$   
 y  $\epsilon'_\alpha = \epsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$

$\leftrightarrow$  fluctuación de un campo  
vectorial no masivo  $A_\alpha(x^\beta)$ ,

o sea decir, un campo de norma,

con  $\epsilon_\alpha \simeq \epsilon'_\alpha = \epsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$  la

expresión de la invariancia de

norma

$A_\alpha(x) \rightarrow A'_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \partial_\alpha \lambda(x)$ ,

y  $k \cdot \epsilon = 0$  es la condición de

norma de Lorentz  $\partial \cdot A = 0$  ;

$\epsilon_i \alpha_{-1}^i |0; k\rangle \leftrightarrow D-p-1$  partículas no masivas

$\uparrow$   $\epsilon \cdot k = 0$   
 es automático

sin espín

$\leftrightarrow$  Fluctuación de  $D-p-1$  campos  
escalares no masivos  $\Phi^i(x^\alpha)$   
 (sin invariancia de norma).  
 $\epsilon_i \approx \epsilon_i + \lambda \frac{\vec{k}}{k}$   
 no tiene  
 ningún efecto

iii) Si  $a > 1$ , entonces  $m^2 = -k^2 < 0$  (taguín)

El estado espurio  $|\lambda k, k\rangle$  tiene  $\epsilon \cdot k = \lambda k^2 \neq 0$ ,  
 y por tanto No es físico.

Yendo al marco donde  $k^\mu = (0, m, 0, 0, \dots)$ ,  
 la condición de estado físico  $\epsilon \cdot k = 0$  elimina los  
 estados con  $\epsilon_i \neq 0$ .

El estado con norma negativa  $\alpha_{-1}^0 |0, k\rangle$  es  
 entonces físico. ~~X~~

Del análisis de este nivel, concluimos entonces que:

\* Para que la teoría tenga sentido, debemos tener  $a \leq 1$ .

\* En el caso límite  $a=1$  existen menor estados físicos  
 no nulos ( $b-2$  en lugar de  $D-1$ ), lo cual está  
 asociado a una invariancia de norma en el espaciotiempo  
 ( $A_\alpha \approx A_\alpha + \partial_\alpha \lambda \leftrightarrow \epsilon_\alpha \approx \epsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$ ).

$$\bullet \quad N \geq 2 \leftrightarrow m^2 \geq \frac{2-a}{\alpha'} \stackrel{a \leq 1}{\geq} \frac{1}{\alpha'} \quad :$$

P.ej. con  $N=2$  se tienen  $\alpha_{-1}^{\mu} \alpha_{-1}^{\nu} |0; k\rangle$  y  $\alpha_{-2}^{\mu} |0; k\rangle$   
 con  $k^2 = \frac{a-2}{\alpha'}$

La combinación lineal más general es entonces

$$\left( \epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^{\mu} \alpha_{-1}^{\nu} + \epsilon_{\mu} \alpha_{-2}^{\mu} \right) |0; k\rangle .$$

Los resultados para  $N \geq 2$  dependen no solo del valor de la constante de orden  $a$ , sino también de la dimensión espaciotemporal  $D$  ( $\leftrightarrow$  número de  $X^{\mu}$ ).

P.ej., tomando  $a=1$ , se puede verificar (Tarea 3) que

$$|\psi\rangle \equiv \left\{ \alpha_{-1} \cdot \alpha_{-1} + \left( \frac{D-4}{5} \right) \alpha' (k \cdot \alpha_{-1})^2 + \left( \frac{D-1}{5} \right) \sqrt{2\alpha'} k \cdot \alpha_{-2} \right\} |0; k\rangle$$

(con  $k^2 = -1/\alpha'$ ) es físico, y tiene norma

$$\langle \psi | \psi \rangle = \frac{2}{25} (D-1) (26-D) (2\pi)^D \delta^{(D)}(0)$$

$$< 0 \quad \text{si} \quad D > 26 . \quad \times$$

El resultado general ("teorema de no fantasmas") es

que los estados con norma negativa se eliminan  $\forall N$

en las condiciones de estado físico si  $a \leq 1$  y  $D \leq 26$

[ver p.ej. 65W 2.3.3, Polchinski 4.4].

El caso límite  $a=1, D=26$  es especial, puesto que da lugar a muchos más estados nulos, y contiene por tanto menos estados físicos (no nulos), como expresión de invariancia de norma en el espacio tiempo.

Tomando en cuenta todos los estados nulos, en el caso  $a=1, D=26$  se encuentra que los estados físicos independientes son generados únicamente por  $D-2$  osciladores transversales  $\{\alpha_{-n}^j\}$  (como vimos explícitamente para el nivel  $N=1$ ), que es justo lo que esperamos desde un principio, dado que solo  $D-2$  de los campos  $X^M$  representan grados de libertad físicos.

Por esta razón, es solo para  $a=1, D=26$  que el espectro en CCA (donde primero cuantizamos, y después eliminamos la redundancia) resulta ser idéntico al obtenido por cuantización en el caso de luz (p.143, donde primero

eliminar las redundancias y después cuantizarlos). En sentido inverso, se encuentra que la CCL solo es covariante bajo Lorentz si  $D=26$ .

Como veremos más adelante, el caso  $\alpha=1, D=26$ , que es el único donde a nivel de la teoría libre (en el espacio tiempo, es decir, cuando las cuerdas no interactúan)

tenemos

$$\mathcal{H}_{CCA} = \mathcal{H}_{CCL} = \mathcal{H}_{CCM} \text{ (BRST)}$$

*covariante antigua*
*con luz*
*covariante moderna (ver más adelante)*

es también el único que tiene sentido al considerar interacciones.

Usando  $\alpha=1, D=26$ , podemos listar con más precisión los estados de la cuerda bosónica abierta (libre) asociados a una  $D_p$ -brana:

- $N=0$   $|0;k\rangle$  con  $m^2 = -k^2 = -\frac{1}{\alpha'}$  Taquión  
*solo  $k_\alpha \neq 0$*   $\leftrightarrow$  campo escalar  $\phi(x)$  sobre  $D_p$

- $N=1$   $\epsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0;k\rangle$  con  $m^2 = -k^2 = 0$  Fotón  
 $\epsilon \cdot k = 0$   
 $\epsilon_\alpha \approx \epsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$   $\leftrightarrow$  campo de norma  $A_\alpha(x)$  sobre  $D_p$



$$\varepsilon_i \alpha_{-1}^i |0; k\rangle \quad \text{con } m^2 = -k^2 = 0 \quad \text{Escalares}$$

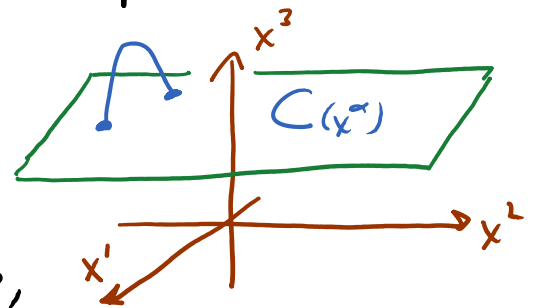
↔ 25-p campo escalares  $\Phi^i(x)$  sobre  $D_p$

- $N \geq 2$  estado de partículas con  $m^2 = -k^2 = \frac{N-1}{\alpha'}$  y espines  $s \leq N$

↔ campo tensoriales  $C_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(x)$  sobre  $D_p$ .

Entendamos que estas partículas/campo representan excitaciones / grados de libertad de la  $D_p$ -brana. ¿Qué expectativas tenemos para ellas?

Si la  $D$ -brana en verdad es un objeto dinámico, entonces, como mínimo,

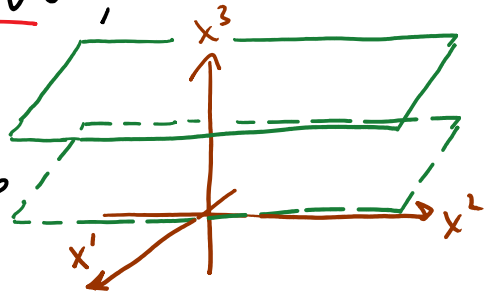


esperaríamos que pueda moverse. Pensaríamos entonces en describir su trayectoria covariantemente usando  $D=26$

funciones de empuje  $X^M(\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^p)$ , o, si fijamos las normas estáticas  $\sigma^\alpha = x^\alpha$ , con 25-p funciones  $X^i(x^\alpha)$  asociadas a las direcciones transversales. Estas son

campo escalares bajo el grupo de Lorentz en la  $D_p$ .

Y esperamos que sean campos no masivos,  
 puesto que la  $D_p$  en cualquier posición  
 en Minkowski (cualquier valor esperado  
 $\langle X^i(x^\alpha) \rangle = c^i$ ) tiene la misma



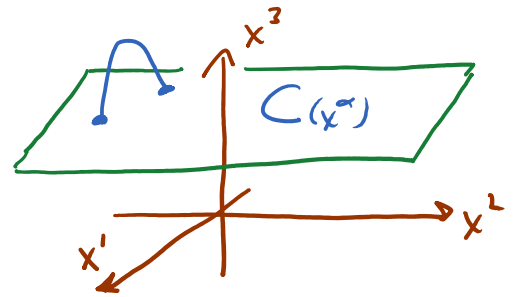
energía, así se las piensa fluctuaciones en su posición  
 (o decir, las partículas asociadas a los campos  $X^i(x^\alpha)$ )  
 deben tener masa cero (su energía mínima posible,  
 correspondiente al modo constante  $k^{\alpha \neq 0} \rightarrow 0$ , es cero).

Esta es una propiedad genérica de los objetos solitónicos  
 (en ausencia de un potencial): su posición está descrita  
 por campos escalares no masivos, que se conocen como los  
condensados colectivos del solitón.

Y hemos visto que precisamente eso es lo que obtenemos  
 en el espectro de las cuerdas abiertas asociadas a una  $D_p$ :  
 un campo escalar no masivo  $\Phi^i(x^\alpha)$  por cada dirección  
 transversal a la brana ( $i=p+1, \dots, 25$ ). ¡Así que los  
 $\Phi^i$  son los condensados colectivos esperados para la D-brana!  
 (Más adelante comprobaremos que  $X^i = \frac{\Phi^i}{2\pi\alpha'}$ .) Y a las partículas  
 asociadas bien les podríamos llamar entonces "posicioner"...

Al cuantizar la cuerda abierta hemos obtenido entonces este resultado esperado, y mucho más: aprendemos que la D-brana tiene de hecho un número infinito de excitaciones internas descritas por los campos

$C_{\alpha_1 \dots \alpha_j}(x)$ , incluyendo en particular al campo de norma vectorial  $A_\alpha(x)$ .



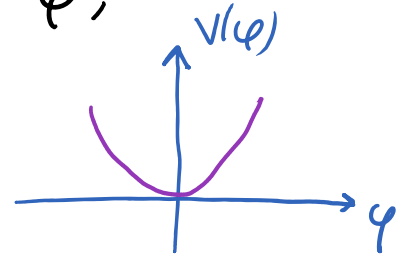
Todos ellos tienen  $m^2 \geq 0$ , excepto el campo escalar  $\phi(x)$  que corresponde a la cuerda sin oscilar: el taquión.

Recordemos que para un campo arbitrario  $\varphi$ ,

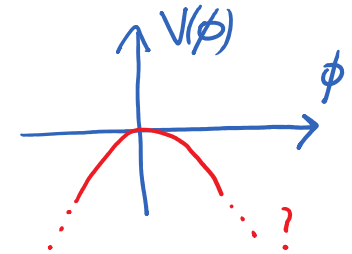
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi)$$

$$\text{con } V(\varphi) = V(0) + \cancel{V'(0)}\varphi + \frac{1}{2}V''(0)\varphi^2 + \dots,$$

$$\underbrace{\quad}_{\equiv m^2} \quad (\text{masa en el caso libre})$$



así que  $m^2 < 0$ , como obtuvimos para el modo más bajo  $\phi$  en la cuerda abierta, simplemente quiere decir que  $V''(0) < 0$ .

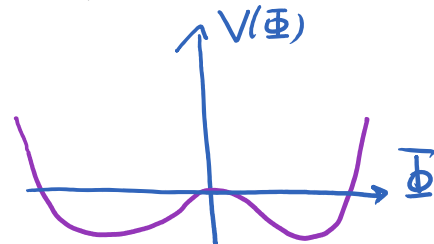


Es decir, estamos perturbando alrededor de un extremo del potencial que es un máximo, en lugar de un mínimo.

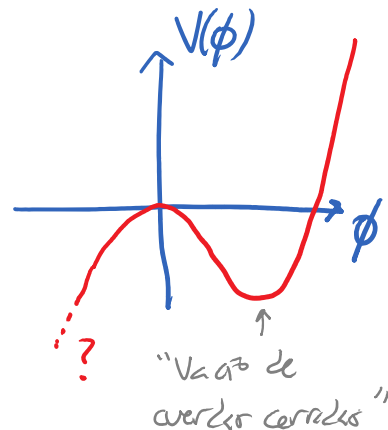
La existencia del taquión nos informa entonces que el

vacío con  $\langle \phi \rangle = 0$ , alrededor del cual estamos perturbando, es inestable: el sistema tiende a cambiar de estado para adquirir  $\langle \phi \rangle \neq 0$  (porque es energéticamente favorable), proceso conocido como condensación del taquión.

La teoría será saludable solo si, al tomar en cuenta las interacciones,  $V(\phi)$  tiene un mínimo absoluto, como sucede p.ej. para el campo de Higgs  $\Phi$  en el Modelo Estándar.



Cálculos en la teoría del campo de cuerdas abiertas muestran que el potencial para el taquión  $\phi$  es como se indica a la derecha, y que el mínimo corresponde a la completa desaparición de la D-brana (dejando solo el espaciotiempo cuerdas, cuyas excitaciones son solo cuerdas cerradas).



Así que las D-branas en la teoría de cuerdas bosónicas son inestables y tienden a decaer.

[Ver p.ej. hep-th/0311017, 0102085, 0410103.]

Procedamos ahora a cuantizar la cuerda cerrada.

El procedimiento es virtualmente idéntico, con la salvedad de que ahora los modos izquierdos  $\alpha_n^\mu$  son independientes de los derechos  $\tilde{\alpha}_n^\mu$ . El espectro es entonces básicamente el producto tensorial de 2 copias del espectro de la cuerda abierta.

Tenemos también modo de Virasoro independientes  $L_n$  y  $\tilde{L}_n$ , así que las condiciones de estado físico son

$$\begin{aligned} L_{n>0} |f\rangle &= 0, & \tilde{L}_{n>0} |f\rangle &= 0, \\ (L_0 - a) |f\rangle &= 0, & (\tilde{L}_0 - \tilde{a}) |f\rangle &= 0, \end{aligned}$$

donde (para la cuerda bosónica) tenemos por simetría  $a = \tilde{a}$ . Y, como la cuerda cerrada (a diferencia de la abierta) es además invariante bajo transformaciones

$$\sigma' \rightarrow \sigma' + c \quad \leftrightarrow \quad \text{rotaciones en el plano } z = e^{\sigma' + i\tau'}$$

cuyo generador es  $L_0 - a - \tilde{L}_0 + \tilde{a} = L_0 - \tilde{L}_0$  (p. 211),

debemos imponer la condición adicional

$$(L_0 - \tilde{L}_0) |f_{rs}\rangle = 0 \quad ,$$

conocida como la condición de emparejamiento de niveles ("level-matching"). Esta es la única conexión entre los modos izquierdos y los derechos. Usando (p. 225)

$$L_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + N \quad , \quad \tilde{L}_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + \tilde{N} \quad ,$$

claramente equivale a

$$(N - \tilde{N}) |f_{rs}\rangle = 0 \quad .$$

Con un análisis idéntico al de la cuerda abierta, se encuentra nuevamente que los estados con normas negativas se eliminan solo si  $\alpha \leq 1$  y  $D \leq 26$ , y que en el caso límite  $\alpha = 1, D = 26$  hay muchos más estados nulos, de manera tal que el espectro coincide con el de cuantización en el caso de luz.

Especializando a este caso, tenemos entonces (a partir de  $L_0 - 1 = 0 = \tilde{L}_0 - 1$ ) el espectro

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'} (N-1) = \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N}-1)$$

Los niveles más bajos son

- $N = \tilde{N} = 0 \leftrightarrow m^2 = -\frac{4}{\alpha'}$  : estados  $|0,0;k\rangle$  con  $k^2 = \frac{4}{\alpha'}$   
(todos son físicos)

Partícula sin espín  $\leftrightarrow$  Fluctuación de campo escalar  $\phi(x)$

Teoría de cuerdas cerradas

$x^\mu \uparrow$   
 $\mu=0, \dots, 25$

( $\neq$  teoría de cuerdas abiertas  $\phi(x)$  con  $m^2 = -\frac{1}{\alpha'}$ )

$\uparrow x^\alpha \alpha=0,1,\dots,p$

- $N = \tilde{N} = 1 \leftrightarrow m^2 = 0$  :  $\sum_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle$  con  $k^2 = 0$

$L_{n \geq 2} = 0 = \tilde{L}_{n \geq 2}$  se satisfacen en automática

$L_1 = 0 = \tilde{L}_1$  exigen que  $k^\mu \sum_{\mu\nu} \alpha_{\mu\nu} = 0 = k^\nu \sum_{\mu\nu} \tilde{\alpha}_{\mu\nu}$

polarización transversa .

Los estados

$L_{-1} \sum_{\nu} \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle$  y  $\sum_{\mu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{L}_{-1} |0,0;k\rangle$

son físicos, y por tanto nulos, si  $\sum \cdot k = 0 = \tilde{\sum} \cdot k$ .

Tenemos entonces la relación de equivalencia

$$\epsilon_{\mu\nu} \simeq \epsilon'_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} + k_\mu \zeta_\nu + \xi_\mu k_\nu \quad \text{con } \zeta \cdot k = 0 = \xi \cdot k.$$

En el marco donde  $k^\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$ , concluimos entonces que cada estado físico es equivalente a una combinación lineal

$$\epsilon_{ij} \propto \begin{pmatrix} i & \sim & j \\ -1 & & -1 \end{pmatrix} |0, 0; k\rangle \quad \text{con } i, j = 2, \dots, 25.$$

Estos son  $(D-2)^2 = 24^2$  estados con polarización transversal. Podemos separarlos en 3 conjuntos de estados que no se mezclan entre sí bajo Lorentz:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{la traza } \epsilon_{ij} \propto \epsilon \delta_{ij} & 1 \text{ estado} \\ \text{la parte simétrica sin traza } \epsilon_{(ij)} & \frac{(D-2)(D-1)}{2} - 1 \text{ estados} \\ \text{la parte antisimétrica } \epsilon_{[ij]} & \frac{(D-2)(D-3)}{2} \text{ estados} \end{array} \right.$$

Regresando a un marco arbitrario, esto es

$$* \epsilon \eta_{\mu\nu}^T \propto \begin{pmatrix} \mu & \sim & \nu \\ -1 & & -1 \end{pmatrix} |0, 0; k\rangle \text{ partícula no masiva sin espín } \underline{\text{Dilatación}}$$

$$k \cdot \eta^T = 0 = \eta^T \cdot k$$

$\leftrightarrow$  campo escalar  $\varphi(x)$



\*  $\Sigma_{(\mu\nu)} \alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} |0,0,k\rangle$  partícula no masiva con espín 2 gravitón

$$k \cdot \xi = 0$$

$$\xi_{\mu\nu} \simeq \xi_{\mu\nu} + \xi_{\mu} k_{\nu} + k_{\mu} \xi_{\nu}$$

$$(con k \cdot \xi = 0)$$

↔ campo tensorial simétrico  $h_{\mu\nu}(x)$

¡ Justo lo que esperamos como fluctuación

de la Métrica  $g_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$  !

\*  $\Sigma_{[\mu\nu]} \alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} |0,0,k\rangle$  partícula en rep. antisimétrica "Antisimetrón"

$$k \cdot \xi = 0$$

$$\xi_{\mu\nu} \simeq \xi_{\mu\nu} + \xi_{\mu} k_{\nu} - k_{\mu} \xi_{\nu}$$

↔ campo tensorial antisimétrico  $B_{\mu\nu}(x)$

Campo de Kalb-Ramond

(Como veremos el próximo semestre, estos mismos 3 campos aparecen también entre los estados no masivos de la teoría de supercuerdas.)

Podemos notar que, en el caso del gravitón, la equivalencia

$$\xi_{\mu\nu} \simeq \xi'_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu} + k_{\mu} \xi_{\nu} + \xi_{\mu} k_{\nu}$$

corresponde a la invariancia de norma

$$h_{\mu\nu}(x) \simeq h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) + \partial_{\mu} \xi_{\nu}(x) + \partial_{\nu} \xi_{\mu}(x),$$

que no es otra cosa que la expresión que corresponde

al cambio en la métrica debido a una reparametrización en el espaciotiempo,  $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x)$   
 (caso particular de la fórmula para un fondo arbitrario,  $h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) + \nabla_\mu \xi_\nu(x) + \nabla_\nu \xi_\mu(x)$ ).  
 $\leftarrow |\xi| \ll |x|$

Y en este mismo caso, la condición

$$k^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \partial^\mu h_{\mu\nu}(x) = 0$$

es básicamente la definición de la norma de Lorentz (=armónica = de de Donder).

Dentro del enfoque que hemos adoptado, donde consideramos solo pequeñas fluctuaciones alrededor del espaciotiempo de Minkowski, vemos entonces que estos estados de vibración de la cuerda,  $\epsilon_{(\mu\nu)} \propto \begin{pmatrix} \alpha^\mu & \tilde{\alpha}^\nu \\ -1 & -1 \end{pmatrix} (0, 0; k)$ , en verdad reproducen perfectamente a un gravitón libre.

Más adelante aprenderemos cómo encender un valor de fondo para el campo correspondiente,  $\langle h_{\mu\nu}(x) \rangle \neq 0$ , y comprobaremos que el efecto es justamente una deformación grande de la métrica,  $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$ .

Y al agregar interacciones veremos que estos modos de

la cuerda en realidad interactúan como gravitones.

De manera similar, en el caso del antisimetrización

$$\varepsilon_{\mu\nu} \simeq \varepsilon'_{\mu\nu} + k_\mu J_\nu - J_\mu k_\nu$$

expresaz la invariancia de norma

$$B_{\mu\nu}(x) \simeq B'_{\mu\nu}(x) = B_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu J_\nu(x) - \partial_\nu J_\mu(x),$$

análoga a la transformación de norma

$$A_\mu(x) \simeq A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x)$$

para el potencial electromagnético.

Así que el campo de Kalb-Ramond es un campo de norma generalizado: un potencial con 2 índices en lugar de 1. Por analogía con  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , podemos definir una intensidad de campo asociada a  $B_{\mu\nu}$ ,

$$H_{\mu\nu\lambda}(x) \equiv \partial_\mu B_{\nu\lambda} - \partial_\nu B_{\mu\lambda} - \partial_\lambda B_{\nu\mu},$$

tensor (0,3) totalmente antisimétrico que es invariante de norma.

Este campo juega un papel muy especial en la teoría

de cuerdas: veremos más adelante que, justo como el campo de norma vectorial se acopla de manera natural a una partícula (objeto cero-dimensional) a través de

$$S_{\text{int}} = q \int dz A_{\mu}(X(z)) \partial_z X^{\mu}(z),$$

↑ carga

el campo de norma tensorial  $B_{\mu\nu}(x)$  se acopla de manera natural a la cuerda (objeto uno-dimensional) a través de

$$S_{\text{int}} = p \int dz d\sigma B_{\mu\nu}(X(z,\sigma)) \partial_z X^{\mu}(z,\sigma) \partial_{\sigma} X^{\nu}(z,\sigma).$$

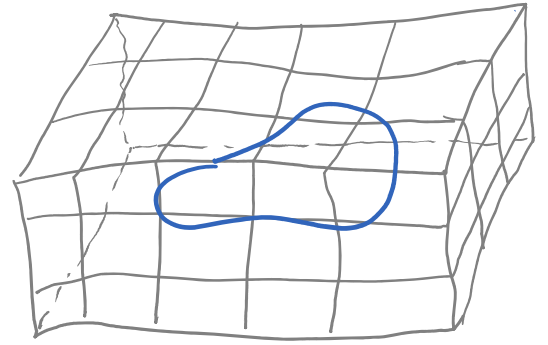
↑ densidad de carga

Es decir, nuestras cuerdas (cerradas o abiertas) están cargadas "eléctricamente" bajo  $B_{\mu\nu}(x)$ .

Pero, de nuevo, esto tendrá que esperar hasta que aprendamos cómo encontrar valores de fondo no triviales para los campos que hasta ahora solo hemos encontrado como fluctuaciones infinitesimales.

Lo que ya hemos podido empezar a confirmar es que en verdad las cuerdas cerradas son pequeñas fluctuaciones de

una estructura (el campo de cuerdas  
cerradas) que incluye el propio  
espaciotiempo 26-dimensional, junto con  
un número infinito de otros campos.



El hecho de que entre estos campos se encuentre el tetraión  $\phi(x)$  indica que el fondo  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  (todos los otros campos = 0) alrededor del cual estamos perturbando es también inestable a decaer en algo más (tal vez a un espaciotiempo con  $D=2$  y un fondo dilatónico lineal  $\phi(t,x) \propto x$ , o quizás, a la nada  $\equiv$  ausencia de espaciotiempo).

[Ver p.ej. hep-th/0607037, 0611003, 0405064, 0506077.]

[9:03/04/13]

En resumen, comenzando con ingredientes muy sencillos,

Cuerdas como  
excitaciones  
básicas + Mecánica  
Cuántica + Relatividad  
Especial

hemos llegado a predecir la existencia de, en particular,

el campo de Maxwell  $A_\alpha(x^\lambda) \leftrightarrow$  fotones

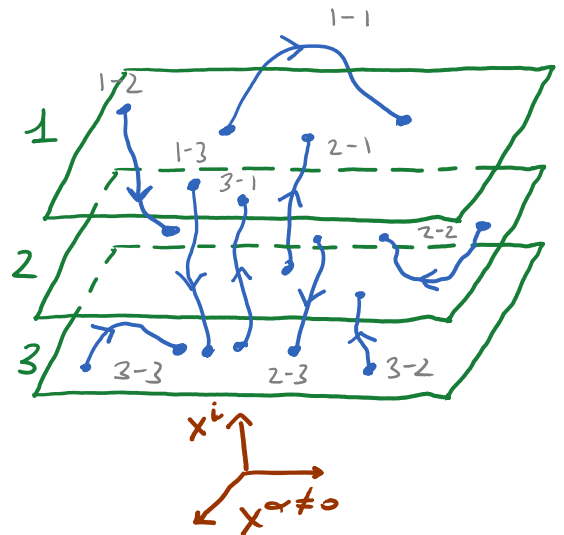
el campo gravitacional  $h_{\mu\nu}(x^\lambda) \leftrightarrow$  gravitones

al menos (hasta ahora) como campos libres (bajo la suposición de que  $a=1$ , necesaria para que  $CCA=CCL$ ).

Esto por supuesto resulta atractivo como un primer paso en la dirección de reproducir propiedades de nuestro universo, aunque es claro que distamos todavía mucho de un modelo realista: tenemos  $D=26$  y taquiones de 2 tipos, y nos falta incorporar interacciones y fermiones.

En esta misma dirección, hay otro rasgo importante de nuestro mundo que ya estamos en posibilidad de reproducir. Para ver esto, consideremos el espectro de excitaciones en presencia de más de una D-brana en la misma dimensionalidad  $p$  y la misma orientación.

En este caso (como vimos en la Tarea 1) hay más de un tipo de cuerdas abiertas, porque el extremo inicial ( $\sigma=0$ ) y final ( $\sigma=\pi$ ) de la cuerda puede estar sobre cualquiera de las D-branas.



En el dibujo, hemos agregado flechas a las cuerdas para indicar su orientación, es decir, el sentido en el cual aumenta la coordenada espacial en la hoja de mundo,  $\sigma$ .

Por supuesto, cuál extremo llamamos  $\sigma=0$  es solo una convención; pero lo importante es que existan 2 opciones que son físicamente distintos (este punto quedará más claro más adelante).

Vemos entonces que, en presencia de  $N$  Dp-branas paralelas, existen  $N^2$  tipos distintos de cuerdas abiertas.

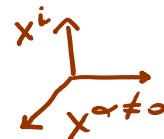
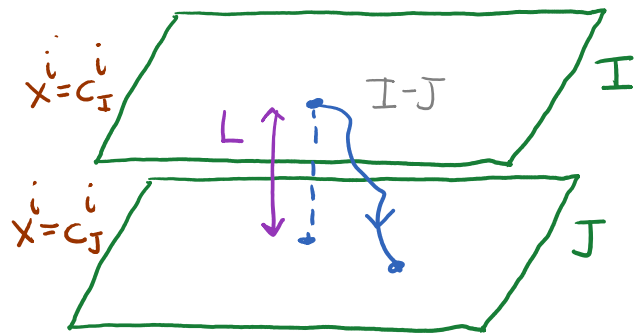
Podemos etiquetarlas  $I-J$ , con  $I, J=1, 2, \dots, N$ , donde  $I$  denota la  $p$ -brana del extremo inicial y  $J$  la final.

Al cuantizarlas, obtendremos naturalmente  $N^2$  copias de cada uno de los mismos estados que teníamos antes,

$$\epsilon_{n_1 \dots n_k} \alpha_{-n_1}^{m_1} \dots |0; k; I, J\rangle,$$

↑↑  
nuevas etiquetas

con la única novedad de que sus masas<sup>2</sup> reciben una contribución



adicional  $\Delta m^2 = \left(\frac{L}{2\pi\alpha'}\right)^2$ , donde  $L \equiv \sqrt{(c_i - c_j)^2}$  es la longitud mínima posible de la cuerda en cuestión.

(Verificaremos este resultado para  $m^2$  en la Tarea 3.)

Los campos asociados se pueden pensar entonces como matrices  $N \times N$   $C_{IJ}^{m_1, \dots, m_N}(x^\alpha)$ . En particular, en el nivel de excitación  $N=1$  obtenemos

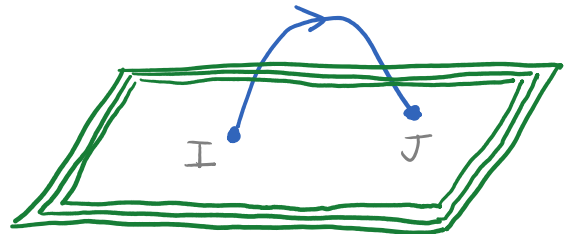
$$A_{IJ}^\alpha(x^\beta), \quad \Phi_{IJ}^i(x^\beta),$$

donde, en general, solo las componentes diagonales ( $I=J$ , asociados a cuerdas que empiezan y terminan en la misma D-brana) son no masivos.

Pero notemos que si colocamos todas las D-branas en el mismo sitio,  $c_i^i = c^i$ , entonces  $L=0 \forall I, J$ , así que las  $N^2$  componentes de  $A^\alpha$  y  $\Phi^i$  se vuelven no masivos.

Los estados correspondientes,

$$E_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0; k; I, J\rangle$$



parecen ser entonces  $N^2$  (en vez de  $N$ ) fotones.

En este caso, tenemos una simetría adicional: dado que los



$N$  D $_p$ -branos son enteramente indistinguibles, podemos hacer un cambio arbitrario de base con respecto a los índices  $I, J$  'rotando' entre sí a los D-branos a través de una transformación unitaria  $U \in U(N)$ :

$$|I\rangle \rightarrow |I'\rangle \equiv U_{I'I} |I\rangle \quad \text{para el extremo inicial}$$

$$|J\rangle \rightarrow |J'\rangle \equiv U_{J'J}^* |J\rangle \quad \text{para el extremo final}$$

(con  $U^*$  en lugar de  $U$  en la segunda expresión, para que esta siga siendo una simetría en el caso interactuante, como veremos más adelante). Es decir, en la nueva base, la D-brana que identificamos como, p.ej.,  $Z'$ , es una combinación lineal de los  $N$  D-branos originales, con coeficientes  $U_{Z'I}$ .

El efecto de esta transformación  $U(N)$  es

$$\varepsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0, k; I, J\rangle \rightarrow U_{I'I} U_{J'J}^* \varepsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0, k; I, J\rangle$$

sobre los estados, o lo que es lo mismo,

$$A^\alpha(x) \rightarrow A'^\alpha(x) = U A^\alpha(x) U^{-1}$$

índice:  $I'J'$        $I'I$   $IJ$   $JJ'$        $\leftarrow = (U^*)^T = U^\dagger$

sobre el campo matricial (y similarmente para  $\Phi^i$ , etc.)

Al cambiar esta simetría global con la invariancia ya conocida  $E_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0; k; I, J\rangle \simeq (E_\alpha + \lambda k_\alpha) \alpha_{-1}^\alpha |0; k; I, J\rangle$ , tenemos entonces la simetría local bajo

$$A_\alpha(x) \rightarrow U(x) [A_\alpha(x) + i\partial_\alpha] U^{-1}(x),$$

$\uparrow$   
 $\exp(i\lambda(x))$ , con  $\lambda(x)$  una matriz hermitiana  $N \times N$

$$\Phi^i(x) \rightarrow U(x) \Phi^i(x) U^{-1}(x),$$

$$C^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) \rightarrow U(x) C^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) U^{-1}(x)$$

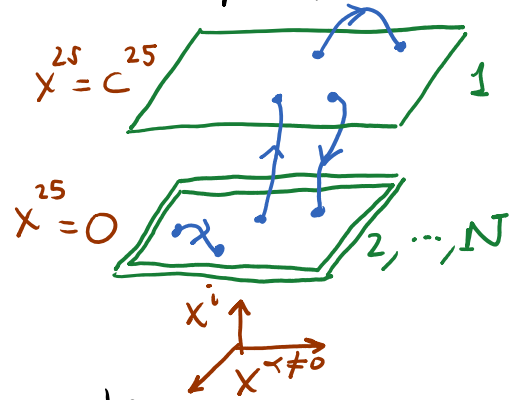
$\uparrow$   
 $s=0, 2, 3, \dots$

Es decir, la física de un banchito de  $N$  Dp-branas es descrita por una teoría de norma no abeliana (un infinito campo), con grupo de norma  $U(N)$ .

Hemos verificado esto en el caso donde las D-branas son todas coincidentes; pero ahora podemos entender ya por qué al separarlas se tiene menor simetría. Si empezamos con las  $N$  D-branas en (p.ej.)  $x^i = 0$ , para separar a,

digamos, la número 1, a lo largo de, p.ej., la dirección  $x^{25}$ , debemos encender un valor esperado al campo que describe su correspondiente coordenada colectiva (p.243),

$$\langle \Phi_{11}^{25}(x) \rangle = \frac{c^{25}}{2\pi\alpha'}$$



Del dibujo vemos que esto hace que surmente la masa de los componentes  $I1$  y  $1J$  de todos los campos. En particular, dichos componentes del campo de norma dejan de ser no masivos y adquieren una masa

$$m = \frac{|c^{25}|}{2\pi\alpha'} = |\langle \Phi^{25} \rangle|$$

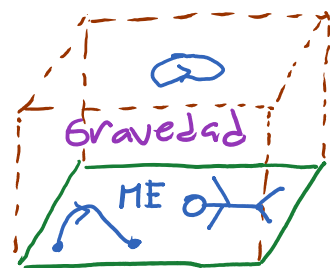
Esto es ni más ni menos que una implementación geométrica del mecanismo de Higgs! Estos bosones de norma

adquieren masa porque es justamente bajo  $\Lambda_{I1}^{\alpha}$  y  $\Lambda_{1J}^{\alpha}$  que está cargado el campo escalar  $\Phi_{11}^{25}$  cuyo valor esperado encendimos (cosa que, de nuevo, quedará clara al estudiar las interacciones). Y como consecuencia de estas masas, la simetría disminuye (se rompe espontáneamente)

$$U(N) \rightarrow U(N-1) \times U(1).$$

Separando más branas podemos reducir aún más la simetría local, a  $U(n_1) \times U(n_2) \times \dots$  si dejamos bunches de  $n_1, n_2, \dots$  branas coincidentes (con  $n_1 + n_2 + \dots = N$ ), y a solo  $U(1)^N$  en el caso más genérico.

Con esto vislumbramos ya cómo es que en la teoría de cuerdas podríamos aspirar a obtener todas las interacciones del Modelo Estándar + Gravedad. Y entendemos también la motivación de la propuesta de mundo branas (p.42), donde los campos del Modelo Estándar viven solo dentro de una brana.



Hasta ahora hemos visto que la eliminación de los estados con norma negativa en la cuantización covariante antigua requiere que  $D \leq 26$ , y el acuerdo con la cuantización en el caso de luz exige que  $D = 26$  (que es a su vez la condición para que la CCL resulte en un espectro covariante bajo Lorentz).

En última instancia, la restricción a  $D=26$  se debe a una sutileza: para  $D \neq 26$  las transformaciones de Weyl NO son una simetría del sistema a nivel cuántico — existe una anomalía. Esto hace que  $S_p[X, g]$  tenga  $D-1$  en lugar de  $D-2$  grados de libertad, y no empareja por tanto con la acción original para la cuerda,  $S_{NG}[X]$ .

En más detalle, si bien la acción

$$S_p[X, g] = \frac{1}{4\pi\alpha_c^2} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

es invariante bajo  $g_{ab}(\sigma) \rightarrow \Omega(\sigma) g_{ab}(\sigma)$ , las

medidas de integración  $D_g X^\mu(\sigma) \propto \prod_\sigma dX^\mu_\sigma$  y

$D_g g_{ab} \propto \prod_\sigma dg_{ab, \sigma}$ , que para respetar la invariancia

bajo difeo en la hoja de mundo se definen (como en las pp. 98-100) a partir de las normas

$$\|\delta X\|^2 \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g} \delta X^\mu \delta X^\nu \eta_{\mu\nu},$$

$$\|\delta g\|^2 \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} g^{cd} \delta g_{ac} \delta g_{bd},$$

NO son invariantes de Weyl.

(En otras palabras: el parámetro de corte UV invariante bajo difeo necesariamente viola Weyl.)

Para entender mejor este punto, analizaremos ahora la integral funcional en más detalle.

El punto de partida es que, de manera similar a lo que vimos en el caso de la partícula (p.101),

$$\int \mathcal{D}_g g_{ab}(\sigma) \mathcal{D}_g X^\mu(\sigma) e^{-S_p[X, g]}$$

incluye cada trayectoria física un número infinito de veces,

$$(X^\mu(\sigma), g_{ab}(\sigma)) \xleftrightarrow{\text{Dif} \times \text{Weyl}} (\underline{X}^\mu(\sigma), \underline{g}_{ab}(\sigma)),$$

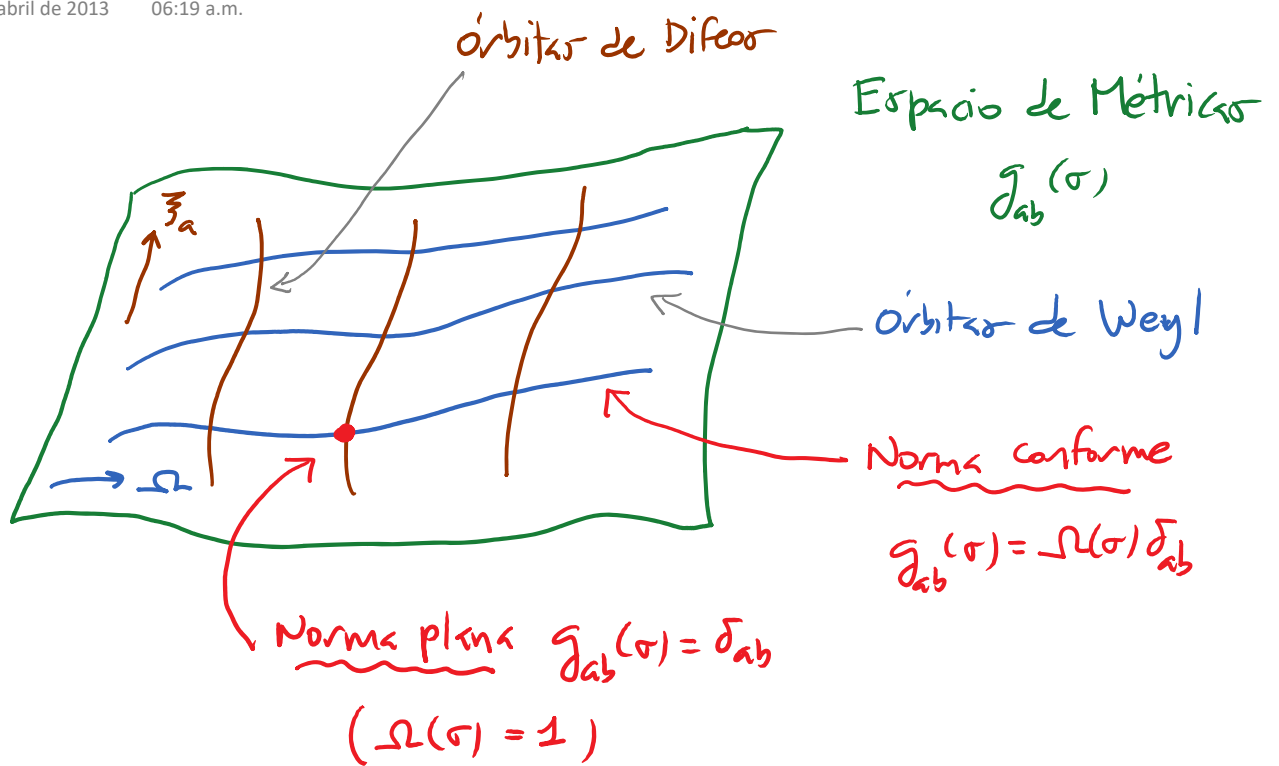
y no está por tanto bien definida.

Debemos eliminar la redundancia — fijar la norma. Nos interesa en realidad

$$\mathcal{Z} \equiv \int \frac{\mathcal{D}_g g_{ab}(\sigma) \mathcal{D}_g X^\mu(\sigma)}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} e^{-S_p[X, g]},$$

donde pretendemos fijar (localmente) la norma plana

$g_{ab}(\sigma) = \delta_{ab}$ . Esquemáticamente:



Heitor resaltado que  $g_{ab} \rightarrow \Omega g_{ab}$  pudiera no ser en verdad una simetría dentro de la integral funcional, así que primero eliminaremos la redundancia por difeos, fijando la normas conforme ("conformalmente plana")

$$g_{ab}(\sigma) = \Omega(\sigma) \delta_{ab} \equiv \check{g}_{ab}(\sigma) \iff \check{g}_{zz} = 0 = \check{g}_{\bar{z}\bar{z}}, \quad \check{g}_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \Omega(z, \bar{z})$$

y después nos preguntaremos si el resultado es invariante de Weyl.

El primer paso es entonces reescribir

$$Z = \int \frac{D\Omega(\sigma) D\tilde{\xi}_a(\sigma) D\tilde{X}^M(\sigma)}{\text{Weyl} \times \text{Dif}} \times (?) \times e^{-S_p[X, \tilde{g}]}$$

$\uparrow$  Jacobiano que debemos determinar

Para esto, utilizamos el método de Faddeev-Popov:  
 empleamos la generalización  $\infty$ -dimensional de la identidad

$$1 = \int \underbrace{\prod_{i=1}^n d\xi_i}_{\prod_{j=1}^n dg_j} \det\left(\frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi_i}\right) \delta^{(n)}(g_j(\xi) - \check{g}_j)$$

con  $i \rightarrow (z, \bar{z})$ ,

$$1 = \int D\tilde{\xi}_z(z, \bar{z}) D\tilde{\xi}_{\bar{z}}(z, \bar{z}) \det\left(\frac{\delta g_{zz}^{\tilde{\xi}}}{\delta \tilde{\xi}_z}\right) \det\left(\frac{\delta g_{\bar{z}\bar{z}}^{\tilde{\xi}}}{\delta \tilde{\xi}_{\bar{z}}}\right)$$

$$\times \delta^{(\infty)}\left(g_{zz}^{\tilde{\xi}}(z, \bar{z}) - \check{g}_{zz}(z, \bar{z})\right) \delta^{(\infty)}\left(g_{\bar{z}\bar{z}}^{\tilde{\xi}}(z, \bar{z}) - \check{g}_{\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z})\right)$$

condiciones  
 de normas conforme ( $g_{z\bar{z}}^{\tilde{\xi}} = \frac{\Omega}{2}$  queda libre)




$$\text{Usando } \det \left( \frac{\delta g_{z\bar{z}}^{\zeta}}{\delta \bar{\zeta}_z} \right) \Big|_{g=\check{g}} = \det \left( \frac{\delta}{\delta \bar{\zeta}_z} (g_{z\bar{z}} + 2\nabla_z \check{\zeta}_z) \right) \Big|_{g=\check{g}}$$

$$= \det(2\nabla_z) \Big|_{g=\check{g}} = \det(2\check{\nabla}_z)$$

$$\text{y } \det \left( \frac{\delta g_{z\bar{z}}^{\zeta}}{\delta \check{\zeta}_z} \right) \Big|_{g=\check{g}} = \det(2\check{\nabla}_{\bar{z}}), \text{ esto es}$$

$$1 = \int \mathcal{D}\check{\zeta}_z \mathcal{D}\check{\zeta}_{\bar{z}} \det(2\check{\nabla}_z) \det(2\check{\nabla}_{\bar{z}}) \delta(g_{z\bar{z}}^{\zeta}) \delta(g_{\bar{z}\bar{z}}^{\zeta}).$$


 podemos ignorar: cte. de normalización

Insertando esta expresión en

$$\mathcal{Z} = \int \frac{\mathcal{D}g_{ab}^{\zeta}(\sigma) \mathcal{D}X_{\zeta}^{\mu}(\sigma)}{\text{Weyl} \times \text{Dif}} e^{-S_p[X_{\zeta}, g^{\zeta}]}$$

(que hemos reescrito usando la invariancia bajo

$$(X, g) \rightarrow (X_{\zeta}, g^{\zeta}), \text{ tenemos}$$

$$Z = \int \frac{D\bar{\xi}_z D\xi_{\bar{z}}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} \overbrace{Dg_{ab}^z} \quad Dg_{zz}^z \quad Dg_{\bar{z}\bar{z}}^z \quad Dg_{z\bar{z}}^z \quad DX_{\bar{z}}^w$$

$$\times \delta(g_{zz}^z) \delta(g_{\bar{z}\bar{z}}^z) \text{Det} \check{V}_z \text{Det} \check{V}_{\bar{z}} e^{-S_p[X_{\bar{z}}, g_{\bar{z}}^z]}.$$

Si ahora renombramos las variables de integración mudas

$$(X_{\bar{z}}, g_{\bar{z}}^z) \rightarrow (X, g),$$

veremos que

$$Z = \int \frac{D\bar{\xi}_z D\xi_{\bar{z}}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} \overbrace{D\Omega} \quad Dg_{zz} \quad Dg_{\bar{z}\bar{z}} \quad Dg_{z\bar{z}} \quad DX^w$$

$$\times \delta(g_{zz}) \delta(g_{\bar{z}\bar{z}}) \text{Det} \check{V}_z \text{Det} \check{V}_{\bar{z}} e^{-S_p[X, g]}$$

$$= \int \frac{D\bar{\xi}_z D\xi_{\bar{z}}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} \underbrace{D\Omega \quad DX^w \quad \text{Det} \check{V}_z \quad \text{Det} \check{V}_{\bar{z}} \quad e^{-S_p[X, g]}}_{\text{Nada aquí depende ya de } \bar{\xi}_a},$$

es decir,

$$Z = \int \frac{D\Omega}{\text{Weyl}} \underbrace{\det \check{V}_z \det \check{V}_{\bar{z}}}_{\equiv \Delta_{\text{FP}}(\check{g})} D X^m e^{-S_p[X, \check{g}]}$$

determinante de Faddeev-Popov  
(Jacobiano que buscábamos)

Habiendo decidido esto, la pregunta clave ahora es si

$$Z[\check{g}_{ab} = \Omega \delta_{ab}] \equiv \int D\check{g} X^m \Delta_{\text{FP}}(\check{g}) e^{-S_p[X, \check{g}]}$$

es o no independiente de  $\Omega$ , porque si lo es, tendríamos finalmente

$$Z = \int \frac{D\Omega}{\text{Weyl}} \underbrace{Z[\Omega \delta_{ab}]}_{Z[\delta_{ab}]} = Z[\delta_{ab}]$$

↑ Normas  
planas

Para responder esta pregunta, conviene reexpresar a  $\Delta_{\text{FP}}(\check{g})$  en términos de campos auxiliares  $b_{ab}$  y  $c^a$  conocidos como fantasmas de Faddeev-Popov:

$$\text{Det } \check{V}_z = \int \mathcal{D}b_{\bar{z}\bar{z}} \mathcal{D}c^{\bar{z}} \exp \left[ -\frac{1}{2\pi} \int d^2z b_{\bar{z}\bar{z}} \check{V}_z c^{\bar{z}} \right],$$

$$\text{det } \check{V}_{\bar{z}} = \int \mathcal{D}b_{z\bar{z}} \mathcal{D}c^z \exp \left[ -\frac{1}{2\pi} \int d^2z b_{z\bar{z}} \check{V}_{\bar{z}} c^z \right],$$

donde

← vector, como  $\xi^a$  →

$\left\{ \begin{array}{l} \text{el fantasma } c^a(\sigma) \text{ es un campo vectorial anticommutativo} \\ \text{el antifantasma } b_{ab}(\sigma) \text{ es un campo tensorial simétrico} \\ \text{sin traza (} b_{z\bar{z}}=0 \text{) anticommutativo.} \end{array} \right.$

(Notar que este es una acepción de "fantasma" muy distinta a la que habíamos usado antes: éstos son fantasmas amistosos, que ayudan en lugar de ajustar. Se les utiliza también al cuantizar Yang-Mills gvariantemente.)

~~Recordemos que para funciones ordinarias, conmutativas, tenemos (p.108)~~

~~$$\int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \int d^2\sigma \varphi \Delta_\sigma \varphi} = \frac{1}{\sqrt{\text{Det } \Delta_\sigma}}$$~~

~~en paralelo con la integral gaussiana usual~~

~~$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2} ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$~~

Este es el tipo de funciones que usamos para cuantizar por integral de trayectorias a campos bosónicos, que en el formalismo canónico obedecen relaciones de conmutación (como el campo de Klein-Gordon,  $\varphi^4$ , Maxwell, Yang-Mills, Higgs, los  $X^\mu$  de la partícula o la cuerda, etc.).

Pero para campos fermiónicos, que canónicamente obedecen relaciones de anticomutación (como el campo de Dirac,  $b_{ab}$  y  $C^{\hat{a}}$ ) necesitamos usar en la integral funcional números anticomutativos. Estos se definen como un conjunto de objetos  $\theta_i$   $i=1, \dots, n$ , que son elementos de un espacio vectorial

$$c_0 + c_1 \theta_1 + \dots + c_n \theta_n \quad c_i \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C}$$

$\uparrow$   
c:1

y pueden multiplicarse formalmente tomando en cuenta la propiedad básica

$$\{\theta_i, \theta_j\} \equiv \theta_i \theta_j + \theta_j \theta_i = 0 \quad \forall i, j \quad (\Rightarrow \theta_i^2 = 0).$$

(Esto define lo que los matemáticos llaman un álgebra de Grassmann. Ver p.ej. mis apuntes de Campos II.)

La función más general de 1 número anticommutativo  $\theta$  es entonces  $a + b\theta$ .

La definición natural de "integral", conocida como integral de Berezin, es

$$\int d\theta (a + b\theta) = b \quad (\text{coincide con derivada } \frac{d}{d\theta}!).$$

El análogo de una integral "gaussiana" es entonces

$$\int d\theta_1 d\theta_2 e^{-\theta_1 c \theta_2} = \int d\theta_1 d\theta_2 (1 - \theta_1 c \theta_2) = c.$$

exponente aparece en el numerador  $\uparrow$   
en vez de denominador

Así que, dador 2 campos anticommutativos

$$\psi(\sigma) \equiv \sum_i \varphi_i(\sigma) \psi_i, \quad \chi(\sigma) \equiv \sum_i \varphi_i(\sigma) \chi_i$$

base ortogonal para funciones ordinarias,

$$\text{con } \Delta_\sigma \varphi_i(\sigma) = \lambda_i \varphi_i(\sigma), \quad \int d^2\sigma \varphi_i(\sigma) \varphi_j(\sigma) = \delta_{ij}$$

$\uparrow$  operador diferencial que figura en acción de  $\psi, \chi$

tenemos

$$\int D\psi(\sigma) D\chi(\sigma) e^{-\int d^2\sigma \chi \Delta_\sigma \psi}$$

$$= \int \prod_k (d\chi_k d\psi_k) e^{-\sum_{i,j} \chi_i \psi_j \underbrace{\int d^2\sigma \varphi_i \Delta_\sigma \varphi_j}_{\lambda_j \int d^2\sigma \varphi_i \varphi_j}} e^{-\sum_{i,j} \chi_i \psi_j \underbrace{\int d^2\sigma \varphi_i \Delta_\sigma \varphi_j}_{\delta_{ij}}}$$

$$= \int \prod_k (d\chi_k d\psi_k) e^{-\sum_i \lambda_i \chi_i \psi_i}$$

salvo  
posiblemente  
un signo

$$= \prod_i \lambda_i = \det \Delta_\sigma,$$

y esta es justo la propiedad que usamos al definir a los fantasmas de Faddeev-Popov en la p. 262.

(Nota que  $c^a$  y  $b_{ab}$  deben ser fermiónicos a pesar de tener espín entero en la hoja de mundo. Estos campos violan entonces, por construcción, el teorema de espín-estadística, lo cual no nos preocupa porque son solo campos auxiliares.)

Regresando a nuestro cálculo, hemos aprendido que el efecto neto de fijar la norma con respecto a difeos dentro de la integral funcional es agregar a nuestro sistema los 2 campos auxiliares  $c^a$  y  $b_{ab}$ , con acción

$$S_F[b, c, g] \equiv \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} b_{ca} \nabla_b c^c,$$

de tal forma que ahora tenemos

$$Z[\gamma] = \int D_\gamma X^\mu D_\gamma b_{ab} D_\gamma c^a e^{-S_p[X, \gamma] - S_F[b, c, \gamma]}.$$

Usando  $\gamma_{ab} = \Omega \delta_{ab}$  la acción de los fantasmas toma la forma que anunciamos en la p. 262,

$$S_F[b, c, \gamma] = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{zz} \overset{\vee}{\nabla}_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \overset{\vee}{\nabla}_z c^{\bar{z}}).$$

En estas normas conforme, los únicos símbolos de Christoffel que no se anulan son

$$\Gamma_{zz}^z = \frac{\partial_z \Omega}{\Omega} \quad \text{y} \quad \Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} = \frac{\partial_{\bar{z}} \Omega}{\Omega},$$

así que



$$\nabla_{\bar{z}} c^z = \partial_{\bar{z}} c^z \quad \text{y} \quad \nabla_z c^{\bar{z}} = \partial_z c^{\bar{z}} .$$

Usando la notación abreviada

$$c \equiv c^z, \quad b \equiv b_{zz}, \quad \tilde{c} \equiv c^{\bar{z}}, \quad \tilde{b} \equiv b_{\bar{z}\bar{z}},$$

podemos escribir entonces

$$S_f[b, c, \tilde{b}, \tilde{c}, g] = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b \bar{\partial} c + \tilde{b} \partial \tilde{c}) .$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\bar{\partial} c = 0 = \bar{\partial} b, \quad \partial \tilde{c} = 0 = \partial \tilde{b},$$

así que  $c, b$  son analíticas y  $\tilde{c}, \tilde{b}$  anti-analíticas.

$\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c$  y  $\frac{1}{2\pi} \int d^2z \tilde{b} \partial \tilde{c}$  son 2 nuevos teóricos conformes, invariante bajo  $z \rightarrow z'(z)$  con

$$b(z) \rightarrow b'(z') = \left( \frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{-2} b(z) \quad \text{operador primario con } h_b = 2 \quad (\tilde{h}_b = 0),$$

$$c(z) \rightarrow c'(z') = \left( \frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{+1} c(z) \quad \text{primario con } h_c = -1 \quad (\tilde{h}_c = 0),$$

$$\tilde{b}(\bar{z}) \rightarrow \tilde{b}'(\bar{z}') = \left( \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{-2} \tilde{b}(\bar{z}) \quad \text{primario con } \tilde{h}_{\tilde{b}} = 2 \quad (h_{\tilde{b}} = 0),$$

$$\tilde{c}(\bar{z}) \rightarrow \tilde{c}'(\bar{z}') = \left( \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{+1} \tilde{c}(\bar{z}) \quad \text{primario con } \tilde{h}_{\tilde{c}} = -1 \quad (h_{\tilde{c}} = 0).$$

(Esto equivale a decir que  $b_{ab}, c^a$  son neutros bajo transformaciones de Weyl, pero debemos notar que entonces  $b^a_b, b^{ab}, c_a$  no lo son.)

Estos campos claramente son libres. Dado que el término "cuadrático" en la acción conecta a  $b$  únicamente con  $c$ , y a  $\tilde{b}$  únicamente con  $\tilde{c}$ , esperamos que las únicas funciones de 2 puntos distintas de cero sean  $\langle b(z) c(z') \rangle$  y  $\langle \tilde{b}(\tilde{z}) \tilde{c}(\tilde{z}') \rangle$  (esto es análogo al campo de Dirac, donde  $S = \int d^D x \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi$  y por tanto  $\langle \bar{\Psi}(x)\Psi(x') \rangle \neq 0$ ).

Para calcular estos propagadores, podemos proceder en analogía con lo que hicimos para  $X^\mu$  en las pp. 192-3, notando que

$$0 = \int \mathcal{D}b(z) \mathcal{D}c(z) \overset{\text{derivada fermiónica}}{\frac{\delta}{\delta b(z_1)}} \left[ e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c} b(z_2) \right]$$

$$= \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c \left[ -\frac{1}{2\pi} \bar{\partial} c(z_1) b(z_2) + \delta^{(2)}(z_1 - z_2) \right] e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c},$$

es decir,

$$\bar{\partial}_1 \langle c(z_1) b(z_2) \rangle = 2\pi \delta^{(1)}(z_1 - z_2) \quad \leftarrow \equiv \text{integral funcional apropiada}$$

Como de costumbre, el propagador es la función de Green del operador diferencial correspondiente.

Sabiendo ya (p.194) que

$$\bar{\partial} \ln |z|^2 = \partial \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) = \bar{\partial} \left( \frac{1}{z} \right) = 2\pi \delta^{(2)}(z),$$

conocemos la solución a la anterior ecuación diferencial:

$$\langle c(z_1) b(z_2) \rangle = \frac{1}{z_1 - z_2} \quad \longleftrightarrow \quad \langle b(z_1) c(z_2) \rangle = \frac{1}{z_1 - z_2}.$$

↑ recordar que estos campos son anticonmutativos!

De manera similar, podemos mostrar que

$$\langle c(z_1) c(z_2) \rangle = 0, \quad \langle b(z_1) b(z_2) \rangle = 0,$$

y las 3 expresiones análogas para  $\tilde{c}, \tilde{b}$ .

Usando este propagador, definiremos el orden normal conforme como hicimos para  $X^M$  en la p.195:

$$: b(z_1) c(z_2) : \equiv b(z_1) c(z_2) - \frac{1}{z_1 - z_2}$$

(teniendo cuidado con los signos por anticomutatividad al hacer contracciones en productos de 3 o más campos).

Este producto es analítico ( $\bar{\partial} : \dots : = 0$ ) dentro de correladores, y permite por tanto expansiones de Taylor para obtener FPOs.

Desarrollemos los campos en modo de Laurent con la convención usual (p. 222)

$$b(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+2}} \quad \leftrightarrow \quad b_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} b(z) = b_{-n}^{\dagger}$$

$\uparrow h_b$

$$c(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n-1}} \quad \leftrightarrow \quad c_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n-2} c(z) = c_{-n}^{\dagger}$$

$\uparrow h_c$

(y análogamente para  $\tilde{b}(\bar{z}), \tilde{c}(\bar{z})$ ).

En el caso de campos anticomutativos, la definición natural de orden temporal/radial incluye un  $-1$  adicional (como en el campo de Dirac):

$$R(\hat{b}(z_1) \hat{c}(z_2)) = \begin{cases} \hat{b}(z_1) \hat{c}(z_2) & \text{si } |z_1| > |z_2| \\ -\hat{c}(z_2) \hat{b}(z_1) & \text{si } |z_1| < |z_2| \end{cases},$$

$\uparrow$

y se puede mostrar que es justamente esto lo que calcula la integral de trayectorias fermiónicas con inserciones.

Este signo menor hace que la fórmula que obtuvimos en la p.203 resulte en el anticommutador en lugar del conmutador de cargas conservadas,

$$\{\hat{Q}_i, \hat{Q}_j\} = \oint \frac{dz_j}{2\pi i} \operatorname{Res}_{z_i \rightarrow z_j} J_i(z_i) J_j(z_j) .$$

Con esta fórmula podemos calcular

$$\{b_m, c_n\} = \oint \frac{dz_2}{2\pi i} \operatorname{Res}_{z_1 \rightarrow z_2} \underbrace{z_1^{m+1} b(z_1) z_2^{n-2} c(z_2)}_{z_1^{m+1} z_2^{n-2} \frac{1}{z_1 - z_2} + \dots}$$

$\uparrow$   
 $z_2^{m+1} + \dots$

$$= \oint \frac{dz_2}{2\pi i} z_2^{m+n-1} ,$$

es decir,

$$\boxed{\{b_m, c_n\} = \delta_{m,-n} .}$$

Podemos mostrar similarmente que

$$\{b_m, b_n\} = 0 = \{c_m, c_n\}$$

(y los 3 anticonmutadores análogos para  $\tilde{b}_m, \tilde{c}_n$ ).

Así que, como era de esperarse, nuestros campos anticonmutativos libres equivalen a una colección infinita de osciladores armónicos fermiónicos.

Considerando a  $b_{-n}, c_{-n}$  ( $n > 0$ ) como operadores de creación, es natural definir el estado base del sistema como aquel que satisface

$$b_n |vac\rangle = 0, \quad c_n |vac\rangle = 0 \quad \forall n > 0.$$

Pero, por la existencia de los modos cero  $b_0$  y  $c_0$ , existen de hecho 2 estados así:

$$|\downarrow\rangle \text{ tal que } b_0 |\downarrow\rangle = 0, \quad b_{n>0} |\downarrow\rangle = 0 = c_{n>0} |\downarrow\rangle$$

y

$$|\uparrow\rangle \text{ tal que } c_0 |\uparrow\rangle = 0, \quad b_{n>0} |\uparrow\rangle = 0 = c_{n>0} |\uparrow\rangle.$$

(El enunciado análogo en el caso bosónico es que para los campos  $X^\mu$  tenemos infinitos estados base  $|0; k\rangle$ .)

Usando  $b_0^2 = 0$ ,  $c_0^2 = 0$ , nos queda claro que estos 2 estados están conectados por

$$|\uparrow\rangle = c_0 |\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\rangle = b_0 |\uparrow\rangle.$$

Será conveniente para nosotros considerar a  $b_0$  como el operador de aniquilación (y  $c_0$  de creación). Nuestro espacio de Hilbert se construye entonces actuando sobre  $|\downarrow\rangle$  con los operadores de creación  $c_0, c_{-n}, b_{-n}$  (máximo 1 vez con cada uno).

El tensor de energía-momento para los fantasmas se puede determinar a partir de la definición usual

$$T_{ab}^f \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_f}{\delta g^{ab}},$$

o como la corriente de Noether asociada a las transformaciones  $\sigma^a \rightarrow \sigma^a + \epsilon^a$ . En coordenadas complejas se encuentra que

$$T_{zz}^f \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}^f(z) = -2 : b \partial c : + : c \partial b : ,$$

con lo cual podemos calcular la EPO

$$\begin{aligned}
 T(z)T(z') &= 4 : b \partial_c(z) : : b \partial_c(z') : - 4 : b \partial_c(z) : : c \partial_b(z') : \\
 &\quad + : c \partial_b(z) : : c \partial_b(z') : \\
 &= \underbrace{4 b \partial_c b \partial_c}_{\text{carga}} - \underbrace{4 b \partial_c c \partial_b}_{\text{carga}} + \underbrace{c \partial_b c \partial_b}_{\text{carga}} + \text{términos en 1 ó 0} \\
 &\quad \underbrace{\partial\left(\frac{1}{z-z'}\right)}_{-\frac{1}{(z-z')^2}} \underbrace{\partial'\left(\frac{1}{z-z'}\right)}_{+\frac{1}{(z-z')^2}} - \underbrace{\left(\frac{1}{z-z'}\right) \partial \partial'\left(\frac{1}{z-z'}\right)}_{-\frac{2}{(z-z')^3}} \underbrace{\partial\left(\frac{1}{z-z'}\right) \partial'\left(\frac{1}{z-z'}\right)}_{\text{contracciones}} \\
 &= \frac{-4}{(z-z')^4} + \frac{-8}{(z-z')^4} + \frac{-1}{(z-z')^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(z-z')^2}\right) \\
 &= \frac{-13}{(z-z')^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(z-z')^2}\right).
 \end{aligned}$$

Recordando la expresión general para cualquier teoría de campo conforme (p. 218)

$$T(z)T(z') = \frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{2}{(z-z')^2} T(z) + \frac{1}{(z-z')} \partial T(z') + \dots,$$

← carga central
← h para T
← transformación bajo transacciones (L<sub>-1</sub>)

aprendamos entonces que b, c tienen **carga central**

$$c^{b,c} = -26 \quad (\text{y } \tilde{c}^{b,c} = 0).$$



Similármemente,  $\tilde{b}, \tilde{c}$  tienen  $\tilde{c}^{\tilde{b}, \tilde{c}} = -26$  (y  $c^{\tilde{b}, \tilde{c}} = 0$ ).

Considerando a ambas teorías a la vez, escribiremos

$$c^f = -26, \quad \tilde{c}^f = -26$$

[10:09/04/13]

Se puede mostrar que en teorías de campos conformes donde no existen estados con norma negativa (es decir, fantasmas malos) se tiene necesariamente  $c > 0$  (de hecho,  $c \geq 1$  y  $h \geq 0$ , salvo por las opciones discretas  $c = 1 - 6/(r(r+1))$  con  $r=3, 4, \dots$  y ciertos valores específicos de  $h$ ). [Ver p.ej. hep-th/9108028 sección 4.3, Polchinski 2.9 y 15.1, o Di Francesco et al. 7.2.]

Usando  $b_n^+ = b_{-n}$  y  $c_n^+ = c_{-n}$ , que, como se puede verificar, implican  $|\downarrow\rangle^+ = \langle \uparrow |$  (es decir,  $\langle \uparrow | \downarrow \rangle = 1$ ,  $\langle \downarrow | \downarrow \rangle = 0$ ), es fácil ver que la teoría  $S_f$  tiene en efecto estados con norma negativa, como p.ej.  $b_{-n} c_{-n} |\downarrow\rangle$  (ver Tarea 3).

El que  $b, c$  (y  $\tilde{b}, \tilde{c}$ ) tengan  $c < 0$  ( $\tilde{c} < 0$ ) y por tanto

constituyen "un número negativo de grados de libertad" va de la mano con su papel como campos auxiliares, que cancelan grados de libertad no físicos en  $X^m$  -p.ej.  $X^0, X^1$ . (Se tiene una situación análoga al cuantizar Yang-Mills.)

En términos de la expansión en modos  $b_n, c_n$ ,

$$\begin{aligned} T^f(z) &= -2 : b \partial c(z) : + : c \partial b(z) : \\ &= -2 : \sum_{n,k} \frac{b_n}{z^{n+2}} \frac{(1-k)c_k}{z^k} : + : \sum_{n,k} \frac{c_k}{z^{k-1}} \frac{(-n-2)b_n}{z^{n+3}} : \\ &\quad \underbrace{\hspace{15em}} \\ &\quad - : \sum_{n,k} \frac{(-n-2)b_n}{z^{n+3}} \frac{c_k}{z^{k-1}} : \\ &= \sum_{n,k} \frac{(2k+n)}{z^{n+k+2}} : b_n c_k : , \end{aligned}$$

así que los modos de Virasoro son

$$L_m^f = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} T^f(z) = \sum_{n,k} (2k+n) : b_n c_k : \underbrace{\oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{m+1}}{z^{n+k+2}}}_{\delta_{m,n+k}} ,$$

es decir,

$$L_m^f = \sum_n (2m-n) : b_n c_{m-n} :$$

Por conviene reescribir esto usando el orden normal de creación aniquilación,

$\circ \circ \equiv$  poner  $b_{-n}, c_{-n}, c_0$  a la izquierda de  $c_n, b_n, b_0$ .  
(con factores de  $-1$  por anti conmutación)

En este caso  $::$  y  $\circ \circ$  No coinciden; pero por la forma de  $L_m^f$  vemos que esto solo afecta el modo  $m=0$ , así que

$$L_m^f = \sum_n (2m-n) \circ b_n c_{m-n} \circ + A^f \delta_{m,0}$$

↖ constante de orden

Como hicimos para  $X^w$ , podemos determinar  $A^f$  estableciendo directamente la relación entre  $:bc:$  y  $\circ bc \circ$ , o utilizando el álgebra de Virasoro

$$[L_m^f, L_n^f] = (m-n) L_{m+n}^f + \frac{c^f}{12} (m^3 - m) \delta_{m,-n}$$

para notar que

$$\begin{aligned}
 A^f | \downarrow \rangle &= L_0^f | \downarrow \rangle = \frac{1}{2} (L_1^f L_{-1}^f - L_{-1}^f L_1^f) | \downarrow \rangle \\
 &= \frac{1}{2} (2b_0 c_1 + \dots) (-b_{-1} c_0 + \dots) | \downarrow \rangle \\
 &\quad \underbrace{-c_1 b_{-1} b_0 c_0}_{\langle b_0, c_0 \rangle = 1} \\
 &\quad \underbrace{-\langle c_1, b_{-1} \rangle = -1} \\
 &= - | \downarrow \rangle,
 \end{aligned}$$

es decir,  $A^f = -1$ . ← Será importante más adelante

Regresemos ahora al tema de la anomalía de Weyl:  
 deseamos saber si

$$\begin{aligned}
 Z[\check{g}_{ab}] &\equiv \int (Db Dc D\tilde{b} D\tilde{c} DX^m)_{\check{g}} e^{-S_p[X, \check{g}] - S_f[b, c, \tilde{b}, \tilde{c}, \check{g}]} \\
 &\equiv \langle 1 \rangle_{\check{g}} \quad \text{es o no invariante de Weyl.}
 \end{aligned}$$

Por definición, bajo  $\check{g}_{ab} \rightarrow \check{g}_{ab} + \delta g_{ab}$  tenemos

$$\delta Z = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\gamma} \langle T^{ab} \rangle_{\gamma} \delta g_{ab} + \mathcal{O}(\delta g^2) .$$

↑ tensor de energía-momento cuántico:  
incluye posible contribución de la  
medida en integral funcional

Como siempre, la invariancia bajo difeos  $\delta g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a$   
implica la conservación de este tensor,

$$\langle \nabla_a T^{ab} \rangle_{\gamma} = 0 .$$

Consideremos ahora una transformación de Weyl infinitesimal

$$\gamma_{ab} \rightarrow e^{\delta\omega(\sigma)} \gamma_{ab} , \text{ es decir, } \delta g_{ab} = \delta\omega \gamma_{ab} .$$

En este caso,  $\langle T^{ab} \rangle_{\gamma} \delta g_{ab} = \langle T^a_a \rangle_{\gamma} \delta\omega$ ,  
así que preguntarnos acerca de la invariancia de Weyl  
básicamente equivale a verificar si  $\langle T^a_a \rangle_{\gamma} = 0$  (y  
condiciones similares a orden más alto en  $\delta\omega$ ).

Examinaremos ahora esto en más detalle partiendo de  
la norma plana  $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$ :

$$\delta Z = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \delta\omega(\sigma) \langle T^a_a(\sigma) \rangle_\sigma$$

porque en normas planas  
 si teníamos invariancia  
 conforme  $\leftrightarrow$  Weyl  
 (No sucede para  $\tilde{g}_{ab} \neq \tilde{g}_{ab}$ )

$$+ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int d^2\sigma d^2\sigma' \delta\omega(\sigma) \delta\omega(\sigma') \langle T^a_a(\sigma) T^b_b(\sigma') \rangle_\sigma + \dots$$

o, en coordenadas complejas,

$$\delta Z = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{2} 4\right)^2 \int d^2z d^2z' \delta\omega(z, \bar{z}) \delta\omega(z', \bar{z}') \langle T_{z\bar{z}} T_{z'\bar{z}'} \rangle_\sigma$$

Usando  $\nabla^a T_{ab} = 0$

$$\xleftrightarrow{\frac{\delta}{\delta\sigma}} \partial_{\bar{z}} T_{z\bar{z}} + \partial_{\bar{z}'} T_{z\bar{z}'} = 0$$

$$\left(\partial_{\bar{z}} \partial_{\bar{z}'}\right)^{-1} \langle \partial_{\bar{z}} T_{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}'} T_{z'\bar{z}'} \rangle_\sigma$$

$$\langle \partial_{\bar{z}} T_{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}'} T_{z'\bar{z}'} \rangle_\sigma$$

$$\partial_{\bar{z}} \partial_{\bar{z}'} \langle T_{z\bar{z}} T_{z'\bar{z}'} \rangle_\sigma$$

p. 218  $\rightarrow$

$$= \frac{c}{2(z-z')^4}$$

$$\partial_{\bar{z}}^2 \partial_{\bar{z}'} \left[ \frac{c}{12(z-z')} \right]$$

$$\partial_{\bar{z}} \partial_{\bar{z}'} \left[ \frac{c}{12} \partial_{\bar{z}} \left( \frac{1}{z-z'} \right) \right]$$

$2\pi \delta^{(2)}(z-z'),$

así que

$$\delta Z = \frac{c}{48\pi} \int \mathcal{D}^2 z \partial_z \delta \omega \partial_{\bar{z}} \delta \omega .$$

Se puede mostrar que la contraparte de este resultado cuando se hace una transformación de Weyl finita a partir de una métrica inicial  $\tilde{g}_{ab}$  arbitraria es

$$Z[e^{\omega} \tilde{g}_{ab}] = e^{-c S_L[\omega, \tilde{g}]} Z[\tilde{g}_{ab}] ,$$

con  $S_L$  la llamada acción de Liouville

$$S_L[\omega, \tilde{g}] \equiv -\frac{1}{96\pi} \int \mathcal{D}^2 \sigma \sqrt{\tilde{g}} \left( 2\tilde{R}\omega + \underbrace{\tilde{g}^{ab} \partial_a \omega \partial_b \omega}_{\text{término que reproducimos}} + \underbrace{\omega^2 e^{\omega}}_{\text{presente si agregamos}} \right).$$

$\nearrow$   
 escalar de Ricci  
 (= 0 cuando  $\tilde{g}_{ab} = \delta_{ab}$ )

$\omega^2 \int \mathcal{D}^2 \sigma \sqrt{\tilde{g}}$   
 en acción original

[ver p.ej. Polyakov 9.6, 9.7].

Concluimos entonces que la integral funcional  $Z$  es invariante de Weyl solo si  $\boxed{c=0}$  (y  $\boxed{\tilde{c}=0}$ ).

(Y de hecho, fuera de la norma plus tenemos  $\tilde{R} \neq 0$ , y por tanto  $\delta Z$  tiene una contribución lineal en  $\delta \omega$ ,

de modo que

$$\langle T^a_a \rangle_g = -\frac{c}{12} \tilde{R}.$$

Así que p.ej.  $S_p$  no es en realidad invariante conforme cuando  $\tilde{g}_{ab} \neq g_{ab}$ .

En nuestro caso,

$$c = c^{\text{TOT}} = c^x + c^f = D - 26$$

contribución a  
anomalía de Weyl que  
proviene de  $\int \mathcal{D}X^m$

contribución de  $\frac{\mathcal{D}g_{ab}}{\text{Dif}}$   
( $\leftrightarrow \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c \mathcal{D}\tilde{b} \mathcal{D}\tilde{c} e^{-S_f}$ )

así que la teoría es invariante de Weyl, y podemos entonces cancelar (p.268)

$$\mathcal{Z} = \int \frac{\mathcal{D}w(\sigma)}{\text{Weyl}} \mathcal{Z}[e^w \tilde{g}_{ab}] = \int \frac{\mathcal{D}w(\sigma)}{\text{Weyl}} \mathcal{Z}[\tilde{g}_{ab}] = \mathcal{Z}[\tilde{g}_{ab}],$$

solo si  $\boxed{D=26}$ .

Llamamos a esta la dimensión crítica para las cuerdas bosónicas en espaciotiempo plano. Como veremos el



próximo semestre, en el caso de la supercuerda en fondo plano, los campos adicionales en la hoja de mundo acaban modificando esta condición a  $D=10$ . Y, como veremos más adelante este semestre, el valor de la dimensión crítica cambia también si consideramos a la cuerda bosónica en un fondo no trivial — es decir, distinto a Minkowski con todos los otros campos apagados.

Para cubrir todos los casos desde una perspectiva más general, podemos definir una teoría de cuerdas (a nivel perturbativo) como una teoría de campos conforme en 2 dimensiones, con carga central total igual a cero.

Si, en la teoría de cuerdas bosónica en fondo plano, tomamos  $D \neq 26$ , el campo  $w(\sigma)$  no se desacopla. Podríamos entonces olvidar el factor  $\frac{1}{\text{Weyl}}$  (no se necesita para eliminar redundancia, porque no hay tal redundancia), y trabajar con

$$Z = \int \mathcal{D}w Z[e^w g_{ab}] = \int \mathcal{D}w \mathcal{D}X^{\tilde{M}} \mathcal{D}b \mathcal{D}c \mathcal{D}\tilde{b} \mathcal{D}\tilde{c} e^{-cS_L - S_p - S_f}.$$

Nuestra teoría tiene entonces 1 grado de libertad adicional. Si tomamos p.ej.  $\omega^2=0$ , entonces

$$S_L[\omega, \overset{V}{g}_{ab}] = -\frac{1}{96\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\overset{V}{g}} \left( \overset{V}{g}{}^{ab} \partial_a \omega \partial_b \omega + 2\overset{V}{R} \omega \right)$$

muestra que el campo escalar  $\omega(\sigma)$  puede considerarse como una  $X^M$  adicional (que es espacial o temporal si  $D < 26$  o  $D > 26$ ); pero sin invariancia bajo

transformaciones  $\omega \rightarrow \omega + c$ . Llamamos a ésta una

teoría de cuerdas no crítica. Interesantemente, es posible reinterpretarla como una teoría de cuerdas

habitual (es decir, crítica), pero con  $\boxed{D+1}$  dimensiones

y un fondo no trivial (como entenderemos más adelante, se trata de un fondo dilatónico lineal,  $\varphi(X, \omega) \propto \omega$ ). [Ver, p.ej., Polchinski 9.9.]

Con una u otra interpretación, vemos que de hecho sí es posible trabajar con  $D \neq 26$ ; pero el precio que pagamos es que el fondo no parece prometer

para describir algo parecido a nuestro mundo.  
 El caso  $D=1$  ( $D+1=2$ ) se ha estudiado mucho, porque resulta no tener taquión, y puede ser descrito de manera no perturbativa a través de una discretización de la hoja de mundo que conduce a un modelo matricial. [Ver p.ej. hep-th/9108019, 9304011, 9411028 sección 5, 0310287.]

Regresando a nuestra discusión principal, ahora que tenemos a  $b, c, \tilde{b}, \tilde{c}$  como campos adicionales, los generadores de Virasoro total  $L_m^{\text{TOT}} \equiv L_m^X + L_m^F$  satisfacen el álgebra sin extensión central,

$$[L_m^{\text{TOT}}, L_n^{\text{TOT}}] = (m-n) L_{m+n} + \frac{c^{\text{TOT}}}{12} (m^3 - m) \delta_{m,-n}$$

así que para imponer la ecuación de movimiento faltante  $T^{ab} \propto \delta J / \delta g_{ab} = 0$  a nivel cuántico podemos simplemente pedir

$$L_m^{\text{TOT}} | \text{fís} \rangle = 0 \quad \forall m$$

Pero ahora tenemos un nuevo problema, porque claramente el espacio de Hilbert es más grande que antes: se construye con los operadores de creación

$$\{ \alpha_{-n}^{\mu}, b_{-n}, c_{-n}, c_0, \tilde{\alpha}_{-n}^{\mu}, \tilde{b}_{-n}, \tilde{c}_{-n}, \tilde{c}_0 \}$$

actuando sobre el vacío  $|0,0;k\rangle | \downarrow \downarrow \rangle$ . Y peor aún, hemos visto que esto da lugar a estados con norma negativa adicionales. ¿Cómo podemos entonces distinguir a los estados físicos?

La presencia de los fantasmas nos permite recurrir a un formalismo más poderoso que la CCA: la cuantización BRST (Becchi, Rouet, Stora; Tyutin), o cuantización covariante moderna (CCM). Aquí solo esbozaremos rápidamente las ideas principales. [Para más detalle, ver Polchinski 4.2-4.3, o GSW 3.2.]

El punto de partida es que, aún después de fijar la norma plana  $g_{ab} = \delta_{ab}$ , nuestro sistema

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X \cdot \bar{\partial} X + \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b \bar{\partial} c + \tilde{b} \partial \tilde{c})$$

tiene una simetría global remanente: la llamada

transformación BRST

$$\delta X^{\mu} = i\varepsilon (c\partial + \tilde{c}\bar{\partial}) X^{\mu},$$

← difeo con parámetros  $\varepsilon c(z), \varepsilon \tilde{c}(\bar{z})$

$$\delta b = i\varepsilon (T^X + T^f), \quad \delta c = i\varepsilon c\partial c,$$

$$\delta \tilde{b} = i\varepsilon (\tilde{T}^X + \tilde{T}^f), \quad \delta \tilde{c} = i\varepsilon \tilde{c}\bar{\partial}\tilde{c},$$

con  $\varepsilon$  un parámetro (constante) anticommutativo.

El teorema de Noether conduce entonces a la corriente conservada

$$j_{BRST}(z) = cT^X + \frac{1}{2} :cT^f: + \frac{3}{2} \partial c \quad (\text{y } \tilde{j}_{BRST}(\bar{z}) = \tilde{c}\tilde{T}^X + \dots)$$

y por tanto, a la carga BRST

$$Q_{BRST} = \frac{1}{2\pi i} \oint (d\tilde{z} j_{BRST} - d\tilde{z} \tilde{j}_{BRST})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n L_{-n}^X + \tilde{c}_n \tilde{L}_{-n}^X)$$

$$+ \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{m-n}{2} : (c_m c_n b_{-m-n} + \tilde{c}_m \tilde{c}_n \tilde{b}_{-m-n}) : - (c_0 + \tilde{c}_0)$$

(un objeto fermiónico tal que  $Q_{\text{BRST}}^+ = Q_{\text{BRST}}$ ).

Se puede mostrar que los resultados serán invariantes bajo un cambio en la condición de norma

$$N(g, X) = \delta_{ab} - g_{ab} = 0 \rightarrow N + \delta N$$

si los estados físicos son invariantes bajo BRST, es decir,

$$Q_{\text{BRST}} |\text{fís}\rangle = 0 .$$

Además, el requisito de que  $Q_{\text{BRST}}$  se conserve aún después del cambio en la condición de norma equivale a

$$Q_{\text{BRST}}^2 = 0 ,$$

es decir, una propiedad básica de la carga BRST es que debe ser nilpotente. En nuestro caso, esto resulta cumplirse solo si  $D=26$ , lo cual constituye por tanto una quinta manera de deducir la dimensión crítica (En  $D \neq 26$  decir que hay una anomalía BRST.)

Una consecuencia de  $Q_{\text{BRST}}^2 = 0$  es que un estado del tipo  $Q_B |\text{arbitrario}\rangle$  es trivialmente físico, y es además ortogonal a todos los estados físicos (incluido él mismo), es decir, es nulo. Tenemos entonces la relación de equivalencia

$$|\psi\rangle \approx |\psi'\rangle \quad \text{si} \quad |\psi\rangle - |\psi'\rangle = Q_{\text{BRST}} |\chi\rangle.$$

En matemáticas, cuando se tiene un operador nilpotente como  $Q_{\text{BRST}}$ , o la derivada exterior  $d$  sobre formas diferenciales  $A_{(p)} = \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_p}$  (producto exterior o cúbrico), ( $dA_{(p)}$  tiene componentes  $(dA)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]}$ ), es habitual utilizar la noción de cohomología para referirse a la construcción recién descrita.

En esta terminología, los estados físicos,  $Q_B |\text{fís}\rangle = 0$ , se llaman cerrados, los nulos,  $Q_B |\chi\rangle$ , se llaman exactos,

y al conjunto de clases de equivalencia

$$[|\psi\rangle] \equiv \{ |\psi'\rangle \mid |\psi'\rangle - |\psi\rangle = Q_B |\chi\rangle \}$$

de estados cerrados módulo exactos

se le llama la cohomología de  $Q_{BRST}$ ,

$$\mathcal{H}_{BRST} \equiv \frac{\mathcal{H}_{\text{cerrados}}}{\mathcal{H}_{\text{exactos}}}$$

A cada  $[|\psi\rangle]$  se le llama una clase de cohomología.

Podemos clasificar a estos estados con base en su número de fantasmas  $F$  (y  $\tilde{F}$ ), que es la carga de Noether asociada a la simetría global

$$c \rightarrow e^{+i\theta} c, \quad b \rightarrow e^{-i\theta} b \quad (\text{con } \theta \text{ commutativo),}$$

cuya corriente es  $j(z) = -:bc:$ , y carga

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n} b_n - b_{-n} c_n) + c_0 b_0 - \frac{1}{2}$$

Vemos entonces que

$$F |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle, \quad \text{y } \begin{matrix} c_{-m}, c_0 \\ b_{-n} \end{matrix} \text{ cambian } F \text{ por } \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix}.$$



Es fácil verificar (ya sea a partir de la EPO de  $j_{BRST}$  con  $b$ , o de las expansiones en modos) que

$$\{Q_{BRST}, b_m\} = L_m^x + L_m^f,$$

así que podemos lograr que los estados físicos satisfagan la condición de capa de masa

$$L_0^{TOT} |fís\rangle = (L_0^x + L_0^f) |fís\rangle = 0$$

si exigimos como condición adicional que

$$b_0 |fís\rangle = 0 \quad (\text{y } \tilde{b}_0 |fís\rangle = 0)$$

$$\Rightarrow L_0^{TOT} |fís\rangle = \{Q_{BRST}, b_0\} |fís\rangle = 0.$$

La parte de fantomas será entonces del tipo

$$\underbrace{c_{-n_1} \dots b_{-m_1}} | \downarrow \rangle$$

tal que  $Q_{BRST} |fís\rangle = 0$

En cada uno de los clases de equivalencia que satisfacen esta condición se puede encontrar siempre un estado "sin fantasmas"  $|\psi\rangle$  tal que

$$|\psi\rangle = |\psi_x\rangle |\downarrow\downarrow\rangle.$$

Y en este caso,

$$\begin{aligned} Q_B |\psi_x\rangle |\downarrow\downarrow\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ c_{-n} (L_n^x - \delta_{n,0}) + \tilde{c}_{-n} (\tilde{L}_{-n}^x - \delta_{n,0}) \right] |\psi_x\rangle |\downarrow\downarrow\rangle, \end{aligned}$$

así que  $Q_B |\psi\rangle = 0$  es equivalente a las condiciones

$$\begin{aligned} L_{n>0}^x |\psi_x\rangle = 0 &= \tilde{L}_{n>0}^x |\psi_x\rangle \\ (L_0^x - 1) |\psi_x\rangle = 0 &= (\tilde{L}_0^x - 1) |\psi_x\rangle \end{aligned}$$

que tenemos en cuantización covariante antigua (CA).

Podemos notar en particular que la constante de orden  $a=1$  (que fue crucial para obtener al gravitón y los bosones de normas vectoriales) en realidad proviene de

$$L_0^{\text{TOT}} |\psi_x\rangle |\downarrow\downarrow\rangle = (L_0^x + L_0^f) |\psi_x\rangle |\downarrow\downarrow\rangle,$$

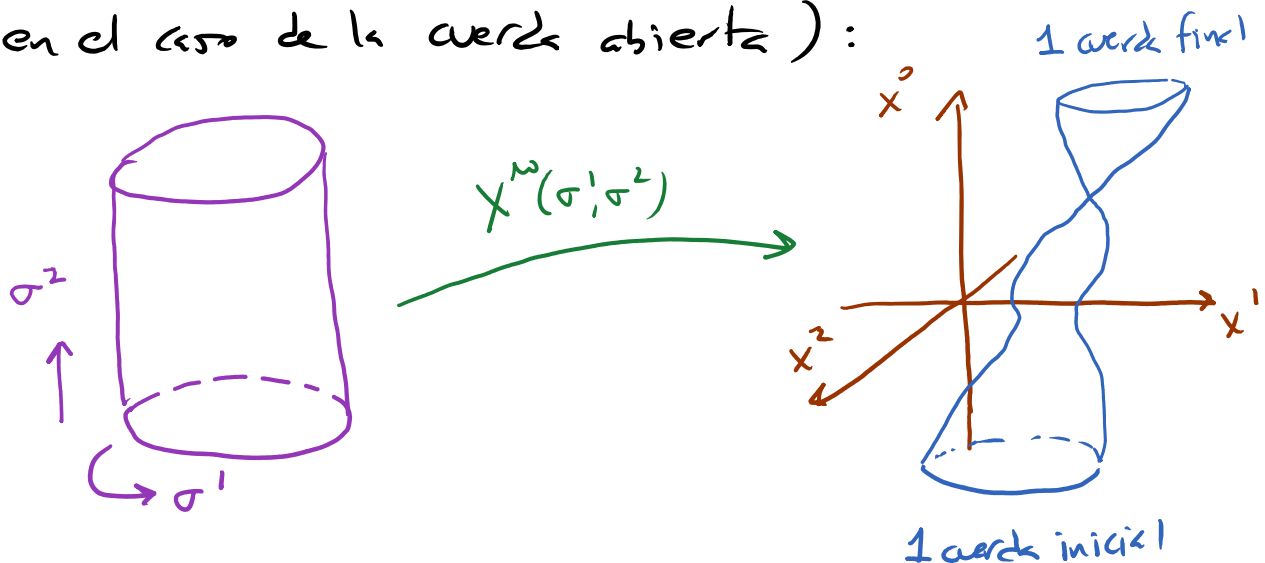
$$L_0^f = \sum_{n=1}^{\infty} n (b_{-n} c_n + c_{-n} b_n) - 1.$$

$\uparrow$   
 $A^f$  (p. 284-5)

En resumen, en la cuantización BRST los estados físicos son clases de cohomología de  $Q_{BRST}$ , con número de fantasmas  $F = -1/2$  (y  $\tilde{F} = -1/2$ ), y como hemos esbozado, esto conduce a los mismos resultados que CCA y CCL.


## 2. Cuerdas Bosónicas II


Hasta ahora hemos hablado de una cuerda libre, para la cual usamos una hoja de mundo con la topología de un cilindro (en el caso de la cuerda cerrada, una tira en el caso de la cuerda abierta):



¿Cómo podemos agregar interacciones? Nuestro primer instinto quizás sería añadir términos cúbicos o más altos a la acción de Polyakov  $S_p[X]$ . Ellos serían interacciones en la teoría de campos en 2 dimensiones (que, como veremos más adelante, es lo que se tiene cuando el fondo en el que se propaga la cuerda es no trivial - p.ej. espaciotiempo curvo); pero en el espaciotiempo seguiríamos teniendo una sola cuerda que se propaga libremente.

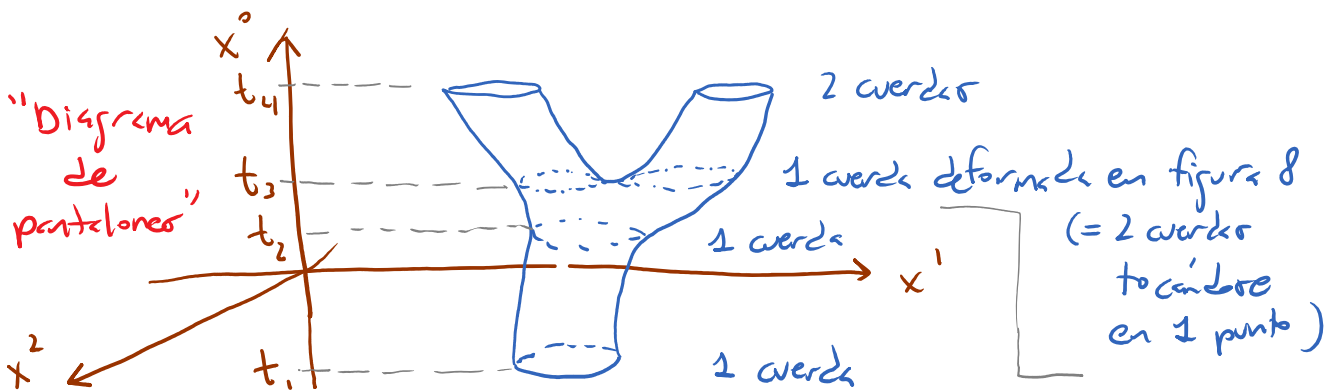
El punto importante aquí es que nuestra descripción es en primera, y no segunda, cuantización. La situación es completamente análoga en la primera cuantización de una partícula. Sabemos que en ese caso podemos incorporar interacciones perturbativamente, agregando a mano vertices de interacción (p. 112) de 3 o más patas, es decir, la posibilidad de que

1 partícula se convierta en 2, ,

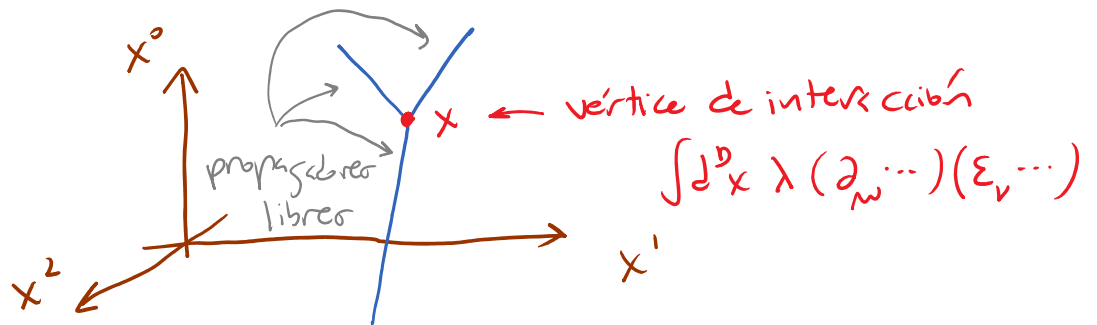
o 1 partícula se convierta en 3, , etc.

La libertad de elegir el tipo de vértices que añadimos, así como los factores que corresponden a cada uno de estos vértices en las reglas de Feynman (constantes de acoplamiento, dependencias del momento y/o polarización de las partículas involucradas, etc.) refleja la gran variedad de teorías de partículas ( $\leftrightarrow$  campos) interactuantes que es posible construir (aunque faltaría por supuesto analizar unitariedad, causalidad, renormalizabilidad, etc.).

Para agregar interacciones en cuerdas, seguimos entonces el mismo camino. Permitiremos, p.ej., que 1 cuerda se convierta en 2 (o viceversa):

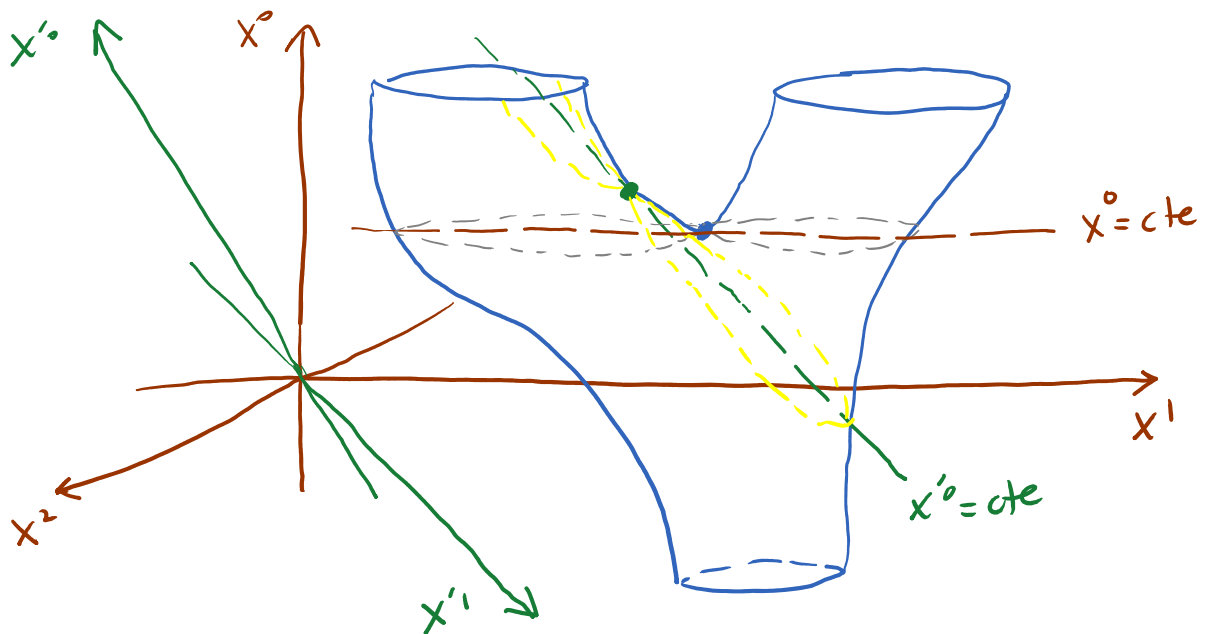


Es importante notar que existe una diferencia esencial entre esto y el vértice cúbico para partículas



En el caso de partículas, existe un punto bien definido en su trayectoria donde ocurre la intersección, y todos los observadores están de acuerdo en cuál es.

Pero en el caso de cuerdas, No es así: el punto en el espaciotiempo donde la cuerda se separa en 2 depende del marco de Lorentz:

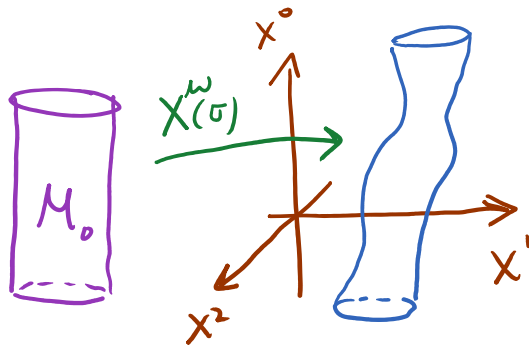


Localmente, cualquier punto en la superficie barrida por la cuerda tiene el mismo aspecto.

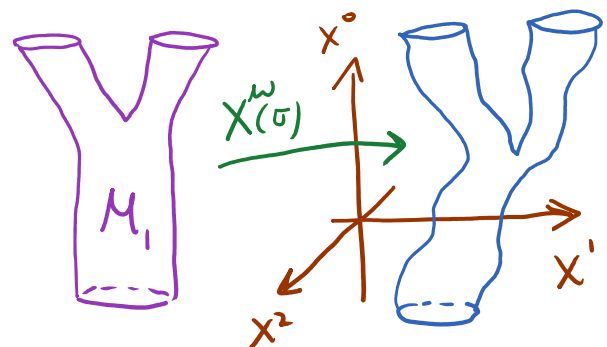
En la descripción de la evolución de la cuerda,

¡¡NO HAY ENTONCES VÉRTICES DE INTERACCIÓN!!

No tenemos opción más que pesar las nuevas trayectorias (donde 1 cuerda se divide en 2) con el mismo factor  $e^{-S_p[X]}$  que las trayectorias libres. Lo único que las distingue es su topología, y por tanto, la topología de la hoja de mundo correspondiente:

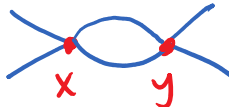


vs.



$$\int_{M_0} DX^\mu(\sigma) e^{-S_p[X]}$$

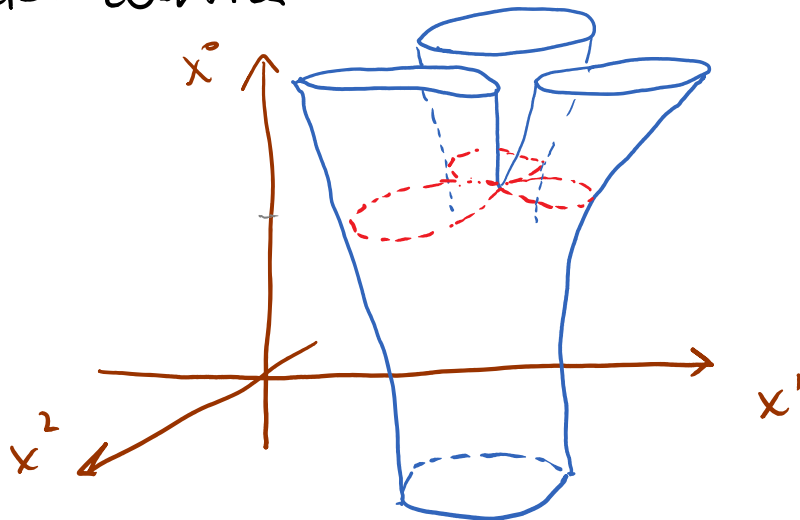
$$\int_{M_1} DX^\mu(\sigma) e^{-S_p[X]}$$

Sabemos que las divergencias UV en teorías de partículas ( $\leftrightarrow$  campos) están relacionadas con los límites de integración en los diagramas de Feynman donde 2 o más vértices coincidan en el espaciotiempo ( $\leftrightarrow$  energías de partículas en lazo divergen). P.ej.   $= \lambda^2 \int d^D x d^D y \dots$

en el límite  $x \rightarrow y$ .

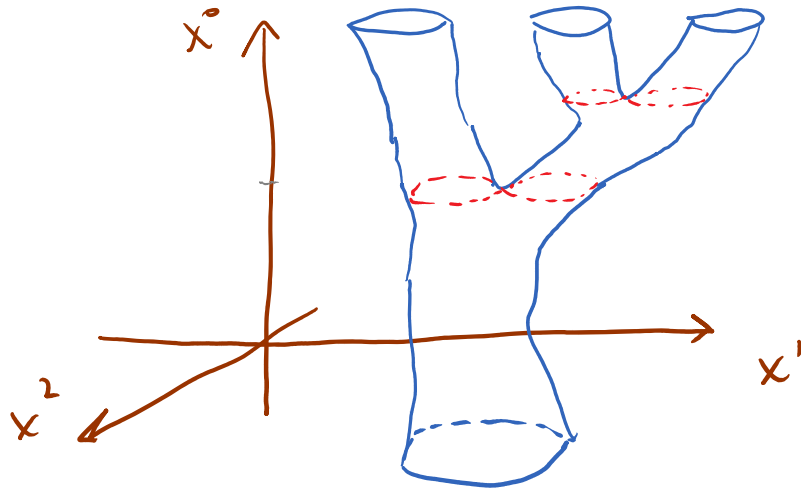
En cuerdas no existe tal posibilidad, y por esta razón el comportamiento UV se mejora drásticamente. (De hecho, ¡encontraremos que no existen ya divergencias UV!) )

Ahora, ¿qué hay de la posibilidad de que 1 cuerda se convierta en 3 o más cuerdas? Aquí nos llevamos otra gran sorpresa: notamos que la trayectoria por una "interacción cúbica"



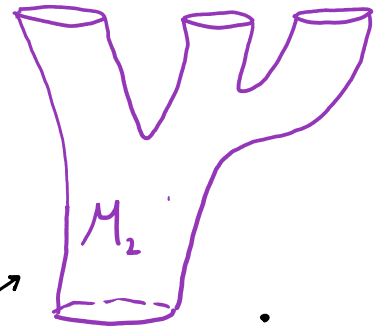
tiene exactamente la misma topología que la trayectoria con 2 "interacciones cúbicas"





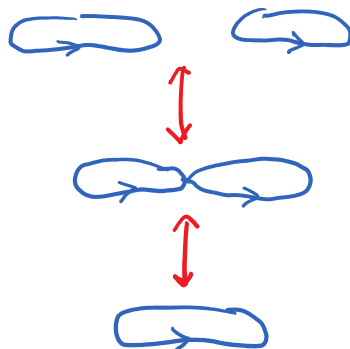
así que ambas posibilidades estén automáticamente incluidas en la integral funcional correspondiente,

$$\int_{M_2} DX^\mu(\sigma) e^{-S_p[X]}$$



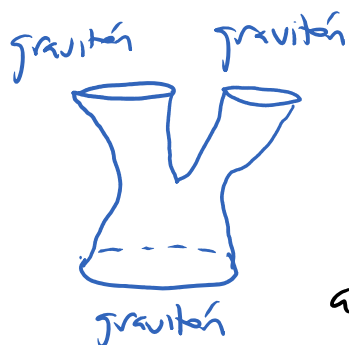
en las funciones de encastre  $X^\mu(\sigma)$  definidas sobre la hoja de mundo  $\rightarrow$

Más en general, la conclusión es que todos los posibles "vértices" se incorporan automáticamente e inevitablemente al postular el proceso de interacción "cúbica" básica:

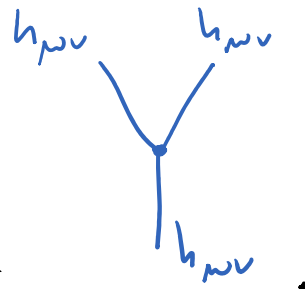


Sorprendentemente, dependiendo de los estados de oscilación

de las cuerdas inicial / final, este único proceso de interacción puede reproducir todas las interacciones en la teoría de campo correspondiente! Veremos, p.ej., que



reproduce el vértice  
cúbico apropiado en la  
acción de Einstein-Hilbert



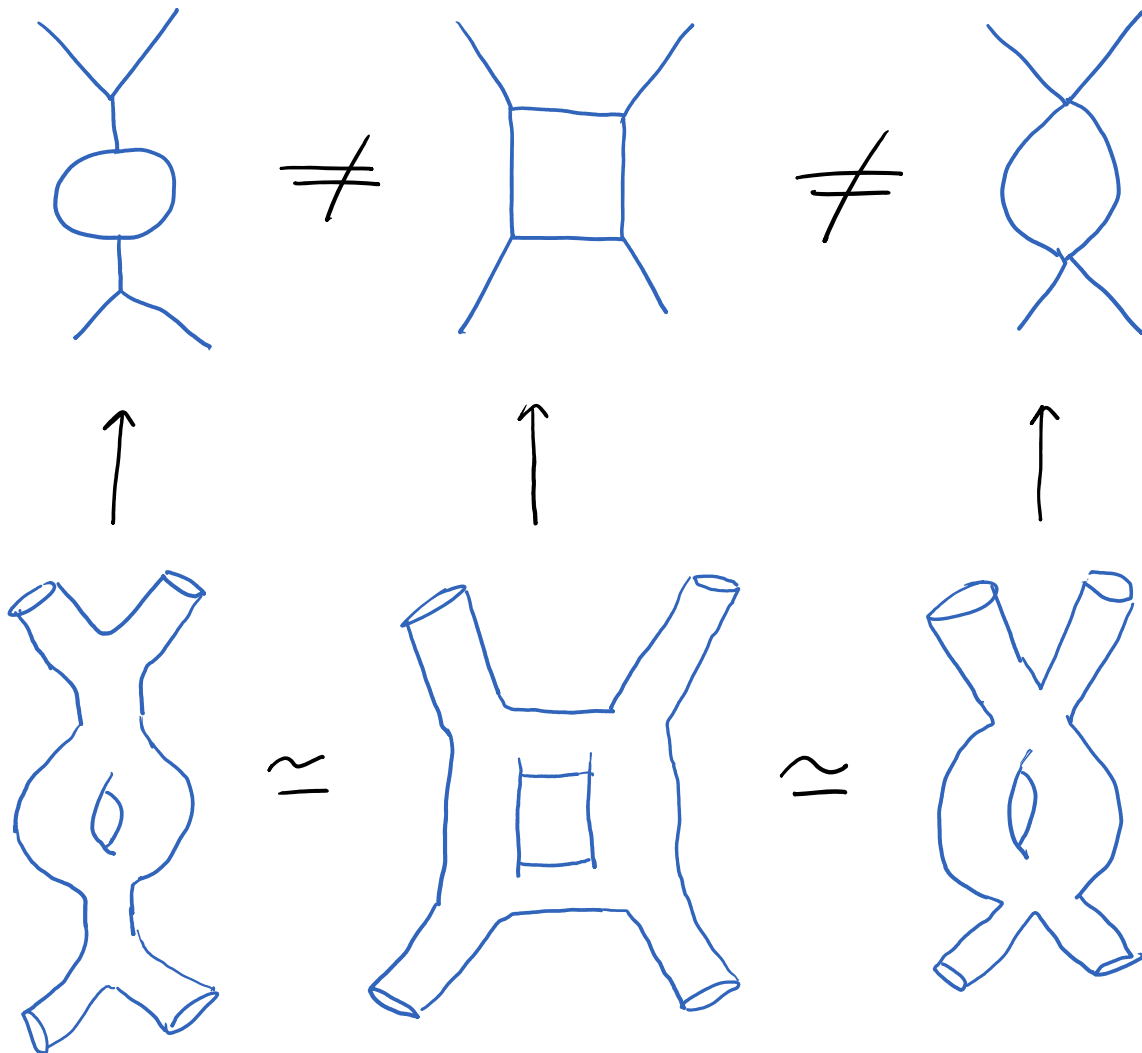
Hemos visto entonces que **¡¡ NO HAY LIBERTAD ALGUNA EN EL TIPO DE INTERACCIONES QUE SE PUEDEN AGREGAR !!**

La incorporación de interacciones se logra simplemente sumando sobre hojas de mundo con distintas topologías —no existe la posibilidad de inventar a mano distintos vértices asociados a reglas de Feynman arbitrarias. (Es por esto que la primera cuantización en cuerdas es mucho más satisfactoria que en el caso de partículas.)

Para definir una teoría de cuerdas, basta con especificar los grados de libertad y las reglas de propagación libre. Esta es la razón por la cual existen pocos

teoría de cuerdas, en comparación con muchísimas teorías de partículas.

Podemos notar además que diagramas de Feynman que serían distintos al nivel de partículas pueden ser equivalentes (por tener idéntica topología) al nivel de cuerdas:



En el caso de cuerdas cerradas (y orientadas), la simplificación resulta ser tan drástica que existe ¡¡ solo un diagrama de Feynman en cada orden de la expansión perturbativa (vs.  $\sim L!$  diagramas de partículas a  $L \gg 1$  lazos) !

Ahora, para partículas, podemos calcular el propagador

$$\langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi(x') \} | 0 \rangle \sim \text{[diagrama de línea] + [diagrama de bucle] + [diagrama de bucle] + \dots + [diagrama de bucle] + [diagrama de bucle] + \dots ,$$

o más en general, funciones de correlación, ya sea en espacio de posiciones,

$$\langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \} | 0 \rangle = \text{[diagrama de círculo sombreado con n líneas]} \leftarrow \text{suma sobre diagramas conexos (= sin "burbujas de vacío")}$$

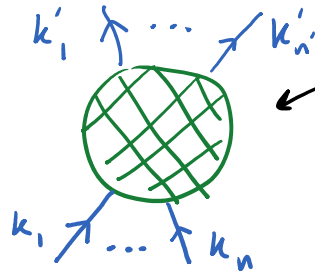
o en espacio de momentos,

$$\int d^D x_i e^{i k_i \cdot x_i} \dots \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \} | 0 \rangle = \text{[diagrama de círculo sombreado con n líneas]} \delta^{(D)}(k_1 + \dots + k_n),$$

para después extraer (a través del procedimiento de "reducción LSZ") las amplitudes de dispersión

$$M(k_1, \dots, k_n \rightarrow k'_1, \dots, k'_n) =$$

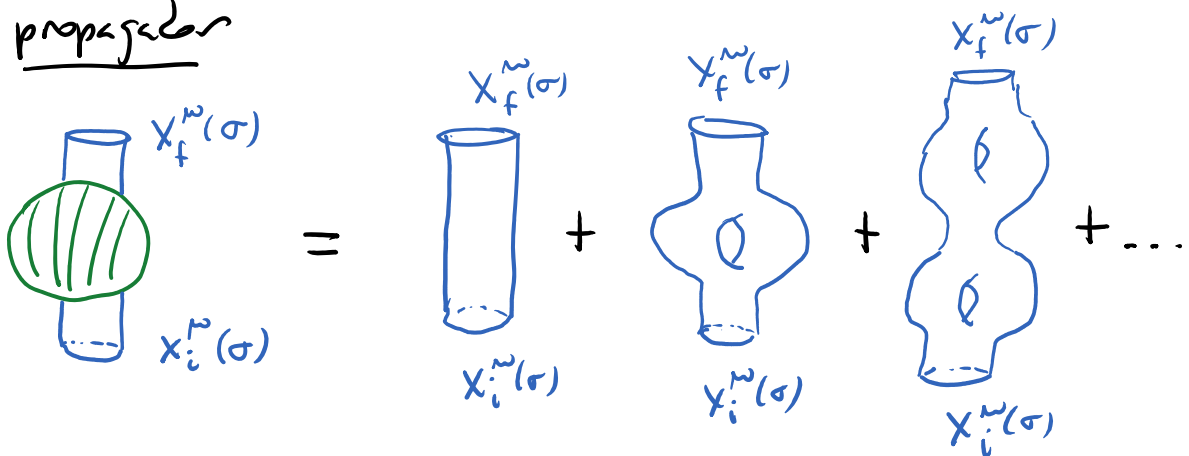
"elemento de matriz invariante"



suma sobre diagramas conexos y amputados, con patas externas en la capa de masa

(dato básico para calcular secciones eficaces o tasas de decaimiento).

En verdad, podríamos también intentar calcular correladores fuera de la capa de masa, como p.ej. el propagador



$$= \sum_{\mathcal{M}} \int \mathcal{D}X^{\mu}(\sigma) \Big|_{\mu} e^{-S_p[X]} \cdot \begin{matrix} X^{\mu}(\sigma'_1, \sigma'_2) = X^{\mu}(\sigma'_1) \\ X^{\mu}(\sigma'_1, \sigma'_2) = X^{\mu}(\sigma'_2) \end{matrix}$$

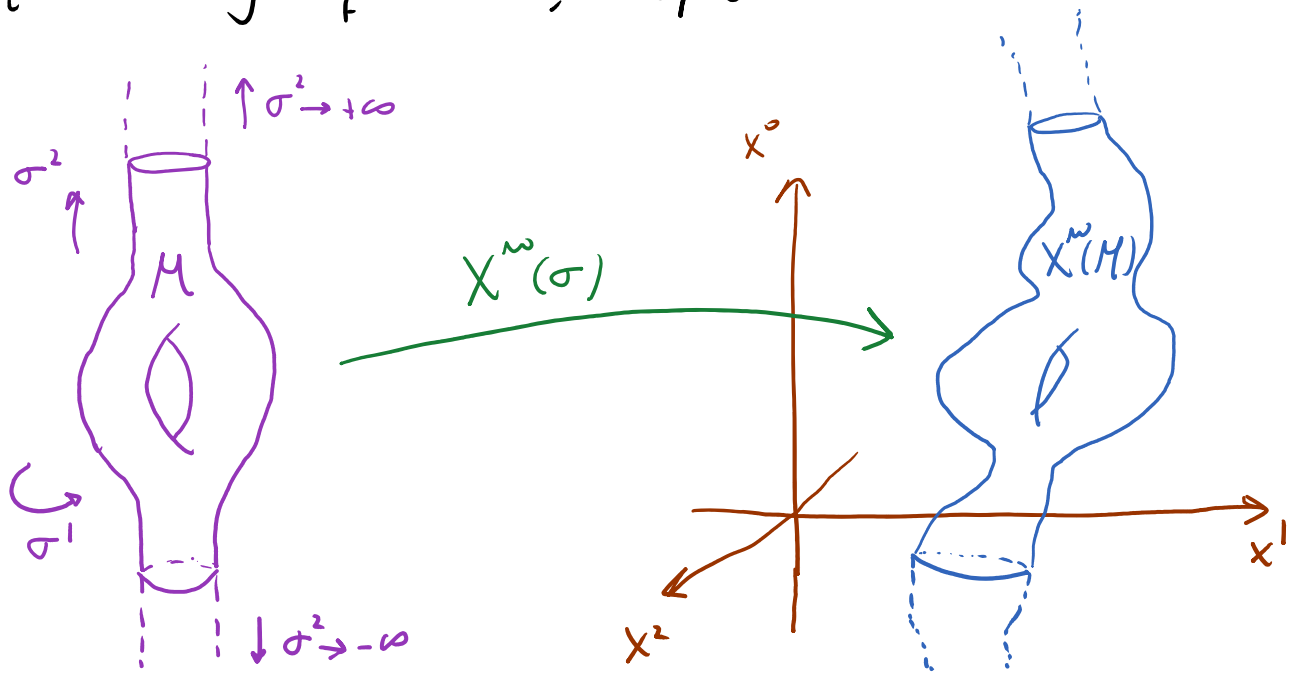
Pero resulta difícil definir estas cantidades locales de manera consistente con las simetrías. [Ver p.ej. artículo de Cohen, Moore, Nelson, Polchinski en '86 y '87.]

Curiosamente, se encuentra que preservar las simetrías en la hoja de mundo está relacionado con preservar las simetrías en el espaciotiempo, y debemos recordar que para las cuerdas estas últimas incluyen los difeos en el espaciotiempo. No es de extrañar entonces que sea difícil definir amplitudes entre puntos espaciotemporales específicos, porque en presencia de gravedad, las coordenadas con que etiquetamos a estos puntos NO tienen significado intrínseco.

Lo que sí podemos definir con relativa facilidad son cantidades globales de interés físico directo: las amplitudes de dispersión, que corresponden al caso particular donde las cuerdas se propagan desde el pasado remoto hasta el futuro remoto.

Las condiciones iniciales y finales para  $\int \mathcal{P}X^m(\sigma)$  se

especifican entonces en  $x_i^0 \rightarrow -\infty$  y  $x_f^0 \rightarrow +\infty$ , que podemos hacer corresponder en la hoja de mundo  $M$  con  $\sigma_i^2 \rightarrow -\infty$  y  $\sigma_f^2 \rightarrow +\infty$ , respectivamente:



En general habrá falta varios parcher de coordenadas para cubrir  $M$

Necesitamos entonces calcular  
 donde  $M$  es una hoja de mundo  
 con 2 o más tubos semi-infinitos.

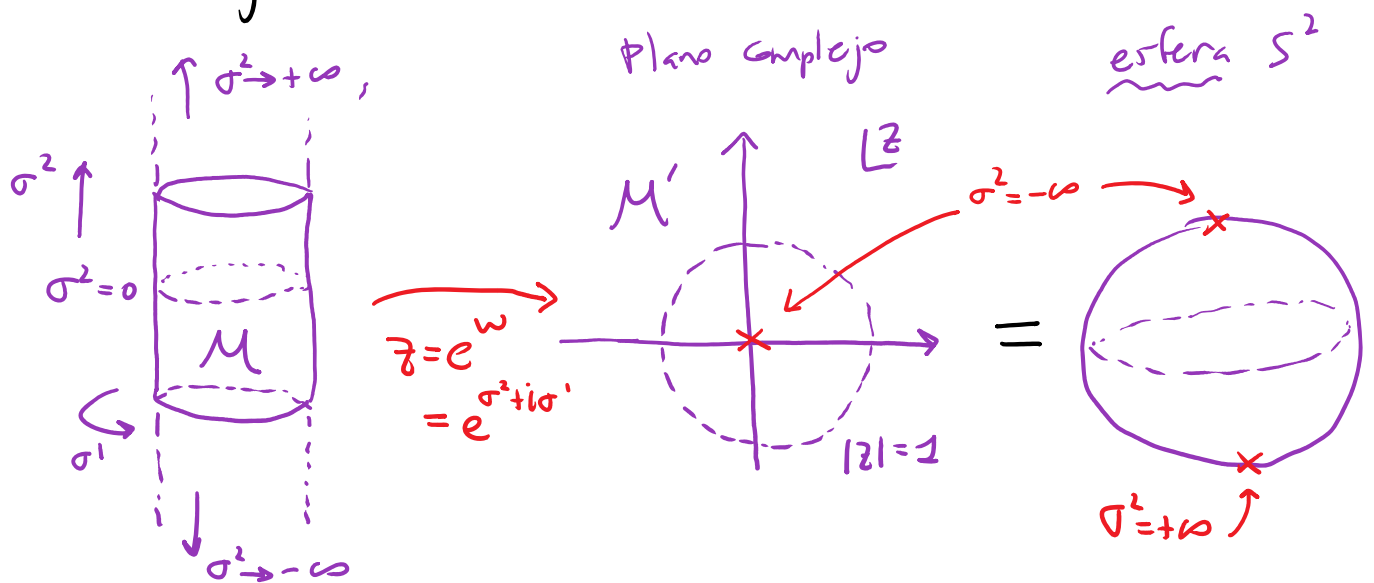
$$\int_{X(\sigma_i^2, -\infty) = X_i^w(\sigma^i)}^{X(\sigma_f^2, +\infty) = X_f^w(\sigma^f)} DX^w(\sigma) \Big|_M e^{-S_p[X]}$$

11:16/04/13

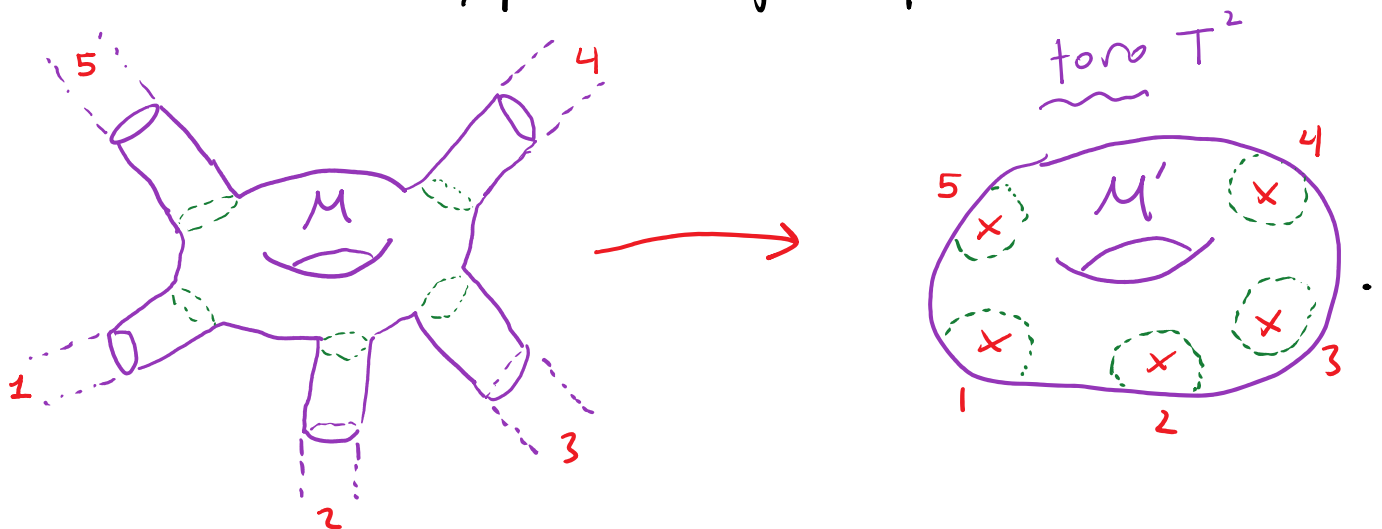
La invariancia conforme nos permite simplificar estas cosas drásticamente: eligiendo una transformación conforme ( $\leftrightarrow$  de Weyl) apropiada, podemos convertir a  $M$  en una

nueva hoja de mundo  $M'$  que sea compacta, es decir, donde los tubos semi-infinitos sean reemplazados por discos de área finita!

Conocemos ya el ejemplo más sencillo de semejante acto de magia:



De manera similar, podemos lograr que



(La forma explícita del mapeo requiere primero adaptar



coordenadas específicas en  $M$ , pero es claro que tiene que existir una transformación conforme así, puesto que el convertir un tubo semi-infinito en un disco, como hicimos arriba, es una transformación local en  $M$ , así que podemos hacerlo por separado en distintos parches de coordenadas.)

Después de esta transformación, la información sobre los estados iniciales/finales se debe especificar en los puntos marcados (que antes correspondían a  $\sigma^2 \rightarrow \pm\infty$ ), a través de la inserción de operadores locales  $V_i(\bar{z}_i, \bar{\bar{z}}_i)$   $i=1, \dots, n$ , que llamamos operadores de vértice. A pesar de su nombre, representan no vértices de interacción propiamente, sino estados asintóticos.

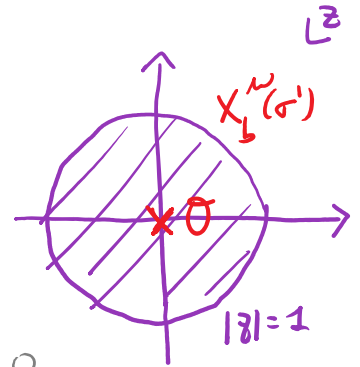
Debemos entonces ser capaces de construir uno de estos operadores por cada estado de vibración de la cuerda. Ésta es de hecho una idea más general, que no aplica solo para la teoría de cuerdas: en cualquier teoría de campos conforme, existe un isomorfismo entre estados y operadores,

que se conoce simplemente como el mapeo estado-operador.

Hemos visto ya cómo podemos pasar de un estado a un operador. La relación inversa se puede establecer asociando a un operador  $\mathcal{O}(z, \bar{z})$  el funcional

$$\bar{\Psi}[X_b^w(\sigma')] \equiv \int_{|z| \leq 1} \mathcal{D}X^w(z, \bar{z}) \left| e^{-S_p[X]} \mathcal{O}(0,0), \right.$$

implemente evolución temporal de  $\sigma^z = -\infty$  a 0



que se puede interpretar como la funcional de onda de un estado  $|\bar{\Psi}\rangle$ :

$$\bar{\Psi}[X_b^w(\sigma')] = \langle X_b^w(\sigma') | \bar{\Psi} \rangle$$

(análogo a  $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ ).

Podemos notar que si  $|\bar{\Psi}_0\rangle$  es el estado que corresponde al operador  $\mathcal{O}(0,0)$ , y  $Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} j(z)$  es una carga conservada, entonces el estado  $Q|\bar{\Psi}_0\rangle$ , que representa el cambio en  $|\bar{\Psi}_0\rangle$  bajo la transformación generada por  $Q$ , debe corresponder al operador

$$[Q, \mathcal{O}(0,0)] = \oint \frac{dz}{2\pi i} j(z) \mathcal{O}(0,0) \quad ,$$

que es precisamente el cambio en  $\mathcal{O}(0,0)$  bajo la misma transformación. Con  $Q=L_{-1}$  ( $\leftrightarrow$  traslación en  $z$ ) esto sirve en particular para determinar el estado que corresponde a  $\mathcal{O}(z, \bar{z})$  en lugar de  $\mathcal{O}(0,0)$ .

Podemos deducir la forma explícita del mapeo estado-operador en el caso de la teoría conforme  $S_p[X]$  aplicando esta idea, con los cargos

$$\alpha_m^\mu = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \int \frac{dz}{2\pi i} z^m \partial X^\mu(z).$$

Determinemos primero cuál es el estado  $|\Psi_1\rangle$  que corresponde al operador identidad  $\mathcal{O}(0,0)=1$ . Tenemos

$$\alpha_{m \geq 0}^\mu |\Psi_1\rangle \leftrightarrow i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \underbrace{\partial X^\mu(z)}_{\partial X^\mu(0) + z \partial^2 X^\mu(0) + \dots} \cdot 1 = 0$$

y similarmente

$$\sum_{m \geq 0} \alpha_{-m}^{\mu} |\Psi_1\rangle = 0,$$

así que podemos inferir que

vacío de  $\alpha_{\mu}$       vacío de  $\tilde{\alpha}_{\mu}$

$|\Psi_1\rangle = |0, 0; 0\rangle$

eigenvalor

de  $p^{\mu} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^{\mu} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\alpha}_0^{\mu}$

Por otro lado,

$$\alpha_{-m}^{\mu} |\Psi_1\rangle \leftrightarrow i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint_{2\pi i} \frac{dz}{z} z^{-m} \partial X^{\mu}(z) \cdot 1$$

$\leftarrow m > 0$

$$\partial X^{\mu}(0) + z \partial^2 X^{\mu}(0) + \dots + \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} \partial^m X^{\mu}(0) + \dots,$$

es decir,

$$\alpha_{-m}^{\mu} |0, 0; 0\rangle \leftrightarrow i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{(m-1)!} \partial^m X^{\mu}(0).$$

Consideremos ahora

$$\alpha_{-n}^{\nu} (\alpha_{-m}^{\mu} |\Psi_1\rangle) \leftrightarrow \left( i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \right)^2 \frac{1}{(m-1)!}$$

$$\times \oint_{2\pi i} \frac{dz}{z} z^{-n} \partial X^{\nu}(z) \partial^m X^{\mu}(0)$$

$$= \underbrace{\partial X^{\nu}(z) \partial^m X^{\mu}(0)}_{\downarrow} + \underbrace{\partial \partial^m \left[ -\frac{\alpha'}{z} \eta^{\nu\mu} \ln|z-z'|^2 \right]}_{\text{No de polo simple}} \Big|_{z'=0}$$

$$\partial X^{\nu}(0) + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \partial^n X^{\nu}(0) + \dots,$$

es decir,

$$\alpha_{-n}^\nu \alpha_{-m}^\mu |0,0;0\rangle \leftrightarrow \left(i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\right)^2 \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{(m-1)!} : \partial^n X^\nu \partial^m X^\mu(0) :$$

Este mismo patrón claramente continúa si actuamos con otros operadores, así que

$$\alpha_{-m_1}^{\mu_1} \dots \alpha_{-m_n}^{\mu_n} |0,0;0\rangle \leftrightarrow \left(i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\right)^n \frac{1}{(m_1-1)!} \dots \frac{1}{(m_n-1)!} : \partial^{m_1} X^{\mu_1} \dots \partial^{m_n} X^{\mu_n}(0) :$$

De manera similar, actuar con  $\tilde{\alpha}_{-m}^\mu$  evidentemente corresponde a agregar  $i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{(m-1)!} \bar{\partial}^m X^\mu(0)$  dentro del producto en orden normal.

Por último,  $\swarrow$  operador de translación en momento

$$|0,0;k\rangle \equiv e^{ik \cdot \hat{x}} |0,0;0\rangle \leftrightarrow : e^{ik \cdot X(0,0)} : .$$

Efectivamente, podemos comprobar que

$$k^\mu |0,0;k\rangle = p^\mu |0,0;k\rangle = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu |0,0;k\rangle$$

$$\begin{aligned} & \leftarrow ? \quad i \frac{2}{\alpha'} \oint \frac{dz}{2\pi i} \partial X^\mu(z) : e^{ik \cdot X(0,0)} : \\ & \quad \underbrace{\hspace{10em}} \\ & \quad i k^\mu \underbrace{\partial \left[ -\frac{\alpha'}{2} \ln|z|^2 \right]}_{-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z}} : e^{ik \cdot X(0,0)} : + \underbrace{: \partial X^\mu(z) e^{ik \cdot X(0,0)} :}_{\text{No de polo}} \\ & = \cancel{i^2} \frac{2}{\alpha'} \left( -\frac{\alpha'}{2} \right) k^\mu \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z} : e^{ik \cdot X(0,0)} : \\ & = k^\mu : e^{ik \cdot X(0,0)} : \quad \checkmark \end{aligned}$$

Cualquier estado se puede obtener actuando con  $\alpha_{-m}^\mu$ 's,  $\tilde{\alpha}_{-n}^\nu$ 's y  $e^{ik \cdot \hat{x}}$  sobre  $|0,0;0\rangle$ . Según hemos visto, el operador correspondiente es simplemente el producto de los operadores individuales, en orden normal conforme.

Así que, p.ej., el operador de vértice para el taquión es

$$|0,0;k\rangle \leftrightarrow V_\phi(z, \bar{z}; k) \equiv : e^{ik \cdot X(z, \bar{z})} :$$

y hereda las propiedades del estado físico,

$$\begin{aligned}
 & L_{n>0} |0,0;k\rangle = 0 \quad \leftarrow \text{vacío de osciladores} \quad \longleftrightarrow \quad [L_{n>0}, V_\phi(z, \bar{z}; k)] = 0 \\
 & \tilde{L}_{n>0} |0,0;k\rangle = 0 \quad \longleftrightarrow \quad [\tilde{L}_{n>0}, V_\phi(z, \bar{z}; k)] = 0
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} L_{n>0} |0,0;k\rangle = 0 \\ \tilde{L}_{n>0} |0,0;k\rangle = 0 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{p. 217} \\ \downarrow \\ V_\phi \text{ es} \\ \text{primario} \end{array}$$
  

$$\begin{aligned}
 (L_0 - 1) |0,0;k\rangle = 0 & \longleftrightarrow [L_0, V_\phi(z, \bar{z}; k)] = V_\phi(z, \bar{z}; k) \\
 (\tilde{L}_0 - 1) |0,0;k\rangle = 0 & \longleftrightarrow [\tilde{L}_0, V_\phi(z, \bar{z}; k)] = V_\phi(z, \bar{z}; k)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} (L_0 - 1) |0,0;k\rangle = 0 \\ (\tilde{L}_0 - 1) |0,0;k\rangle = 0 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{tiene} \\ \text{pesos} \\ \text{conformes} \end{array}$$

p. 214  $\rightarrow h=1, \tilde{h}=1$

(esto último es consistente con lo que aprendimos en la Tarea 2: el operador  $:\exp[ik \cdot X(z, \bar{z})]:$  tiene pesos conformes  $(h, \tilde{h}) = \frac{\alpha'}{4}(k^2, k^2)$ , que en efecto se reducen a  $(1, 1)$  usando la condición de capa de masa para el taquión,  $k^2 = 4/\alpha' \leftrightarrow m^2 = -4/\alpha'$ ).

Bajo una transformación conforme  $z \rightarrow z'(z)$ , tenemos entonces (p. 216)

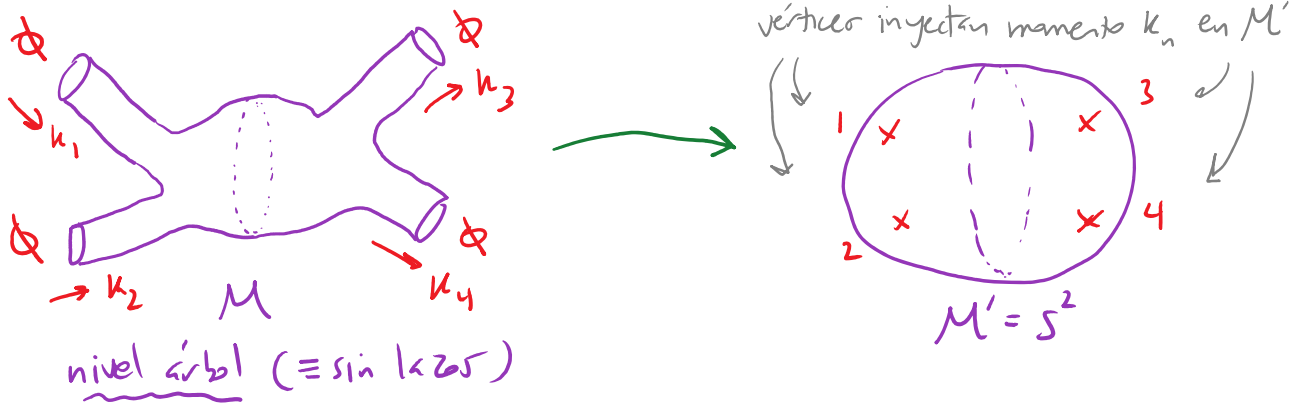
$$V_\phi(z, \bar{z}) \rightarrow V'_\phi(z', \bar{z}') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}\right)^{-1} V_\phi(z, \bar{z}),$$

y por tanto

$$V_\phi(k) \equiv N_\phi \int d^2z V_\phi(z, \bar{z}; k) \text{ es } \underline{\underline{\text{invariante conforme.}}}$$

$\hat{\uparrow}$  cte. de normalización

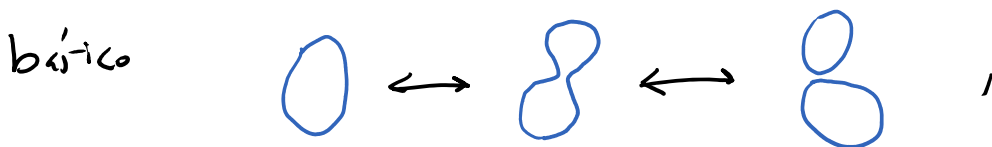
Esta versión integrada del vértice es entonces la que usaremos en el cálculo de amplitudes de dispersión, para respetar las simetrías locales en la hoja de mundo (y tenemos por tanto aquí otra manera de entender por qué  $a=1=\tilde{a}$ ):



$$M^{(0)}(k_1, \dots, k_4) \sim \int_{S^2} DX^\mu(z, \bar{z}) \Big|_{S^2} e^{-S_p[X]} \prod_{\alpha} V_{\alpha}(k_{\alpha})$$

La integral  $\int d^2 z_n$  contenida dentro de cada  $V_n$  es parte de la suma sobre todos los procesos posibles (salvo por una sutileza que veremos más adelante).

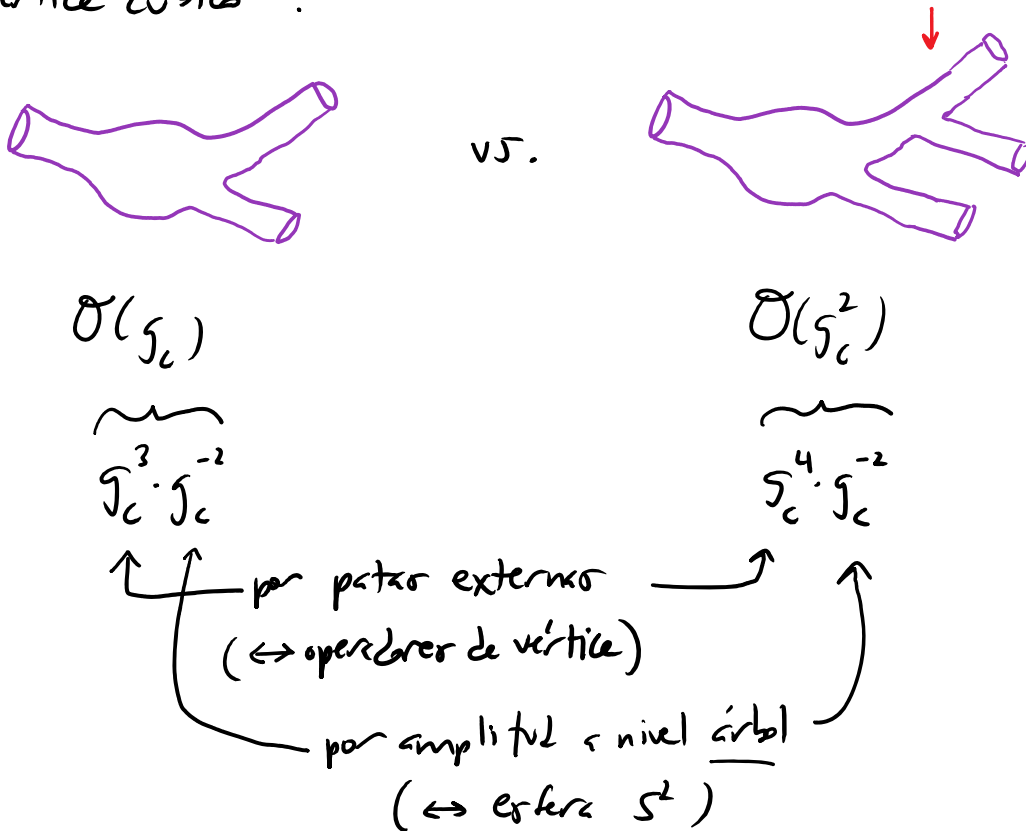
Notar que, si definimos la constante de acoplamiento de cuerdas  $g_c$  como el número adimensional que determina la amplitud de probabilidad del proceso de interacción



y controla por tanto la expansión perturbativa (de



modo que la teoría esté débilmente acoplada si  $g_c \ll 1$ , entonces debemos tener  $N_d \propto g_c$ , porque cada patra externa adicional en un diagrama requiere la presencia de un nuevo "vértice cúbico":



Fijaremos una convención precisa para  $N_d$  y demás constantes de normalización más adelante.

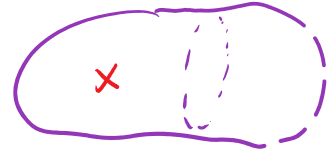
Otro ejemplo sería el operador de vértice para el gravitón

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\mu\nu} \propto \alpha_{-1}^{\mu} \alpha_{-1}^{\nu} |0,0;k\rangle &\stackrel{p.318}{\longleftrightarrow} V_h(\bar{z}, z; k, \epsilon) \equiv : \epsilon_{\mu\nu} \partial X^{\mu} \bar{\partial} X^{\nu} e^{ik \cdot X}(\bar{z}, z) : \\
 \uparrow \text{simétrico} & \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{dejar } (i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}})^2 \text{ para } N_h
 \end{aligned}$$

$$V_h(k, \epsilon) \equiv N_h \int d^2z V_h(z, \bar{z}; k, \epsilon),$$

↑ también  $\propto g_c$

que si insertarse en una hoja de mundo, inyecta momento y la vibración apropiada.



De manera similar, podemos escribir el operador de vértice para cualquier estado de la cuerda (en lo que a los  $X^\mu$  respecta). En todos los casos, las condiciones de estado físico se traducen en que el operador de vértice correspondiente es primario y con pesos conformes  $h=1=\tilde{h}$ . P.ej., de la

Tarea 2 sabemos que  $V_h(z, \bar{z}; k, \epsilon)$  efectivamente es primario solo si  $k^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0$ , y tiene pesos conformes

$$(h, \tilde{h}) = \left( \frac{\alpha' k^2}{4} + 1, \frac{\alpha' k^2}{4} + 1 \right) = (1, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{solo si } k^2 = 0. \end{array} \right.$$

Con un procedimiento análogo podemos determinar el mapeo estado-operador para los fonones: sabemos que

$$b_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} b(z) \quad \left( \Leftrightarrow b(z) = \sum_m \frac{b_m}{z^{m+2}} \right)$$

$$c_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m-2} c(z) \quad \left( \Leftrightarrow c(z) = \sum_m \frac{c_m}{z^{m-1}} \right),$$

así que

$$b_m |\Psi_1\rangle = 0 \quad \forall m \geq -1, \quad c_m |\Psi_1\rangle = 0 \quad \forall m \geq 2.$$

Inferimos entonces que

$$\boxed{|\Psi_1\rangle = b_{-1} |\downarrow\rangle} \quad (\text{recorder que } \{b_m, c_n\} = \delta_{m,-n}).$$

Podemos similarmente deducir que

$$\boxed{b_{-m} \leftrightarrow \frac{1}{(m-2)!} \partial^{m-2} b(0) \quad \forall m \geq 2, \quad c_{-m} \leftrightarrow \frac{1}{(m+1)!} \partial^{m+1} c(0)}$$

(y que, nuevamente, aplicaciones sucesivas de los modos de creación se traducen en el producto de los operadores correspondientes en orden normal en forma).

Así que, en particular,

$$|\downarrow\rangle = c_1 \underbrace{b_{-1}}_{\leftrightarrow 1} |\downarrow\rangle \quad \longleftrightarrow \quad c(0),$$

y por tanto, los representantes de las clases de equivalencia

$$|\Psi_{V_x}\rangle \sim |\downarrow\downarrow\rangle \quad \longleftrightarrow \quad V_x(0,0) c(0) \tilde{c}(0).$$

Construido solo en  $X^m$

Conviene notar que si  $V_x(z, \bar{z})$  corresponde a un estado

físico (primario en pesos conformes  $(h, \tilde{h}) = (1, 1)$ ), entonces (dado que  $c(z)$  tiene pesos  $(-1, 0)$  y  $\tilde{c}(\bar{z})$  tiene pesos  $(0, -1)$ ) la combinación  $c(z)\tilde{c}(\bar{z})V_X(z, \bar{z})$  es invariante conforme (justo como  $V_X \equiv \int d^2z V_X(z, \bar{z})$ ). Usaremos esto más adelante.

Resumiendo lo dicho hasta aquí, nuestra receta básica para calcular amplitudes de dispersión (más específicamente, el elemento de matriz invariante) es

$$M(k_1, k_2, \dots, k_N) = \sum_{\mathcal{M}} M_{\mathcal{M}}(k_1, k_2, \dots, k_N),$$

$$\text{con } M_{\mathcal{M}}(k_1, \dots, k_N) \equiv \int \frac{\mathcal{D}g_{ab}(\sigma) \mathcal{D}X^{\mu}(\sigma)}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} \Big|_{\mathcal{M}} e^{-S_p[g, X]} V_1(k_1) \dots V_N(k_N) \\ \equiv \langle V_1(k_1) \dots V_N(k_N) \rangle_{\mathcal{M}}$$

$$V_n(k) = N_n \int d^2\sigma \sqrt{g} V_i(\sigma; k)$$

Invariante bajo  $\text{Dif} \times \text{Weyl}$

( $\Rightarrow$  invariante conforme en norma plana)

Hemos visto que esto requiere en particular  $k^2 = -m^2$

$O_1$  en términos de diagramas,

$$\begin{aligned}
 &= \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \dots \\
 &= \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \dots \\
 &= \langle V_1 \dots V_N \rangle_{S^2} + \langle V_1 \dots V_N \rangle_{T^2} + \dots
 \end{aligned}$$

De esta forma, ¡¡calculando correladores en una teoría de campo libre 2-dimensional podremos determinar amplitudes de dispersión en una teoría interactuante D-dimensional que incluye a la gravedad !!

Hagamos aquí una pausa para resaltar una conexión interesante. Hasta ahora hemos identificado al gravitón libre (en  $D=26$ )

$$\epsilon_{\mu\nu} \propto \alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} |0,0;k\rangle$$

← incluye  $\frac{2}{\alpha'}$

$$\leftrightarrow V_h(k, \epsilon) = N_h \int d^2z \epsilon_{\mu\nu} : \partial X^{\mu} \bar{\partial} X^{\nu} e^{ik \cdot X}(z, \bar{z}) :$$

con base en sus propiedades de transformación bajo Poincaré (masa cero, espín 2). Con la receta para amplitudes de dispersión, podremos próximamente verificar que estos 'gravitones' realmente interactúan como Einstein predice (salvo pequeñas correcciones, relevantes solo a altas energías).

Pero, aún así, lo que no queda del todo claro es en qué sentido este estado de oscilación de la cuerda tiene que ver con el gravitón entendido como una pequeña fluctuación de la geometría. Esto se aclara si notamos que cuando la métrica del espaciotiempo es

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x),$$

tenemos

$$\begin{aligned} S_p^g[X] &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu g_{\mu\nu}(X) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu \eta_{\mu\nu}}_{S_p[X]} + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu h_{\mu\nu}(X), \end{aligned}$$

por lo que la integral funcional relevante es

$$\int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_p^g[X]} = \int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_p[X]} \left( 1 - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z h_{\mu\nu}(X) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu + \dots \right).$$

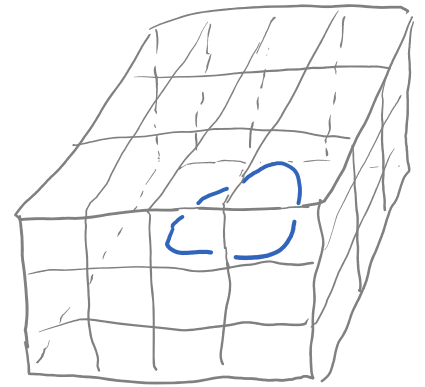
Tomando 1 solo modo de Fourier,  $h_{\mu\nu}(X) = \epsilon_{\mu\nu}(k) e^{ik \cdot X}$ ,  
 i venimos que lo que aparece en el integrando es precisamente  
el vértice del gravitón  $V_h(k, \epsilon)$ !

Sabemos ya que insertar 1 vértice  $V(k, \epsilon)$  corresponde a  
 agregar 1 gravitón  $\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0, 0; k\rangle$ , así que insertar  
 $e^{-V_h(k, \epsilon)}$  corresponde a agregar una especie de estado

coherente de gravitones  $\sim \exp(-\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0, 0; k\rangle)$   
 ( $\neq \exp(-\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu) |0, 0; k\rangle$ , que sería 1 único cuerdo  
 excitado en un estado coherente de oscilación, es decir,  
 un estado coherente desde la perspectiva 2-dimensional),  
 Y, con lo que acabamos de ver, aprendemos entonces que  
 un fondo con métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  no trivial en verdad puede  
 entenderse como un estado coherente de gravitones.

De manera similar, la receta para describir cuerdas que

se propagan sobre un fondo no trivial de cualquier de los infinitos campos asociados a estados de vibración de las cuerdas ( $\Phi(x)$ ,  $g_{\mu\nu}(x)$ ,  $B_{\mu\nu}(x)$ ,  $\varphi(x)$ , ...) es exponencial los operadores de vértice correspondientes. Verificamos entonces la interpretación ya enfatizada en varios puntos a lo largo del curso, donde entendemos a las cuerdas como pequeñas excitaciones de una estructura subyacente que representa una drástica generalización del espaciotiempo.



(No debe confundirse el hecho de que tenemos cuerdas propagándose sobre un fondo que a su vez está, en cierto sentido, "hecho" de cuerdas. Esta situación es exactamente análoga a la de fotones propagándose a través de, p.ej., el campo magnético terrestre. En ambos casos, estamos hablando de pequeñas fluctuaciones por encima de un valor de fondo no trivial para el campo correspondiente.)



Regresando a las amplitudes de dispersión, hemos visto que debemos sumar sobre superficies  $M$  compactas y conexas (para obtener la parte conexas de la amplitud); pero ¿exactamente de qué tipo?

En los viejos tiempos, antes de que se descubrieran las D-branas, la respuesta a esta pregunta habría dependido de y definido a exactamente cual teoría de cuerdas bosónicas estamos considerando. Más concretamente, pensábamos que existían (al menos) 4 teorías de cuerdas bosónicas distintas:

### 1) Cuerdas Bosónicas Cerradas Orientadas



Espectro libre:  $\phi$ ;  $\varphi$ ,  $h_{\mu\nu}$ ,  $B_{\mu\nu}$ ; ...

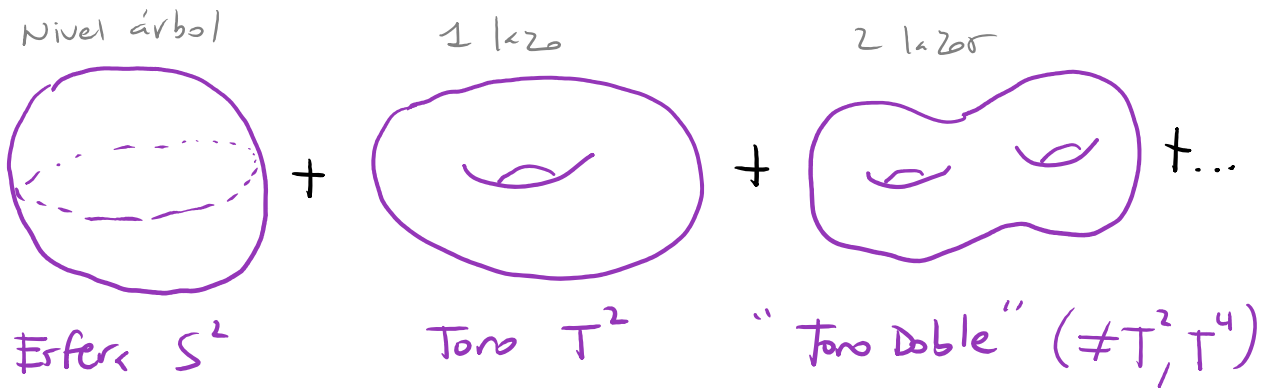
$\underbrace{\hspace{10em}}_{m^2 = -4/\alpha'}$     
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{m^2 = 0}$     
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{m^2 = 4/\alpha', \dots}$

↓ sola interacción: (ó )

Correspondiente al diagrama

Así que en este caso, la expansión perturbativa consiste

de una suma sobre superficies orientables y sin bordes:



Genero  $m=0$

$m=1$

$m=2$

$\uparrow \equiv$  número de 'manijas'

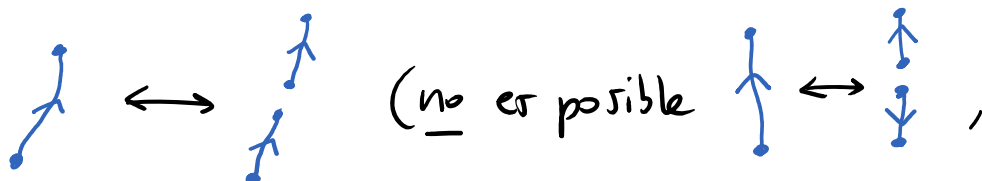
2) Cuerdas Bosónicas Abiertas y Cerradas Orientadas

(donde en los viejos tiempos se consideraba solo el caso invariante de Poincaré, con las cuerdas abiertas libres de moverse en  $D=26$ ).

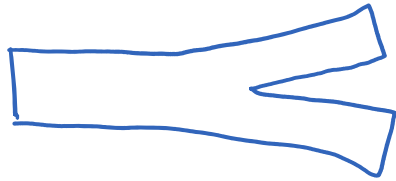
Espectro libre:  $\phi, \phi; A_\mu, \psi, h_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}; \dots$

$m^2 = -4/\alpha' \quad -1/\alpha' \quad 0 \quad 1/\alpha', 2/\alpha', \text{etc.}$

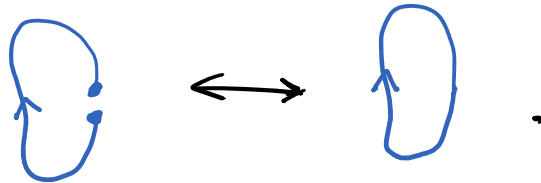
La interacción básica para las cuerdas abiertas es



así que los 2 extremos de la cuerda abierta NO son físicamente equivalentes), correspondiente al diagrama

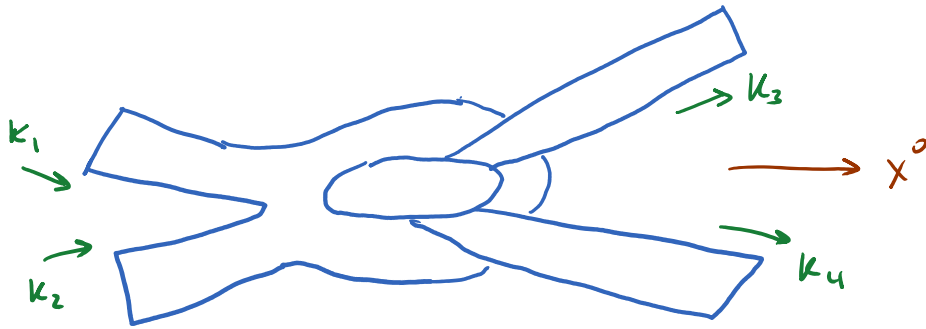


Importantemente, debido que la posibilidad de que 2 extremos se unan es un proceso puramente local, en automático queda incluido también el proceso

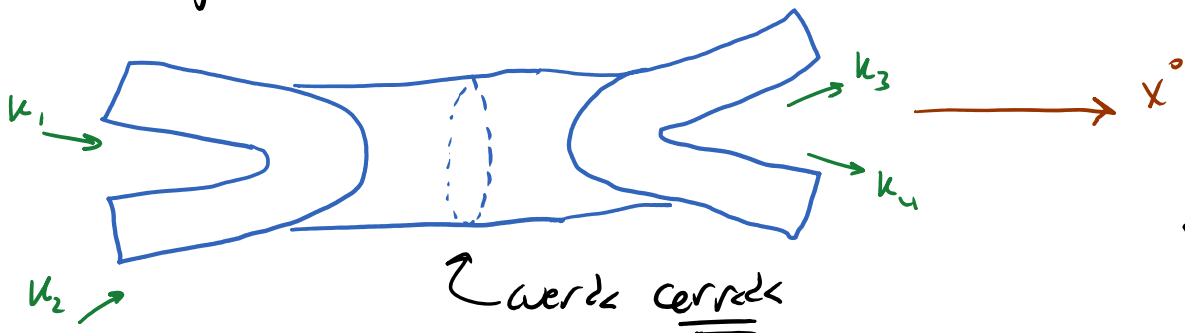


Descubrimos entonces que no puede existir una teoría de cuerdas abiertas (interactuantes) sin cerradas! Y esto implica en particular que cualquier teoría de cuerdas inevitablemente incluye a la gravedad.

Otra manera de decir esto mismo es que un proceso de dispersión "no planar" de dispersión a 1 lazo en cuerdas abiertas en el espaciotiempo, como p.ej.



tiene la misma topología, y por tanto es descrito con la misma hoja de mundo  $M$  que



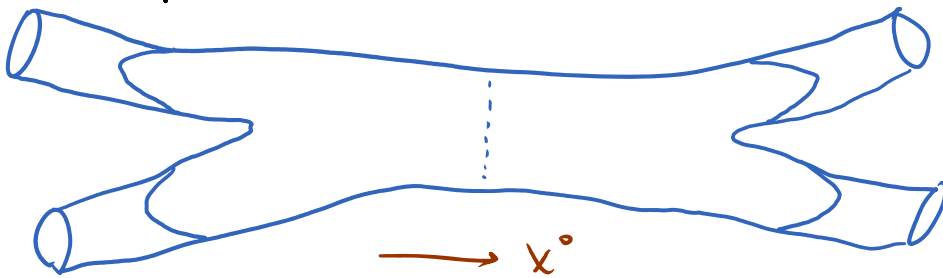
La integral  $\int DX^\mu(\sigma) |_{\mathcal{M}} e^{-S_p[X]} V_1(k_1) \dots$  incluye inevitablemente ambos procesos, y por esta razón, al hacer el cálculo se encuentra que dicha amplitud de cuerdas abiertas tiene polos cuando la energía en el marco del centro de masa

$$s \equiv -(k_1 + k_2)^2 = -\frac{4}{\alpha'}, 0, \frac{4}{\alpha'}, \dots, \text{ que coinciden}$$

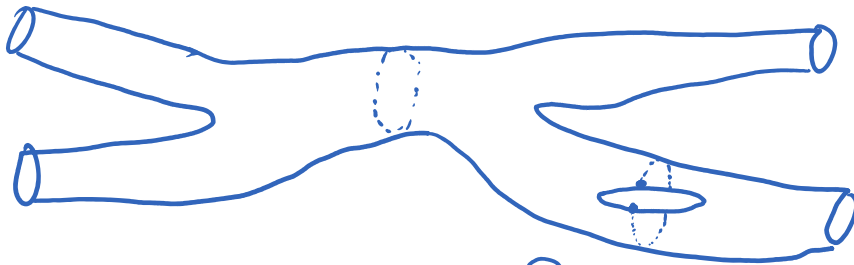
justamente con el espectro de cuerdas cerradas. Esto establece "experimentalmente" la existencia de las cuerdas cerradas, que deben entonces incluirse en la teoría como estados asintóticos (la conexión entre



valor y estado asintótico de 1 partícula es bien conocido en teoría de campos: Källen-Lehmann). 112: 23/04/13

Podemos notar además que estos cuerdos cerrados NO son libres, porque cuando menor pueden interactuar convirtiéndose primero en cuerdos abiertos:



Y de hecho, la integral  $\int \mathcal{D}X^\mu(\sigma) \big|_{\mathcal{M}} e^{-S_p[X]} \mathcal{V}_1(k_1) \dots$  que describe este proceso incluye también p.ej.

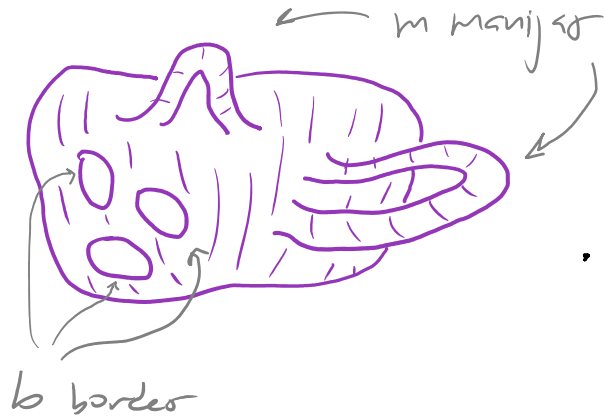


así que la interacción   $\leftrightarrow$   no es opcional.

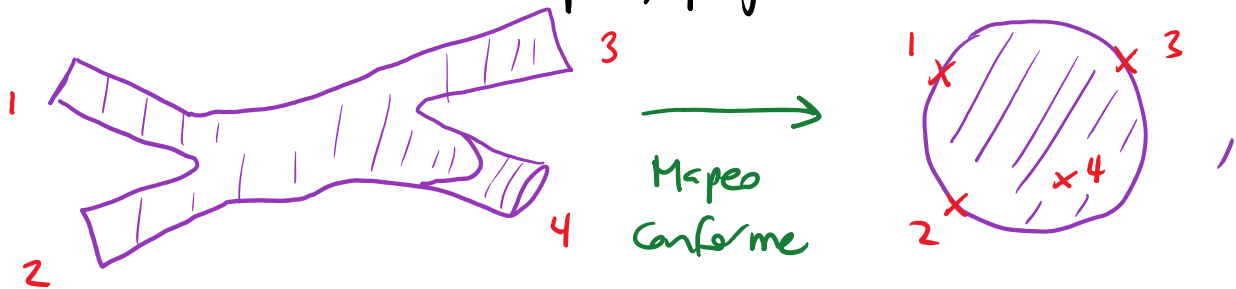
En esta teoría, entonces, la expansión perturbativa consiste de la suma sobre superficies orientables, con o sin bordes:



$$= \sum_{m,b=0}^{\infty}$$



Podemos notar además que, p.ej.



es decir, mientras que los vértices de cuerda cerrada se insertan en el interior de la hoja de mundo  $M$ , los de

cuerda abierto se insertan en el borde. En ambos casos, integramos sobre sus posibles ubicaciones en  $M$ .

A partir de esto podemos entender por qué los 2 extremos de una cuerda abierta son físicamente distintos. Como verificaremos en la Tarea 4, en el caso de la cuerda abierta el mapeo estado-operador identifica al operador de vértice para el fotón

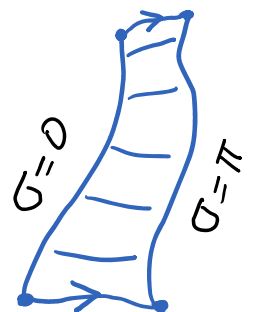
$$\varepsilon_{\mu}^{\nu} \alpha_{-1}^{\mu} (0; k) \iff V_A(z, \bar{z}) = \varepsilon_{\mu}^{\nu} : \frac{1}{2} (\partial + \bar{\partial}) X^{\mu} e^{ik \cdot X} (z, \bar{z}) :$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{V}_A(k; \varepsilon) &= \mathcal{N}_A \int \mathcal{D}z \varepsilon_{\mu}^{\nu} : \frac{1}{2} (\partial + \bar{\partial}) X^{\mu} e^{ik \cdot X} (z, \bar{z}) : \\ &= \mathcal{N}_A \int \mathcal{D}\tau \varepsilon_{\mu}^{\nu} : e^{ik \cdot X} \partial_{\tau} X^{\mu}(\tau) : \end{aligned}$$

Así que la receta para describir a la cuerda en un fondo no trivial del campo electromagnético  $A_{\mu}(x)$  es agregar a la acción el término de borde

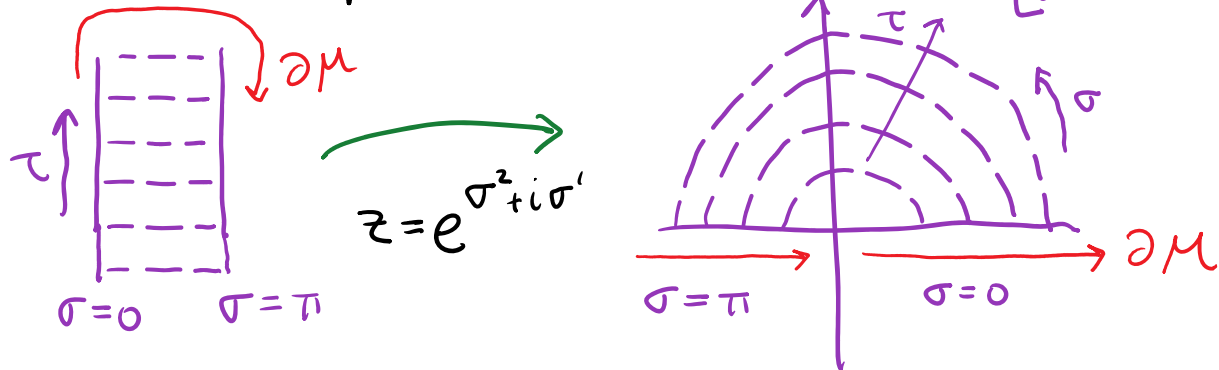
$$S_A = \int_{\partial M} \mathcal{D}\tau A_{\mu}(X(\tau)) \partial_{\tau} X^{\mu}$$

Esto nos dice que los extremos de la



cuerdas son cargas puntuales bajo  $A_\mu(x)$ .

Recordando que la frontera  $\partial M$  es

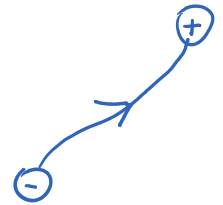


Vemos que

$$\int_{\partial M} \tau A_\mu \partial_\tau X^\mu = + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [A_\mu \partial_\tau X^\mu]_{\sigma=0} - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [A_\mu \partial_\tau X^\mu]_{\sigma=\pi}$$

así que los extremos tienen cargas eléctricas

opuestas (que se neutralizan entonces al juntarse).



Solo hay carga eléctrica de 1 tipo, como corresponde al grupo de norma abeliano  $U(1)$ .

Desde los 70s se conoció el modo de generalizar al caso no abeliano: basta con postular (a modo) la existencia de  $N$  tipos distintos de extremos finales

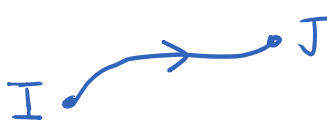
( $\leftrightarrow$   $N$  tipos de cargas; p.ej. con  $N=3$  el extremo final sería análogo a un quark  $\left( \begin{matrix} \text{rojo} \\ \text{verde} \\ \text{azul} \end{matrix} \right)$ ),



y los correspondientes  $N$  tipos distintos de extremos iniciales ( $\leftrightarrow N$  'anticargas'; en el ejemplo  $N=3$ , el extremo inicial sería

análogo a un antiquark  $\begin{pmatrix} \text{antirrojo} \\ \text{antiverde} \\ \text{antiazul} \end{pmatrix}$ ).

Con esto agregamos nuevos grados de libertad a la cuerda, localizados en los extremos. Declaramos que estos grados de libertad son internos y no dinámicos, de manera que preservemos automáticamente la invariancia bajo Poincaré y la invariancia conforme.

Para especificar por completo el estado de una cuerda, debemos ahora elegir valores  $1 \leq I, J \leq N$  para los extremos inicial y final:   $I \rightarrow J$

$$\left\langle \alpha_{-n_1}^{\mu_1} \alpha_{-n_2}^{\mu_2} \dots | \dots ; k ; I, J \right\rangle$$

La combinación lineal más general es entonces

$$| \dots ; k ; \lambda \rangle \equiv \sum_{I, J} \lambda_{I, J} | \dots ; k ; I, J \rangle$$

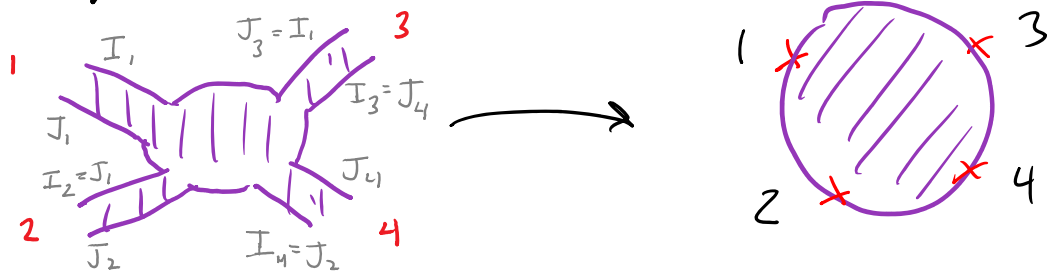
Factor de Chan-Paton

Los campos resultantes son por tanto matrices  $N \times N$ . P.ej,

$$\alpha_{-1}^M |0; k; IJ\rangle \leftrightarrow (A_N^{(x)})_{IJ}$$

(o, si preferimos,  $A_N^{(x)} \equiv \sum_a A_N^a(x) T^a$ , con las  $T^a$  una base para matrices  $N \times N$ , p.ej.,  $N^2$  matrices hermiticas con  $\text{Tr}(T^a T^b) = \delta^{ab}$ ).

Las amplitudes



incluirán factores  $\sim \text{Tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$  Factores de Chan-Paton  
y son entonces invariantes bajo

$$U(N): \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1' \\ 2' \\ \vdots \\ N' \end{pmatrix}.$$

En el espaciotiempo tenemos al campo de norma  $A_\mu(x)$  (que transforma en la rep. adjunta), así que  $U(N)$  figura en nuestra teoría como una

simetría local.

Desde la perspectiva antigua, entonces, basada en estos factores de Chern-Pon abstractos, habríamos contabilizado infinitos teorías distintas de cuerdas abiertas y cerradas orientadas, con grupo de norma  $U(N)$ ,  $N=1,2,3,\dots$ . Y el caso donde solo hay cuerdas cerradas puede añadirse a la lista como  $N=0$ .

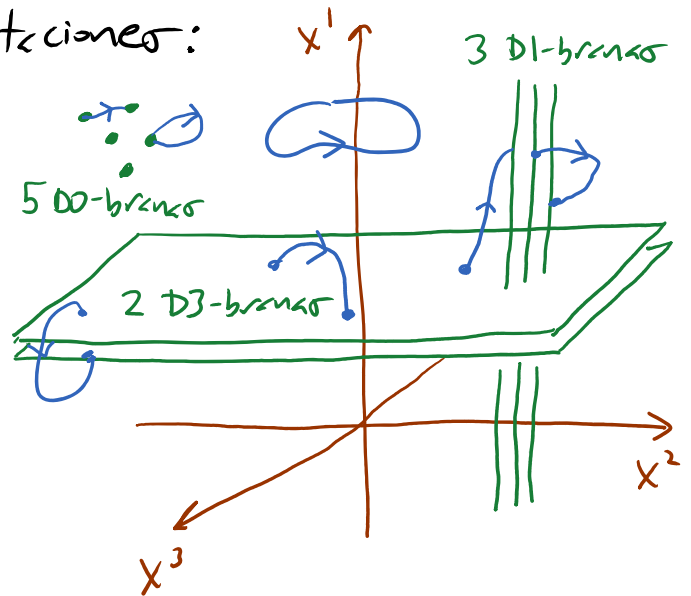
Pero nosotros entendemos bien que éstas no son en realidad distintas teorías, sino distintos sectores de una misma teoría, donde tenemos  $N$  D25-branas presentes.

Los índices de Chern-Pon simplemente nos informan en cual de los  $N$  D-branas inicia/termina la cuerda abierta en cuestión (p.256).

Y, de lo más de esto, entendemos también que existe un número infinito de sectores adicionales de la misma teoría, donde se tienen  $D_p$ -branas con distintos

dimensionalidades y/u orientaciones:

(En la visión antigua, éstos habrían sido considerados teorías distintas — aunque no eran de interés por violar Poincaré.)



El hecho (p.332) de que las cuerdas abiertas se puedan convertir en cerradas y viceversa nos indica que las D-branas pueden interactuar con el espaciotiempo cerrado.

### 3) Cuerdas Bosónicas Cerradas No Orientadas

$S_p[X]$  y las 2 constricciones son invariantes bajo la transformación de paridad en la hoja de mundo,

$$\Omega: \sigma \rightarrow 2\pi - \sigma, \text{ es decir, } \bar{z} \leftrightarrow \bar{z}$$

que es simplemente una reparametrización, pero invierte la orientación de la cuerda. Dado que  $\Omega^2 = 1$ ,  $\Omega$  tiene eigenvalores  $\pm 1$ .

$$\text{Si fijamos } \Omega |0,0;k\rangle = + |0,0;k\rangle,$$

entonces usando  $\Omega : \alpha_n^\mu \leftrightarrow \tilde{\alpha}_n^\mu$  tenemos, p.ej.;

$$\Omega \varepsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle = \varepsilon_{\nu\mu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle.$$

Obtenemos la teoría no orientada truncando la teoría original al subespacio de estados con  $\Omega = +1$ :

$$|fís\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(1+\Omega)|fís\rangle$$

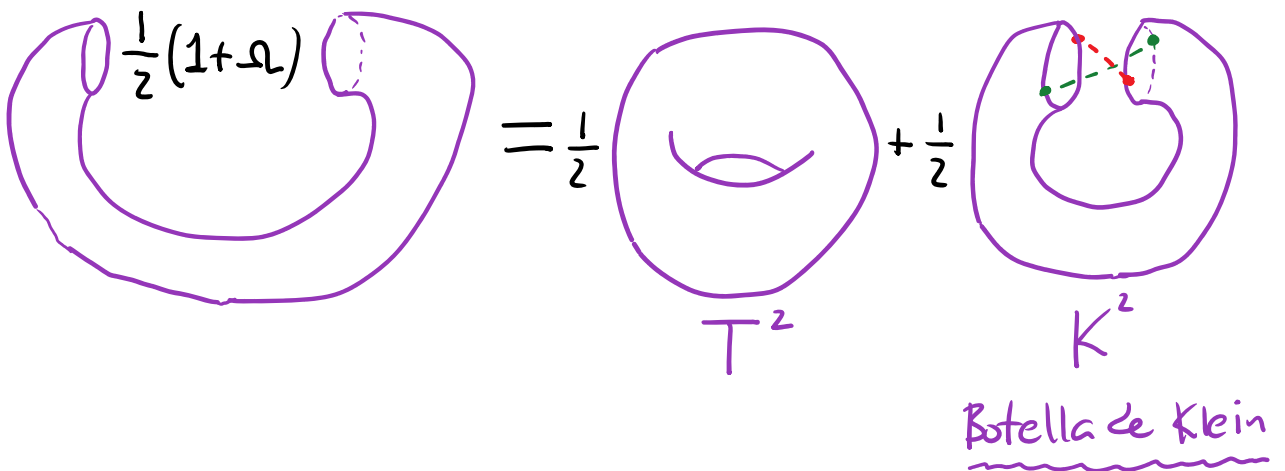


El espectro libre es entonces

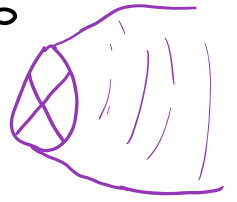
$$\underbrace{\alpha}_{m^2 = -4/\alpha'} ; \underbrace{h_{\mu\nu}, \cancel{B}_{\mu\nu}, \psi}_{m^2 = 0} ; \dots$$

Esta proyección define una teoría consistente, gracias a que las interacciones conservan  $\Omega$ .

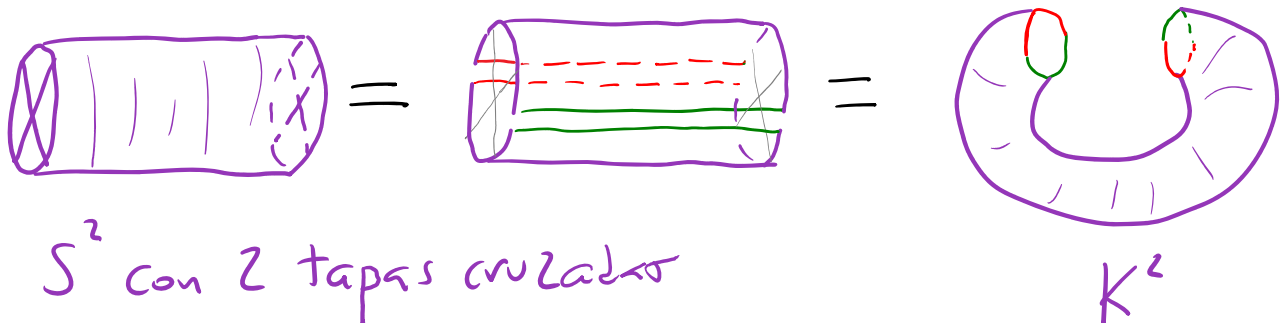
Para eliminar a los estados con  $\Omega = -1$  en los lazos, debemos incluir superficies no orientables:



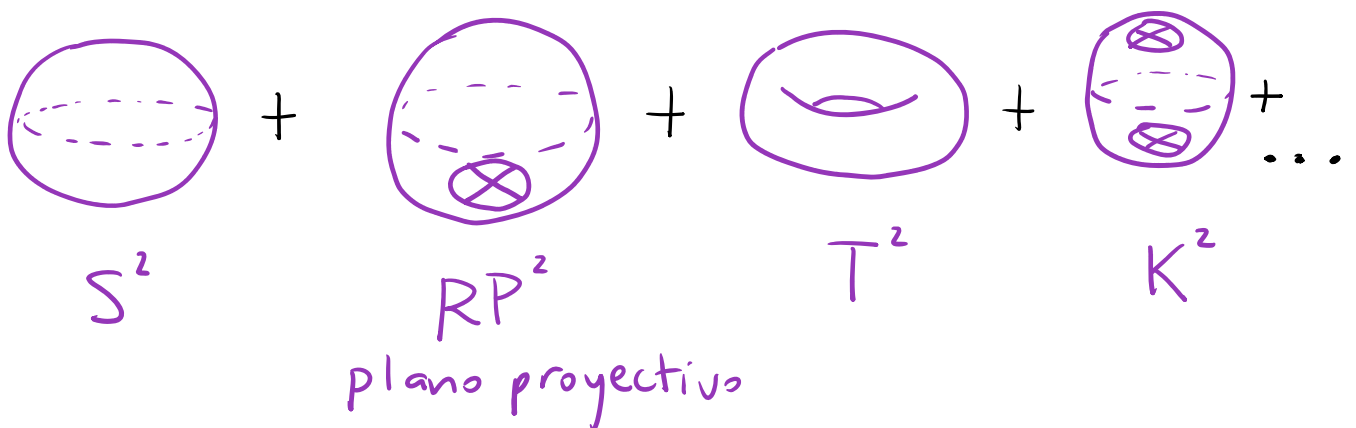
Para caracterizar superficies no orientables conviene definir una tapa cruzada ("crosscap") como un círculo en el cual se identifican los puntos diametralmente opuestos.



Tenemos p.ej.



La suma sobre superficies sin bordes, orientables o no, que necesitamos para la expansión perturbativa de esta teoría



Se puede expresar (usando  $m=0, c=3 = m=1, c=1$ ) como

$$\sum_{m=0}^{\infty} \text{[Diagram of genus } m \text{ surface]} + \sum_{c=1}^{\infty} \text{[Diagram of genus } c \text{ surface with } c \text{ handles]} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{c=0,1,2} \text{[Diagram of genus } m \text{ surface with } c \text{ handles]}$$

#### 4) Cuerdas Abiertas y Cerradas No Orientadas



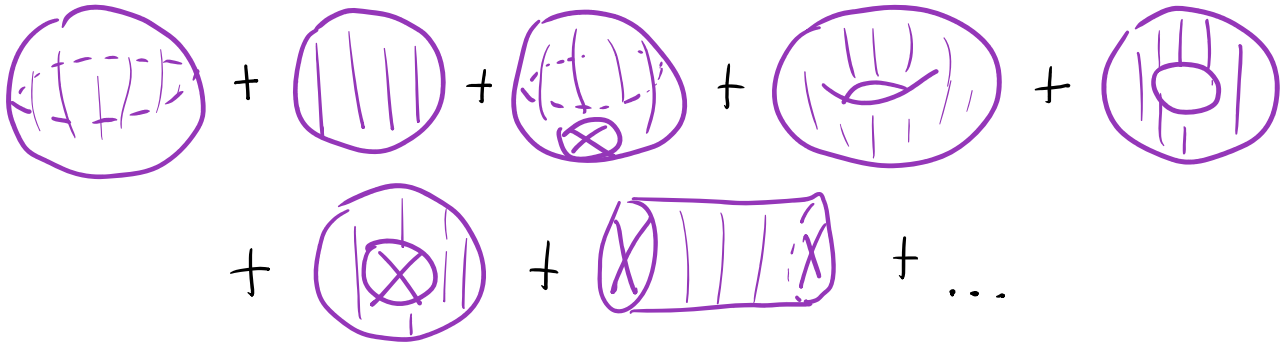
Para la cuerda abierta,  $\Omega: \sigma \rightarrow \pi - \sigma$

$$z \leftrightarrow -\bar{z}$$

$$X^{\mu} \sim \sum_n \frac{\alpha_n^{\mu}}{n} (z^{-n} + \bar{z}^{-n}) \Rightarrow \alpha_n^{\mu} \leftrightarrow (-1)^n \alpha_n^{\mu}$$

Espectro:  $\alpha; \phi; \cancel{A_{\mu}}, h_{\mu\nu}, \cancel{B_{\mu\nu}}, \varphi; \dots$

La expansión perturbativa involucra suma sobre todas las superficies (con o sin bordes, orientables o no):



Cinta de Moebius  $M^2$

$$\equiv \sum_{m,b=0}^{\infty} \text{Diagram}(m,b) + \sum_{c=1,b=0}^{\infty} \text{Diagram}(c,b)$$

The first diagram in the sum shows a sphere with  $m$  handles (represented by loops) and  $b$  punctures (represented by small circles). The second diagram shows a sphere with  $c$  handles (represented by loops with crosses) and  $b$  punctures.

Notar que  $A_M$  sobrevive si agregamos factores de Chan-Paton, es decir, D-branas: sistemas que

$$\Omega |N; k; I, J\rangle = (-1)^N |N; k; J, I\rangle$$

eigenvalor del  
"operador de número"  
(=1 por  $A_M$ )

$$\Rightarrow \Omega \sum_{I,J=1}^N \lambda_{IJ} \alpha_{-1}^M |0; k; I, J\rangle$$

$$= - \sum_{I,J} \lambda_{JI} \alpha_{-1}^M |0; k; I, J\rangle,$$

estado que sobrevive si  $\lambda_{IJ} = -\lambda_{JI}$ . Así que el grupo de norma asociado a  $N$  D-branas en el caso de una teoría no orientada es  $SO(N)$  en lugar de  $U(N)$ .



acción no trivial sobre extremos

(Proyectando con  $\omega \equiv \Omega \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{1}_{N/2} \\ -i\mathbb{1}_{N/2} & 0 \end{pmatrix}$   
se obtiene el grupo de norma  $Sp(N/2)$ .)

Justo como entendimos que los tipos 1) y 2) de teorías de cuerdas son simplemente distintos sectores de una misma teoría, que difieren por la presencia o ausencia de D25-branas, nos queda claro que los tipos 3) y 4) están igualmente conectados.

A estas alturas podemos hablar entonces de que existen solo 2 tipos de teorías de cuerdas básicas: orientadas y no orientadas. Como entenderemos en más detalle el próximo semestre, éstas también son en realidad una misma teoría, que difieren por la ausencia o presencia de un objeto adicional (no dinámico) conocido como un 25-plano de orientidad ("orientifold"). Más en general, una orientidad es un espacio con hiperplanos  $p$ -dimensionales que funcionan como espejos, implementando  $\Omega$  (y algunas simetrías discretas).

Ahora que hemos terminado con la enumeración de los  
hojas de mundo  $M$  relevantes para cada una de las  
"distintas" teorías de cuerdas bosónicas, consideremos  
de nuevo al parámetro que controla la expansión  
perturbativa. Parecería que debemos agregar

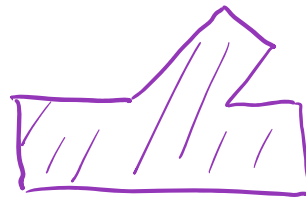
a mano constantes de acoplamiento



$g_c$

para la  
interacción  
de cuerdas

cerradas, y



$g_a$

para la  
interacción  
de cuerdas

abiertas,

lo cual implicaría que

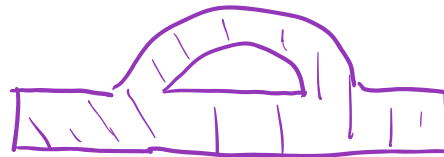
agregar una manija



$\propto g_c^2$

y

agregar un borde



$\propto g_a^2$ .

Pero de hecho, la teoría contiene ya su propia  
receta. Recordemos de las pp. 133-35 que podemos

agregar a  $S_p[g, X]$  la acción gravitacional usual

$$S_{\chi}[g] \equiv \Phi_0 \left( \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{g} R}_{\text{Einstein-Hilbert}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds K}_{\text{Gibbons-Hawking (-York)}} \right)$$

cte. de normalización  $\nearrow$

Einstein-Hilbert      Gibbons-Hawking (-York)

necesario en un espacio con frontera, para que el principio variacional esté bien definido

( donde  $ds \equiv d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}}$  es la distancia propia sobre  $\partial M$

y  $K \equiv -t^a n_b \nabla_a t^b$  la curvatura extrínseca de  $\partial M$

tangente unitaria  $\nearrow$  normal (hacia el exterior) unitaria  $\nearrow$ ),

SIN modificar la dinámica (y la equivalencia con  $S_{NG}[X]$ )

gracias a que

$$\frac{\delta S_{\chi}}{\delta g^{ab}} \propto \left( R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) = 0 \quad \text{identícamente en 2 dim.}$$

$S_\chi$  depende solo de la topología de  $M$ :

$$S_\chi = \Phi_0 \left( \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{g} R}_{M} + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds \kappa \right)$$

Teorema  
de Gauss-Bonnet

$$= \chi(M)$$

Número (o características)  
de Euler

$$\chi(M) \equiv V - A + C$$

# de  
vértices

# de  
aristas

# de  
caras

de poliedro  
homeomorfo a  $M$

P.ej.,

$$\chi(S^2) = \chi(\text{cubo}) = 8 - 12 + 6 = 2$$

( $\Leftrightarrow$  métrica usual  $g_{\theta\theta} = r^2$ ,  $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta \Rightarrow R = \frac{2}{r^2}$  ✓)

$$\chi(T^2) = \chi(\text{toro}) = 16 - 32 + 16 = 0$$

( $\Leftrightarrow$  sobre  $T^2$  es posible definir métricas con  $R=0$  ✓)

$$\chi(D^2) = \chi(\text{triángulo}) = 3 - 3 + 1 = 1 \quad (\Leftrightarrow R=0, \kappa=1 \quad \checkmark)$$

Resultado general:

$$\chi = 2 - 2m - b - c$$

manijas

bordes ↑

↑ tapas cruzadas

Así que incorporando  $S_\chi$ , las amplitudes de dispersión están pesadas con

$$e^{-\Phi_0 \chi} = e^{-2\Phi_0} (e^{\Phi_0})^{2m} (e^{\Phi_0})^b (e^{\Phi_0})^c$$

Podemos entonces identificar

$$g_c = e^{\Phi_0} = g_a^2$$

La expansión perturbativa tiene sentido solo si

$$g_c = e^{\Phi_0} \ll 1$$

Como ya habíamos señalado antes, la constante de acoplamiento correspondiente debe aparecer

también en la normalización de los vértices:

$$V_i \equiv N_i \int d\sigma^2 \sqrt{g} V_i \quad N_i \propto \begin{cases} g_c & i = \phi, h, \varphi, \dots \\ g_a & i = \phi, A_\mu, \dots \end{cases}$$

Podemos comprobar que estas reglas son consistentes con la unitariedad. Recordar que

$$\left. \begin{array}{l} S^t S = \mathbb{1} \\ S = \mathbb{1} + iT \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Z Im } \text{[diagrama de círculo con líneas]} = \sum_I \left( \text{[diagrama de círculo con líneas]} \right) \left( \text{[diagrama de círculo con líneas]} \right)$$

Teorema Óptico:  $\exists$  arte cuando estados intermedios van a la capa de masa

En teoría de cuerdas debemos tener p.ej.

$$\text{Z Im } \text{[diagrama de círculo con líneas]} = \sum_I \text{[diagrama de círculo con líneas]} \text{ I } \text{[diagrama de círculo con líneas]}$$

$$\Rightarrow \left( e^{\Phi_0} \right)^{-2+2} g_c^5 \propto \left( e^{\Phi_0} \right)^{-2} g_c^4 \left( e^{\Phi_0} \right)^{-2} g_c^5$$

$$\text{i.e., } e^{\Phi_0} \ll g_c \quad \checkmark$$

(Más adelante:  $\Phi_0$  resulta NO ser un parámetro libre de la teoría, sino el valor de fondo del dilataón  $\varphi(x) \dots$ )

Imponiendo exigido que los vértices  $V_i$  sean invariantes bajo  $\text{Dif} \times \text{Weyl}$ , esperaríamos poder fijar la norma en la integral de trayectoria para obtener

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab} \mathcal{D}X^{\mu}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} e^{-S_p[X, g]} \prod_i V_i$$

$$\stackrel{g = \check{g}}{=} \int \mathcal{D}_{\check{g}}^a c^a \mathcal{D}_{\check{g}}^b b_{ab} \mathcal{D}_{\check{g}} X^{\mu} e^{-S_p[X, \check{g}] - S_f[b, c, \check{g}]} \prod_i V_i$$

Pero, como ya habíamos anticipado, al considerar la estructura global de la hoja de mundo (en lugar de solo examinar la situación localmente, en un parche de coordenadas a la vez, que es lo que habíamos hecho hasta ahora), nos topamos en este procedimiento con 2 sutilezas:

1) Pueden existir simetrías que no se eliminan con la elección de norma  $g = \check{g}$ , es decir, transf. conformes

Transformación Conforme = Weyl  $\circ$  (Reparametrización Conforme)

que estén bien definidas globalmente en  $M$ ,

$\sigma^a \rightarrow \sigma'^a = \sigma^a + \delta \sigma^a(\sigma)$  tales que

$$\delta g_{ab} = \check{\nabla}_a \delta \sigma_b + \check{\nabla}_b \delta \sigma_a \propto \check{g}_{ab} \quad \text{Ec. de Killing Conforme}$$

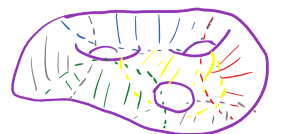
$\uparrow$  para que el efecto sea Weyl

(ec. de Killing usual  $\delta g_{ab} = \check{\nabla}_a \delta \sigma_b + \check{\nabla}_b \delta \sigma_a = 0 \leftrightarrow$  isometrías).

Definimos el grupo de Killing Conforme (GKC) como el grupo de transformaciones generadas por vectores (campos vectoriales) que satisfacen esta ecuación y están definidos globalmente.

El GKC es un subgrupo del "grupo" conforme local que habíamos discutido hasta ahora (y que tiene  $\dim = \infty$ ).

Por la exigencia de una definición global, existen vectores de Killing conformes solo para superficies suficientemente sencillas: aquellas con  $\chi \geq 0$ .





La lista exhaustiva es como sigue (veremos en detalle los casos orientables más adelante):

$$\chi=2: \quad \text{S}^2 \quad \text{GKC} = \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

(generado por  $L_0, L_{\pm 1}, \tilde{L}_0, \tilde{L}_{\pm 1}$ )

$$K \equiv \dim \text{GKC} = 6$$

$$\chi=1: \quad \text{D}^2 \quad \text{GKC} = \text{SL}(2, \mathbb{R}), \quad K=3$$

$$\text{RP}^2 \quad \text{GKC} = \text{SU}(2), \quad K=3$$

$$\chi=0: \quad \text{T}^2 \quad \text{GKC} = \text{U}(1) \times \text{U}(1), \quad K=2$$

$$\text{C}^2 \quad \text{GKC} = \text{U}(1), \quad K=1$$

$$\text{M}^2 \quad \text{GKC} = \text{U}(1), \quad K=1$$

$$\text{K}^2 \quad \text{GKC} = \text{U}(1), \quad K=1$$

En estos casos tendremos (ignorando por ahora la segunda sutileza)

$$\int \frac{Dg_{ab} DX^{\mu}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} e^{-S_p} \prod_i V_i = \int \frac{Dc^a D b_{ab} DX^{\mu}}{\text{GKC}} e^{-S_p - S_f} \prod_i V_i$$

$$\underbrace{\prod_i N_i \int d^2 \sigma_i \sqrt{g} V_i(\sigma_i)}$$

Dado que las transformaciones en GKC cambian las posiciones  $\sigma_i$  de los vértices  $V_i$ , es posible reinterpretar a  $K$  de las integrales  $\int d^2 \sigma_i$  como  $\int d(\text{GKC})$ , para cancelar al GKC en el denominador.

En otras palabras, podemos fijar la norma por completo dejando algunos  $V_i(\sigma_i)$  sin integrar. (Necesitaremos por supuesto determinar el jacobiano correspondiente.)

2) Pueden existir parámetros en la métrica  
que no se eliminan con las simetrías.

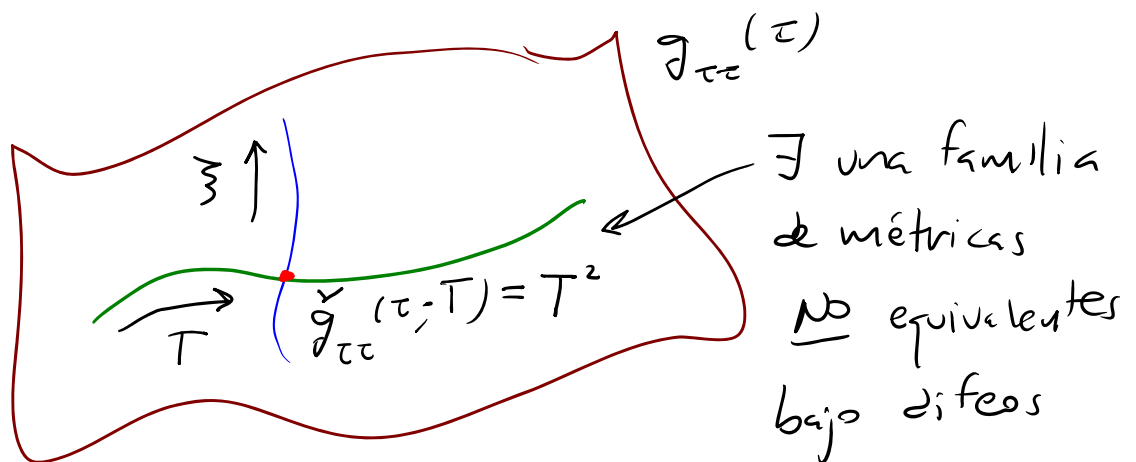
Esta posibilidad es completamente análoga a lo que sucedió en el caso de la partícula (pp. 102-3):

$$\left\{ \begin{array}{l} X^\mu(\tau) \\ g_{\tau\tau}(\tau) \end{array} \right. \quad \tau \in [0, 1]$$

podemos utilizar la invariancia bajo difeos para fijar la norma  $\dot{g}_{\tau\tau}(\tau) = \text{cte.}$ , pero dado que

$$T \equiv \int_0^1 d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}(\tau)} \quad \text{es invariante bajo difeos,}$$

tenemos necesariamente  $\text{cte.} = T^2$



Notar que, de hecho, podríamos transformar

$$\tau \rightarrow \tau'(\tau) = T\tau \quad \text{para obtener} \quad \int_{\tau'}^{\tau'} (\tau') = 1,$$

pero entonces  $\tau' \in [0, T]$ ,  $S[X] = \int_0^T d\tau' \dots$ ,

así que de cualquier manera hay que tomar en cuenta la existencia de distintos valores posibles para  $T$ :

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{\tau\tau}(\tau)}{\text{Dif}} \dots = \int_0^\infty dT \mu(T) \dots$$

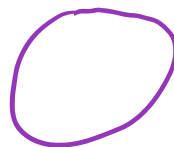
↑ Faddeev-Popov

donde la medida  $\mu(T)$  depende de la topología de líneas de mundo:

$$\mu(T) = 1 \quad \text{para}$$



$$\mu(T) = \frac{1}{T} \quad \text{para}$$

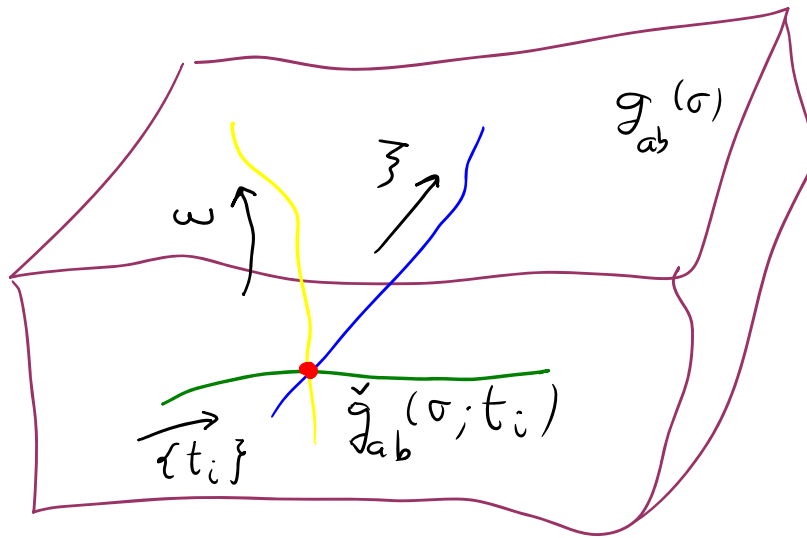


Con la cuerda sucede lo mismo: para una hoja de mundo dada, podemos escribir



$$g_{ab}(\sigma) = e^{\omega(\sigma)} \check{g}_{ab}(\sigma; t_i) \quad i=1, \dots, M$$

← módulos (parámetros)



← En general, existen métricas NO equivalentes bajo Dif x Weyl

y definir

$$M_M \equiv \frac{\text{Métricas}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}}$$

Espacio de Módulos

(M - dimensional)

||3:30/04/13

Justo como en el caso de la partícula, si preferimos podemos



asociar a los módulos no a la métrica sino a las coordenadas: en vez de una métrica definida globalmente  $\check{g}_{ab}(\sigma; t_i)$ ,

podemos usar  $\text{Dif} \times \text{Weyl}$  por separado

en cada región de coordenadas  $\alpha = 1, 2, \dots$ , para

llegar a la métrica plana  $ds_{(\alpha)}^2 = d\bar{z}_{(\alpha)} d\bar{z}_{(\alpha)}$ .

Las funciones de transición serán entonces

reparametrizaciones conformes  $\bar{z}_{(\alpha)} = f_{(\alpha\beta)}(\bar{z}_{(\beta)}; t_i)$ ,

que combinadas con Weyl pueden ser

reinterpretadas como transformaciones

conformes (la métrica no cambia).

En otras palabras, en 2 dimensiones


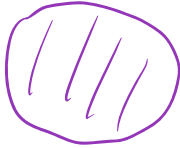

$\rightarrow$  Variedades Riemannianas  $\simeq$  Variedades Complejas.  
 incluye identificación por difeo Weyl ≡ Superficies de Riemann


Existe un teorema que relaciona el número de módulos  $M$  en una superficie dada con el número  $K$  de vectores de Killing conformes:


$$K - M = 3\chi$$

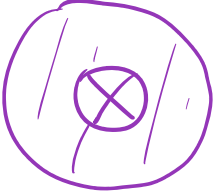
Teorema de Riemann-Roch


Tenemos entonces  $M = K - 3\chi$ , es decir (p. 354),

$\chi = 2 :$		$S^2$	$K = 6$	$\Rightarrow$	$M = 0$	}	Todas las $g^{(G)}$ son equivalentes bajo $\text{Dif} \times \text{Weyl}$
$\chi = 1 :$		$D^2$	$K = 3$	$\Rightarrow$	$M = 0$		
		$RP^2$	$K = 3$	$\Rightarrow$	$M = 0$		

$$\chi = 0 : \quad \text{torus} \quad T^2 \quad K=2 \Rightarrow M=2$$


$$\text{annulus} \quad C^2 \quad K=1 \Rightarrow M=1$$


$$\text{disk with cross} \quad M^2 \quad K=1 \Rightarrow M=1$$



$$\text{cylinder} \quad K^2 \quad K=1 \Rightarrow M=1$$


$$\chi < 0 : \quad K=0 \Rightarrow M=6m+3b+3c-6$$

En los casos con  $\chi \leq 0$  tendremos entonces

$$\int \frac{Dg_{ab} DX^M}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} e^{-S_p[X, g]} \dots$$

$$= \int_{M_M} dt_1 \dots dt_M \Delta_{FP}(\check{g}(t)) \int_{\check{g}} DX^M e^{-S_p[X, \check{g}]} \dots$$


 Faddeev-Popov



Estas 2 sutilezas se manifiestan de una manera específica en la descripción con fantasmas:

1) Notar que bajo  $z \rightarrow z + \delta z(z, \bar{z})$ , tenemos

$$\delta g_{\bar{z}\bar{z}} = 2 \check{\nabla}_{\bar{z}} \left( \check{g}_{\bar{z}z} \delta z + \check{g}_{\bar{z}\bar{z}} \delta \bar{z} \right), \text{ así que}$$

en la norma conforme  $\check{g}_{ab} = e^{w(\sigma)} \delta_{ab}$  ( $\leftrightarrow \check{g}_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ )

los vectores de Killing conformes satisfacen

$$\delta g_{\bar{z}\bar{z}} = 2 \check{g}_{\bar{z}z} \check{\nabla}_{\bar{z}} \delta z = e^w \partial_{\bar{z}} \delta z = 0, \text{ es decir,}$$

son vectores analíticos definidos globalmente, y por

tanto están en correspondencia uno a uno en los modos cero de  $c(z)$  (para los cuales  $S_f = \frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c = 0$ ).

(Esto es cierto en cualquier norma; el operador que reemplaza a  $\bar{\partial}$  es  $\check{\nabla}$ , tal que

$$(\check{\nabla}_i \delta \sigma)_{ab} \equiv \frac{1}{2} \left( \check{\nabla}_a \delta \sigma_b + \check{\nabla}_b \delta \sigma_a - \check{g}_{ab} \check{\nabla}_c \delta \sigma^c \right)$$

— ver más adelante. )

2) Notar que  $t_i \rightarrow t_i + \delta t_i$

$$\Rightarrow \check{g}_{ab} \rightarrow \check{g}_{ab} + \delta g_{ab}, \text{ con}$$

$$\delta g_{ab} \perp \delta \omega \check{g}_{ab}, \quad \check{\nabla}_a \delta \sigma_b + \check{\nabla}_b \delta \sigma_a \quad \forall \delta \omega(\sigma), \delta \sigma^a(\sigma)$$

Weyl difeo

donde la ortogonalidad se define en base en al producto interno natural para tensores con 2 índices (p. 262):

$$(\delta g, \delta g') \equiv \int d^2 \sigma \sqrt{\check{g}} \check{g}^{ab} \check{g}^{cd} \delta g_{ac} \delta g'_{bd}$$

En la norma conforme esto implica

$$\delta g_{z\bar{z}} = 0, \quad \check{\nabla}_{\bar{z}} \delta g_{z\bar{z}} = \partial_{\bar{z}} \delta g_{z\bar{z}} = 0,$$

cuyas soluciones están en correspondencia uno a uno con los modos cero de  $b(z)$  ( $S_f = -\frac{1}{2\pi} \int d^2 z \bar{\partial} b c$ )

(Ciertamente en cualquier norma; el operador que asume el papel de  $\partial_{\bar{z}}$  es  $\check{P}_1^+$  — ver más adelante.)

- Problema: cuando existen modos cero de campos anticommutativos, la integral funcional da cero: desarrollando p.ej.

$$c(z, \bar{z}) = \sum_n c_n C_1^{(n)}(z, \bar{z})$$

↑  
anticommutativo

conjunto completo de campos vectoriales (commutativos)

con  $\bar{\partial} C_1^{(0)} = 0$ , podemos ver que

$$\int \mathcal{D}c(z, \bar{z}) e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c} \simeq \int dc_0 e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} C_1^{(0)} c_0} = 0$$

$\equiv \prod_n dc_n$

p.271:  $\int d0 = 0$

Para obtener un resultado  $\neq 0$  se requiere de la inserción de un factor de  $c$  (en cualquier punto)

$$\int \mathcal{D}c(z, \bar{z}) c(z', \bar{z}') e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c} \simeq \int dc_0 c_0 \neq 0$$

↑

- Solución: de hecho, Faddeev-Popov dará las inserciones necesarias...

Nos interesa entonces calcular la determinante de Faddeev-Popov

$$\frac{\int \mathcal{D}g_{ab}(\sigma) \mathcal{D}X^{\mu}(\sigma)}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} e^{-S_p[X, g]} \prod_{j=1}^N N_j \int d^2\sigma_j \sqrt{g} V_j(\sigma_j; k_j)$$

$$= \int d^M t \Delta_{FP}(\check{g}(t); \check{\sigma}) \int \mathcal{D}X^{\mu}(\sigma) e^{-S_p[X, \check{g}]} \prod_{j=1}^{K/2} N_j \sqrt{\check{g}} V_j(\check{\sigma}_j)$$

definida a través de

$$1 = \underbrace{\int d^M t \int \mathcal{D}\xi^a(\sigma) \mathcal{D}\omega(\sigma)}_{\text{Necesarios para cubrir todas las métricas}} \underbrace{\delta(g_{ab}^{\xi, \omega, t} - \check{g}_{ab}(\sigma)) \delta(\sigma_j^{\xi, a} - \check{\sigma}_j^a)}_{\text{Necesarios para eliminar GKC}} \left| \frac{\partial(g_{ab}^{\xi, \omega, t}, \sigma_j^{\xi, a})}{\partial(\xi, \omega, t)} \right| = \Delta_{FP}(\check{g}(t), \check{\sigma})$$

Por las deltas de Dirac, necesitamos al jacobiano solo sobre la condición de norma, así que podemos restringir nuestra atención a una transformación infinitesimal

$$\begin{aligned} g_{ab}^{\xi, \omega, \delta t}(\sigma) &= \check{g}_{ab}(\sigma) + \delta g_{ab}(\sigma) & (\Rightarrow \Delta_{FP} \text{ es independiente} \\ \sigma_j^{\xi, a} &= \check{\sigma}_j^a + \delta \sigma^a(\check{\sigma}_j) & \text{de } \xi^a \equiv \delta \sigma^a, \delta \omega, \delta t) \end{aligned}$$

Utilizaremos la descomposición ortogonal

$$\begin{aligned} \delta g_{ab} &= \delta \omega \check{g}_{ab} + \check{\nabla}_a \delta \sigma_b + \check{\nabla}_b \delta \sigma_a + \delta t^i \partial_t \check{g}_{ab}(t) \\ &= (\delta \omega + \check{\nabla}_c \delta \sigma^c) \check{g}_{ab} + \underbrace{\check{\nabla}_a \delta \sigma_b + \check{\nabla}_b \delta \sigma_a - \check{g}_{ab} \check{\nabla}_c \delta \sigma^c}_{\equiv (\check{P}_i \delta \sigma)_{ab}} + \delta t^i \frac{\partial \check{g}_{ab}}{\partial t^i}. \end{aligned} \quad (*)$$

Tenemos

$$\Delta_{FP}^{-1}(\check{g}, \check{\sigma}) = \int d^M(\delta t) \mathcal{D}(\delta \sigma^a) \mathcal{D}(\delta \omega) \delta(\delta g_{ab}^{(\omega)}) \delta(\delta \sigma^a(\check{\sigma}_j))$$

(porque el jacobiano en una variedad coincide con el jacobiano en el espacio tangente), es decir,

$$\begin{aligned} \Delta_{FP}^{-1}(\check{g}, \check{\sigma}) &= \int d^M(\delta t) \mathcal{D}(\delta \sigma^a) \mathcal{D}(\delta \omega) \mathcal{D} \beta^{ab} \int d^K s \exp[2\pi i s_j^a \delta \sigma^a(\check{\sigma}_j)] \\ &\quad \exp \left[ 2\pi i \int d^2 \sigma \sqrt{\check{g}} \beta^{ab} \left\{ (\delta \omega + \check{\nabla}_c \delta \sigma^c) \check{g}_{ab} + (\check{P}_i \delta \sigma)_{ab} + \delta t^i \frac{\partial \check{g}_{ab}}{\partial t^i} \right\} \right]. \end{aligned}$$

variables auxiliares

usando (\*) para  $\delta g_{ab}$

La integral sobre  $\delta \omega(\sigma)$  simplemente restringe

$\mathcal{D} \beta^{ab}(\sigma) \rightarrow \mathcal{D} \beta'^{ab}(\sigma)$ , de modo que podemos escribir

$\hookrightarrow \equiv$  tensores simétricos sin traza

$$\Delta_{FP}^{-1} = \int \mathcal{D}^M(\delta t) \mathcal{D}(\delta \sigma) \mathcal{D}\beta'_{ab} \int^K s \exp[2\pi i s_j^a \delta \sigma^a(\check{\sigma}_j)] \exp[2\pi i (\beta'_{ab} \check{p}_i^b \delta \sigma + \delta t_i \frac{\partial \check{g}}{\partial t_i})]$$

producto interno definido en la p. 363

Ahora podemos invertir la integral del lado derecho ( $\det^{-1}$ ) reemplazando variables bosónicas por fermiónicas:

$$\delta \sigma^a \rightarrow c^a, \beta'_{ab} \rightarrow \frac{i}{2\pi} b_{ab}, s_j^a \rightarrow \frac{i}{2\pi} \gamma_j^a, \delta t_i \rightarrow \lambda_i \Rightarrow$$

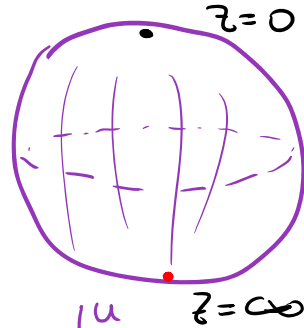
$$\Delta_{FP}(\check{g}, \check{\sigma}) = \int \mathcal{D}b_{ab} \mathcal{D}c^a \int^M \lambda \int^K \gamma \exp[-\gamma_j^d c^d(\check{\sigma}_j)] \exp[-\frac{1}{4\pi} (b, \check{p} c) - \frac{1}{4\pi} (b, \lambda_i \frac{\partial \check{g}}{\partial t_i})] \equiv S_f[b, c, \check{g}]$$

Integrando sobre  $\lambda$  y  $\gamma$ , obtenemos finalmente

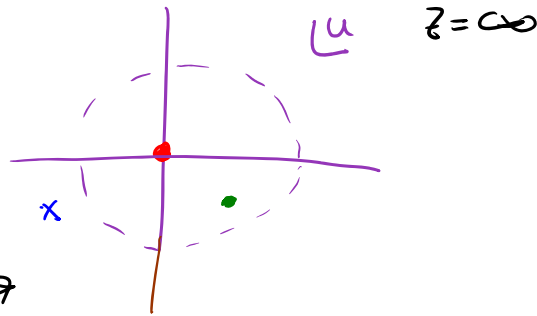
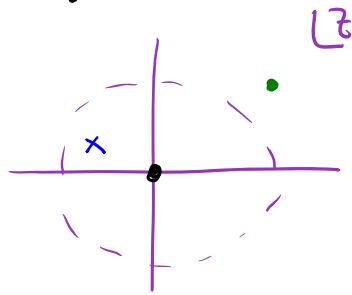
$$\Delta_{FP}(\check{g}, \check{\sigma}) = \int \mathcal{D}b_{ab} \mathcal{D}c^a e^{-S_f[b, c, \check{g}]} \prod_{i=1}^M \frac{1}{4\pi} (b, \frac{\partial \check{g}}{\partial t_i}) \prod_{j,d} c^d(\check{\sigma}_j)$$

## Amplitudes de Cuerda Cerrada a Nivel Árbol

Esfera  $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



2 regiones de coordenadas:



$u = \frac{1}{z}$  función de transición

•  $S^2$  como variedad Riemanniana: métrica

global en norma conforme

$u = \frac{1}{z}$  es un difeo

$$g_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) \longleftrightarrow g_{u\bar{u}}(u, \bar{u}) = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{u}} g_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) = |z|^4 g_{z\bar{z}}(z, \bar{z})$$

P.ej., métrica usual  $g_{z\bar{z}} = \frac{2r^2}{(1+r^2)^2} \longleftrightarrow g_{u\bar{u}} = \frac{2r^2}{(1+|u|^2)^2}$  bien definida en  $u=0$ . ✓

•  $S^2$  como variedad compleja: métrica plana

en cada región  $g_{z\bar{z}} = \frac{1}{z\bar{z}} = g_{u\bar{u}}$ , interpretando a

$u = \frac{1}{z}$  como una transformación conforme.

• ¿Módulos?  $\delta g_{z\bar{z}}$  tal que  $\partial_{\bar{z}} \delta g_{z\bar{z}} = 0$ , definidos globalmente:

$$\delta g_{u\bar{u}} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \delta g_{z\bar{z}} = \underbrace{z^4}_{\leq z^{-4}} \delta g_{z\bar{z}} \text{ finito aún cuando } z \rightarrow \infty$$

+ analiticidad  $\Rightarrow \delta g_{z\bar{z}} = 0 \quad \forall z$

Así que NO hay módulos (todas las métricas son equivalentes bajo  $\text{Dif} \times \text{Weyl}$ )  $M=0$

• ¿Vectores de Killing conformes?

$\delta z$  tal que  $\partial_{\bar{z}} \delta z = 0$ , definidos globalmente:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial z} \delta z = -z^{-2} \delta z \text{ finito aún cuando } z \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \delta z = \epsilon_0 + \epsilon_1 z + \epsilon_2 z^2 \quad (\Leftrightarrow L_{-1}, L_0, L_1)$$

$\therefore$   $K=6$  (Riemann-Roch:  $K-M=3\chi$  ✓)

Version finita:  $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (\mathbb{P})SL(2, \mathbb{C}) = \text{GKC}$

Grupo lineal fraccionario o de Möbius  
 $\hookrightarrow$  infinitesimal si  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\epsilon_1}{2} & \epsilon_0 \\ -\epsilon_2 & 1 - \frac{\epsilon_1}{2} \end{pmatrix}$



Consideremos la amplitud de dispersión de  $N$  taquiones.

Usando el vértice  $V_{\phi}(k) = N_{\phi} \int d^2z : e^{ik \cdot X(z, \bar{z})} :$

con  $N_{\phi} \equiv g_c N$ , sabemos que la amplitud involucra

$$e^{-2\Phi_0} (g_c N)^N \frac{1}{\text{GKC}} \int d^2z_1 \cdots d^2z_N \left\langle : e^{ik_1 \cdot X(z_1, \bar{z}_1)} : \cdots : e^{ik_N \cdot X(z_N, \bar{z}_N)} : \right\rangle_{S^2}^X,$$

donde  $\left\langle \cdots \right\rangle_{S^2}^X \equiv \int \mathcal{D}X^{\mu}(z, \bar{z})_{S^2} e^{-\frac{1}{2} \int d^2z X \cdot \Delta_z X} \cdots$

con  $\Delta_z \equiv -\frac{1}{\pi \alpha'} \partial \bar{\partial}$

Notar que si separamos  $X^{\mu}(z, \bar{z}) = X^{\mu} + \underline{X}^{\mu}(z, \bar{z})$ ,  
↖ modo constante

de manera que  $\mathcal{D}X^{\mu} = d^D x \mathcal{D}\underline{X}^{\mu}$ , encontraremos que

las amplitudes siempre incluirán

$$\int d^D x e^{i(k_1 + k_2 + \cdots + k_N) \cdot x} = (2\pi)^D \delta^{(D)}(k_1 + k_2 + \cdots + k_N),$$

Como Dios manda. No escribiremos este factor explícitamente de aquí en adelante ( $\neq M$ ).

Conocemos el propagador (p. 195)

$$\langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \rangle = \underbrace{-\frac{\alpha'}{2} \ln |z-z'|^2}_{\Delta^{-1}(z, z')} \eta^{\mu\nu} \langle 1 \rangle,$$

así que podemos calcular

$$\begin{aligned} \langle :e^{ik_1 X(z_1, \bar{z}_1)} : \dots :e^{ik_2 X(z_2, \bar{z}_2)} : \dots :e^{ik_N X(z_N, \bar{z}_N)} : \rangle_S^X \\ = \prod_{i < j} e^{i^2 k_i \cdot k_j \left[ -\frac{\alpha'}{2} \ln |z_i - z_j|^2 \right]} \langle : \prod_{j=1}^N e^{ik_j X(z_j, \bar{z}_j)} : \rangle_S^X \\ \underbrace{\quad}_{|z_i - z_j|^{-\alpha' k_i \cdot k_j}} \quad \underbrace{\quad}_{\langle 1 \rangle_S^X} \end{aligned}$$

(Alternativamente: sabemos que completando el cuadrado

$$\left\langle e^{\int d^2z J(z) \cdot X(z)} \right\rangle_S^X = e^{\frac{1}{2} \int d^2z \int d^2z' J(z) \cdot \Delta^{-1}(z, z') J(z')} \langle 1 \rangle_S^X$$

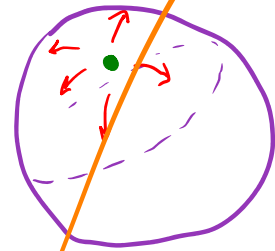
y nos interesa aquí el caso  $J(z, \bar{z}) \equiv i \sum_{j=1}^N k_j^\mu \delta^{(2)}(z-z_j)$

— con autocontracciones eliminadas por el orden normal.)

NOTA: Recordar que  $\Delta^{-1}(z, z') = -\frac{\alpha'}{2} \ln|z-z'|^2$   
 es por definición la función de Green que satisface

$$\Delta_z \Delta^{-1}(z, z') = \delta^{(2)}(z-z')$$

$$\underbrace{-\frac{1}{\pi \alpha'}}_{\partial \bar{\partial}}$$



y se le puede por tanto interpretar como el potencial electrostático asociado a una carga puntual.

PERO, ahora que nuestra hoja de mundo es compacta, no podemos tener una carga aislada: la ley de Gauss implica que la carga total debe ser cero.

En la construcción usual de la función de Green,

$$G(\sigma, \sigma') = \sum_I \frac{f_I(\sigma) f_I(\sigma')}{\lambda_I},$$

$$\text{con } \Delta_\sigma f_I(\sigma) = \lambda_I f_I(\sigma), \quad \int d^2\sigma \sqrt{g} f_I f_J = \delta_{IJ},$$

claramente debemos excluir el modo cero

$$f_0(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\int d^2\sigma \sqrt{g}}} \quad (\text{que es } \underline{\text{ahora normalizable}}),$$

porque  $\lambda_0 = 0$ . La función de Green resultante  $\underline{G}$  satisface entonces  $\Delta_\sigma \underline{G}(\sigma, \sigma') = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta^{(2)}(\sigma - \sigma') - \frac{1}{\int d^2\sigma \sqrt{g}}$ .

El término adicional se puede interpretar como una distribución de carga uniforme que neutraliza a la carga puntual.

En la esfera, la solución a esta ecuación es del tipo

$$\underline{G}(z, z') = -\frac{\alpha'}{2} \ln |z - z'|^2 + F(z, \bar{z}) + F(z', \bar{z}'),$$

pero felizmente se puede mostrar que los términos adicionales no contribuyen a las funciones de correlación, por conservación de momento (ver Polchinski pp. 170-172).

L

Notar que  $I \equiv \int d^2 z_1 \dots d^2 z_N \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{\alpha' k_i \cdot k_j}$

es, como prometimos, invariante bajo  $SL(2, \mathbb{C})$ :

$$z \rightarrow z' = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow d^2 z = \frac{d^2 z'}{|a-cz'|^4}, \quad z_i - z_j = \frac{z'_i - z'_j}{(a-cz'_i)(a-cz'_j)},$$

así que

$$I = \int \frac{d^2 z'_1 \dots d^2 z'_N}{\prod_i |a-cz'_i|^4} \prod_{i < j} \frac{|z'_i - z'_j|^{\alpha' k_i \cdot k_j}}{|a-cz'_i|^{\alpha' k_i \cdot k_j} |a-cz'_j|^{\alpha' k_i \cdot k_j}}$$

Los factores adicionales que involucran p.ej. a  $z'_i$  son

$$|a-cz'_i|^{-4 - \underbrace{\alpha' k_i \cdot (k_2 + \dots + k_N)}_{=-k_i}} = |a-cz'_i|^{-4 + \underbrace{\alpha' k_i^2}_{=0}} = 1,$$

por conservación de momento

condición de capa de masa para taquión ✓

de modo que  $I = I'$ ; como esperábamos, tenemos invariancia bajo el grupo de simetría residual,  $GLC$ .

(Pero notar, como en la p. 325, que este requisito nos impide calcular amplitudes fuera de la capa de masa.)

Dados 3 puntos fijos  $\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3$ , existe una transformación  $SL(2, \mathbb{C})$  única que mapea

$$\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} z_1, z_2, z_3$$

así que (en el caso  $N \geq 3$ ) podemos reinterpretar

$$\int d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_3 = \int d(\text{GKC}) \underbrace{\omega(\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3)}_{\text{"Faddeev-Popov" (Jacobiano)}}$$

Si integramos sobre todas las  $z_j$  ( $j=1, \dots, N$ ), estaríamos entonces contando cada configuración física un número infinito de veces, obteniendo un resultado  $\propto \int d(\text{GKC}) = \infty$ .

Así que, como ya habíamos visto antes, lo que debemos hacer es fijar  $z_1 = \check{z}_1, z_2 = \check{z}_2, z_3 = \check{z}_3$ , para eliminar la redundancia por completo, y poder cancelar  $\frac{1}{\text{GKC}}$  contra  $\int d(\text{GKC})$ .

(Notar que esto implica que las amplitudes con  $N \leq 2$  dan como resultado cero, como debería ser el caso para  $M \propto T$  a nivel árbol: no hay energía del vacío

• ni "renacuajo"  $\leftarrow N=0$ , ni corrección al propagador  $\leftarrow N=2$ .)

Debemos ahora determinar el jacobiano  $\mu(\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3)$ :

dad que para  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\epsilon_1}{2} & \epsilon_0 \\ -\epsilon_2 & 1 - \frac{\epsilon_1}{2} \end{pmatrix}$  tenemos

$$\check{z}_i \rightarrow z_i = \check{z}_i + \delta z_i \quad \text{con} \quad \delta z_i = \epsilon_0 + \epsilon_1 \check{z}_i + \epsilon_2 \check{z}_i^2,$$

vemos que

$$d^2(\delta z_1) d^2(\delta z_2) d^2(\delta z_3) = \underbrace{d^2 \epsilon_0 d^2 \epsilon_1 d^2 \epsilon_2}_{d^2(\delta b) \wedge d^2(\delta a) \wedge d^2(\delta c)} \underbrace{\left| \det \left( \frac{\partial(\delta z_1, \delta z_2, \delta z_3)}{\partial(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2)} \right) \right|^2}_{\left| \det \begin{pmatrix} 1 & \check{z}_1 & \check{z}_1^2 \\ 1 & \check{z}_2 & \check{z}_2^2 \\ 1 & \check{z}_3 & \check{z}_3^2 \end{pmatrix} \right|^2} \underbrace{\left| (\check{z}_1 - \check{z}_2)(\check{z}_1 - \check{z}_3)(\check{z}_2 - \check{z}_3) \right|^2}_{,}$$

de donde

$$d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_3 = d(\text{GK}) \left| \check{z}_1 - \check{z}_2 \right|^2 \left| \check{z}_1 - \check{z}_3 \right|^2 \left| \check{z}_2 - \check{z}_3 \right|^2.$$

~~Hemos usado aquí nuevamente el hecho de que el jacobiano en una variedad coincide con el jacobiano en su espacio tangente; es fácil verificar que~~

$$z_i = \frac{a\check{z}_i + b}{c\check{z}_i + \frac{1+bc}{a}} \Rightarrow \det \left( \frac{\partial(z_1, z_2, z_3)}{\partial(a, b, c)} \right) = \frac{-2(\check{z}_1 - \check{z}_2)(\check{z}_1 - \check{z}_3)(\check{z}_2 - \check{z}_3)}{a(c\check{z}_1 + d)^2 (c\check{z}_2 + d)^2 (c\check{z}_3 + d)^2}$$

~~que efectivamente coincide con el resultado~~

~~anterior en el punto  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ✓~~

Hemos mostrado entonces explícitamente que

$$\frac{1}{6Kc} \mathbb{I} = \int d^2\check{z}_1 \cdots d^2\check{z}_4 |\check{z}_1 - \check{z}_2|^2 |\check{z}_1 - \check{z}_3|^2 |\check{z}_2 - \check{z}_3|^2 \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{2\alpha' k_i \cdot k_j}$$

~~Y este es justamente el resultado que se obtiene a partir~~

~~de nuestra fórmula general con fantasmas (p. 367):~~

~~usando los vértices fijos :  $c\tilde{c} e^{ik_i \cdot X}(\check{z}_i, \check{z}_i)$  :  $i=1,2,3$ ,~~

~~la amplitud incluye~~

$$\left\langle c(\check{z}_1) c(\check{z}_2) c(\check{z}_3) \right\rangle_{S^2}^{b,c} \left\langle \tilde{c}(\check{z}_1) \tilde{c}(\check{z}_2) \tilde{c}(\check{z}_3) \right\rangle_{S^2}^{\bar{b}, \bar{c}}$$



que da resultado  $\neq 0$  solo gracias a la contribución de los modos cero ( $\leftrightarrow$  vectores de Killing conformes):

$$\begin{aligned} \langle c(\check{z}_1) c(\check{z}_2) c(\check{z}_3) \rangle_{S^2} &\equiv \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c} c(\check{z}_1) c(\check{z}_2) c(\check{z}_3) \\ &\propto \int dc_0 dc_1 dc_2 (c_0 + c_1 \check{z}_1 + c_2 \check{z}_1^2 + \dots) (c_0 + c_1 \check{z}_2 + c_2 \check{z}_2^2 + \dots) (c_0 + c_1 \check{z}_3 + c_2 \check{z}_3^2 + \dots) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & \check{z}_1 & \check{z}_1^2 \\ 1 & \check{z}_2 & \check{z}_2^2 \\ 1 & \check{z}_3 & \check{z}_3^2 \end{pmatrix} = -(\check{z}_1 - \check{z}_2)(\check{z}_1 - \check{z}_3)(\check{z}_2 - \check{z}_3) \quad \checkmark \end{aligned}$$

- Amplitud de 3 puntos:

$$\frac{1}{G_{NC}} \mathcal{I} = |\check{z}_1 - \check{z}_2|^{2 + \alpha' k_1 \cdot k_2} |\check{z}_1 - \check{z}_3|^{2 + \alpha' k_1 \cdot k_3} |\check{z}_2 - \check{z}_3|^{2 + \alpha' k_2 \cdot k_3}$$

y usando  $\alpha' k_i \cdot k_j = \frac{\alpha'}{2} [(k_i + k_j)^2 - k_i^2 - k_j^2] = -2$   
 $\uparrow$  capa de masa

(y lo mismo para  $\alpha' k_i \cdot k_3$  y  $\alpha' k_2 \cdot k_3$ ) tenemos

$$\frac{1}{G_{NC}} \mathcal{I} = 1 \quad (\text{independiente de } \check{z}_i \quad \checkmark), \text{ así que}$$

$$\mathcal{M}_{S^2}^{\phi\phi\phi}(k_1, k_2, k_3) = (g_c N)^3 e^{-2\Phi_0} \langle 1 \rangle_{S^2}^{x, b, c, \tilde{b}, \tilde{c}} \sim g_c$$

$S = 1 + i(2\pi) \delta^{(D)}(k) \mathcal{M}$   $\propto g_c$  determinantes

- Amplitud de 4 puntos:

$$\frac{1}{G_{\text{KC}}} I = |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2|^{2+\alpha' k_1 \cdot k_2} |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_3|^{2+\alpha' k_1 \cdot k_3} |\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3|^{2+\alpha' k_2 \cdot k_3} \int d^2 z_4 |\tilde{z}_1 - z_4|^{-\alpha' k_1 \cdot k_4} |\tilde{z}_2 - z_4|^{-\alpha' k_2 \cdot k_4} |\tilde{z}_3 - z_4|^{-\alpha' k_3 \cdot k_4}$$

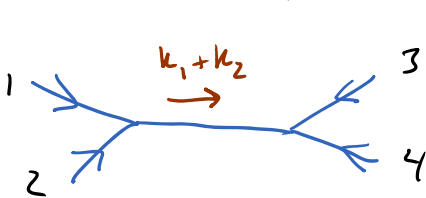
Por simplicidad, tomaremos  $\tilde{z}_1 \rightarrow \infty, \tilde{z}_2 = 1, \tilde{z}_3 = 0$ .

Factores con  $\tilde{z}_1 \rightarrow \infty \rightarrow |\tilde{z}_1|^{4+\alpha' k_1 \cdot (k_2+k_3+k_4)} = |\tilde{z}_1|^{4-\alpha' k_1^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{G_{\text{KC}}} I = \int d^2 z_4 |z_4 - 0|^{-\alpha' k_3 \cdot k_4} |z_4 - 1|^{-\alpha' k_2 \cdot k_4}$$

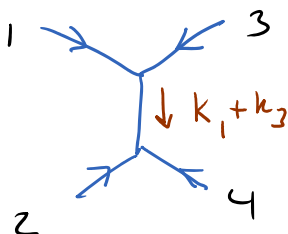
Conviene reescribir en términos de las variables de Mandelstam (invariantes cinemáticas)

$$s \equiv -\alpha' (k_1 + k_2)^2$$



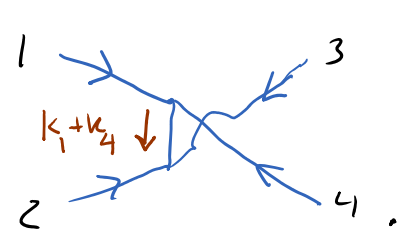
Energía total en el marco del centro de masa

$$t \equiv -\alpha' (k_1 + k_3)^2$$



Transferencia de momento

$$u \equiv -\alpha' (k_1 + k_4)^2$$



Notar que  $s+t+u = 4\alpha' m^2 = -16$ , y además

$$S = -\alpha'(k_3^2 + 2k_3 \cdot k_4 + k_4^2) = -2\alpha' k_3 \cdot k_4 - 8,$$

$$t = -\alpha'(k_2^2 + 2k_2 \cdot k_4 + k_4^2) = -2\alpha' k_2 \cdot k_4 - 8,$$

así que en términos de  $z_4 = r e^{i\alpha}$  tenemos

$$\frac{1}{G_K C} \mathbb{I} = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty 2r dr r^{-\frac{s}{2}-4} (1+r^2-2r\cos\alpha)^{-\frac{t}{4}-2}$$

Notar que en la región  $r \rightarrow 0$  ( $z_4 \rightarrow z_3$ ) tenemos

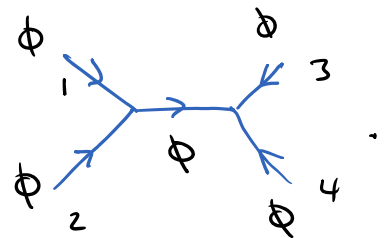
$$\int_0 dr r^{-\frac{s}{2}-3} (1 + \mathcal{O}(r^2)) = \frac{r^{-\frac{s}{2}-2}}{-\frac{s}{2}-2} \Big|_0 + \dots,$$

que es convergente solo si  $s < -4$ . Vemos entonces que

$$M_{s^2}^{\phi\phi\phi\phi}(s,t) \propto -\frac{2}{s+4} + \text{términos analíticos en } s=-4$$

L14:07/05/13

polo simple en  $s=-4$ : taquión



La integral diverge  $\forall s \geq -4$ , pero la amplitud física tiene solo un polo simple en  $s=-4$ ,  $\therefore$  se puede definir por continuación analítica en la variable  $s$ .

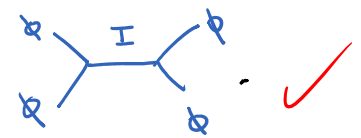
De hecho,  $\forall s, t, u < -4$  tenemos (ver GSW p.387)

$$\int d^2z |z|^{-\frac{s}{2}-4} |1-z|^{-\frac{t}{2}-4} = 2\pi \frac{\Gamma(-\frac{s}{4}-1) \Gamma(-\frac{t}{4}-1) \Gamma(-\frac{u}{4}-1)}{\Gamma(-\frac{s}{4}-\frac{t}{4}-2) \Gamma(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2) \Gamma(-\frac{u}{4}-\frac{s}{4}-2)}$$

función gamma de Euler  $\rightarrow$

El lado derecho está bien definido fuera de la región  $s, t, u < -4$ , y contiene solo polos simples en

$$\left. \begin{aligned} s &= -4, 0, 4, 8, \dots \\ t &= -4, 0, 4, 8, \dots \\ u &= -4, 0, 4, 8, \dots \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \text{espectro de cuerda cerrada libre, tal como esperamos a nivel árbol}$$



Esta es entonces la amplitud física. El origen de los polos se puede entender usando la EPO:

$$\mathcal{M}^{\phi\phi\phi\phi} \propto \int d^2z_4 \left\langle :e^{ik_1 \cdot X(\infty)} : :e^{ik_2 \cdot X(1)} : :e^{ik_3 \cdot X(0)} : :e^{ik_4 \cdot X(z_4)} : \right\rangle_X$$

$$\underbrace{\left\langle :e^{ik_3 \cdot X(0)} : :e^{ik_4 \cdot X(z_4)} : \right\rangle_X}_{|z_4=0|} = e^{ik_3 \cdot X(0)} e^{ik_4 \cdot X(z_4)}$$

$$:e^{i(k_3+k_4) \cdot X(0)} : + \frac{1}{2} |z_4|^2 (-k_{4\mu} k_{4\nu}) : \partial X^\mu \partial X^\nu e^{i(k_3+k_4) \cdot X(0)} : + \dots$$

$\downarrow$  polo en  $s = -4$  : taquión (como ya vimos)  
 $\downarrow$  polo en  $s = 0$  : gravitón/dilatón

Los polos en  $t$  y  $u$  se originan de manera similar de la región de integración donde  $z_4 \rightarrow \tilde{z}_2 = 1$  y  $z_4 \rightarrow \tilde{z}_1 = \infty$ , respectivamente.

Tenemos entonces

$$M_{S^2}^{\phi\phi\phi\phi}(s, t) = (g_c N)^4 e^{-2\Phi_0} \langle 1 \rangle \frac{2\pi \Gamma(-\frac{s}{4}-1) \Gamma(-\frac{t}{4}-1) \Gamma(-\frac{u}{4}-1)}{\Gamma(-\frac{s}{4}-\frac{t}{4}-2) \Gamma(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2) \Gamma(-\frac{u}{4}-\frac{s}{4}-2)}$$

Notemos ahora que el teorema óptico ( $\leftrightarrow$  unitariedad)

$$2\text{Im} \left( \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \downarrow \\ 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} \right) = \sum_{\text{I}} \left( \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \text{I} \\ \downarrow \\ 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \text{I} \\ \downarrow \\ 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} \right)$$

$$\text{a nivel árbol, } 2\text{Im} \left( \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \text{I} \\ \downarrow \\ 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \text{I} \\ \downarrow \\ 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} \right) 2\pi i \delta(k_{\text{I}}^2 + m_{\text{I}}^2) \left( \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \\ \downarrow \\ \text{I} \\ \downarrow \\ 3 \\ \downarrow \\ 4 \end{array} \right),$$

relaciona las amplitudes de 3 y 4 puntos, y requiere en particular

$$M_{S^2}^{\phi\phi\phi\phi}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{M_{S^2}^{\phi\phi\phi}(k_1, k_2, -k_1 - k_2) M_{S^2}^{\phi\phi\phi}(k_1 + k_2, k_3, k_4)}{(k_1 + k_2)^2 - \frac{4}{\alpha'} - i\epsilon}$$

+ términos analíticos en  $s = -4$

(donde hemos usado  $\frac{1}{k^2 + m^2 - i\epsilon} - \frac{1}{k^2 + m^2 + i\epsilon} = 2\pi i \delta(k^2 + m^2)$ ).

Cuando  $s \rightarrow -4$  tenemos  $t+u = -16-s \rightarrow -12$ ,

$$\Gamma\left(-\frac{s}{4}-1\right) \rightarrow \frac{4}{\alpha'} \frac{1}{(k_1+k_2)^2 - \frac{4}{\alpha'}}$$

$$\text{y } \Gamma\left(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2\right) \rightarrow 1,$$

de modo que el requisito es que

$$(g_c N)^4 e^{-2\Phi_0} < 1 \quad \frac{8\pi}{\alpha'} = \left[ (g_c N)^3 e^{-2\Phi_0} < 1 \right]^2$$

$$\Rightarrow e^{-2\Phi_0} < 1 \Big|_{S^2}^{x, b, c, \tilde{b}, \tilde{c}} = \frac{8\pi}{\alpha' (g_c N)^2}.$$

Usando esto, concluimos finalmente que

$$\mathcal{M}_{S^2}^{\phi\phi\phi}(k_1, k_2, k_3) = \frac{8\pi g_c N}{\alpha'} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{M}_{S^2}^{\phi\phi\phi\phi}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{16\pi^2 (g_c N)^2}{\alpha'} \frac{\Gamma\left(-\frac{s}{4}-1\right)\Gamma\left(-\frac{t}{4}-1\right)\Gamma\left(-\frac{u}{4}-1\right)}{\Gamma\left(-\frac{s}{4}-\frac{t}{4}-2\right)\Gamma\left(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2\right)\Gamma\left(-\frac{s}{4}-\frac{u}{4}-2\right)}$$

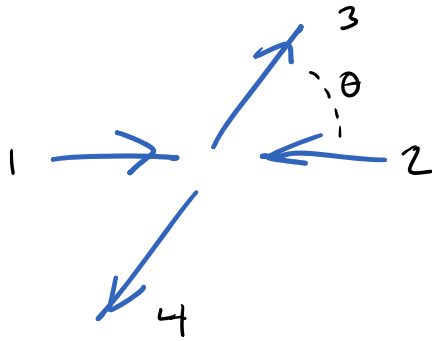
Esta última se conoce como la amplitud de Shapiro-Virasoro

El resultado análogo para cuerdas abiertas es la amplitud

de Veneziano  $\mathcal{M}_{D^2}^{\phi\phi\phi\phi} \sim \frac{\Gamma(-1-s)\Gamma(-1-t)}{\Gamma(-2-s-t)}$ , que históricamente

condujo al descubrimiento de la teoría de cuerdas.

En el marco del centro de masa,



$$s = \alpha' E^2,$$

$$\frac{t}{s} = \left( \frac{4m^2}{E^2} - 1 \right) \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\frac{u}{s} = \left( \frac{4m^2}{E^2} - 1 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad \left( m^2 = -\frac{4}{\alpha'} \right).$$

En un experimento de dispersión dura,  $E \rightarrow \infty$  con  $\theta$  fijo,

es decir,  $s \rightarrow \infty$  con  $\frac{t}{s}$  (y  $\therefore \frac{u}{s}$ ) fijo, usando la

fórmula de Stirling  $\Gamma(x) \sim x^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-x} = \sqrt{2\pi} e^{x \ln x - x - \frac{1}{2} \ln x}$ ,  
↑

encontramos que la amplitud se comporta como

$$\mathcal{M}_{s^2}^{\phi\phi\phi\phi}(s, t) \sim e^{-sf(\theta)} \quad f(\theta) \approx -\sin^2 \frac{\theta}{2} \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \ln \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

muy suprimida con respecto al resultado en teoría de campos

( $\leftrightarrow$  objetos puntuales),  $\mathcal{M}(s \rightarrow \infty, t \propto s) \sim s^{-p}$ .

Históricamente, también tiene importancia el límite de Regge

$$\mathcal{M}_{(s \rightarrow \infty, t \text{ fijo})}^{\phi\phi\phi\phi} \sim s^{2\alpha(t)} \frac{\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(1+\alpha(t))} \quad \alpha(t) \equiv \frac{t}{4} + 1.$$

$E \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0$

Otras amplitudes tienen una estructura similar.

Por ej., usando el vértice del gravitón (/dilatación/antisimetricon)

$$V_h(\epsilon; k) = g_c N \left( \frac{2}{\alpha'} \right) \int d^2z \epsilon_{\mu\nu} : \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ik \cdot X} :$$

podemos calcular  $\xrightarrow{\text{por mapeo estado} \leftrightarrow \text{operador}}$  misma cte. que en  $V_\phi$

$$M_{S^2}^{h\phi\phi}(k_1, \epsilon; k_2, k_3) = (g_c N \frac{2}{\alpha'}) (g_c N)^2 e^{-2\Phi_0} |\check{z}_1 - \check{z}_2|^2 |\check{z}_1 - \check{z}_3|^2 |\check{z}_2 - \check{z}_3|^2$$

$$\epsilon_{\mu\nu} \left\langle : \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ik_1 \cdot X(\check{z}_1)} : : e^{ik_2 \cdot X(\check{z}_2)} : : e^{ik_3 \cdot X(\check{z}_3)} : \right\rangle_{S^2}$$

factores adicionales de momento (y  $\frac{1}{\alpha'}$ )

$$M_{S^2}^{h\phi\phi}(k_1, \epsilon; k_2, k_3) = -\pi g_c N \epsilon_{\mu\nu} (k_2 - k_3)^\mu (k_2 - k_3)^\nu$$

(Se puede verificar que esto satisface la condición de unitariedad)

$$2\text{Im} \left( \text{Diagrama 1} \right) = \left( \text{Diagrama 2} \right) 2\pi \delta(k_h^2) \left( \text{Diagrama 3} \right)$$

De manera similar (tarea 5)

$$M_{S^2}^{hhh}(k_1, \epsilon_1; k_2, \epsilon_2; k_3, \epsilon_3) = \pi g_c N \epsilon_{1\mu\nu\rho} \epsilon_{2\nu\rho'} \epsilon_{3\rho\rho'} t^{\mu\nu\rho} t^{\rho'\nu'\rho'}$$

con  $t^{\mu\nu\rho} \equiv (k_2 - k_3)^\mu \eta^{\nu\rho} + (k_3 - k_1)^\nu \eta^{\rho\mu} + (k_1 - k_2)^\rho \eta^{\mu\nu} + \frac{2}{8} (k_2 - k_3)^\mu (k_3 - k_1)^\nu (k_1 - k_2)^\rho$



Notar que

$$\mathcal{M}^{hhh} \sim g_c \mathcal{N} \left[ \underset{\uparrow}{k^2} + \underbrace{\alpha' k^4 + \alpha'^2 k^6}_{\text{despreciables a bajas energías,}} \right]$$

término de 2 derivadas  
en acción espaciotemporal  
para  $h_{\mu\nu}(x)$

$$|k| \ll m_c \equiv \ell_c^{-1}$$

En más detalle, las amplitudes trigráfon-gravitón  $\phi\phi\phi$ ,  $h\phi\phi$  y  $h h h$  que hemos calculado coinciden con las que se obtendrían con las reglas de Feynman habituales a partir de la acción efectiva en el espaciotiempo

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}}[\phi, h] = \int d^26 x \left\{ & -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \left( -\frac{4}{\alpha'} \right) \phi^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu h_{\nu\lambda} \partial^\mu h^{\nu\lambda} \right. \\ & - \frac{1}{3!} \left( \frac{8\pi}{\alpha'} g_c \mathcal{N} \right) \phi^3 + 2\pi g_c \mathcal{N} h^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\ & - 4\pi g_c \mathcal{N} \left[ -\frac{1}{2} \partial^\mu h^{\nu\lambda} \partial^\rho h_{\nu\lambda} h_{\mu\rho} \right. \\ & + \partial^\mu h^{\nu\lambda} \partial_\nu h_{\lambda}{}^\rho h_{\mu\rho} \\ & \left. \left. - \partial^\mu h^{\nu\lambda} \partial_\mu h_{\nu}{}^\rho h_{\lambda\rho} + \mathcal{O}(\alpha') \right] \right\} \end{aligned}$$

que de hecho coincide a su vez con lo que se obtiene al desarrollar a orden cúbico la acción

$$S'_{\text{ef}}[\Phi, g] = \int d^{26}x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{\alpha'}\right) \Phi^2 - \frac{2K}{3\alpha'} \Phi^3 - \frac{1}{2K^2} R + \mathcal{O}(\alpha') \right\},$$

↙ Einstein-Hilbert !!

donde  $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + 2K h_{\mu\nu}(x)$  campos canónicamente normalizados y estamos trabajando en la norma  $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$ ,  $h^\lambda{}_\lambda = 0$ .

↘ correcciones a  $|k| \gtrsim 1/l_c$

Además hemos reconocido a  $K \equiv 2\pi g_c N$

como la constante gravitacional usual,  $2K^2 \equiv 16\pi G_N$ .

Notando que  $[K^2] = L^{D-2}$  ( $\stackrel{D=26}{\Rightarrow} l_p \sim g_c^{1/12} l_c$ ),

definimos  $N$  tal que  $2K^2 = (2\pi)^{23} g_c^2 l_c^{24}$

Para obtener gravedad en 3+1 dim, podemos suponer que las 22 dimensiones adicionales son compactas y pequeñas:

$$\frac{1}{2K_{(26)}^2} \int d^{26}x \sqrt{-g} R = \frac{V_{22}}{2K_{(26)}^2} \int d^4x \underbrace{\sqrt{-g^{(4)}} R^{(4)}}_{\text{modo de KK constante}} + \dots \quad \Rightarrow \quad K_{(4)}^2 \equiv \frac{K_{(26)}^2}{V_{22}}.$$

los términos de  $\mathcal{O}(\alpha' k^4)$  y  $\mathcal{O}(\alpha'^2 k^6)$  en  $\mathcal{M}^{hh}$  codifican correcciones específicas a la relatividad general, del tipo  $\sim \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}x \sqrt{-g} (\alpha' R^2 + \alpha'^2 R^3)$ .

↖ en diversas contracciones de índices

Al calcular amplitudes con  $N \geq 4$  gravitones, se reproducen uno por uno los términos de  $\mathcal{O}(h^N)$  en  $\frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}x \sqrt{-g} R$ ,

más correcciones adicionales del tipo  $\frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}x \sqrt{-g} \alpha'^{N-1} R^N$

Todas estas correcciones son despreciables a bajas energías y curvaturas. !! Así que en verdad cuerdas  $\Rightarrow$  relatividad general !!

De manera similar, es posible calcular los acoplamientos  $h\varphi\varphi$ ,  $hBB$ ,  $\varphi\varphi\varphi$ , etc. La acción que resume las interacciones de los campos no masivos entre sí resulta ser

$$S_{\text{ef}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g_E} \left\{ R_E - \frac{4}{D-2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{12} e^{-\Phi/D-2} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$

↖ lo para la supercuerda

(con  $D=26$ ), donde  $H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\mu B_{\nu\rho} - \partial_\nu B_{\mu\rho} - \partial_\rho B_{\mu\nu}$  y el subíndice  $E$  resulta que estamos usando la métrica en el "marco de Einstein"  $g_{\mu\nu}^E(x)$ , es decir, aquella con acción  $\int d^D x \sqrt{-g_E} R_E$ .

La métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  que la cuerda siente directamente, a

través de la acción  $S_p[X] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z g_{\mu\nu}(x) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu$ , se relaciona con  $g_{\mu\nu}^E(x)$  a través de una transformación de Weyl en el espaciotiempo (redefinición de campo, no simetría):

$$g_{\mu\nu}(x) = e^{4\Phi(x)/D-2} g_{\mu\nu}^E(x), \text{ y usándola se tiene}$$

$$S_{ef} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^Dx \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left\{ R + 4(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$

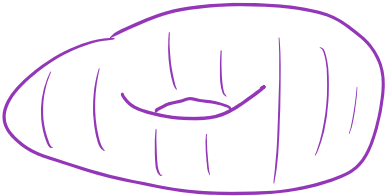
Como veremos más adelante, el hecho de que en este "marco de cuerdas" el dilatón aparece a través del factor  $e^{-2\Phi}$  en todos los términos está estrechamente relacionado con el factor  $e^{-2\Phi_0}$  en las amplitudes a nivel árbol ( $\chi=2$ ):  $\Phi_0$  es el valor de fondo del campo  $\Phi(x)$ ...

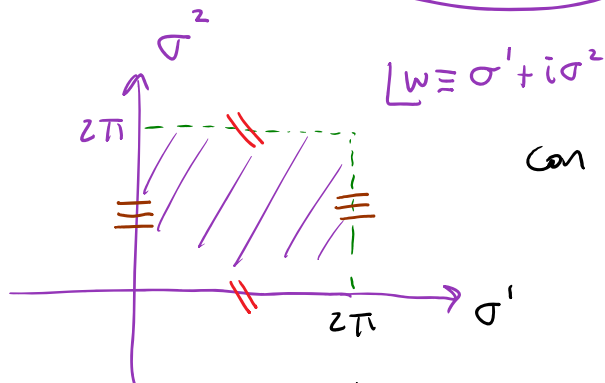
Calculando amplitudes de dispersión para la cuerda abierta (con posibles factores de Chan-Paton) se obtiene para el campo de norma la acción de Maxwell (o Yang-Mills)

$$S_{ef}^a = -\frac{1}{4g_{YM}^2} \int d^Dx \sqrt{-g} e^{-\Phi} \left\{ \text{Tr} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$

$g_{YM}^2 \leftarrow 2\alpha' g_c N^2 \leftarrow \chi=1 \leftarrow \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$

## Amplitudes a un lazo

El toro  $T^2$   puede parametrizarse como



con  $w \simeq w + 2\pi$ ,  $w \simeq w + 2\pi i$

( $\Leftrightarrow$  funciones de transición).

Nuestros campos  $X^w(\sigma)$  y  $g_{ab}(\sigma)$  deben ser periódicos.

¿Módulos?  $\delta g_{w\bar{w}}$  periódica tal que  $\partial_{\bar{w}} \delta g_{w\bar{w}} = 0$

$$\Rightarrow \delta g_{w\bar{w}} = \epsilon \text{ constante} \therefore \boxed{M=2}$$

De hecho, notando que bajo una transformación de Weyl

$$g_{ab}(\sigma) \text{ arbitraria} \rightarrow \check{g}_{ab}(\sigma) = e^{w(\sigma)} g_{ab}(\sigma)$$

tenemos  $\sqrt{\check{g}} \check{R} = \sqrt{g} (R - \nabla^2 w)$ , vemos que podemos elegir

$w(\sigma)$  para obtener globalmente una métrica plana

$$\check{g}_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 + \tau_2^2 \end{pmatrix} \leftrightarrow ds^2 = |d\sigma' + \tau d\sigma''|^2$$

$\tau \equiv \tau_1 + i\tau_2$

(Notar que  $\check{R} = 0$  es consistente con  $\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\check{g}} \check{R} = 0$ .)

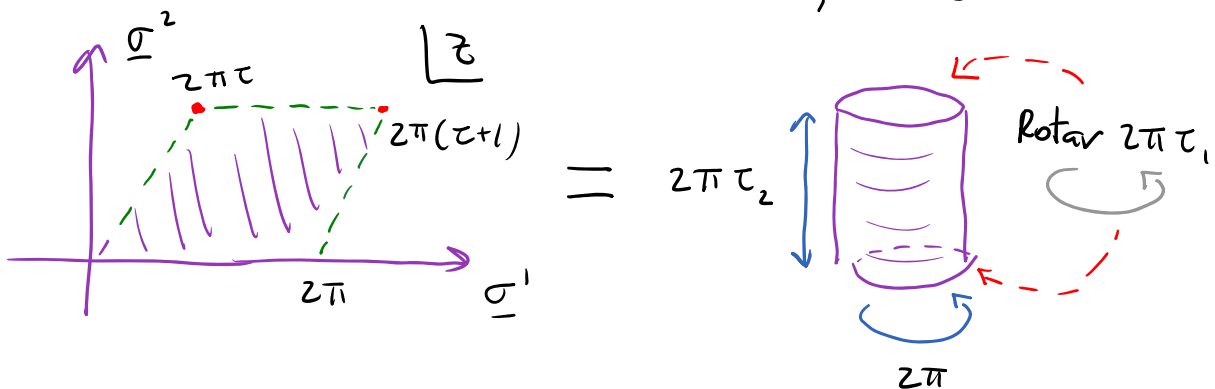
Con esta métrica, el toro tiene área  $\int \sqrt{g} = 4\pi^2 \tau_2$ .

El caso  $\tau = i$  corresponde a  $\check{g}_{ab} = \delta_{ab}$  ( $\Leftrightarrow \check{g}_{\bar{w}\bar{w}} = \frac{1}{2}$ ).

Definiendo  $z \equiv \sigma^1 + \tau \sigma^2$  (es decir,  $z \equiv \underline{\sigma}^1 + i \underline{\sigma}^2$ , con  $\underline{\sigma}^1 = \sigma^1 + \tau \sigma^2$  y  $\underline{\sigma}^2 = \tau_2 \sigma^2$ ), tenemos la métrica estándar

$ds^2 = dz d\bar{z}$  ( $\Leftrightarrow \check{g}_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \check{g}_{\underline{a}\underline{b}} = \delta_{\underline{a}\underline{b}}$ ), PERO la

periodicidad sería entonces  $z \simeq z + 2\pi$ ,  $z \simeq z + 2\pi \tau$ :



(Esto es análogo a la partícula:  $g_{\tau\tau} = \sqrt{T}$ ,  $\tau \in [0, 1]$

vs.  $g_{\underline{\tau}\underline{\tau}} = 1$ ,  $\underline{\tau} = \tau T \in [0, T]$ .)

Claramente podemos restringir atención a  $\tau_2 = \text{Im} \tau \geq 0$

( $\tau_2 \rightarrow -\tau_2$  es el mismo toro, visto de cabeza).

Además, podemos notar que  $\tau$ ,  $\tau+1$  y  $-\frac{1}{\tau}$  describen toros equivalentes bajo  $\text{Diff} \times \text{Weyl}$ :

$$T: \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^1 \\ \tilde{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^1 - \sigma^2 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \Rightarrow ds^2 = \underbrace{|\underbrace{d\tilde{\sigma}^1 + (\tau+1)d\tilde{\sigma}^2}_{\equiv \tilde{\tau}}|}^2$$

$$S: \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^1 \\ \tilde{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ -\sigma^1 \end{pmatrix} \Rightarrow ds^2 = \frac{1}{|\tau|^2} \underbrace{|\underbrace{d\tilde{\sigma}^1 + (-\frac{1}{\tau})d\tilde{\sigma}^2}_{\equiv \tilde{\tau}}|}^2$$

Estas 2 transformaciones generan el grupo  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^1 \\ \tilde{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \Rightarrow ds^2 \propto |d\tilde{\sigma}^1 + \tilde{\tau} d\tilde{\sigma}^2|^2$$

$$\text{con } \tilde{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad ad - bc = 1$$

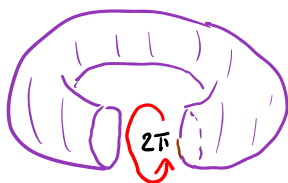
Estos son difeos del toro (respetan la periodicidad),

de modo que  $\tilde{\tau} \approx \tau$ . Pero notar que se trata

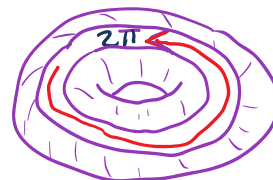
de difeomorfismos "grandes", no conectados a la identidad.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = TST \text{ (generación alternativa)}$$

describen



y



, respectivamente,

que se conocen como "torceduras (twists) de Dehn".

El punto es entonces que, en el caso del toro, el grupo de difeos  $\text{Dif}$  no es conexo. Para  $S^2$  (y  $D^2$ ) tenemos

$$\text{Dif} = \text{Dif}_0, \text{ pero en general } \text{Dif}_0 \subset \text{Dif}$$

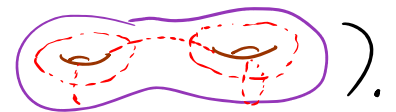
↖ componente que contiene a la identidad

y definimos el grupo modular o grupo de clase de mapeo

$$\text{GM} \equiv \frac{\text{Dif}}{\text{Dif}_0}$$

(=  $\text{Sp}(2m, \mathbb{Z})$ ) para género  $m$ , generados por

las torceduras de Dehn



$\int \mathcal{D}g_{ab} \propto \int \mathcal{D}\xi$  cancela solo  $\text{Dif}_0/\text{GKC}$ , de manera que

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} F[g_{ab}] = \frac{1}{\text{GKC}} \underbrace{\frac{\text{Dif}_0}{\text{Dif}}}_{\frac{1}{\text{GM}}} \int dt_1 \dots dt_m \mu(t_i) F[\check{g}_{ab}(t_i)]$$

← ≡  $\frac{\text{Métricas}}{\text{Dif}_0 \times \text{Weyl}}$

Espacio de Teichmüller

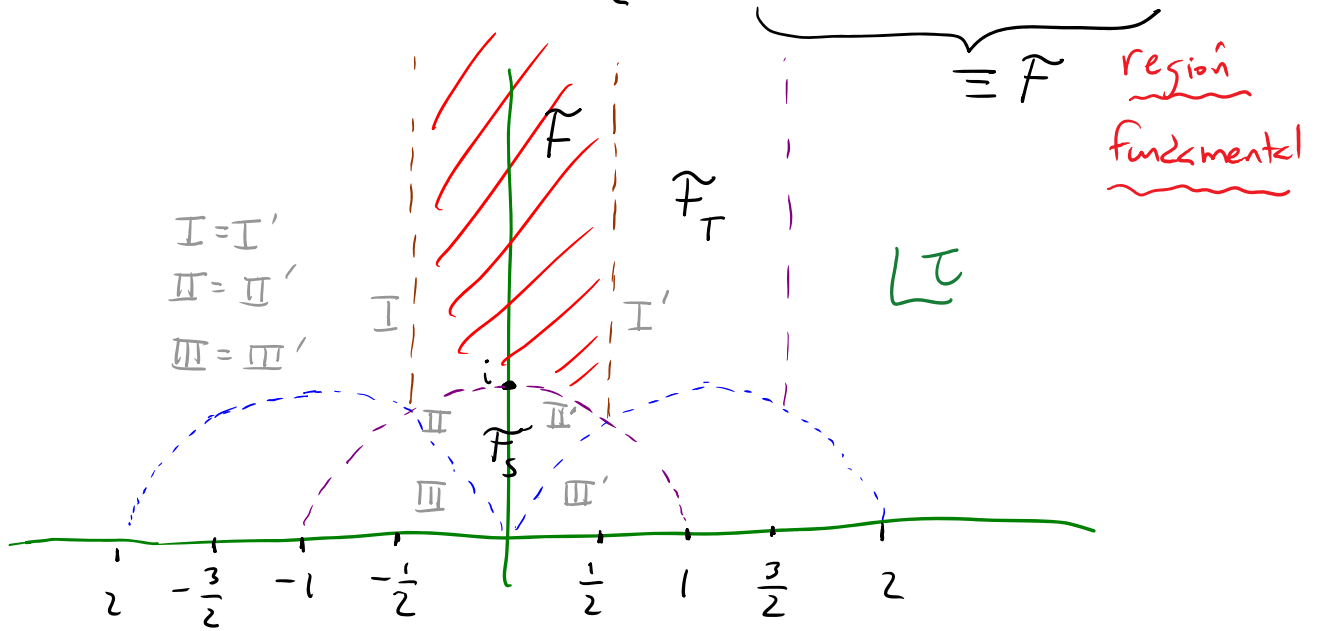


$$\int_M dt_1 \dots dt_m \leftarrow \frac{1}{\text{GM}} \text{Espacio de Módulos}$$



En el caso del toro,  $\mathbb{T} = \{ \tau \mid \text{Im} \tau > 0 \}$ ,

y podemos tomar  $M = \left\{ \tau \mid |\tau| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \text{Re} \tau \leq \frac{1}{2} \right\}$ .



Tendremos entonces

$$\frac{\int Dg_{ab}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} \dots = \frac{1}{6Kc} \int_F d^2\tau \mu(\tau) \dots$$

↖ deber ser invariancia de b

¿Vectores de Killing conformes?  $\delta z$  periódicos tales que  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \delta z = 0$

$\Rightarrow \delta z = \epsilon$  constante  $\therefore K=2$

(Riemann-Roch:  $K-M = 3\chi = 0$  ✓)

$G_{KC} = U(1) \times U(1)$  (transacciones en  $\sigma^1, \sigma^2$ ) es compacto.

Como ahora  $\frac{1}{G_{KC}} \neq 0$ , incluso la amplitud de cero puntos  
 ( $\leftrightarrow$  energía del vacío) puede ser no nula ( $\leftrightarrow$  corrección  
 cuántica esperada a  $1/k_0$ ), así que calculemos

$$M_{T^2}^{(0)} \equiv \frac{e^{-i0\Phi_0}}{G_{KC}} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} d\tau_1 d\tau_2 \left\langle \prod_{i=1}^2 \left( \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}^2} \sqrt{g} g^{ab} \frac{\partial g_{bc}}{\partial \tau_i} g^{cd} b_{da} \right) \right\rangle_{T^2(\tau)}$$

$\left( \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) = \left( \begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \right) \in GM,$

por difeo grande aquí y en lo sucesivo,  
 que no cambia  $\tau$  tomamos  $g_{ab} = g_{ab}^V(\tau)$

$\left( \text{---} \right) \text{ análogo a } \left( \text{---} \right)$

Veamos cada parte por separado.

[15: 14/05/13]

$$\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)}^X \equiv \int \mathcal{D}_g X^m e^{-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}^2} \sqrt{g} X \cdot \Delta_\sigma X}$$

$\Delta_\sigma \equiv -\frac{1}{2\pi\alpha'} g^{ab} \partial_a \partial_b$

La medida se define (como vimos en detalle en el caso de la partícula, pp. 99-100) a partir de la norma

$$\| \delta X \|^2 = \int_{\mathcal{D}^2} \sqrt{g} \delta X \cdot \delta X \quad (\text{invariante bajo difeos}).$$

Elegimos normalizar la integral funcional de tal forma que

$$\int \mathcal{D}_g(\delta X^m) e^{-\frac{1}{2} \| \delta X \|^2} = 1.$$

Desarrollando  $X^w(\sigma) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} x_{\vec{n}}^w \varphi_{\vec{n}}(\sigma)$ ,

donde  $\varphi_{\vec{n}}(\sigma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} e^{i\vec{n} \cdot \sigma}$  son un conjunto

completo de autofunciones (periódicas) de  $\Delta_\sigma$ ,

$$\Delta_\sigma \varphi_{\vec{n}}(\sigma) = \lambda_{\vec{n}} \varphi_{\vec{n}}(\sigma) \quad \text{con} \quad \lambda_{\vec{n}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} g^{ab} n_a n_b = \frac{(n_2 - n_1 \tau)(n_2 - n_1 \bar{\tau})}{2\pi\alpha' \tau_2^2},$$

que satisfacen la condición de ortogonalidad

$$(\varphi_{\vec{n}}, \varphi_{\vec{n}'}) \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g} \varphi_{\vec{n}} \varphi_{\vec{n}'} = \delta_{\vec{n}, \vec{n}'},$$

tenemos  $\|\delta X\|^2 = \sum_{\vec{n}} \delta x_{\vec{n}} \delta x_{\vec{n}}$ , de modo que

$$\mathcal{D}_g X^w \equiv \prod_{\vec{n}, w} \frac{dx_{\vec{n}}^w}{\sqrt{2\pi}}$$

Tenemos entonces

$$\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)}^X = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^D} \int d^D x_0 \underbrace{\prod_{\vec{n} \neq 0} \left[ \frac{\int d^D x_{\vec{n}}}{(\sqrt{2\pi})^D} e^{-\frac{1}{2} \lambda_{\vec{n}} (x_{\vec{n}})^2} \right]}_{(2\pi\sqrt{\tau_2})^D \int d^D x} \left[ \prod_{\vec{n} \neq 0} \frac{1}{2\pi\alpha' \tau_2^2} (n_2 - n_1 \tau)(n_2 - n_1 \bar{\tau}) \right]^{-D/2}$$

$$X^w(\sigma) = X^w + \underline{X^w}(\sigma) \rightarrow V_D = (2\pi)^D \delta^{(D)}$$

$$\prod_{\vec{n} \neq 0} \lambda_{\vec{n}} \equiv \underline{\det \Delta_\sigma}$$

Con "regularización por función zeta" (que usamos en la p. 211 para la partícula,  $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \Big|_{s=0} \equiv \zeta(s) \Big|_{s=0} = -\frac{1}{2}$ )

[ver Polchinski, Commun. Math. Phys. 104, 37-47 (1986), apéndice A], se obtiene (como verificaremos más adelante)

$$\underline{\det \Delta_{\sigma}} \sim \tau_2^2 |\eta(\tau)|^4, \text{ donde}$$

$$\eta(\tau) \equiv q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad \text{con } q \equiv e^{2\pi i \tau}$$

es la función eta de Dedekind (holomorfa  $\forall \tau_2 \geq 0$ ).

Para la integral sobre fantasmas, necesitamos primero calcular las inserciones. Usando

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial \tau_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\tau_1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g_{ab}}{\partial \tau_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\tau_1 \end{pmatrix} \quad \text{tenemos}$$

$$M_1^{ad} \equiv g^{ab} \frac{\partial g_{bc}}{\partial \tau_1} g^{cd} = \frac{1}{\tau_2} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_2^2} \begin{pmatrix} -2\tau_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$M_2^{ad} \equiv g^{ab} \frac{\partial g_{bc}}{\partial \tau_2} g^{cd} = \frac{1}{\tau_2} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\tau_2} = \frac{2}{\tau_2^3} \begin{pmatrix} \tau_1^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollando  $b_{ab}(\sigma) = \sum_I b_I B_{ab}^I(\sigma)$

↖ números anti conmutativos  
↙ tensor (comutativo)  
simétrico, sin traza

con  $(B^I, B^J) \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} g^{cd} B_{ac}^I B_{bd}^J = \delta^{IJ}$

tenemos  $D b_{ab}(\sigma) \equiv \prod_I db_I$

Nos interesan los  $(M=2)$  modos cero ortonormales.

Fácil en coordenadas  $\begin{cases} \underline{\sigma}^1 = \sigma^1 + \tau_1 \sigma^2 \\ \underline{\sigma}^2 = \tau_2 \sigma^2 \end{cases}$ , donde  $g_{\underline{a}\underline{b}} = \delta_{\underline{a}\underline{b}}$ :

$$B_{\underline{a}\underline{b}}^{0,1} \equiv \frac{1}{2\pi\sqrt{2\tau_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_{\underline{a}\underline{b}}^{0,2} \equiv \frac{1}{2\pi\sqrt{2\tau_2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformando de vuelta a las coordenadas  $\sigma^1, \sigma^2$ , esto es

$$B_{ab}^{0,1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\tau_2}} \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 - \tau_2 \end{pmatrix} \quad B_{ab}^{0,2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\tau_2}} \begin{pmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 2\tau_1\tau_2 \end{pmatrix}$$

La contribución de modos cero es  $\left\langle \prod_{i=1}^2 \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} M_i^{ad} b_{da}^{(i)} \right\rangle_{T^2(\tau)}$   
es entonces

$$\left( \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \right)^2 \int db_{0,1} db_{0,2} \left[ M_1^{ad} (b_{0,1} B_{da}^{0,1} + b_{0,2} B_{da}^{0,2}) M_2^{bc} (b_{0,1} B_{cb}^{0,1} + b_{0,2} B_{cb}^{0,2}) \right]$$

$$\sim \tau_2^2 (M_1^{ad} B_{da}^{o,2}) (M_2^{bc} B_{cb}^{o,1}) \sim \tau_2^2 \left( \frac{1}{\sqrt{\tau_2 \tau_2}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{\tau_2 \tau_2}} \right) = \frac{1}{\tau_2}$$

Falta ahora determinar la contribución de los modos no

constantes,  $\langle 1 \rangle_{T^2(\sigma)}^{\underline{b}, \underline{c}} \equiv \int \mathcal{D}b_{-a}^{\underline{b}}(\sigma) \mathcal{D}c^{\underline{a}}(\sigma) e^{-S_f[\underline{b}, \underline{c}]}$

Recordar (pp. 367, 366) que

$$S_f = \frac{1}{2\pi} (b, P_1 c) \equiv \frac{1}{2\pi} (P_1^\dagger b, c)$$

donde  $(P_1 c)_{ab} \equiv \nabla_a c_b + \nabla_b c_a - g_{ab} \nabla_c c^c = (g_{bc} \nabla_a + g_{ac} \nabla_b - g_{ab} \nabla_c) c^c$

$((P_1 c))^{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\partial} c^{\bar{z}}$  en norma conforme),  $(,)$  denota

el producto interno invariante bajo difeos, y

$(P_1^\dagger)^{dab} = -g^{da} \nabla^b - g^{db} \nabla^a + g^{ab} \nabla^d$  es el operador adjunto a

$P_1$  ( $(P_1^\dagger b)^{\bar{z}} = \bar{\partial} b_{\bar{z}\bar{z}}$  en norma conforme).

Elegimos  $B_{ab}^{\bar{I}}(\sigma)$  tales que  $\underbrace{P_1 P_1^\dagger}_{\text{mapes tensores} \leftarrow \text{tensores}} B_{ab}^{\bar{I}} = \lambda_{\bar{I}}^2 B_{ab}^{\bar{I}}$ .

Desarrollamos de manera similar  $c^{\underline{a}}(\sigma) = \sum_{\underline{J}} c^{\underline{J}} C_{\underline{J}}^{\underline{a}}(\sigma)$ ,

con  $(C_{\bar{I}}, C_{\underline{J}}) = \delta_{\bar{I}\underline{J}}$  y  $\underbrace{P_1^\dagger P_1}_{\text{mapes vectores} \leftarrow \text{vectores}} C_{\underline{J}}^{\underline{a}} = \lambda_{\underline{J}}^2 C_{\underline{J}}^{\underline{a}}$ .

Notando que

$$(P_I P_I^\dagger)(P_I C_J) = P_I (P_I^\dagger P_I C_J) = \lambda_J'^2 (P_I C_J) \quad y$$

$$(P_I^\dagger P_I)(P_I^\dagger B^I) = P_I^\dagger (P_I P_I^\dagger B^I) = \lambda_I^2 (P_I^\dagger B^I),$$

veamos que para  $\lambda_I, \lambda_J' \neq 0$ , existe una relación biunívoca entre los 2 conjuntos de autofunciones:

$$B_{ab}^I = \frac{1}{\lambda_I} (P_I C_I) \quad \lambda_I = \lambda_I' \neq 0,$$

de tal manera que

$$\langle 1 \rangle_{T(z)}^{b,c} \sim \prod_{I \neq 0} \left\{ \int db_I dc^I \exp\left[-\frac{1}{2\pi} \lambda_I b_I c^I\right] \right\}$$

$$\sim \prod_{I \neq 0} \lambda_I = \sqrt{\det P_I^\dagger P_I} = \sqrt{\det P_I P_I^\dagger}$$

Y usando  $(P_I^\dagger P_I)^d_c = -2 \delta_c^d \underbrace{\nabla_a \nabla^a}_{\sim \Delta_\sigma}$

concluimos que  $\sqrt{\det P_I^\dagger P_I} \sim \det \Delta_\sigma \sim \tau_2^2 |\eta(\tau)|^4$  p. 397

Por último, podemos determinar el volumen del GKC notando que los vectores de Killing conformes (ortonormales en el producto interno correspondiente) son los modos cero

$$C_{0,1}^a = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{0,2}^a = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow C_{0,1}^a = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{0,2}^a = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \begin{pmatrix} -\tau_1/\tau_2 \\ 1/\tau_2 \end{pmatrix},$$

de manera que

$$\frac{1}{\text{GKC}} \sim \left\langle C^1(\check{\sigma}) C^2(\check{\sigma}) \right\rangle_{T^2(z)}^{c-\underline{c}}$$

← solo parte de modo cero

$$\sim \int dc_{0,1} dc_{0,2} \left[ c_{0,1} \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} + c_{0,2} \frac{(-\tau_1/\tau_2)}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \right] \left[ c_{0,1} \cdot 0 + c_{0,2} \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}\tau_2} \right]$$

$$\sim \frac{1}{\tau_2^2}$$



Juntándolo todo tenemos

$$\mathcal{M}_{T^2}^0 \sim \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2} \frac{1}{\text{Im}\tau} (\text{Im}\tau)^2 |\eta(\tau)|^4 (\text{Im}\tau)^{D/2} \text{Im}(\tau)^{-D} |\eta(\tau)|^{-2D}$$

$\uparrow$  (omitendo  $V_D$ )  
 $\uparrow$   $\int d^D x_0$   
 $\uparrow$   $\langle 1 \rangle^{\frac{D}{2}}$   
 $\uparrow$   $\langle 1 \rangle^{\frac{D}{2}}$   
 $\uparrow$   $\frac{1}{\text{Im}\tau}$   
 $\uparrow$   $\frac{1}{(\text{Im}\tau)^2}$   
 $\uparrow$  GKK  
 $\uparrow$   $\prod_{i=1}^D \left( b_i \frac{\partial g}{\partial \tau_i} \right)$

(notar que los fantasmas cancelan los 2 X's no físicos ✓), es decir,

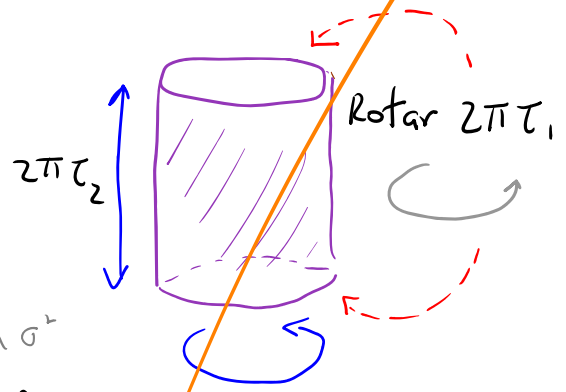
$$\mathcal{M}_{T^2}^0 = (4\pi^2 \alpha')^{-13} \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{4(\text{Im}\tau)^2} (\text{Im}\tau)^{-12} |\eta(\tau)|^{-48} \quad (D=26)$$

Es útil volver a obtener este resultado de otra manera, empleando cuantización canónica. Dado que para cualquier sistema

$$\langle f | e^{-\hat{H}T} | i \rangle = \int_{\varphi(t=0)=\varphi_i}^{\varphi(t=T)=\varphi_f} \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(e^{-\hat{H}T}) = \int_{\varphi(t=0)=\varphi(t=T)} \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}$$

veamos que la integral funcional en el toro  $T^2(\tau)$  define la función de partición

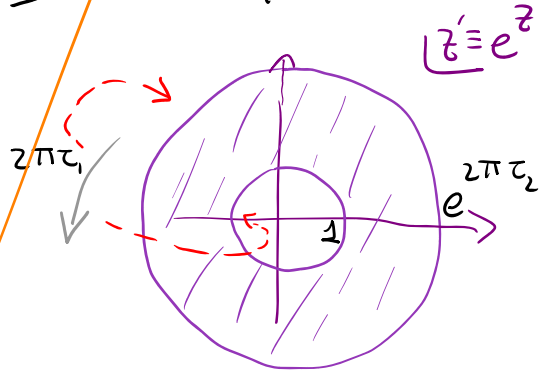


$$\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)}^x = \text{Tr}_x \left[ e^{-2\pi\tau_2 \hat{H} + 2\pi\tau_1 \hat{P}} \right] \equiv Z^x(\tau)$$

↙ transición en  $\sigma^+$ 
↗ transición en  $\sigma^+$

donde  $\hat{H} = \hat{L}_0 + \hat{\tilde{L}}_0 - \frac{1}{24}(c^x + \tilde{c}^x)$

$\hat{P} = \hat{L}_0 - \hat{\tilde{L}}_0$  p. 221



es decir,

$$Z^x(\tau) = (\eta \bar{\eta})^{-D/24} \text{Tr}_x \left( \eta \begin{matrix} \hat{L}_0 \\ \hat{\tilde{L}}_0 \end{matrix} \bar{\eta} \right) \quad \text{con } \eta \equiv e^{2\pi i \tau}$$

$\tau = \tau_1 + i\tau_2$

Usando  $\hat{L}_0 = \frac{\alpha' \hat{p}^2}{4} + \sum_{\mu, \nu} \hat{\alpha}_{-\mu}^{\mu} \hat{\alpha}_{\mu\nu}$  (similar para  $\hat{\tilde{L}}_0$ )

$\equiv \sum_n \hat{N}_{\mu\nu}$

↙ operadores de número

y

$$\text{Tr}_x(\hat{O}) \equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \sum_{N_{\mu\nu} = 0}^{\infty} \langle N_{\mu_1}, N_{\mu_2}, \dots, j_k | \hat{O} | N_{\mu_1}, N_{\mu_2}, \dots, j_k \rangle$$

↙  $\forall \mu, \nu$

tenemos

$$\text{Tr}_x \left( \hat{g} \hat{L}_0 \hat{g}^{-1} \right) = (2\pi)^D \delta^{(D)}(0) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-\pi \tau_2 \alpha' k^2} \prod_{\mu, n} \left[ \sum_{N_{\mu, n}, \tilde{N}_{\mu, n}=0}^{\infty} g^{N_{\mu, n}} \bar{g}^{\tilde{N}_{\mu, n}} \right]$$

$$= V_D \frac{1}{(2\pi)^D} \left( \frac{2\pi}{2\pi \tau_2 \alpha'} \right)^{D/2} \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-g^n}{1-g^{-n}} \right)^{-1} \right]^D \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-\bar{g}^n}{1-\bar{g}^{-n}} \right)^{-1} \right]^D$$

$$= |\eta(\tau)|^{-2D} (g \bar{g})^{+D/24}$$

así que

$$Z^x(\tau) = V_D (4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{-D/2} |\eta(\tau)|^{-2D}$$

lo cual coincide con el resultado de la integral funcional <sup>p.397</sup> (y verificamos por tanto el resultado para det  $\Delta_\sigma$ ).

La misma idea aplica para los fantasmas, excepto que para un campo fermióni  $\psi$  [ver p.ej. Polchinski Vol 1, Apéndice A]

$$\int_{\psi(\tau)=\psi(0)} \mathcal{D}\psi e^{-S[\psi]} = \text{Tr} \left( (-1)^{\hat{F}} e^{-\hat{H}\tau} \right), \quad \int_{\psi(\tau)=-\psi(0)} \mathcal{D}\psi e^{-S[\psi]} = \text{Tr} \left( e^{-\hat{H}\tau} \right)$$

donde  $\hat{F} \equiv \sum_{n>0} (c_{-n} b_n + b_{-n} c_n) + c_0 b_0 + \overset{\text{modos}}{\text{derechos}} \equiv \text{Número Fermiónico} :$

$$(-1)^{\hat{F}} |\downarrow\rangle = +|\downarrow\rangle, \quad \{(-1)^{\hat{F}}, \hat{b}_{-n}\} = 0 = \{(-1)^{\hat{F}}, \hat{c}_{-n}\}$$

Para ver que esto funciona, calculemos

$$\text{Tr}_{b,c} \left( e^{-2\pi\tau_2 \hat{H} + 2\pi\tau_1 i \hat{P}^f} \right) = q^{-\frac{c^f}{24}} \bar{q}^{-\frac{\tilde{c}^f}{24}} \text{Tr}_{b,c} \begin{pmatrix} \hat{L}_0^f & \hat{\tilde{L}}_0^f \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Recordando que hay 4 estados base

$$|\downarrow\downarrow\rangle, \quad |\uparrow\downarrow\rangle \equiv c_0 |\downarrow\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\uparrow\rangle \equiv \tilde{c}_0 |\downarrow\downarrow\rangle,$$

$$|\uparrow\uparrow\rangle \equiv c_0 \tilde{c}_0 |\downarrow\downarrow\rangle$$

y usando  $c^f = -26 = \tilde{c}^f$ ,

$$\hat{L}_0^f = \sum_{n>0} n (\underbrace{\hat{c}_{-n} \hat{b}_n}_{\equiv \hat{N}_n^c} + \underbrace{\hat{b}_{-n} \hat{c}_n}_{\equiv \hat{N}_n^b}) - 1 \quad (\text{similar para } \hat{\tilde{L}}_0^f)$$

obtenemos

$$\text{Tr}_{b,c} \left( e^{-2\pi\tau_2 \hat{H} + 2\pi\tau_1 i \hat{P}^f} \right) = \underbrace{(1+1+1+1)}_{\text{estados base}} (q \bar{q})^{\frac{13}{12} - 1} \prod_{n=1}^{\infty} \underbrace{(1+q^n)^2}_{N_n^c=0, N_n^c=1} \underbrace{(1+\bar{q}^n)^2}_{N_n^b=0, N_n^b=1}$$

$\neq 0$ .

Esto solo puede ser  $\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)}$  con condiciones de borde antiperiódicas en  $\sigma^2$ , porque así no existen modos cero.

Por otro lado,

$$\text{Tr}_{b,c} [(-1)^{\hat{F}} e^{-2\pi\tau_2 \hat{H}^f + 2\pi i \tau_1 \hat{P}^f}] = (-1)^{1+1+1+1} (q\bar{q})^{\frac{13}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^2 (1-\bar{q}^n)^2 = 0$$

↑ ↑

Como esperamos para  $\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)}^{c,b}$  en condiciones de borde periódicas, para los axles sí existen modos cero.

Para obtener un resultado distinto de cero necesitamos una inserción por cada modo cero:

$$\langle b(z_1) c(z_2) \tilde{b}(\bar{z}_3) \tilde{c}(\bar{z}_4) \rangle_{T^2(\tau)}^{c,b} = \text{Tr} [(-1)^{\hat{F}} \hat{b}_0 \hat{c}_0 \hat{b}_0 \hat{c}_0 e^{-2\pi\tau_2 \hat{H}^f + 2\pi i \tau_1 \hat{P}^f}]$$

↑ ↑ ↑

$$= (1+0+0+0) (q\bar{q})^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^2 (1-\bar{q}^n)^2 = |\eta(\tau)|^4$$

que nuevamente coincide con la integral funcional. ✓

En conjunto tenemos, como antes,

$$\eta_{T^2}^0 = (4\pi^2 \alpha')^{-13} \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4(\text{Im}\tau)^2} (\text{Im}\tau)^{-12} |\eta(\tau)|^{-48}$$

(notar que  $d\tau d\bar{\tau} = 2d\tau_1 d\tau_2$ )

$\swarrow$   $SL(2, \mathbb{Z})$

La integral debe ser invariante modular (pp. 392-3), pues de otra manera habría una anomalía "gravitacional" global.

Es fácil verificar que bajo  $\tau \rightarrow \tilde{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$

tenemos  $d^2\tau \rightarrow d^2\tilde{\tau} = \frac{d^2\tau}{|c\tau + d|^4}$  y  $\text{Im}\tau \rightarrow \text{Im}\tilde{\tau} = \frac{\text{Im}\tau}{|c\tau + d|^2}$

así que  $\frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2}$  es invariante.

Además,  $\eta(\tau+1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau)$ ,  $\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau)$ ,

$\text{Im}(\tau+1) = \text{Im}(\tau)$ ,  $\text{Im}(-1/\tau) = \frac{\text{Im}\tau}{|\tau|^2}$ ,

así que  $\text{Im}\tau |\eta(\tau)|^4$  es invariante modular.

Concluimos entonces que en  $D=26$  (y solo en  $D=26$ )

$$M_{T^2}^0 \sim \int \frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2} (\text{Im}\tau |\eta(\tau)|^4)^{-12} \text{ es invariante. } \checkmark$$

Para interpretar nuestros resultados, conviene regresar a la expresión antes de calcular la traza:

$$\begin{aligned} M_{T^2}^0 &= \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{4\tau_2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-\pi\tau_2 \alpha' k^2} \sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} \eta_{h_E^{-1}} \bar{\eta}_{\tilde{h}_E^{-1}} \\ &= \int \frac{d^2\tau}{4\tau_2} (4\pi\alpha'\tau_2)^{-D/2} \sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} \eta_{h_E^{-1}} \bar{\eta}_{\tilde{h}_E^{-1}} \end{aligned}$$

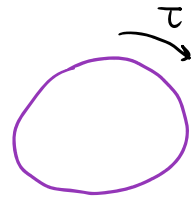
donde la suma es sobre los estados  $|E\rangle$  en el espacio de Hilbert 'transversal'  $H_{\perp}$ , que incluye solo a  $D-2$  conjuntos de osciladores  $\alpha_n^i, \tilde{\alpha}_n^i$  (y excluye entonces al modo cero  $k^{\mu}$ , los fantasmas  $C_n, b_n, \tilde{C}_n, \tilde{b}_n$ , y los 2 conjuntos de osciladores 'longitudinales'  $\alpha_n^0, \tilde{\alpha}_n^0$ ) y  $\hat{L}_0^{\perp} |E\rangle = h_E |E\rangle$ .



(en nuestro caso  $\hat{L}_0^\perp = \sum_{\substack{n>0 \\ i=2, \dots, D-1}} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i = \hat{N}^\perp$  así que  $h_E = N_E^\perp$ ).

Para el caso de una partícula puntual de masa  $m$ , la amplitud a un lazo es (pp. 103, 111)

$$\mathcal{M}_S^0 = \int_0^\infty \frac{dT}{2T} \int_{X^\mu(0)=X^\mu(1)} \mathcal{D}X^\mu(\tau) e^{-\frac{m}{2} \int_0^1 d\tau \left( \frac{\dot{X}^2}{T} + T \right)}$$



volumen del grupo de Killing (no existía para )

$$= V_D \int_0^\infty \frac{dT}{2T} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-\frac{T}{2}(k^2 + m^2)}$$

omitir  $\uparrow$

$$= \int_0^\infty \frac{dT}{2T} (2\pi T)^{-D/2} e^{-\frac{T}{2} m^2}$$

Para comparar con la teoría de cuerdas, donde cada  $|E\rangle \in H_\perp$  con  $h_E = \tilde{h}_E$  ( $\leftrightarrow N_E = \tilde{N}_E$ , la condición de emparejamiento de niveles) corresponde a una 'partícula' con masa

$$m_E^2 = \frac{2}{\alpha'} (h_E + \tilde{h}_E - 2),$$



Consideremos una suma sobre el resultado para la partícula puntual,

$$\sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} M_{S'}^0(m_E^2) = \int_0^{\infty} \frac{dT}{2T} (2\pi T)^{-D/2} \sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} e^{-\frac{T}{\alpha'}(h_E + \tilde{h}_E - 2)\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\theta}{2\pi} e^{i(h_E - \tilde{h}_E)\theta} d\theta}_{\delta_{h_E, \tilde{h}_E}}$$

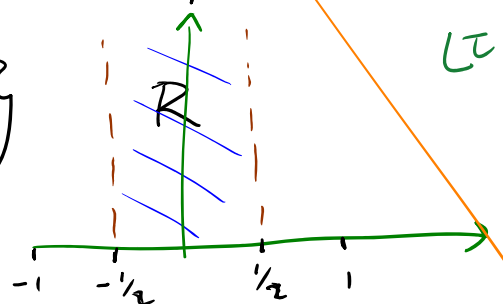
$(h_E - \tilde{h}_E \in \mathbb{Z})$  es necesario en cuerdas para asegurar la invariancia modular

Definiendo  $\tau \equiv \frac{\theta}{2\pi} + \frac{iT}{2\pi\alpha'}$  y  $q \equiv e^{2\pi i\tau}$  esto es

$$\sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} M_{S'}^0(m_E^2) \delta_{h_E, \tilde{h}_E} = \int_{\mathcal{R}} \frac{d^2\tau}{4\tau_2} (4\pi\alpha'\tau_2)^{-D/2} \sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} q^{h_E - 1} \bar{q}^{\tilde{h}_E - 1}$$

que coincide exactamente con el resultado de cuerdas  $M_{T^2}^0$ , excepto por la región de integración

$$\mathcal{R} \equiv \left\{ \tau \mid \text{Im}\tau > 0, -\frac{1}{2} \leq \text{Re}\tau \leq \frac{1}{2} \right\} \neq \mathcal{F}$$



En particular, la región  $\tau_2 = \text{Im} \tau \rightarrow 0$  ( $T \rightarrow 0$ ),  
 que en el caso de partículas da lugar a  
divergencias ultravioleta ( $|k^M| \rightarrow \infty$ ),

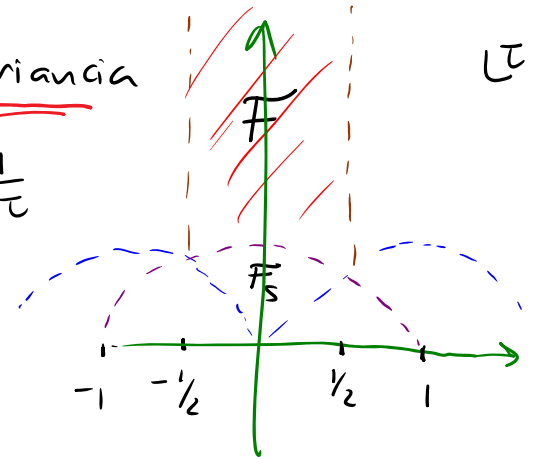


¡está ausente en la amplitud de cuerdas!!

La razón, como vimos, es la invariancia modular. Usando  $S: \tau \rightarrow \tilde{\tau} = -\frac{1}{\tau}$

(que corresponde al difeo grande

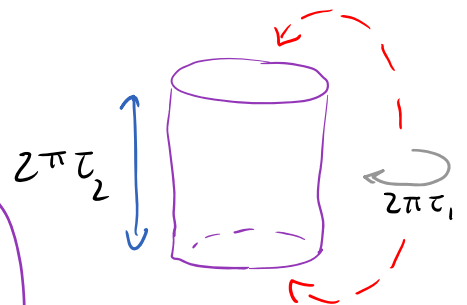
$(\sigma_1, \sigma_2) \leftrightarrow (\sigma_2, -\sigma_1)$ ) tenemos



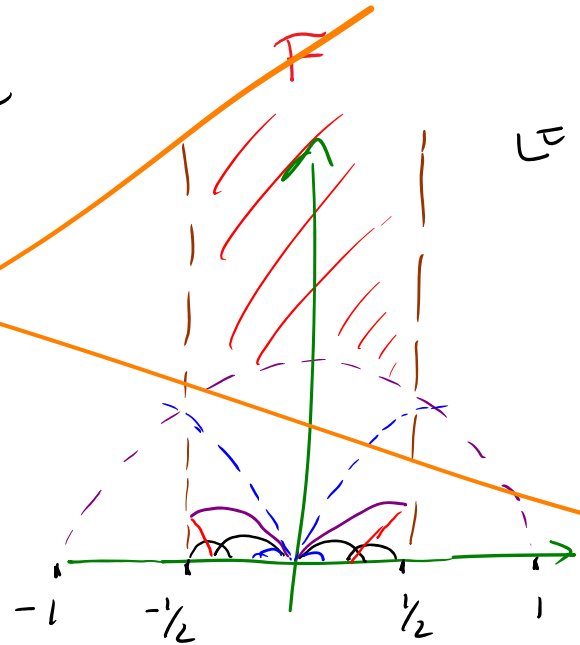
que, p.ej.,  $\tau = i\tau_2 \rightarrow 0$  es equivalente

a  $\tilde{\tau} = -\frac{1}{i\tau_2} = i\tilde{\tau}_2 \rightarrow \infty$ ,

es decir



La región de integración  $R$  que es relevante para el caso de partículas de hecho contiene un número infinito de copias de la región  $F$  que cuerda incorpora.



Vemos entonces que la estructura de la teoría de cuerdas impone automáticamente un corte UV (cota inferior para  $\tau_2 \sim$  cota superior para  $|k^m|$ ), invariante de Lorentz, de manera autoconsistente (lo cual no es trivial, dado que existen campos de norma).

El comportamiento en el límite opuesto, IR,  $\tau_2 \rightarrow \infty$  ( $\leftrightarrow T \rightarrow \infty \leftrightarrow |k^m| \rightarrow 0$ ), está dominado por los estados con masas más bajas, justamente como en el caso de partículas:

$$M_{T^2}^0 = \int_F \frac{d\tau_1 d\tau_2}{2\tau_2} (4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{-13} \sum_{|E\rangle \in H_1} \underbrace{\left( e^{-2\pi\tau_2 + 2\pi i\tau_1} \right)^{h_E - 1}}_{\bar{q}} \underbrace{\left( e^{-2\pi\tau_2 - 2\pi i\tau_1} \right)^{\tilde{h}_E - 1}}_{\bar{\tilde{q}}}$$

$$> \int \frac{d\tau_2}{2\tau_2} (4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{-13} \left[ 2 \cdot e^{4\pi\tau_2} + 24^2 e^0 + \mathcal{O}(e^{-4\pi\tau_2}) \right]$$

$h_E = \tilde{h}_E = 0$ : taquión

$h_E = \tilde{h}_E = 1$ : gravitón/dilatón/antisimetría

$\Rightarrow$  Divergencia IR

convergente

En una teoría donde el vacío sea estable no habrá taquión, y  $M_{T^2}^0$  será una cantidad finita, que representa

la densidad de energía del vacío  $\rho_0$  ( $\leftrightarrow$  constante cosmológica  $\Lambda$ ) a un lazo:

$$e^{-\rho_0 V_D} = \langle 0 | e^{-\hat{H}T} | 0 \rangle$$

$\uparrow$  Hamiltoniano en segunda cuantización

que para una partícula con masa  $m$  se puede escribir en términos de la integral funcional sobre el campo  $\varphi(x)$  correspondiente:

$$\langle 0 | e^{-\hat{H}T} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\int \mathcal{D}^D x \varphi (-\partial^2 + m^2) \varphi + \text{interacciones}}$$

de aquí vemos que

$$\rho_0 = -\ln \frac{1}{\sqrt{\text{Det}(-\partial^2 + m^2)}} + \text{interacciones}, \text{ y por tanto}$$

$$\rho_0^{(1)} = +\frac{1}{2} \ln [\text{Det}(-\partial^2 + m^2)] = \frac{1}{2} \text{Tr} [\ln(-\partial^2 + m^2)]$$

(signo sería - si la partícula fuera fermión)

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\mathcal{D}^D k}{(2\pi)^D} \ln(k^2 + m^2) = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\mathcal{D}^D k}{(2\pi)^D} e^{-\frac{T}{2}(k^2 + m^2)}$$

$$= \mathcal{M}_{S^1}^0(m^2) \quad \left( = \int \frac{\mathcal{D}^{D-1} k}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \right)$$

Energía de punto cero de osciladores armónicos

O, más fácil, en términos de diagramas:

$$e^{-\rho_0^{(1)} V_b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\bigcirc \bigcirc \dots \bigcirc}_n \Rightarrow \rho_0^{(1)} = \frac{1}{V_b} \bigcirc = \mathcal{M}_{S^1}^0(m^2)$$

Así que en cuerdas tenemos energía del vacío

$\rho^{(1)} = M_{T^2}^0$ , que en ausencia del tensión sería finita

y  $\sim l_c^{-D}$ , por análisis dimensional.

(= 0 si el espectro fuera supersimétrico, porque la contribución de cada bosón sería cancelada por su superpareja fermiónica;

$\sim m_{\text{susy}}^D$  si supersimetría está rota a escala  $m_{\text{susy}}$ .

En la naturaleza,  $0 < \Lambda \ll m_{\text{susy}}^D \leq l_c^{-D}$ . X ?

¿Otras amplitudes a 1 lazo?

$M_{T^2}^{(n)}$  se calcula usando el propagador

$$\Delta^{-1}(z, z') = -\frac{\alpha'}{2} \ln \left| \theta_1 \left( \frac{z-z'}{2\pi} \mid \tau \right) \right|^2 + \frac{[\text{Im}(z-z')]^2}{4\pi\tau_2} + \underbrace{f(\tau, \bar{z})}_{\text{no contribuye}}$$

(en coordenadas  $z = \sigma + \tau \sigma^2$  donde  $g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}$ ,  $g_{zz} = 0 = g_{\bar{z}\bar{z}}$ )

con

$$\theta_1 \left( \frac{z}{2\pi} \mid \tau \right) \equiv i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2/2} e^{i(n-1/2)z}$$

la función teta (zeta) de Jacobi,

o, lo que resulta ser equivalente,

$$\theta_1\left(\frac{z}{2\pi} | \tau\right) = 2 q^{1/8} \operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) (1 - e^{iz} q^m) (1 - e^{-iz} q^m).$$

$\Delta^{-1}(z, z')$  obedece las condiciones de periodicidad

$z \simeq z + 2\pi$ ,  $z \simeq z + 2\pi\tau$ , y satisface la ec. de Green

$$-\frac{2}{\tau'} \partial \bar{\partial} \Delta^{-1}(z, z') = 2\pi \delta^{(2)}(z - z') - \frac{1}{4\pi\tau_2}$$

↑ carga de fondo

(↔ omisión de modo cero)

(Recordando que el orden normal :: se define a través de

$$: X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \equiv X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') - \left(-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z - z'|^2\right),$$

vemos que la autocontracción

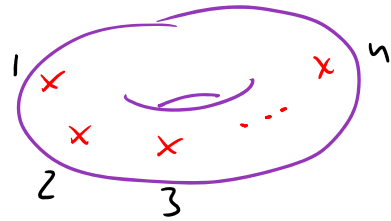
$$\left\langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z, \bar{z}) : \right\rangle_{T^2(\tau)} = -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \lim_{z \rightarrow z'} \left[ \ln \left| \theta_1\left(\frac{z-z'}{2\pi} | \tau\right) \right|^2 - \ln |z - z'|^2 \right]$$

$\theta_1(0 | \tau) + (z-z') \partial_z \theta_1(0 | \tau) + \dots$

es finita pero distinta de cero.

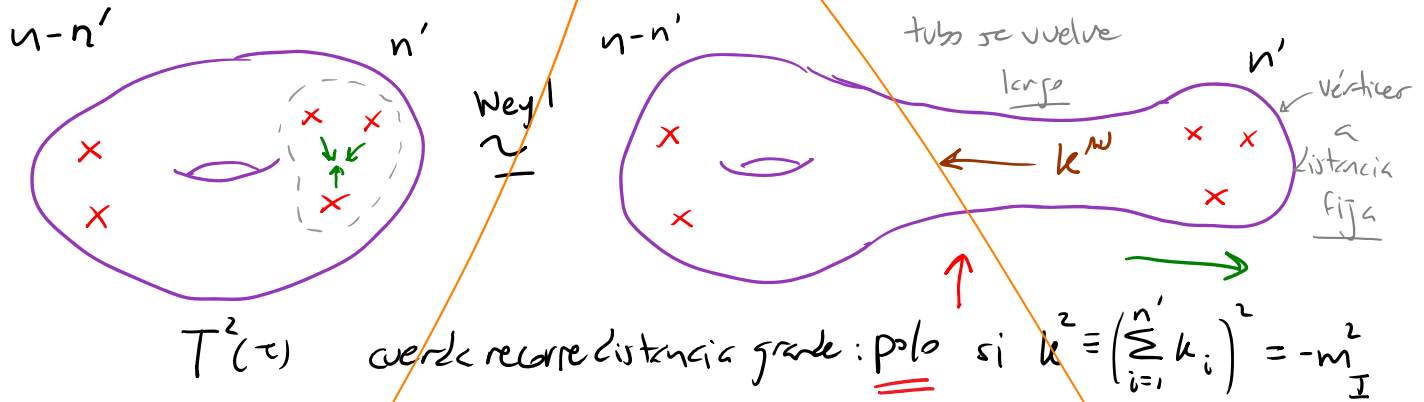
Esto permite en particular que  $M_{T^2}^{(1)} \neq 0$ .

Al calcular amplitudes  $M_{T^2}^{(n)}$ , se encuentra nuevamente que las divergencias (o posibles divergencias) provienen siempre de la frontera del espacio de módulos generalizado



$$M_{T^2}^{(n)} \equiv \frac{\text{toros con } n \text{ puntos marcados}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}}$$

frontera que ahora incluye no solo  $\text{Im} \tau \rightarrow \infty$ , sino también los límites cuando  $n' \geq 2$  vértices se aproximan:



$$\sim \sum_I M_{T^2}^{(n-n'+1)} \frac{1}{k^2 + m_I^2} M_{S^2}^{(n'+1)}$$



(En las pp. 380-1 encontramos de manera idéntica a nivel árbol polos en  $M_{S^2}^{(n=4)}$  con  $n'=2$ , que entendimos también usando la EPO.)

Un punto importante es que el teorema óptico se satisface solo si  $D=26$ : la teoría con  $D < 26$  es consistente a nivel árbol, pero pierde unitariedad a 1 lazo.

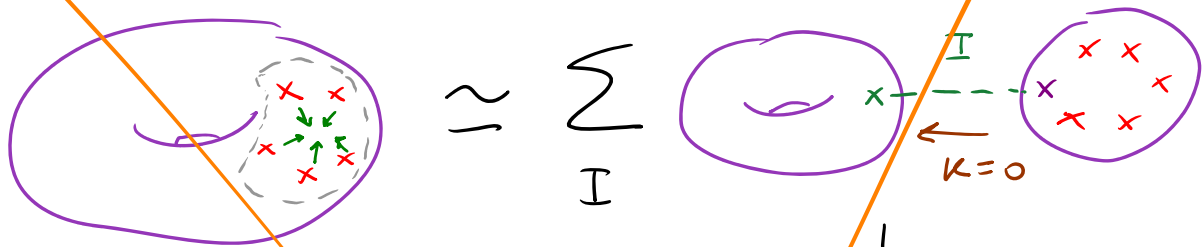
El caso  $n' = n-1$  es especial:

$$\frac{1}{k^2 + m_I^2} = \infty \text{ si } m_I^2 = m_1^2$$

$\uparrow$   $= k_1^2$  por conservación de momento

Esta divergencia nuevamente es IR: como en una teoría de partículas/campos,  $\text{[diagram of a genus-1 surface with two external legs]} \neq 0$  representa una corrección a la masa libre (generalmente compleja  $\leftrightarrow$  inestable).

El caso  $n'=n$  es también problemático, aunque por una razón distinta:



$$\frac{1}{k^2 + m_I^2} = \infty \text{ si } m_I^2 = 0$$

$\Rightarrow \mathcal{M}_{T^2}^{(n)}$  diverge si  $\mathcal{M}_{T^2}^{(1)} = \text{torus with puncture } x \neq 0$  para un estado  $I$

estado  $I$  no masivo, es decir, si existe un renacuajo: una cuerda emitida por el vacío (recuerdan que  $\mathcal{M}_{S^2}^{(1)} = 0$  automáticamente). Esto de hecho resulta ser el caso para el dilatón.

En la acción efectiva habría un término lineal en  $\Phi$ :

$$S_{ef}^+[\Phi] = S_{\text{árbol}} + \int d^D x \mathcal{J} \Phi + \dots$$

( de hecho,  $\frac{1}{2k^2} \int d^D x \sqrt{-G_E} e^{\frac{4D-2}{D-2} \Phi} \wedge$  )

Pero entonces  $\bar{\Phi} = 0$  no es una solución de la ecuación de movimiento  $\partial^2 \bar{\Phi} = J$ .

Si desarrollamos alrededor de una verdadera

solución  $\bar{\Phi}_{sol}(x)$ ,  $\bar{\Phi}(x) = \bar{\Phi}_{sol}(x) + \varphi(x)$ ,

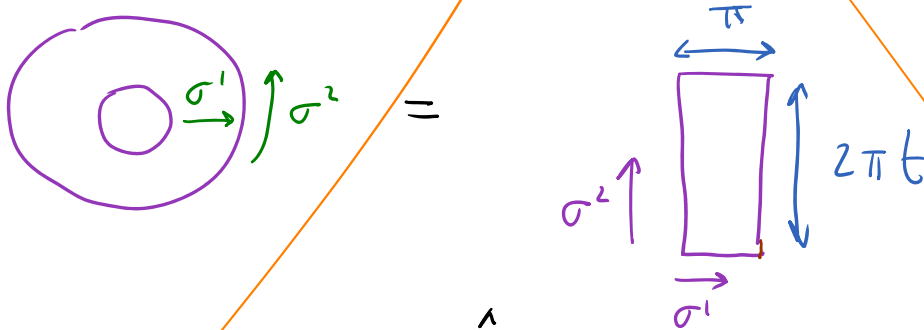
eliminamos el renacuajo, y por tanto la divergencia.   
 ← condensado de dilatación

En resumen, en este caso

Divergencia IR  $\leftrightarrow$  Renacuajo de campo sin masa  $\leftrightarrow$  Corrección al fondo.

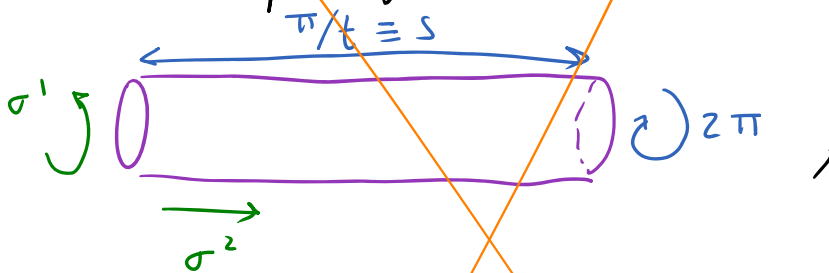
Ideas similares operan en otros diagramas.

P.ej., para el anillo (lazo de cuerda abierta):



$$\eta_{c^2}^{(0)} = \int_0^\infty \frac{dt}{2t} \text{Tr}_{\mathcal{H}_\perp} \left[ e^{-2\pi t \hat{L}_0} \right] = \int_0^\infty \frac{dt}{2t} (8\pi^2 \alpha' t)^{-D/2} \eta(it)^{-(D-2)}$$

$M_{c^2}^{(0)}$  es divergente en  $t \rightarrow \infty$  solo por el taquión de cuerdas abiertas. Es divergente también en  $t \rightarrow 0$ , y a diferencia de lo que pasó en  $T^2$ , aquí no hay un grupo modular para restringir la integración. Pero la idea básica en el toro era intercambiar  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ . Haciendo eso aquí y reescalando por  $1/t$  obtenemos



es decir, una cuerda cerrada que se propaga una distancia

grande (efecto IR):

$$M_{c^2}^{(0)} = (8\pi^2 \alpha')^{-13} \int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} \eta\left(\frac{is}{2\pi}\right)^{-24} = \sum_I \left( \text{diagram with two circles and a dashed line between them} \right)$$

para  $s \rightarrow \infty$ :  $e^{2s} + 24 e^0 + O(e^{-2s})$

↑                    ↑  
taquión            dilatón/gravitón

~~Veremos esta cuenta más adelante ( $\leftrightarrow$  D-branas)...~~

En amplitudes con más lazos (ver Polchinski Vol. I Cap. 9 ó D'Hoker y Phong, Rev. Mod. Phys. 60 (1988), 917) se encuentra una situación similar: posibles divergencias provienen solo de la frontera del espacio de módulos, y cuando existen, tienen una interpretación como efectos IR, es decir, de distancias grandes.

En resumen, las amplitudes de la cuerda bosónica **¡¡ No** tienen divergencias UV **!!** y son unitarias.

La situación en la supercuerda parece ser similar, pero es técnicamente más complicada (por la existencia de 'supermodulos'). NO hay divergencias a 1 lazo (Green, Schwarz '85; Gross, Martinec, Harvey, Rohm '87) ni a 2 lazos (D'Hoker, Phong '01-'05), y se espera que no las haya en general, pero no se han hecho cuentas explícitas. L16: 21/05/13

## Cuerdas en Fondos no Triviales

Hemos visto antes que el vértice del gravitón simétrico  
↓

$$V_h(\varepsilon; k) = -g_c N \frac{2}{\alpha'} \frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} : \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu e^{ik \cdot X} :_g \varepsilon_{\mu\nu},$$

$\frac{K}{2\pi}$

$= h_{\mu\nu}(X)$

donde, para garantizar la invariancia bajo difeos, el orden normal  $: :_g$  se define restando la contracción

$$\Delta^{-1}(\sigma, \sigma') = -\frac{\alpha'}{2} \ln [d^2(\sigma, \sigma')] ]$$

↑ distancia geodésica entre  $\sigma$  y  $\sigma'$

(que en la norma plana  $g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}$   $g_{zz} = 0 = g_{\bar{z}\bar{z}}$  se reduce

a  $-\frac{\alpha'}{2} \ln |z - z'|^2$ ), y la invariancia de Weyl

requiere que  $k^2 = 0$ ,  $k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0$ ,  $\varepsilon^\mu{}_\mu = 0$ ,

representa una fluctuación infinitesimal por encima de la métrica de fondo  $\eta_{\mu\nu}$ .

A partir de esto entendimos que el Espacio Curvo  $\leftrightarrow$  'Estado Coherente' de Gravitones es descrito entonces por

$$\int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_p[X]} e^{\mathcal{V}_h[X]}, \text{ es decir,}$$

$$\begin{aligned} S_p[X] &\rightarrow S_g[X] = S_p[X] - \mathcal{V}_h[X] \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \underbrace{(\eta_{\mu\nu} + 2\kappa h_{\mu\nu}(X))}_{\equiv g_{\mu\nu}(X)}. \end{aligned}$$

La misma idea aplica para los otros modos de oscilación de la cuerda. En particular, el

vértice de la antisimetrización

$$\mathcal{V}_B(\varepsilon; k) = -\frac{\kappa}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma i \varepsilon^{ab} : \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu e^{ik \cdot X} : \varepsilon_{\mu\nu}$$

antisimétrico  
↓

por rotación de Wick ↑

↑  $\varepsilon^{12} = +1$

densidad tensorial

≡  $B_{\mu\nu}(X)$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ab} \text{ es tensor} \right)$$

$$\left( \text{con } k^2 = 0, \varepsilon_{\mu\nu} k^\nu = 0 \right),$$

y del dilatón,

$$V_\varphi(k) = -\frac{K}{2\pi} \frac{1}{\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} : \left( g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} + \frac{26}{12} \alpha' \mathcal{R} \right) e^{ik \cdot X} :_g$$

↓  
por invariancia de Weyl

$\equiv \varphi(X)$

(con  $k^2=0$ ),

[ver p.ej. Polchinski 3.6]

se exponerían para dar lugar a la acción que describe a cuerdas en el formo más general de campos no masivos:

$$S_\sigma[X] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left\{ \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X) \right. \leftarrow \text{campo gravitacional}$$

$$+ i \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X) \leftarrow \text{campo de Kalb-Ramond}$$

$$\left. + \alpha' \sqrt{g} \mathcal{R} \Phi(X) \right\} \leftarrow \text{campo dilatónico}$$

"Modelo  $\sigma$   
no lineal"

Notar que un formo dilatónico constante  $\Phi(X) = \Phi_0$  contribuye

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \mathcal{R} \Phi_0 = \Phi_0 \chi, \text{ es decir (cf. p. 349)}$$

ii la constante de acoplamiento de cuerdas está determinada por valor de formo del dilatón,  $g_c = e^{\Phi_0} !!$



en general,  $x_0^\mu(\sigma)$

Desarrollando  $X^\mu(\sigma) = x_0^\mu + \underline{X}^\mu(\sigma)$ , tenemos infinitas interacciones:

$$\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X) = \partial_a \underline{X}^\mu \partial_b \underline{X}^\nu \left[ g_{\mu\nu}(x_0) + \overset{1 \text{ pto}}{\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x_0)} \underline{X}^\lambda + \frac{1}{2} \overset{2 \text{ pto}}{\partial_{\lambda_1} \partial_{\lambda_2} g_{\mu\nu}(x_0)} \underline{X}^{\lambda_1} \underline{X}^{\lambda_2} + \dots \right]$$

↑ funciones de acoplamiento ↓

$S_0$  es, de hecho, la teoría (estrictamente) renormalizable más general para  $D$  campos escalares en 2 dimensiones: usando la unidad de longitud en la hoja de mundo  $[\sigma] = l$ , tenemos  $[\partial_a] = l^{-1}$ ,  $[g_{ab}] = l^0 = [X]$ , y por tanto los términos con 2 derivadas y un número arbitrario de  $X$ 's son estrictamente renormalizables o "marginales" ( $[ ] = l^{-2}$ ) por conteo de potencias. Es decir, las constantes de acoplamiento correspondientes, como  $\partial_{\lambda_1} \dots \partial_{\lambda_n} g_{\mu\nu}(x_0)$ , son adimensionales (tal como  $e$  en QED,  $g_{YM}$  en QCD, o  $\lambda$  en  $\varphi^4$  en 4 dim).

Los únicos otros términos renormalizables ( $\text{dim} \leq 2$ ) serían

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g} \phi(X) \leftarrow \begin{array}{l} \text{campo} \\ \text{taquiónico} \end{array} \quad [\phi] = l^{-2} \therefore \begin{array}{l} \text{súper-renormalizable} \\ \text{o "relevante"} \end{array}$$

y, en teorías con cuerdas abiertas,

$$\int_{\partial\mathcal{M}} d s \phi(X) \quad \text{y} \quad i \int_{\partial\mathcal{M}} d s t^a \partial_a X^\mu A_\mu(X) \quad \left( \text{con } ds = dt \sqrt{g_{tt}} \right.$$

$\uparrow$  taquión  $\uparrow$  fotón  $t^a \partial_a = \partial_\epsilon$

súper-renormalizable renormalizable

$S_0$  es invariante bajo

1) Difeos en el espaciotiempo  $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$ .

2) Transformación de norma de  $B_{\mu\nu}$ :

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$$

(porque  $\epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \partial_\nu \Lambda_\mu = \epsilon^{ab} \partial_b (\partial_a X^\mu \Lambda_\mu)$  es una derivada total),  $\underbrace{\partial_b \Lambda_\mu}$

cuerto abierto  $\leftrightarrow$  D-brane

que, en presencia de  $\partial M \neq \emptyset$ , debe complementarse con

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{2\pi\alpha'} \Lambda_\mu \quad (\Rightarrow F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} - \frac{1}{2\pi\alpha'} (\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu)).$$

(esta no es una transf. de norma de  $A_\mu$ )

3) Transformación de norma usual  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda$ .

4) Difeos en la hoja de mundo  $\sigma^a \rightarrow \sigma'^a(\sigma)$ .

5) ¿Weyl?  $g_{ab}(\sigma) \rightarrow g'_{ab}(\sigma) = e^{w(\sigma)} g_{ab}(\sigma)$ .

Los términos de  $g_{\mu\nu}$  y  $B_{\mu\nu}$  son invariantes de Weyl

a nivel clásico. ¿Lo siguen siendo a nivel cuántico?? El

término de  $\Phi$  no es invariante de Weyl (ni siquiera

a nivel clásico! (Es invariante solo si  $\Phi$  es constante.)

Aún en un fondo plano ( $\leftrightarrow$  teoría libre en la hoja de mundo) vimos que las medidas  $D_g X^M$ ,  $D_g b_{ab}$ ,  $D_g c^a$  dependen de  $\omega(\sigma)$ , de tal manera que la invariancia de Weyl se preserva solo si  $c^{\text{Tot}} = 0$  ( $\leftrightarrow D=26$ ). En un fondo no trivial,

Interacciones en la hoja de mundo  $\Rightarrow$  Renormalización Adicional  $\Rightarrow$  Anomalía de Weyl en general

Consideremos por simplicidad un fondo puramente

gravitacional:

$$S_0[X] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^M \partial_b X^N g_{MN}(X)$$

y separemos

$$X^M(\sigma) = X_0^M(\sigma) + Y^M(\sigma)$$

$\uparrow$   
Valor de fondo que  
satisface ec. de mov.

$\uparrow$   
fluctuación  
cuántica:  $\int DX^M(\sigma) \rightarrow \int DY^M(\sigma)$

La descripción en términos de  $Y^M(\sigma)$  no es covariante bajo difeos en el espaciotiempo, porque  $Y^M(\sigma)$  no es un vector.

Mejores coordenadas: considerar una

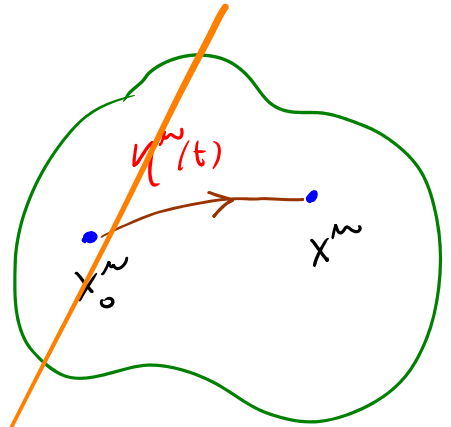
geodésica  $\eta^{\mu}(t)$   $t \in [0, 1]$  tal que

$$\eta^{\mu}(0) = x_0^{\mu}, \quad \eta^{\mu}(1) = x^{\mu},$$

y usar como coordenada (local) a

$$\xi^{\mu} \equiv \dot{\eta}^{\mu}(0)$$

Coordenadas Normales de Riemann.



Usando la ec. de la geodésica se encuentra que

$$\eta^{\mu}(t) = x_0^{\mu} + \xi^{\mu} t - \frac{1}{2} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \xi^{\nu} \xi^{\rho} t^2 + \mathcal{O}(\xi^3)$$

$$\Rightarrow \eta^{\mu} = \xi^{\mu} - \frac{1}{2} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \xi^{\nu} \xi^{\rho} + \mathcal{O}(\xi^3),$$

$$\partial_a x^{\mu} = \partial_a x_0^{\mu} + \underbrace{\nabla_a \xi^{\mu}}_{\text{ver abajo}} + \frac{1}{3} R_{\lambda\sigma\nu}^{\mu}(x_0) \partial_a x_0^{\nu} \xi^{\lambda} \xi^{\sigma} + \mathcal{O}(\xi^3)$$

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x_0) + \frac{1}{3} R_{\mu\lambda\sigma\nu}(x_0) \xi^{\lambda} \xi^{\sigma} + \mathcal{O}(\xi^3),$$

de tal manera que

$$S_{\sigma}[x] = S_{\sigma}[x_0]$$

↙ No hay término lineal en  $\xi$

$$+ \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{g} g^{ab} \left\{ g_{\mu\nu}(x_0) \nabla_a \xi^{\mu} \nabla_b \xi^{\nu} + R_{\mu\lambda\rho\nu}(x_0) \partial_a x_0^{\mu} \partial_b x_0^{\nu} \xi^{\lambda} \xi^{\rho} + \mathcal{O}(\xi^3) \right\}$$

$$\equiv \partial_a \xi^{\mu} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu}(x_0) \partial_a x_0^{\lambda} \xi^{\sigma}$$

Para diagonalizar el término cinético  $g_{\mu\nu}(x_0) \nabla_a \zeta^{\mu} \nabla_b \zeta^{\nu}$ , conviene hacer un último cambio de variables, definiendo

$$\zeta^m \equiv e_{\mu}^m(x_0) \zeta^{\mu}, \quad \text{donde } e_{\mu}^m \text{ es la } \underline{\text{muchas-pata o vielbein}} \quad (m=0, \dots, b-1)$$

( $\leftrightarrow$  tetrada o vierbein en 4 dim)

$$\text{tal que } e_{\mu}^m e_{\nu}^n \eta_{mn} = g_{\mu\nu} \quad \leftrightarrow \quad g^{\mu\nu} e_{\mu}^m e_{\nu}^n = \eta^{mn}.$$

Tenemos entonces

$$g_{\mu\nu}(x_0) \nabla_a \zeta^{\mu} \nabla_b \zeta^{\nu} = \eta_{mn} \nabla_a \zeta^m \nabla_b \zeta^n$$

conexión de espín  $\equiv e_{\nu}^m \nabla_{\mu} e^{\nu l}$

$$\equiv \partial_a \zeta^m + \underbrace{\omega_{\mu}^{ml} \partial_a x_0^{\mu}}_{\text{campo de norma } \text{So}(D-1, 1)} \zeta^l$$

$$\equiv A_a^{ml}$$

A orden cero en la curvatura del espaciotiempo, cada  $\zeta^m$  es un campo escalar sin masa (justo como lo era  $X^{\mu}$  en el fondo plano).

La expansión perturbativa en curvatura es válida si  $g_{\mu\nu}(x)$  varía lentamente en unidades de cuerdas. En esta expansión,  $\alpha'$  juega el papel de  $\hbar$ : cuenta los lazos. El parámetro de expansión es  $\sim \alpha'/L^2 \leftarrow$  radio de curvatura.

Nos interesa determinar la manera en que la función

$$Z[g] \equiv e^{-W[g]} \equiv \int \mathcal{D}_g X^m e^{-S_\sigma[X,g]}$$

(donde la medida  $\mathcal{D}_g X^m$  se define a partir de la norma

$$\| \delta X \|^2 = \int d^2\sigma \sqrt{g} \delta X^m \delta X^{\nu} g_{m\nu}(X) )$$

depende del factor de Weyl.

Recordando la definición del tensor de energía-momento

clásico 
$$T_{ab}^{(cl)} = \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_\sigma}{\delta g^{ab}},$$

conviene definir a nivel cuántico (como en la p. 286)

$$\langle T_{ab} \rangle \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta W}{\delta g^{ab}} = - \frac{1}{Z} \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta Z}{\delta g^{ab}},$$

que recibe una contribución tanto de la acción  $S_\sigma[X,g]$  como de la medida  $\mathcal{D}_g X^m$ . Igual que siempre, la

invariancia de  $W[g]$  bajo difeos  $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \nabla_a J_b + \nabla_b J_a$

$$\Rightarrow 0 = \int d^2\sigma \sqrt{g} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W}{\delta g^{ab}} \right) (\nabla^a J^b + \nabla^b J^a),$$

que integrando por partes implica la ec. de conservación

$$\boxed{\nabla^a \langle T_{ab} \rangle = 0} \quad (1)$$

De manera similar, la invariancia (si la hay) bajo transformaciones de Weyl  $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta\omega g_{ab}$

$$\Rightarrow 0 = \int d^2\sigma \sqrt{g} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W}{\delta g^{ab}} \right) \delta\omega g_{ab},$$

es decir,  $\boxed{\langle T^a_a \rangle = 0} \quad (2)$

Como hemos visto, la invariancia de Weyl / conforme es necesaria para la consistencia de nuestra teoría de cuerdas, así que debemos exigir que se cumpla (2).

Pero, como veremos ahora (y como sucedió también en el fondo plano), (2) resulta ser incompatible con (1) a menos que el fondo satisfaga ciertos requisitos.

Conviene trabajar nuevamente en la norma

conforme  $g_{ab}(\sigma) = e^{w(\sigma)} \delta_{ab}$

$$\longleftrightarrow g_{zz} = 0 = g_{\bar{z}\bar{z}}, \quad g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} e^{w(z, \bar{z})}$$

(siempre accesible localmente, usando solo difeos).

Para calcular  $\langle T_{ab} \rangle$ , variamos esta métrica  $g$

$$\begin{pmatrix} \delta g_{zz} & \delta g_{z\bar{z}} + \delta g_{\bar{z}z} \\ \delta g_{z\bar{z}} + \delta g_{\bar{z}z} & \delta g_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

Dado que la medida  $D_g X^w$  depende solo de la determinante

$\sqrt{g}$  de esta métrica, cuya variación con respecto

a  $\delta g_{zz}$  ó  $\delta g_{\bar{z}\bar{z}}$  es cero (a primer orden),

concluimos que  $\frac{\delta W}{\delta g_{zz}}$  y  $\frac{\delta W}{\delta g_{\bar{z}\bar{z}}}$  reciben

contribución de  $S_0$  pero no de  $D_g X^w$ , es decir,

$$\langle T_{zz} \rangle = \langle T_{zz}^{(cl)} \rangle, \quad \langle T_{\bar{z}\bar{z}} \rangle = \langle T_{\bar{z}\bar{z}}^{(cl)} \rangle.$$

Por el contrario,  $\langle T_{z\bar{z}} \rangle \neq \langle T_{z\bar{z}}^{(cl)} \rangle$ ,



lo cual hace posible que exista una anomalía de Weyl.

En nuestro ejemplo del fondo puramente gravitacional,

hemos desarrollado  $S_g[X, g]$  en términos

de  $X_0^\mu$  y  $\xi^m$ , obteniendo las reglas de Feynman

$$\begin{array}{c} m \\ \text{---} \\ z \end{array} \begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ z' \end{array} \equiv -\frac{\xi'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z-z'|^2 \leftarrow \text{propagador} \\ \langle \xi^m(z, \bar{z}) \xi^n(z', \bar{z}') \rangle$$

$$\begin{array}{c} \partial X_0^\mu \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \bar{\partial} X_0^\nu \\ \text{---} \\ R \end{array} \begin{array}{c} m \\ \text{---} \\ \text{---} \\ n \end{array} \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \left\{ R_{\mu\nu\sigma\rho}(X_0) \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu \right\}(z, \bar{z})$$

← fuente externa

(además de un vértice de 2 patas que involucra a la conexión de espín, pero no será relevante aquí porque a 1 lazo no puede dar lugar a un resultado covariante bajo difeos en el espaciotiempo).

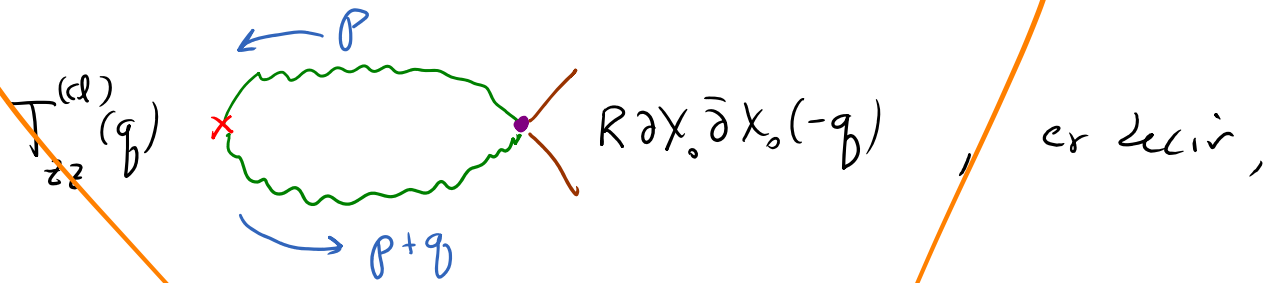
A 1 lazo tenemos entonces

$$\langle T_{zz}(z) \rangle = T_{zz}^{(cl)}(z) \times \left[ \text{Diagrama de un lazo con un vértice de 2 patas} \right]$$

↑ incluye  $\frac{1}{\alpha'} \partial \xi^m \partial \xi^n \eta_{mn}$  (y otros términos que no contribuyen)

← Términos cúbicos o más altos en  $\xi^m$  no figuran a este orden

que en espacio de momentos resulta en



$$\langle T_{zz}(q) \rangle = \int \frac{d^2 p}{2\pi} \frac{p_z (p_z + q_z)}{p^2 (p+q)^2} \{ R_{\mu\nu} \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu \}(-q) .$$

La integral resulta ser finita (sin necesidad de regularización),

$$\langle T_{zz}(q) \rangle = \frac{1}{4} \frac{q_z}{q_{\bar{z}}} \{ R_{\mu\nu} \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu \}(-q) .$$

Usando este resultado y la ec. de conservación (1),

$$\bar{\partial} \langle T_{zz}(z) \rangle + \partial \langle T_{\bar{z}\bar{z}}(z) \rangle = 0 \iff q_{\bar{z}} \langle T_{zz}(q) \rangle + q_z \langle T_{\bar{z}\bar{z}}(q) \rangle = 0 ,$$

concluimos que

$$\langle T_{\bar{z}\bar{z}}(q) \rangle = -\frac{1}{4} \{ R_{\mu\nu} \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu \}(-q) ,$$

es decir, existe una anomalía de Weyl a menos que

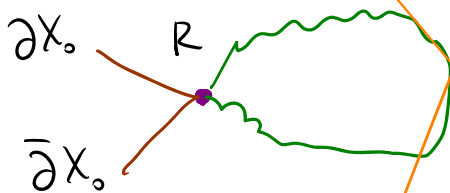
$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0} \iff \text{ec. de Einstein en el vacío!}$$

La existencia de esta anomalía está estrechamente relacionada con la aparición de una divergencia UV:

al calcular

$$\begin{aligned}
 e^{-W[g]} &\equiv \int \mathcal{D}_g X^\mu e^{-S_\sigma[X, g]} \\
 &= e^{-S_\sigma[X_0, g]} \int \mathcal{D}_g \xi^m e^{-\tilde{S}_\sigma[\xi, g]} \\
 &\quad \uparrow \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu g_{\mu\nu}(X_0)
 \end{aligned}$$

a un lazo, tenemos la contribución divergente



$$= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z R_{\mu\nu\mu\nu}(X_0) \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu (-\alpha' \eta^{\mu\nu} \ln \epsilon)$$

parámetro de corte UV  $\uparrow$

que se absorbe renormalizando la métrica:

$$\underbrace{g_{\mu\nu}(X_0)}_{\text{métrica desnuda}} \equiv \underbrace{g_{\mu\nu}^{(d)}(X_0)}_{\text{métrica renormalizada}} = \underbrace{g_{\mu\nu}^{(r)}(X_0)}_{\text{métrica renormalizada}} + \underbrace{\delta g_{\mu\nu}(X_0)}_{\text{contratérmino}} = \alpha' R_{\mu\nu}(X_0) \ln \epsilon + \dots$$

Esta renormalización elimina la divergencia de  $W[g]$ ; pero (como en QED o QCD) introduce dependencia de escala de distancia/momento en la hoja de mundo ( $\leftrightarrow$  la escala de renormalización), que se puede codificar en la funcional beta

$$\beta_{\mu\nu}^g \equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}^{(d)}}{\partial \ln \epsilon} = \alpha' R_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha'^2).$$

Si  $\beta_{\mu\nu}^g \neq 0$  (divergencias  $\Rightarrow$  no hay invariancia bajo reescalamientos rígidos), entonces

$W[g_{ab} = e^{\omega(\sigma)} \delta_{ab}]$  depende de  $\omega(\sigma)$ , y  $\therefore \langle T^a_a \rangle \neq 0$ .

El resultado para un fondo  $g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi$  general es:

$$\langle T^a_a \rangle = -\frac{1}{2\alpha'} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \beta_{\mu\nu}^g - \frac{i}{2\alpha'} \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \beta_{\mu\nu}^B - \frac{1}{2} R \beta^\Phi,$$

$\leftarrow$  cada funcional  
 $\leftarrow$  beta multiplica  
 $\leftarrow$  al operador de vértice correspondiente

donde (para campos que varían lentamente)

$$\beta_{\mu\nu}^g = \alpha' \left[ R_{\mu\nu} + 2 \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{4} H_{\mu\lambda\rho} H_\nu{}^{\lambda\rho} \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2),$$

derivate covariante ↗  
en el espaciotiempo
↖  $\partial_\mu B_{\lambda\rho} - \dots$

$$\beta_{\mu\nu}^B = \alpha' \left[ -\frac{1}{2} \nabla^\rho H_{\rho\mu\nu} + \nabla^\rho \Phi H_{\rho\mu\nu} \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2),$$

$$\beta^\Phi = \frac{D-26}{6} + \alpha' \left[ -\frac{1}{2} \nabla^2 \Phi + \nabla_\rho \Phi \nabla^\rho \Phi - \frac{1}{24} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2).$$

habíamos visto ya  
(p. 288) en fondo plano  
(incluye contribución  
de fantasmas)

contribución clásica  
(a través de  $S_\sigma[X_0]$ )

Tenemos entonces invariancia de Weyl solo si el fondo satisface las restricciones (ecs. de movimiento)

$$\beta_{\mu\nu}^g = 0$$

~ ¡Ecuación de Einstein!

$$\beta_{\mu\nu}^B = 0$$

~ ¡Ecuación de Maxwell generalizada!

$$\beta^\Phi = 0$$

~ ¡Ecuación de Klein-Gordon!

Concluimos entonces que, sorprendentemente,

!! INVARIANCA CONFORME  $\Rightarrow$  DINÁMICA DE CUERDAS !!  
 (en hoja de mundo) (en espaciotiempo)

Una manera de entender el origen de este milagro es la siguiente. En una teoría de campos en el espaciotiempo, especificamos un 'vacío' separando

$$\varphi^I(x) = \underbrace{\varphi_0^I(x)}_{\text{valor de fondo}} + \underbrace{\phi^I(x)}_{\text{fluctuación cuántica}} \quad I=1,2,\dots, \# \text{ de campos,}$$

para después calcular funciones de correlación

$$\langle \phi^{I_1}(x_1) \dots \phi^{I_n}(x_n) \rangle$$

En el caso  $n=1$  (renacuajo), obtenemos

$$\langle \phi^I(x) \rangle = 0 \quad \forall I \text{ solo si los valores de fondo}$$

$\varphi_0^I(x)$  son solución a las ecr. de mov. clásicas

(o, a nivel cuántico, un extremo del 'potencial efectivo').

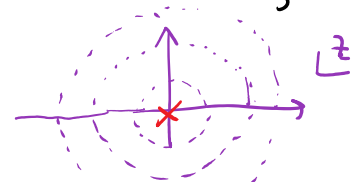
De la misma manera, preguntar en cuerdas si el fondo satisface las ecs. de mov. es equivalente a pedir que las amplitudes de 1 pata se anulen,

$$\langle V^I(z, \bar{z}) \rangle = 0 \quad \forall I.$$

Pero, a nivel árbol (es decir, en la esfera), esto es consecuencia de la invariancia conforme: colocando el vértice en el origen,  $z=0$ , la invariancia bajo el reescalamiento  $z \rightarrow z' = \lambda z$  implica que

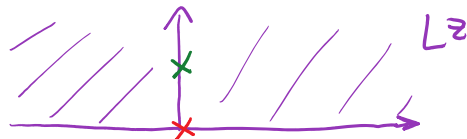
$$\langle V(0,0) \rangle_{S^2} = \underbrace{\left( \frac{\partial z}{\partial z'} \right)^h}_{|\lambda|^{-2}} \underbrace{\left( \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}'} \right)^{\tilde{h}}}_{\tilde{h}} \langle V(0,0) \rangle_{S^2} \Rightarrow \langle V(0,0) \rangle_{S^2} = 0.$$

porque  $h = \tilde{h} = 1$   
para estado físico



Un argumento similar muestra que en el disco (la mitad superior del plano complejo) los renacuajos de cuerda abierto se anulan,  $\langle V(0,0) \rangle_{D^2} = 0$ , pero no necesariamente los de cuerda cerrada,

$$\langle V(z, \bar{z}) \rangle_{D^2}.$$



~~Las superficies con topologías más complicadas no permiten la transformación  $z \rightarrow \lambda z$ .~~

Entendemos entonces que la invariancia conforme es equivalente a las eqs. de mov. de cuerdas a nivel árbol, es decir, clásicas.

Notar que una de estas ecuaciones es

$$\beta^{\Phi} = \frac{D-26}{6} + \text{contribución de fondo no trivial} = 0$$

Así que fondo plano  $\Rightarrow D=26$ ; pero

fondo no trivial que varíe rápidamente  $\Rightarrow$  positivamente  $D \neq 26$ .

Pej., el fondo dilatónico lineal

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu}(x) = 0, \quad \Phi(x) = V_{\mu} X^{\mu}$$

(integral funcional gaussiana)

$$\uparrow \text{ con } V_{\mu} V^{\mu} = \frac{26-D}{6\alpha'}$$

resulta ser solución exacta de las condiciones de Weyl,



es decir, de las ec. de mov. clásicas: este fondo define una teoría de campo conforme en 2 dim, con carga central  $c^X = D + 6\alpha' V_\mu V^\mu = 26 \Rightarrow c^{\text{TOT}} = 0$ . ✓

Curiosamente, si  $V_\mu = \sqrt{\frac{26-D}{6\alpha'}} \delta_\mu^{D-1}$ , entonces  $X^{D-1}(\sigma)$  se puede reinterpretar como el modo de Weyl  $\omega(\sigma)$  en teoría de cuerdas no crítica en  $D-1$  dimensiones (a esto nos referiremos en la p. 291)!

El caso  $D \leq 2$  se ha resuelto usando un modelo matricial -ver p.ej. hep-th/9108019. Se aprendió en particular que

que en superficies de género  $m \gg 1$  las amplitudes  $M_m \sim (2m)! g_c^{2m}$ , lo cual

nos hace esperar que los efectos no perturbativos en teoría de cuerdas sean de  $\mathcal{O}(e^{-1/g_c})$

- cf. teoría  $\lambda\phi^4$ , donde a orden  $\lambda^n$  hay

$\sim n!$  diagramas  $\Rightarrow$  efectos no perturbativos  $\mathcal{O}(e^{-1/\lambda})$ .

Las condiciones  $\beta^{\eta}_{\mu\nu} = \beta^{\rho}_{\mu\nu} = \beta^{\Phi} = 0$  son equivalentes a las ecs. de movimiento que provienen de la misma acción efectiva que dedujimos en la p. 389:

$$S_{\text{ef}} = \frac{1}{2K_0^2} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left\{ -\frac{2}{3\alpha'} (D-26) + R + 4 \partial_{\mu}\Phi \partial^{\mu}\Phi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2K^2} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\tilde{\Phi}}}$$

$$\text{con } \tilde{\Phi} \equiv \Phi - \Phi_0$$

$$2K^2 \equiv 2K_0^2 e^{2\Phi_0} = 16\pi G_N$$

$$\underbrace{(2\pi)^{D-3} l_c^{D-2} g_c^2}$$

Esta es la acción en el marco de cuerdas; por definición  $g_{\mu\nu}(x)$  es la métrica que la cuerda "siente". Como vimos en las pp. 388-9, es posible pasar al marco de Einstein a través de la redefinición de campos

$$g_{\mu\nu}^{\text{E}}(x) \equiv e^{\frac{4}{D-2}\tilde{\Phi}} g_{\mu\nu}(x), \text{ para obtener}$$

$$S_{\text{ef}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g^E} \left\{ -\frac{2(D-26)}{3\alpha'} e^{4\tilde{\Phi}/(D-2)} + R^E - \frac{4}{D-2} \partial_\mu \Phi (\partial^\mu \Phi)^E \right. \\ \left. - \frac{1}{12} e^{-8\tilde{\Phi}/(D-2)} H_{\mu\nu\lambda} (H^{\mu\nu\lambda})^E + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$

Ésta (con  $D=26$ ) es precisamente la acción que obtuvimos antes a partir de las amplitudes de dispersión.

Notar que la acción efectiva completa incluye 2 tipos distintos de correcciones:

Correcciones de cuerdas (objetos no puntuales)  $\longleftrightarrow$  Expansión en  $\alpha'$  (correcciones cuánticas en teoría 2-dimensional)

p.ej.,  $\beta_{\mu\nu}^J = \alpha' R_{\mu\nu} + \frac{\alpha'^2}{2} R_{\mu\lambda\sigma\rho} R_{\nu}{}^{\lambda\sigma\rho} + \dots$

Correcciones cuánticas (superficies de género más alto)  $\longleftrightarrow$  Expansión en  $g_c = e^{\frac{\Phi}{f_0}}$ .

Ambos tipos de correcciones pueden ser relevantes para determinar cuáles son los fondos válidos ( $\leftrightarrow$  'vacíos' posibles) en la teoría de cuerdas completa.

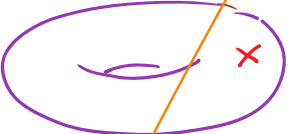
Sabemos cómo obtener correcciones cuánticas en  $\Sigma_{ef}$  a partir de cálculos de amplitudes de dispersión.

Y, de hecho, nuestros cálculos en el tree muestran que el fondo trivial  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ,  $B_{\mu\nu} = 0$ ,  $\Phi = \Phi_0$  (que clásicamente es consistente si  $D=26$ )

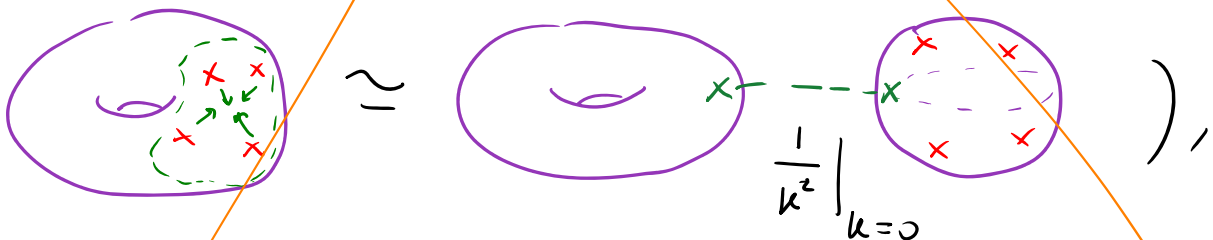
No es un fondo válido a nivel cuántico por al menos 2 razones:

1) A un lazo encontramos una constante cosmológica positiva (divergente por taquión)  $\Rightarrow$  ¿espaciotiempo de Sitter?

2) A un lazo encontramos un renacuajo para el

dilaton,   $\varphi \neq 0$  (que ocasionaba

divergencia en cualquier amplitud a 1 lazo,



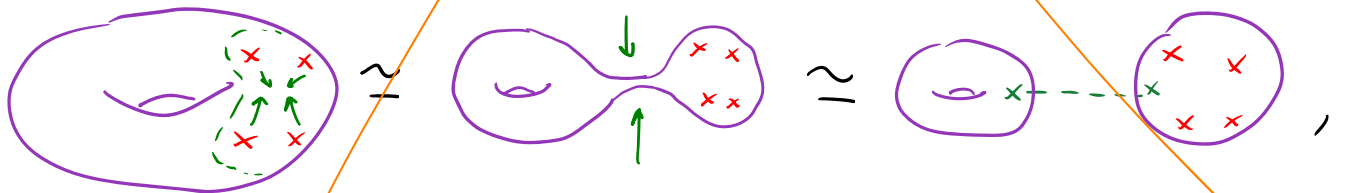
lo cual indicaba que la solución a las ecs. de mov. corregidas ( $\sim \nabla^2 \Phi = g_c^2 J$ ) involucra un  $\Phi(x)$  no trivial.

Pero ... ¿cómo podemos obtener correcciones cuánticas a las ecs. de movimiento de cuerdas a partir de la anomalía conforme ??

Arriba calculamos las  $\beta$ 's a nivel árbol (esfera); PERO ellas expresan divergencias UV, que dependen solo de la estructura local y son  $\therefore$  independientes de la topología. ¿De dónde provienen entonces las supuestas correcciones cuánticas?

El punto es que, como hemos visto, la integración sobre los módulos  $t_i, z_n$  puede dar lugar a divergencias adicionales, que representan nuevas contribuciones a la anomalía conforme.

P.ej., en



usando el mismo parámetro de corte  $\epsilon$ , la divergencia es  $\propto g_c^2 \wedge \ln \epsilon \underbrace{\eta_{\mu\nu} \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu}_{\text{vértice del dilatación}}$ , insertado en la esfera.

Es posible entonces cancelar esta divergencia con 'renormalización' adicional (por encima de la renormalización 2-dim habitual):

$$g_{\mu\nu} = \overset{(d)}{g}_{\mu\nu} = \overset{(r)}{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

$$\underbrace{\delta g_{\mu\nu}}_{\alpha' R_{\mu\nu} \ln \epsilon} + \underbrace{\delta g_{\mu\nu}}_{-\frac{\Lambda}{g_c^2} g_{\mu\nu} \ln \epsilon}$$

usual                      módulos

cuyo efecto es

$$e^{-S_\sigma} \rightarrow e^{-\left(S_\sigma - \frac{\Lambda}{g_c^2} \ln \epsilon V_\sigma\right)}$$

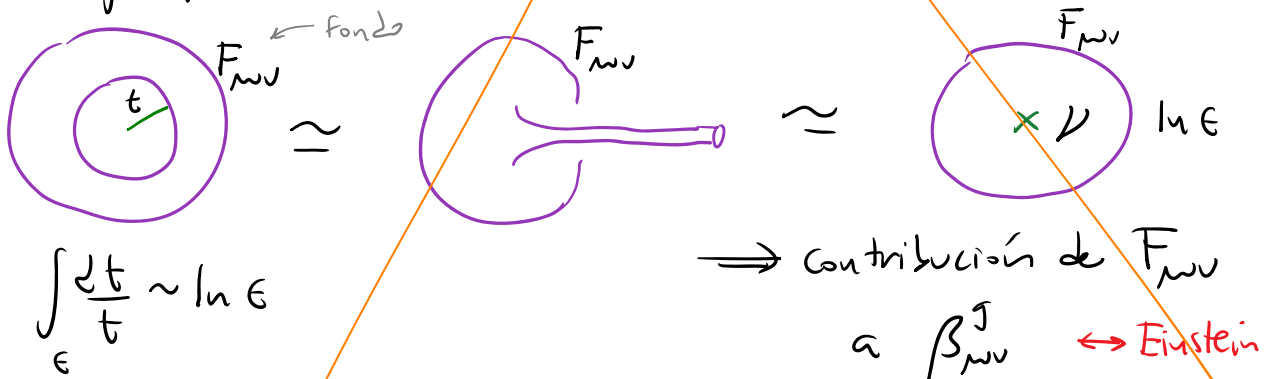
inserción en la esfera  
cancela divergencia en el toro

y que modifica la condición para ausencia de anomalía de Weyl

$$\alpha' \beta_{\mu\nu}^J = \alpha' R_{\mu\nu} - \Lambda \frac{g_c^2}{g_c^2} g_{\mu\nu} = 0$$

¡ ec. de Einstein con constante cosmológica !

Otro ejemplo: con cuerdas abiertas,



Esta idea aplica en general: las condiciones para la ausencia de la anomalía de Weyl son del tipo

$$\beta^{\text{TOTAL}} = \beta^{\text{usual}} + \beta^{\text{módulos}} = 0$$

Mecanismo de  
Fischler-Susskind

Esto implica que la teoría 2-dimensional es invariante conforme a nivel clásico, pero por correcciones cuánticas es no invariante conforme en cada superficie (con módulos fijos) por separado, aunque sí "conforme" en conjunto.

L17: 28/05/13

### 3. Supercuerdas

Las 4 teorías de cuerdas bosónicas (donde  $X^\mu(\sigma)$  son los únicos grados de libertad) tienen algunos problemas:

- Taquión  $\phi$  (¿Escoger otro vacío? ¿Tal vez fondo dilatónico en  $D=2$ ?)
- $D=26$  (¿Compactificar?)
- $\not\exists$  fermiones (¿Mecanismo no perturbativo?  
Ver p.ej. David, Minwalla, Núñez 0107165  
Englert, Haurat, Taronna 0106235)

La situación mejora si generalizamos a teorías de supercuerdas, que incorporen Bosones  $\longleftrightarrow$  Fermiones  
Supersimetría

Es posible describir estas teorías a través de 3 formalismos distintos pero equivalentes:

① Green-Schwarz (Supercuerda) — Ver GSW cap. 5

Agregar  $\Theta_x^A(\sigma)$  — espinar(es) en espaciotiempo  
— escalar en hoja de mundo

$\Rightarrow$  SUS1 en espaciotiempo manifiesta ✓

Solo puede cuantizarse en norma del cono de luz ✗



## ② Ramond-Neveu-Schwarz (Cuerda con espín)

Agregar  $\Psi^M(\sigma)$  — vector en espaciotiempo  
 — espinor en hoja de mundo

Se puede cuantizar de manera covariante bajo Poincaré ✓

SUSY en espaciotiempo no manifiesta ✗

## ③ Berkovits (Espinor puro) — ver hep-th/0209059

0302.147

0902.1552

0910.2254

Combina lo mejor de ① y ②

Permite cuantización covariante bajo Súper-Poincaré ✓

Formalismo aún en etapa de desarrollo ✗

Estudiaremos solo RNS (más sencillo).

No basta con agregar  $\Psi^M(\sigma)$ : para desacoplar nuevos modos con norma negativa (asociados a  $\bar{\Psi}^0(\sigma)$ ), necesitamos invariancia local

mayor en hoja de mundo — supersimetría.

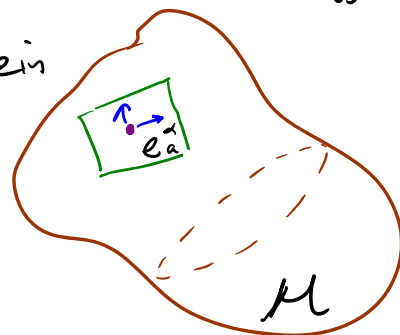
Como 'superparejas' de  $X^M(\sigma)$  y  $g_{ab}(\sigma)$ , agregamos entonces D espinores de Majorana  $\Psi^M(\sigma) = \begin{pmatrix} \psi_+(\sigma) \\ \psi_-(\sigma) \end{pmatrix}$

y 1 gravitino (vector x espinor Majorana)  $\chi_a = \begin{pmatrix} \chi_a^+ \\ \chi_a^- \end{pmatrix}$

Recordar que para definir espinor en espacio curvo (en este caso, hoja de mundo  $M$  con métrica intrínseca  $g_{ab}(\sigma)$ ),

es necesario utilizar muchas-patas o vielbein

(en este caso dos-patas o zweibein):



elección de base ortanormal para

espacio tangente en cada punto de la variedad,

$e_a^\alpha(\sigma)$  ← etiqueta de vector  $\alpha=0,1$   
 ← índice vectorial  $a=0,1$

$$e_a^\alpha(\sigma) e_b^\beta(\sigma) g^{ab}(\sigma) = \eta^{\alpha\beta} \iff \eta_{\alpha\beta} e_a^\alpha(\sigma) e_b^\beta(\sigma) = g_{ab}(\sigma)$$

Podemos entonces considerar a  $e_a^\alpha$  en vez de  $g_{ab}$  como variable básica. La libertad de redefinir base localmente,

$$e_a^\alpha(\sigma) \rightarrow e'^\alpha_a(\sigma) = L^\alpha_\beta(\sigma) e_a^\beta(\sigma)$$

← matriz de Lorentz

constituye una simetría local adicional  $SO(d-1,1)$

( $d=2$  aquí) que garantiza que no hemos suñido grados de libertad a nuestra descripción.

$\Psi^M(\sigma)$  y  $\chi_a(\sigma)$  son espinores precisamente bajo este grupo de Lorentz local: definiendo matrices de Dirac

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = -2\eta^{\alpha\beta}, \text{ bajo transformaciones}$$

infinitesimales  $L^\alpha_\beta(\sigma) = \delta^\alpha_\beta + \theta^{\alpha\beta}(\sigma)$  (con  $\theta_{\alpha\beta} = -\theta_{\beta\alpha}$ ,  $|\theta_{\alpha\beta}| \ll 1$ )

tenemos

$$\delta \Psi(\sigma) = \frac{i}{2} \underbrace{\frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]}_{\text{generador} \equiv S^{\alpha\beta}} \underbrace{\theta_{\alpha\beta}(\sigma)}_{\text{parámetro}} \Psi(\sigma)$$

Para poder escribir término cinético invariante bajo esta simetría local, necesitamos definir derivada covariante

$$\nabla_a \Psi = \partial_a \Psi + \frac{1}{8} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \omega_a^{\alpha\beta} \Psi$$

donde  $\omega_a^{\alpha\beta}(\sigma) = \frac{1}{2} e^{b\alpha} \partial_a e_b^\beta + \dots$  es la conexión de espín (campo de norma  $SO(d-1,1)$ ) determinada por el requisito

$$\nabla_a e_b^\alpha = \partial_a e_b^\alpha + \omega_a^{\alpha\beta} e_b^\beta - \Gamma_{ab}^c e_c^\alpha = 0.$$

Tomando 'base de Majorana' para álgebra de Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Rightarrow iS^{\alpha\beta} \in \mathbb{R})$$

el hecho de que  $\Psi^m = \begin{pmatrix} \psi_+^m \\ \psi_-^m \end{pmatrix}$  y  $\chi_a = \begin{pmatrix} \chi_a^+ \\ \chi_a^- \end{pmatrix}$  son

espinores de Majorana significa simplemente que  $\psi_{\pm}^m$  y  $\chi_a^{\pm}$  son reales.

Notar que en esta base la matriz de gamma ( $\sim \gamma^5$ ) es

$$\gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ así que las componentes}$$

individuales  $\psi_+^m, \psi_-^m, \chi_a^+, \chi_a^-$  son espinores

de Majorana-Weyl (lo cual no es posible en 3+1 dim).

Con estas definiciones podemos escribir finalmente acción para cuerda RNS (en fondo plano):

$$S[X, \Psi, e, \chi] = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\alpha'} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \right. \\ \left. - i \bar{\Psi}^m \gamma^a \nabla_a \Psi^\nu \eta_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \bar{\chi}_a \gamma^b \gamma^a \Psi^m \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \bar{\Psi}^m \Psi^\nu \eta_{\mu\nu} \bar{\chi}_a \gamma^b \gamma^a \chi_b \right\}, \quad [\text{ver GSW1 4.3.5}]$$

con  $\gamma^a(\sigma) \equiv e^a_{\alpha}(\sigma) \gamma^\alpha$  ( $\Rightarrow \{\gamma^a, \gamma^b\} = -2g^{ab}$ ) y  $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$

Notar que no aparecen derivadas de  $e_a^\alpha$  ó  $\chi_a$   
 (los términos cinéticos correspondientes serían  
 respectivamente  $\int d\sigma \sqrt{g} \mathcal{R}$ , invariante topológico,  
 y  $i \bar{\chi}_a \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} \nabla_b \chi_c = 0$  por antisimetrización),  
 así que estos campos son no dinámicos.

$S$  es invariante bajo

1) Poincaré en espaciotiempo (simetría global en hoja de mundo)

$$\tilde{X}^\mu(\sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\sigma) + a^\mu, \quad \tilde{\Psi}^\mu(\sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu \Psi^\nu(\sigma)$$

2) Difeos en hoja de mundo (local)

$$\sigma^a \rightarrow \sigma'^a(\sigma), \quad X'^\mu(\sigma') = X^\mu(\sigma), \quad e'^\alpha{}_a(\sigma') = \frac{\partial \sigma^b}{\partial \sigma'^a} e^\alpha{}_b(\sigma),$$

$$\tilde{\Psi}'^\mu(\sigma') = \tilde{\Psi}^\mu(\sigma), \quad \chi'_a(\sigma') = \frac{\partial \sigma^b}{\partial \sigma'^a} \chi_b(\sigma)$$

3) Weyl (local)

$$\delta e_a^\alpha(\sigma) = \lambda(\sigma) e_a^\alpha(\sigma), \quad \delta X^\mu(\sigma) = 0,$$

$$\delta \tilde{\Psi}^\mu(\sigma) = -\frac{1}{2} \lambda(\sigma) \tilde{\Psi}^\mu(\sigma), \quad \delta \chi_a(\sigma) = \frac{1}{2} \lambda(\sigma) \chi_a(\sigma)$$

#### 4) Lorentz en hoja de mundo (local)

$$\delta e_a^\alpha(\sigma) = \underbrace{l(\sigma) \epsilon_\beta^\alpha}_{\theta_\beta^\alpha(\sigma)} e_a^\beta(\sigma), \quad \delta X^{\tilde{m}}(\sigma) = 0,$$

$$\delta \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma) = \frac{1}{2} l(\sigma) \gamma^0 \gamma^1 \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma), \quad \delta \chi_a^{\tilde{m}}(\sigma) = \frac{1}{2} l(\sigma) \gamma^0 \gamma^1 \chi_a^{\tilde{m}}(\sigma)$$

#### 5) Supersimetría en hoja de mundo $\equiv$ Superdifeos (local)

$$\delta X^{\tilde{m}}(\sigma) = \sqrt{2\alpha'} \bar{\epsilon}(\sigma) \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma)$$

$$\delta \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma) = -i \gamma^{\tilde{a}}(\sigma) \epsilon(\sigma) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \partial_a X^{\tilde{m}}(\sigma) - \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma) \chi_a^{\tilde{m}}(\sigma) \right]$$

$$\delta e_a^\alpha(\sigma) = -2i \bar{\epsilon}(\sigma) \gamma^\alpha \chi_a^{\tilde{m}}(\sigma)$$

$$\delta \chi_a^{\tilde{m}}(\sigma) = \nabla_a \epsilon(\sigma)$$

donde parámetro infinitesimal  $\epsilon(\sigma)$  es un espinor de Majorana (es decir, tiene componentes reales  $\epsilon_+(\sigma), \epsilon_-(\sigma)$ )

#### 6) Super Weyl (local)

$$\delta \chi_a^{\tilde{m}}(\sigma) = i \gamma_a^{\tilde{m}}(\sigma) \eta(\sigma), \quad \delta X^{\tilde{m}}(\sigma) = \delta e_a^{\tilde{m}}(\sigma) = \delta \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma) = 0$$

espinor Majorana  $\rightarrow$  (usar identidad  $\gamma^a \gamma^b \gamma_a = 0$  en 2 dim)

S describe gravedad 'superconforme' en 2 dimensiones acoplada a campos escalares  $X^M(\sigma)$  y espinorales  $\bar{\Psi}^M(\sigma)$ .

Al igual que en la cuerda bosónica, podemos eliminar redundancia (de manera covariante bajo Poincaré en espaciotiempo) imponiendo condiciones sobre campos no dinámicos:

- 4 simetrías bosónicas locales (2 difeos, 1 Weyl, 1 Lorentz) nos permiten fijar  $e_a^\alpha(\sigma) = \delta_a^\alpha$  ( $\leftrightarrow g_{ab}(\sigma) = \eta_{ab}$ )
- 4 simetrías fermiónicas locales (2  $\epsilon$ 's, 2  $\eta$ 's) nos permiten fijar  $\chi_a(\sigma) = 0$

Esta es la norma superplana (Si no usamos Weyl ni superWeyl podemos fijar norma superconforme  $e_a^\alpha(\sigma) = e^{\lambda(\sigma)} \delta_a^\alpha$ ,  $\chi_a(\sigma) = \delta_a(\sigma) \eta(\sigma)$ .)

El análisis aquí es local - globalmente puede haber módulos y supermódulos, así como vectores y espinores de Killing conformes.

En la norma superplana la acción se reduce a

$$S[X, \Psi] = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \left\{ \frac{1}{2\alpha'} \partial^a X^\mu \partial_a X_\mu - i \bar{\Psi}^\mu \gamma^a \partial_a \Psi_\mu \right\},$$

que debe ser suplementada con ecs. de mov. para campos no dinámicos,

$$T_{ab} \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = - \left( \frac{1}{\alpha'} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + i \bar{\Psi}^\mu \gamma_{(a} \partial_{b)} \Psi_\mu - \text{traza} \right) = 0$$

$$J_a \equiv -\frac{\pi}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta \chi^a} = \frac{1}{2} \gamma^b \gamma_a \bar{\Psi}^\mu \partial_b X_\mu = 0$$

[25/04/06

↑ super corriente

Las ecs. de mov. para  $X^\mu$  y  $\Psi^\mu$  en la norma superplana son

$$\partial^a \partial_a X^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad X^\mu(\sigma) = X^\mu(\tau+\sigma) + \tilde{X}^\mu(\tau-\sigma)$$

↑ modos izquierdos      ↑ derechos

$$\gamma^a \partial_a \bar{\Psi}^\mu = i \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\tau + \partial_\sigma \\ \partial_\tau + \partial_\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_+^\mu \\ \Psi_-^\mu \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\Psi}^\mu(\sigma) = \begin{pmatrix} \Psi_+^\mu(\tau-\sigma) \\ \Psi_-^\mu(\tau+\sigma) \end{pmatrix}$$



Después de rotación de Wick  $\tau = \sigma^0 \rightarrow \sigma^2 = i\tau$   
 y pasando a coords complejas habituales

$$\begin{aligned} w &\equiv \sigma^2 + i\sigma^1 = i(\tau + \sigma) & z &= e^w \\ \bar{w} &= \sigma^2 - i\sigma^1 = i(\tau - \sigma) & \bar{z} &= e^{\bar{w}} \end{aligned}$$

tenemos

$$S_{\text{NS}} = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left( \frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi^\mu \bar{\partial} \psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu \partial \tilde{\psi}_\mu \right)$$

$$\left( \text{donde } \psi^\mu(z) \equiv \frac{z^{-1/2}}{\sqrt{2}} \psi_+^\mu(\tau + \sigma), \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \equiv \frac{\bar{z}^{-1/2}}{\sqrt{2}} \psi_-^\mu(\tau - \sigma) \right),$$

con constricciones

$$T(z) \equiv T_{zz}(z) = -\frac{1}{\alpha'} \partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2} \psi^\mu \partial \psi_\mu = 0$$

$$J(z) \equiv J_z(z) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \psi^\mu \partial X_\mu = 0$$

$$\tilde{T}(\bar{z}) \equiv \tilde{T}_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} X^\mu \bar{\partial} X_\mu - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{\psi}_\mu = 0$$

$$\tilde{J}(\bar{z}) \equiv \tilde{J}_{\bar{z}}(\bar{z}) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} X_\mu = 0$$

$$\left( \text{Weyl} \Rightarrow T^a_a = 0, \text{ Super Weyl} \Rightarrow \gamma^a J_a = 0 \right)$$

$S_{\text{res}}[X, \psi]$  posee simetría residual bajo

1) Transformaciones conformes (Difeo Analítico = Weyl)

$$z \rightarrow z' = z'(z), \quad X^{\sim}(\tilde{z}', \bar{\tilde{z}}') = X^{\sim}(z, \bar{z}),$$

$$\psi^{\sim}(z') = \left( \frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{-1/2} \psi^{\sim}(z) \quad \leftarrow \text{campo primario con } h = \frac{1}{2}, \tilde{h} = 0$$

$$\tilde{\psi}^{\sim}(\bar{z}') = \left( \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{-1/2} \tilde{\psi}^{\sim}(\bar{z}) \quad \leftarrow \text{campo primario con } h = 0, \tilde{h} = \frac{1}{2}$$

Sabemos que estas transformaciones son generadas

por tensor de energía momento  $T(z), \tilde{T}(\bar{z})$

(  $j_f(z) = if(z)T(z)$  es corriente de Noether asociada

a  $z \rightarrow z' = z + \epsilon f(z)$  ).

2) Transformaciones superconformes (Superdifeo analítico = Weyl = Super Weyl)

$$\delta X^{\sim}(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \in \left[ \eta(z) \psi^{\sim}(z) + \eta(z)^* \tilde{\psi}^{\sim}(\bar{z}) \right]$$

$$\delta \psi^{\sim}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \in \eta(z) \partial X^{\sim}(z)$$

$$\delta \tilde{\psi}^{\sim}(\bar{z}) = -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \in \eta(z)^* \bar{\partial} X^{\sim}(\bar{z})$$

con  $\eta(z)$  anti conmutativo

que son generadas por supercorrientes  $J(z)$ ,  $\tilde{J}(\bar{z})$   
 ( $j_\eta(z) = \eta(z) J(z)$  es la corriente de Noether).

$S_{RNS}$  es una teoría de campo superconforme.

Podemos calcular propagador para  $\psi^{\tilde{\mu}}(z)$ :

$$0 = \int \mathcal{D}\Psi \frac{\delta}{\delta \psi^{\tilde{\mu}}(z)} \left[ e^{-\frac{1}{4\pi} \int d^2z \Psi \cdot \bar{\partial} \Psi} \psi^{\tilde{\nu}}(z') \right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \langle \bar{\partial} \psi^{\tilde{\mu}}(z) \psi^{\tilde{\nu}}(z') \rangle + \eta^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \delta^{(2)}(z-z') \langle 1 \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \psi^{\tilde{\mu}}(z) \psi^{\tilde{\nu}}(z') \rangle = \frac{\eta^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}}{z-z'} \langle 1 \rangle$$

y de manera similar  $\langle \tilde{\psi}^{\tilde{\mu}}(\bar{z}) \tilde{\psi}^{\tilde{\nu}}(\bar{z}') \rangle = \frac{\eta^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}}{\bar{z}-\bar{z}'} \langle 1 \rangle$

Definimos  $\therefore$  orden normal conforme

$$:\psi^{\tilde{\mu}}(z) \psi^{\tilde{\nu}}(z') : \equiv \psi^{\tilde{\mu}}(z) \psi^{\tilde{\nu}}(z') - \eta^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \frac{1}{z-z'}$$

$$:\tilde{\psi}^{\tilde{\mu}}(\bar{z}) \tilde{\psi}^{\tilde{\nu}}(\bar{z}') : \equiv \tilde{\psi}^{\tilde{\mu}}(\bar{z}) \tilde{\psi}^{\tilde{\nu}}(\bar{z}') - \eta^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \frac{1}{\bar{z}-\bar{z}'}$$

Usando  $T^\Psi(z) = -\frac{1}{2} : \psi^\mu \partial \psi_\mu(z) :$  podemos calcular EPO

$$\begin{aligned}
 T^\Psi(z) T^\Psi(z') &= \frac{1}{4} : \psi^\mu \partial \psi_\mu(z) \psi^\nu \partial' \psi_\nu(z') : + \text{términos con} \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left[ -\frac{\eta^{\mu\nu}}{z-z'} \partial \partial' \left( \frac{\eta_{\mu\nu}}{z-z'} \right) + \partial \left( \frac{\delta_\mu^\nu}{z-z'} \right) \partial' \left( \frac{\delta_\nu^\mu}{z-z'} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2(z-z')^4} \underbrace{\frac{D}{2}(2-1)}_{c^\Psi = \frac{D}{2}} + \frac{2}{(z-z')^2} T^\Psi(z') + \frac{1}{(z-z')} \partial' T^\Psi(z') + \dots
 \end{aligned}$$

De manera similar, tomando el tensor de energía-momento completo,  $T(z) = T^x(z) + T^\Psi(z)$  podemos deducir que

$$T(z) T(0) = \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2} T(0) + \frac{1}{z} \partial T(0) + \dots$$

$$T(z) J(0) = \frac{3}{2z^2} J(0) + \frac{1}{z} \partial J(0) + \dots \quad \leftarrow J(z) \text{ es operador primario con } h = \frac{3}{2}$$

$$J(z) J(0) = \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z} T(0) + \dots$$

$$\text{con } c = c^x + c^\Psi = D + \frac{D}{2} = \frac{3D}{2} .$$

Otra novedad es que al fijar la norma en integral de trayectoria

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab} \mathcal{D}\chi_a \mathcal{D}\chi^{\tilde{a}} \mathcal{D}\Psi^{\tilde{a}}}{\text{Dif} \times \text{Weyl} \times \text{SDif} \times \text{SWeyl}} e^{-S[X, \bar{\Psi}, g, \chi]}$$

necesitamos fantasmas adicionales: además de

$$\mathcal{D}g_{ab} = J \mathcal{D}\xi^a \mathcal{D}\lambda \quad \text{con } J = \det \left( \frac{\delta g_{zz}}{\delta \xi_z} \right) \det \left( \frac{\delta g_{\bar{z}\bar{z}}}{\delta \bar{\xi}_{\bar{z}}} \right)$$

$\uparrow$  Dif       $\uparrow$  Weyl  
 $\uparrow$        $\uparrow$   
 $\text{Dif}$        $\text{Weyl}$

$$= \det \nabla_z \det \nabla_{\bar{z}}$$

que representamos con campos anticommutativos  $b$  y  $c$ , tenemos ahora [ver GSW 4.4, ó D'Hoker & Phong, Rev. Mod. Phys 60, 917]

$$\mathcal{D}\chi_a = J' \mathcal{D}\epsilon \mathcal{D}\eta \quad \text{con } J' = \left[ \det \left( \frac{\delta \chi_a}{\delta \epsilon} \right) \right]^{-1}$$

$\uparrow$  SDif       $\uparrow$  SWeyl  
 $\text{SDif}$        $\text{SWeyl}$

$$= \left[ \det \nabla_z \det \nabla_{\bar{z}} \right]^{-1}$$

que representamos con campos commutativos  $\beta$  y  $\gamma$ .

La acción resultante para fantasmas (en norma superspina) es

$$S_f = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left( \underbrace{b \bar{\partial} c + \beta \bar{\partial} \gamma}_{\text{ghosts}} + \underbrace{\tilde{b} \partial \tilde{c} + \tilde{\beta} \partial \tilde{\gamma}}_{\text{ghosts}} \right)$$

que que son 2 teorías superconformes adicionales, con

$$h_c = -1 (\leftrightarrow \xi), \quad h_b = 2 (\leftrightarrow T), \quad h_\gamma = -\frac{1}{2} (\leftrightarrow \epsilon), \quad h_\beta = \frac{3}{2} (\leftrightarrow J)$$

$$\langle b(z) c(z') \rangle = \frac{1}{z-z'} \quad , \quad \langle \beta(z) \gamma(z') \rangle = -\frac{1}{z-z'} \quad ,$$

$$T^f = -(\partial b) c - 2b \partial c - \frac{1}{2}(\partial \beta) \gamma - \frac{3}{2} \beta \partial \gamma$$

$$J^f = (\partial \beta) c + \frac{3}{2} \beta \partial c - 2b \gamma$$

(con expresiones análogas para la teoría antianalítica),  
de donde  $c^{b,c} = -26$  ,  $c^{\beta,\gamma} = +11$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad c^{TOT} &= c^X + c^\psi + c^{b,c} + c^{\beta,\gamma} \\ &= D + \frac{D}{2} - 26 + 11 \\ &= \frac{3}{2} D - 15 \end{aligned}$$

Concluimos entonces que  $D=10$  es la dimensión crítica para la supercuerda, donde  $c^{TOT} = 0$  y  $\therefore$  anomalía de Weyl se cancela.

(si  $D \neq 10$  —supercuerda no crítica— podemos fijar norma superconforme, pero modos de Weyl y superWeyl son dinámicos  $\rightarrow$  acción de superLiouville.)

Analicemos ahora las posibles condiciones de borde,  
primero en el caso de la supercuerda cerrada.

Sabemos ya que los campos con 'espín' entero  
deben ser periódicos :

$$X^{\mu}(\sigma+2\pi, \tau) = X^{\mu}(\sigma, \tau) \quad \forall \mu \text{ es la única}$$

condición covariante bajo Poincaré,

y la periodicidad de los fantasmas

$c$  y  $b$  se debe a su conexión con reparametrizaciones  
y deformaciones de la métrica, respectivamente.

Pero los nuevos campos, que tienen espín semientero,  
permiten 2 condiciones de borde distintas :

$$\psi^{\mu}(\sigma+2\pi, \tau) = +\psi^{\mu}(\sigma, \tau) \quad \forall \mu \quad \text{Ramond}$$

(preservan SUSY)

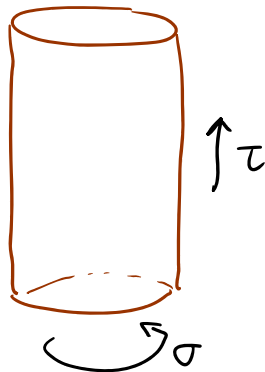
$$\psi^{\mu}(\sigma+2\pi, \tau) = -\psi^{\mu}(\sigma, \tau) \quad \forall \mu \quad \text{Neveu-Schwarz}$$

(rompen SUSY)

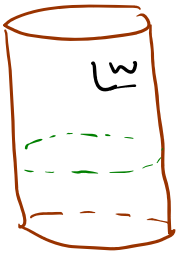
Conviene expresar el signo en la forma

$$e^{2\pi i \Delta}, \quad \text{con} \quad \Delta = \begin{cases} 0 & R \\ 1/2 & NS \end{cases} . \quad (\text{Solo existen estas}$$

2 posibilidades porque  $S \sim \int d^2z \psi \bar{\partial} \psi$  debe ser univaluada.)

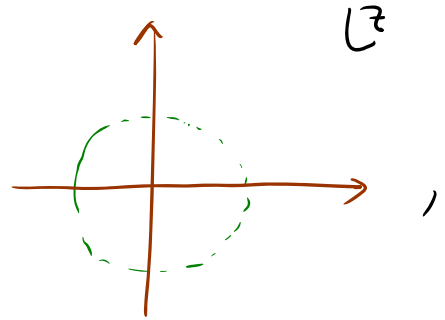


Pasando al plano



$$w = i(\tau + \sigma) \\ = \sigma^2 + i\sigma^1$$

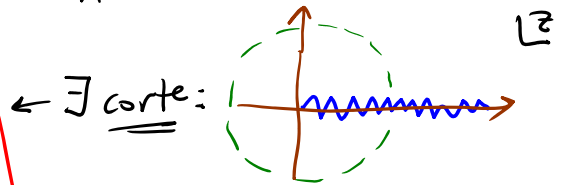
$$z = e^w$$



Dado que  $\psi_{\text{plano}}^{\mu}(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-1/2} \psi_{\text{cil}}^{\mu}(w)$ , las 2 opciones son

$$\psi^{\mu}(e^{2\pi i} z) = -\psi^{\mu}(z) \quad R$$

$$\psi^{\mu}(e^{2\pi i} z) = +\psi^{\mu}(z) \quad NS$$



Más adelante veremos que para obtener teoría de supercuerdas consistente necesitamos de hecho emplear ambas condiciones de borde, que definen entonces  $Z$  distintos "sectores" de una misma teoría de cuerdas. En cada sector, los superfantomas  $\gamma$  y  $\beta$  deben satisfacer las mismas condiciones de borde que  $\psi^{\mu}$  (porque  $\gamma$  está asociado al espinor  $\epsilon$  que relaciona  $\chi^{\mu}$  con  $\psi^{\mu}$ ).



Tomando en cuenta a los modos derechos  $\tilde{\psi}^{\omega}(\bar{z})$ ,  
tenemos entonces 4 sectores para la cuerda cerrada:

$$\begin{array}{cccc} \text{NS-NS} & , & \text{R-R} & , & \text{NS-R} & , & \text{R-NS} \\ (\Delta, \tilde{\Delta}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & & (0, 0) & & (\frac{1}{2}, 0) & & (0, \frac{1}{2}) \end{array}$$

Para cuerda abierta,

$$\delta S_{\text{NS}} \Rightarrow \text{término de borde } \frac{1}{2\pi} \int d\tau (\psi^{\omega} \delta \psi_{\omega} - \tilde{\psi}^{\omega} \delta \tilde{\psi}_{\omega}) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}$$

que se anula si  $\psi^{\omega} \Big|_{\sigma=0} = \pm \tilde{\psi}^{\omega} \Big|_{\sigma=\pi} \quad \forall \tau$ .

Podemos escribir esto en la forma

$$\psi_{\text{cil}}^{\omega}(0, \tau) = e^{2\pi i \Delta} \tilde{\psi}_{\text{cil}}^{\omega}(0, \tau), \quad \psi_{\text{cil}}^{\omega}(\pi, \tau) = e^{2\pi i \Delta'} \tilde{\psi}_{\text{cil}}^{\omega}(\pi, \tau).$$

Pero siempre podemos redefinir  $\tilde{\psi}_{\text{cil}}^{\omega} \rightarrow e^{-2\pi i \Delta'} \tilde{\psi}_{\text{cil}}^{\omega}$ ,

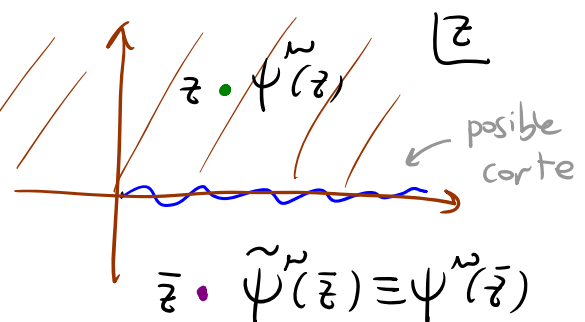
así que basta considerar  $\Delta' = 0$ .

$$\text{Hay } \therefore \text{ 2 sectores: } \Delta = \begin{cases} 0 & \text{R} \\ \frac{1}{2} & \text{NS} \end{cases}$$

Pasando del cilindro al

plano, podemos implementar

nuevamente "truco de duplicación":



Obtenemos entonces  $\psi^{\sim}(z)$  definido en todo el plano,  
que satisface  $\psi^{\sim}(e^{2\pi i} z) = -e^{2\pi i \Delta} \psi^{\sim}(z)$  con  $\Delta = \begin{cases} 0 & n \\ 1/2 & n \text{ s} \end{cases}$ .

[27/04/06]

Habiendo entendido condiciones de borde, podemos escribir desarrollo en modos

$$\psi^{\sim}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \Delta} \frac{\psi_r^{\sim}}{z^{r+1/2}} \quad \tilde{\psi}^{\sim}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \tilde{\Delta}} \frac{\tilde{\psi}_r^{\sim}}{z^{r+1/2}},$$

que (como consecuencia de FPO  $\psi^{\sim}(z) \psi^{\vee}(z) = \frac{\eta^{\mu\nu}}{z} + \dots$ )  
satisface

$$\{\psi_r^{\sim}, \psi_s^{\vee}\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r-s} = \{\tilde{\psi}_r^{\sim}, \tilde{\psi}_s^{\vee}\}$$

Desarrollando también

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^{\mu} \partial X_{\mu} : - \frac{1}{2} : \psi^{\sim} \partial \psi_{\sim} : = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}},$$

↑ orden normal conforme

$$J(z) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \psi^{\sim} \partial X_{\sim} = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \Delta} \frac{G_r}{z^{r+3/2}}$$

obtenemos

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} : \alpha_{m-n}^{\mu} \alpha_{\mu n} : + \frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \Delta} (2r-m) : \psi_{m-r}^{\sim} \psi_{\mu r}^{\sim} : + \delta_{m,0} A_{\Delta}^{\chi, \psi}$$

↑ orden normal de operadores

$$G_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{\mu} \psi_{\mu r-n}$$

constante de orden

que satisfacen **álgebra superconforme** (o super Virasoro)

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m,-n}$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{12} (4r^2 - 1) \delta_{r,-s}$$

$$[L_m, G_r] = \frac{m-2r}{2} G_{m+r}$$

(que se puede obtener a partir de EPOs TT, JJ, TJ).

La constante de orden  $A_{\Delta}^{x,\psi}$  se puede calcular de

la manera que vimos en cuerdas bosónicas (pej. comparando  
 $::$  vs.  $::$ , ó usando  $[L_1, L_{-1}] = 2L_0$ ).

Vale la pena memorizar el resultado general:

Cada	bosón	periódico	$-\frac{1}{24}$
		antiperiódico	$+\frac{1}{48}$
	fermión	periódico	$+\frac{1}{24}$
		antiperiódico	$-\frac{1}{48}$

al Hamiltoniano  $H$  (en  $w$ ), y  $L_0$  (en  $z$ ) difiere por  $+\frac{c}{24}$   
 (recordar que  $H = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c+\tilde{c}}{24}$  por derivada Schwarziana).

De acuerdo con esto, en  $L_0^x$  y  $L_0^{b,c}$  tenemos constantes de orden

$$A^x = -\frac{D}{24} + \frac{D}{24} = 0 \quad \checkmark$$

(como vimos en cuerda bosónica)

$$A^{b,c} = +\frac{2}{24} + \frac{-26}{24} = -1 \quad \checkmark$$

Para  $L_0^\psi$  tenemos

$$A_\Delta^\psi = A_\Delta^{x,\psi} = \begin{cases} \frac{D}{24} + \frac{D/2}{24} = \frac{D}{16} = \frac{5}{8} & R \quad (\Delta=0) \\ -\frac{D}{48} + \frac{D/2}{24} = 0 & NS \quad (\Delta=\frac{1}{2}) \end{cases}$$

Por último, en  $L_0^{\beta,\gamma}$  aparece

$$A_\Delta^{\beta,\gamma} = \begin{cases} -\frac{2}{24} + \frac{11}{24} = +\frac{3}{8} & R \\ +\frac{2}{48} + \frac{11}{24} = +\frac{1}{2} & NS \end{cases}$$

En conjunto tenemos entonces

$$A_\Delta^{TOT} = A_\Delta^{x,\psi} + A_\Delta^{b,c} + A_\Delta^{\beta,\gamma} = \begin{cases} 0 & R \\ -\frac{1}{2} & NS \end{cases}$$

← por sus 1  
y  $c^{TOT} = 0$

Podemos proceder ahora a construir espacio de Hilbert e identificar en él estados físicos.

$\alpha_n^m$  como antes. ¿ $\psi_r^m$ ?

- NS: tenemos  $\{\psi_r^\mu, \psi_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r,-s}$   $r, s = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots$

Definimos  $|0\rangle_{NS}$  tal que

$$\psi_r^\mu |0\rangle_{NS} = 0 \quad \forall \mu, \forall r > 0$$

Estados excitados son entonces

$$\psi_{-r_1}^{\mu_1} \dots \psi_{-r_n}^{\mu_n} |0\rangle_{NS}, \text{ con } \binom{\mu_i}{r_i} \neq \binom{\mu_j}{r_j} \quad \forall i \neq j$$

Todos tienen espín entero desde el punto de vista de espaciotiempo 10 dim, y son  $\therefore$  bosónicos.

- R: tenemos  $\{\psi_r^\mu, \psi_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r,-s}$   $r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Si  $|0\rangle_R$  satisface

$$\psi_r^\mu |0\rangle_R = 0 \quad \forall \mu, \forall r > 0$$

entonces  $|0\rangle'_R \equiv \psi_0^\mu |0\rangle_R$  también (porque  $\{\psi_{r>0}^\nu, \psi_0^\mu\} = 0$ ).

El estado base en este sector es  $\therefore$  degenerado.

Notar que  $\{\psi_0^\mu, \psi_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$  es equivalente a

álgebra de Dirac  $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$  con  $\Gamma^\mu \equiv \sqrt{2} \psi_0^\mu$ .

Los estados base forman  $\therefore$  representación de álgebra de Dirac, es decir, constituyen un espinor de  $SO(9,1)$ !

Definiendo

$$b_0^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^0 + \Gamma^1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^0 + \psi_0^1), \quad b_0 \equiv \frac{1}{2}(-\Gamma^0 + \Gamma^1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi_0^0 + \psi_0^1),$$

$$b_1^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^2 + i\Gamma^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^2 + i\psi_0^3), \quad b_1 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^2 - i\Gamma^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^2 - i\psi_0^3),$$

$$b_2^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^4 + i\Gamma^5) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^4 + i\psi_0^5), \quad b_2 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^4 - i\Gamma^5) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^4 - i\psi_0^5),$$

$$b_3^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^6 + i\Gamma^7) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^6 + i\psi_0^7), \quad b_3 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^6 - i\Gamma^7) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^6 - i\psi_0^7),$$

$$b_4^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^8 + i\Gamma^9) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^8 + i\psi_0^9), \quad b_4 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^8 - i\Gamma^9) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^8 - i\psi_0^9)$$

tenemos

$$\{b_\alpha, b_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \{b_\alpha, b_\beta\} = 0 = \{b_\alpha^\dagger, b_\beta^\dagger\} \quad \forall \alpha, \beta = 0, \dots, 4$$

5 pares de operadores creación/aniquilación fermiónicos

Definiendo vacío  $|\Omega\rangle$  tal que  $b_\alpha |\Omega\rangle = 0 \quad \forall \alpha$ ,

obtenemos un total de  $2^5 = 32$  estados actuando (0 ó 1 vez)

con operadores de creación  $b_\alpha^\dagger$ .

(Más en general, espinor de Dirac tiene  $2^{D/2}$  componentes en cualquier dimensión par.)

Denotaremos  $|S\rangle_R \equiv |S_0, S_1, S_2, S_3, S_4\rangle_R$  al estado

que se obtiene  $\begin{cases} \text{actuando} \\ \text{no actuando} \end{cases}$  con  $b_\alpha^\dagger$  sobre  $|\Omega\rangle$  si  $S_\alpha = \begin{cases} +1/2 \\ -1/2 \end{cases}$ .

(P.ej.,  $|\Omega\rangle = |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_R$ ,  $b_2^\dagger b_4^\dagger |\Omega\rangle = |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_R$ )

La notación refleja propiedades de transformación bajo Lorentz: el teorema de Noether da

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}+\Delta} [\psi_r^\mu, \psi_{-r}^\nu]$$

como (contribución fermiónica a) generadores de Lorentz, que actuando sobre estados base  $|S\rangle_R$  se reduce a

$$\Sigma_0^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} [\psi_0^\mu, \psi_0^\nu] = -\frac{i}{4} [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] \quad \checkmark$$

Tanto  $\Sigma^{\mu\nu}$  como  $\Sigma_0^{\mu\nu}$  satisfacen álgebra  $so(9,1)$ :

$$i[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\sigma\rho}] = \eta^{\nu\sigma} \Sigma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\rho} \Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \Sigma^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho} \Sigma^{\mu\sigma}$$

Un conjunto de generadores simultáneamente diagonalizables

("generadores de Cartan") es  $\therefore$

$$S^\alpha \equiv i \sum_{\alpha, 0}^{2\alpha, 2\alpha+1} \quad \alpha = 0, 1, \dots, 4$$

$\leftarrow$  para que  $S^0$  sea hermítico

que actuando sobre estados base se reduce a

$$S_0^\alpha = i^{\delta_{\alpha,0}} \sum_0^{2\alpha, 2\alpha+1} = b_\alpha^\dagger b_\alpha - \frac{1}{2},$$

de tal forma que

$$S^\alpha |s\rangle_R = s_\alpha |s\rangle_R \quad S_\alpha = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow |s\rangle_R \text{ es } \underline{\text{espinor}}$$

Los operadores de creación  $(-1)^{\delta_{\alpha,0}} \psi_{-r}^{2\alpha} \pm i(\mp i)^{\delta_{\alpha,0}} \psi_{-r}^{2\alpha+1}$   
( $r > 0$ ) cambian el autovalue de

$$S^\alpha = S_0^\alpha + i^{\delta_{\alpha,0}} \left(-\frac{i}{2}\right) \sum_{r \neq 0} [\psi_r^{2\alpha}, \psi_{-r}^{2\alpha+1}]$$

por un entero, así que todos los estados en el sector  $R$  tienen espín semientero desde el punto de vista lo dim, y son fermiónicos.

Recordar que (en dimensión par) representación de

Dirac es reducible: la matriz de quiralidad

$\Gamma \equiv \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^9$  (análoga a  $\gamma^5$ ) satisface

$\Gamma^2 = +1$ ,  $\{\Gamma, \Gamma^{\mu\nu}\} = 0$  y  $\therefore [\Gamma, \Sigma^{\mu\nu}] = 0$ .



Dado que  $\Gamma = 32 S_0^0 S_0^1 S_0^2 S_0^3 S_0^4$ , tenemos

$$\Gamma |s\rangle_R = \pm |s\rangle_R \text{ si el número de } s_\alpha = -\frac{1}{2} \text{ es } \begin{matrix} \text{par} \\ \text{impar} \end{matrix},$$

lo cual expresa descomposición  $32 = \underbrace{16}_{\text{Dirac}} + \underbrace{16'}_{\text{Weyl}}$

Es posible generalizar  $\Gamma$  a todo el espectro:

$$\{\Gamma, \Gamma^m\} = 0 \longrightarrow \{(-1)^F, \psi_{-r}^m\} = 0,$$

donde  $F \equiv S^0 + S^1 + S^2 + S^3 + S^4 - \frac{1}{2} - \Delta \pmod{2}$

es el número fermiónico (en la hoja de mundo).

Con esta definición, en el sector Ramond ( $\Delta=0$ )

$$(-1)^F |s\rangle_R = (-1)^{s_0 + \dots + s_4 - \frac{1}{2}} |s\rangle_R = |s'\rangle_R \Gamma_{s's} \checkmark,$$

y  $\psi_{-r_1}^{m_1} \dots \psi_{-r_n}^{m_n} |s\rangle_R$  tiene  $F = n + s_0 + \dots + s_4 - \frac{1}{2}$ ,

mientras que en el sector Neveu-Schwarz ( $\Delta = \frac{1}{2}$ )

$$(-1)^F |0\rangle_{NS} = -|0\rangle_{NS} \text{ y } \psi_{-r_1}^{m_1} \dots \psi_{-r_n}^{m_n} |0\rangle_{NS} \text{ tiene } F = n - 1.$$

Como veremos más adelante, contribución  $-\frac{1}{2} - \Delta$  a  $F$  proviene de estado base de superfermiones  $\beta, \gamma$  (así que  $F$  es en realidad 'número espinorial').

10/05/06

Conociendo ya el espacio de Hilbert completo, estamos listos para determinar estados físicos.

En 'cuantización covariante antigua' ignoramos  $b, c, \beta, \gamma$  (que supuestos están en su estado base) excepto por su contribución a la constante de orden  $A_{\Delta}^{TOT}$ .  
Las condiciones de estado físico son entonces

$$L_{n>0}^{X,\psi} |fís\rangle = 0$$

$$(L_0^{X,\psi} - A_{\Delta}^{X,\psi} + A_{\Delta}^{TOT}) |fís\rangle = 0$$

$$(\Leftrightarrow L_0^{TOT} |fís\rangle = 0)$$

$$G_{r>0} |fís\rangle = 0$$

junto con la relación de equivalencia para estados espurios  
(+ físicos = nulos)  $L_{-n} |X\rangle \approx 0, G_{-r} |X\rangle \approx 0 \quad \forall n, r > 0.$

Sabemos que  $A_{\Delta}^{TOT} = -\Delta,$

$$L_0^{X,\psi} - A_{\Delta}^{X,\psi} = \underbrace{\frac{1}{2} \alpha_0^2}_{\equiv N^X} + \underbrace{\sum_{n>0} \alpha_{-n}^{\mu} \alpha_{n\mu}}_{\equiv N^{\psi}} + \underbrace{\sum_{n>0} r \psi_{-r}^{\mu} \psi_{r\mu}}_{\equiv N^{\psi}} \equiv L_0,$$

Cuerda  
- cerrada:  $\alpha p^2/4$   
- abierta:  $\alpha p^2$

$$\equiv N^{X,\psi} \equiv N$$

$$G_{\pm 1/2} = \alpha_{0\mu} \psi_{\pm 1/2}^{\mu} + \dots \quad (\text{sector NS}),$$

$$G_0 = \alpha_{0\mu} \psi_0^{\mu} + \dots \quad (\text{sector R}).$$

## Espectro de Supercuerda Abierta

- NS:  $A_{1/2}^{\text{TOT}} = -1/2 \Rightarrow (L_0 + A_{1/2}^{\text{TOT}})|\text{fís}\rangle = 0$

es condición de capa de masa

$$m^2 = \frac{N - 1/2}{\alpha'}$$

$$N = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

• Nivel  $N=0$ :  $|0, k\rangle_{\text{NS}}$

con  $m^2 = -k^2 = -1/2\alpha'$

Taquión  $\phi(x)$

$\in \text{NS}_-$  autovector de  $(-1)^F$

• Nivel  $N=1/2$ :  $\sum_{\mu} \psi_{-1/2}^{\mu} |0; k\rangle_{\text{NS}}$

con  $m^2 = -k^2 = 0$

$$G_{1/2} \sum_{\mu} \psi_{-1/2}^{\mu} |0; k\rangle_{\text{NS}} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{\mu} k^{\mu} |0; k\rangle_{\text{NS}} = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon \cdot k = 0}$$

$$G_{-1/2} |0; k\rangle_{\text{NS}} = \sqrt{2\alpha'} k_{\mu} \psi_{-1/2}^{\mu} |0; k\rangle_{\text{NS}} \text{ nulo} \Rightarrow \boxed{\sum_{\mu} \varepsilon_{\mu} \approx \sum_{\mu} \varepsilon_{\mu} + \lambda k_{\mu}}$$

Bosón de Norma  $A_{\mu}(x) \in \text{NS}_+$

En marco donde  $k_\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$ , todo estado físico es equivalente a combinación lineal

$$\sum_i \psi_{-1/2}^i |0; k\rangle_{NS} \quad i=2,3,\dots,9 \quad - \underline{8}_V \text{ de } SO(8).$$

• Nivel N=1:  $(\sum_{\mu} \alpha_{-1}^{\mu} + \sum_{\mu\nu} \psi_{-1/2}^{\mu} \psi_{-1/2}^{\nu}) |0; k\rangle_{NS}$   $m^2 = -k^2 = +\frac{1}{2\alpha'}$

...  $\in NS_-$ ,

etc.

-R:  $A_0^{\text{TOT}} = 0 \Rightarrow (L_0 + A_0^{\text{TOT}}) |f\rangle = 0$

resulta en  $m^2 = \frac{N}{\alpha'}$   $N = 0, 1, 2, \dots$

• Nivel 0:  $u_s |S; k\rangle_R$  con  $m^2 = -k^2 = 0$

Normino  $\lambda_s(x)$

$$\underbrace{G_0}_{\sqrt{2\alpha'} p_\mu \psi_0^\mu} u_s |S; k\rangle_R = \sqrt{\alpha'} k_\mu \Gamma_{s's}^\mu u_s |S'; k\rangle_R = 0 \Rightarrow \boxed{k_\mu \Gamma_{s's}^\mu u_s = 0}$$

$\not\partial \lambda(x) = 0 \Leftrightarrow$  i Ec. de Dirac!

(De hecho Dirac  $G_0 = 0 \Rightarrow$  Klein-Gordon  $L_0 = G_0^2 = 0$ .)

En marco donde  $k_\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$ , operador de Dirac es

$$k_0 \Gamma^0 + k_1 \Gamma^1 = k \Gamma^0 (1 - \Gamma^0 \Gamma^1) = k \Gamma^0 (1 - 2S_0^1),$$

así que solo son físicos estados con  $S_0 = +\frac{1}{2}$ .

$$\text{Bajo } \text{So}(9,1) \supset \text{So}(1,1) \times \text{So}(8)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ S^{\alpha} & S^0 & S^1, \dots, S^4 \end{array}$$

tenemos descomposición

$$\underline{16} = \left(+\frac{1}{2}, \underline{8}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \underline{8}'\right) \quad \# \text{ impar de } -\frac{1}{2}'\text{s}$$

$$\underline{16}' = \left(+\frac{1}{2}, \underline{8}'\right) + \left(-\frac{1}{2}, \underline{8}\right) \quad \# \text{ par de } -\frac{1}{2}'\text{s}$$

Sobreviven 2

espinores de  $\text{So}(8)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{8} \text{ con } (-1)^F = +1 \quad \in R_+ \\ \underline{8}' \text{ con } (-1)^F = -1 \quad \in R_- \end{array} \right.$$

• Nivel  $N=1$  :  $\left(\sum_{\omega} \alpha_{-1}^{\omega} + \sum'_{\omega} \psi_{-1}^{\omega}\right) |S\rangle_R$  con  $m^2 = -k^2 = \frac{1}{\alpha'}$ ,

$$\in R_+ \cup R_-,$$

etc.

## Espectro de Supercuerda Cerrada

2 copias de cuerda abierta (con  $p \rightarrow p/2$ ),  
sujetas a condición de empataamiento de niveles

$$(L_0^{\text{TOT}} - \tilde{L}_0^{\text{TOT}}) |f\rangle = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{4}{\alpha'} (N - \Delta) = \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - \tilde{\Delta})$$

(donde hemos usado  $A_{\Delta}^{\text{TOT}} = -\Delta$ ,  $\tilde{A}_{\tilde{\Delta}}^{\text{TOT}} = -\tilde{\Delta}$ ).

Recordando que

$$R \ (\Delta=0) \Rightarrow \begin{cases} N = 0, 1, 2, \dots \\ (-1)^F = \pm 1, \pm 1, \pm 1, \dots \end{cases}$$

y

$$NS \ (\Delta=\frac{1}{2}) \Rightarrow \begin{cases} N = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \\ (-1)^F = -1, +1, -1, +1, \dots \end{cases}$$

vemos que  $NS_-$  ( $N-\Delta$  semientero) solo puede empataarse con  $NS_-$ .

Entendemos también que los estados en los sectores  $(NS, NS)$  y  $(R, R)$  son bosónicos ( $s_{\alpha} \in \mathbb{Z}$ ), mientras que  $(NS, R)$  y  $(R, NS)$  son fermiónicos ( $s_{\alpha} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ).

-  $(NS_-, NS_-)$  :  $m^2 = \frac{4}{\alpha'} (N - \frac{1}{2})$ ,  $N = \tilde{N} = 0, 1, 2, \dots$

• Nivel  $N=0$  :  $|0, 0; k\rangle_{NS-NS}$   $m^2 = -k^2 = -2/\alpha'$

Taquión  $\phi(x)$

Niveles  $N \geq 1$  tienen  $m^2 > 0$

En los 9 sectores restantes, el nivel más bajo

corresponde a estados con  $m^2 = 0$  :

-  $(NS_+, NS_+)$  :  $\sum_{\mu\nu} \Psi_{-1/2}^\mu \tilde{\Psi}_{-1/2}^\nu |0, 0; k\rangle_{NS-NS}$

$$G_{1/2} = \tilde{G}_{1/2} = 0 \Rightarrow k^\mu \epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} k^\nu = 0$$

$$G_{-1/2} \tilde{G}_{-1/2} |0, 0; k\rangle_{NS-NS} \text{ nulo} \Rightarrow \epsilon_{\mu\nu} \approx \epsilon_{\mu\nu} + k_\mu \zeta_\nu + \xi_\mu k_\nu$$

(c/  $k \cdot \zeta = k \cdot \xi = 0$ )

$\therefore (10-2)^2$  estados físicos, que en términos de representaciones irreducibles de  $SO(8)$  son

$$\underline{8}_v \times \underline{8}_v = \underline{1}_{(0)} + \underline{28}_{[2]} + \underline{35}_{(2)}$$

Dilaton      Antisimetría      Gravitón  
 $\phi(x)$        $B_{\mu\nu}(x)$        $h_{\mu\nu}(x)$

$$-(R_+, R_+) : \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} (C \Gamma^{\mu_1} \Gamma^{\mu_2} \dots \Gamma^{\mu_n})_{\tilde{s}s} |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R}$$

$$\equiv \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n}$$

donde  $C \equiv \Gamma^0 \Gamma^3 \Gamma^5 \Gamma^7 \Gamma^9$  matriz de conjugación de carga

satisface  $C \Gamma^\mu C^{-1} = -\Gamma^{\mu T}$ ,  $(C \Gamma^0) \Gamma^\mu (C \Gamma^0)^{-1} = \Gamma^{\mu*}$

$$\Rightarrow u^T C \text{ transforma como } \bar{u} \equiv u^T \Gamma^0.$$

A partir de 2 espinores  $u, \tilde{u}$  se pueden  $\therefore$  formar tensores linealmente independientes

$$\tilde{u}^T C \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} u \quad n=0, 1, \dots, 5,$$

pero los casos con  $n$  par ( $\Rightarrow$  # impar de  $\Gamma$ 's) dan cero si  $u, \tilde{u}$  tienen la misma quiralidad [ver Polchinski, Vol II, Apéndice B.1], como es el caso en este sector.

Tenemos entonces solo estados con  $n=1, 3, 5$ .

En términos de representaciones de  $SO(9,1)$ :

$$\underline{16} \times \underline{16} = \underline{10} + \underline{120} + \underline{126}$$

Campos Antisimétricos  $G_\mu(x)$   $G_{\mu\nu\lambda}(x)$   $G_{\mu\nu\lambda\rho}^+(x)$   $[5]_+$   $\leftarrow$  rep autodual,



La definición de auto dualidad es como sigue.

Dado un tensor totalmente antisimétrico

$T_{\mu_1 \dots \mu_n}$  en  $D$  dimensiones, su dual de Hodge es

$$*T_{\mu_1 \dots \mu_{D-n}} \equiv \frac{\sqrt{-G}}{n!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{D-n} \nu_1 \dots \nu_n} T_{\nu_1 \dots \nu_n}$$

$\uparrow$   $\epsilon_{012 \dots D-1} = +1$  Levi-Civita

(Para  $F_{\mu\nu}$  en  $D=4$ ,  $F_{\mu\nu} \rightarrow *F_{\mu\nu}$  es la transformación  $(\vec{E}, \vec{B}) \rightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$ , y las ecs. de Maxwell son  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \partial_{[\mu} *F_{\nu\lambda]} = 0$ ,  $\partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$ .)

Si  $D$  es par y  $n = D/2$ , podemos entonces descomponer de manera covariante

$$T_{\mu_1 \dots D/2} \equiv T_{\mu_1 \dots D/2}^+ + T_{\mu_1 \dots \mu_{D/2}}^- ,$$

$$\text{con } T_{\mu_1 \dots D/2}^\pm = \pm * T_{\mu_1 \dots D/2}^\pm \quad \begin{array}{l} \text{autodual} \\ \text{antiautodual} \end{array}$$

En nuestro caso tenemos  $D=10$  y

$$G_{\mu_1 \dots \mu_5}^+ = + * G_{\mu_1 \dots \mu_5}^+$$

Condiciones de estado físico  $G_0 = 0 = \tilde{G}_0$

$$\Rightarrow k_{\mu} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \underbrace{\Gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \Gamma^{\mu}}_{(-1)^n (\Gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} - n \eta^{\mu [\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n]})} = 0 = k_{\mu} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \underbrace{\Gamma^{\mu} \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n}}_{\Gamma^{\mu \mu_1 \dots \mu_n} + n \eta^{\mu [\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n]}}$$

$$\Leftrightarrow k_{[\mu} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n]} = 0 = k^{\mu_1} \epsilon_{[\mu_1 \dots \mu_n]}$$

$$\Leftrightarrow \partial_{[\mu} G_{\mu_1 \dots \mu_n]}(x) = 0 = \partial_{[\mu} * G_{\mu_{n+1} \dots \mu_n]} \quad /$$

¿que son las ecs. de Maxwell para intensidad de campo generalizada  $G_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$ ! Podemos definir campo de

de norma asociado  $C_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}(x) \simeq C_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}(x) + \partial_{[\mu_1} \lambda_{\mu_2 \dots \mu_{n-1}}(x)$

tal que  $G_{\mu_1 \dots \mu_n}(x) = (n+1) \partial_{[\mu} C_{\mu_1 \dots \mu_n]}(x)$ .

Los estados físicos no masivos en este sector son entonces

$$\underline{8} \times \underline{8} = \underline{1} + \underline{28} + \underline{35} + \dots \leftarrow \text{reps de } SO(8)$$

$$[0] \quad [2] \quad [4]_+$$

Campos de Norma R-R  $C(x) \quad C_{\mu\nu}(x) \quad C_{\mu\nu\lambda\rho}^+(x)$

04/05/06

-  $(R_-, R_-)$ : estados  $\sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} (C \Gamma^{\mu_1, \dots, \mu_n})_{\tilde{s}\tilde{s}} |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R}$

con  $n=1, 3, 5$ , que son reps irreducibles en producto

$$\underline{16}' \times \underline{16}' = \underline{1}_0 + \underline{12}_0 + \underline{126} \leftarrow \text{reps de } \text{So}(9,1),$$

$$[1] \quad [3] \quad [5]_-$$

de los cuales son físicos

$$\underline{8}' \times \underline{8}' = \underline{1} + \underline{28} + \underline{35}_- \leftarrow \text{reps de } \text{So}(8)$$

$$[0] \quad [2] \quad [4]_-$$

Campos de  
Norma R-R

$$\hat{C}(x) \quad \hat{C}_{\mu\nu}(x) \quad C_{\mu\nu\lambda\rho}^-(x)$$

-  $(R_+, R_-)$ : estados  $\sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} (C \Gamma^{\mu_1, \dots, \mu_n})_{\tilde{s}\tilde{s}} |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R}$

con  $n=0, 2, 4$ , que figuran en producto

$$\underline{16} \times \underline{16}' = \underline{1} + \underline{45} + \underline{210} \leftarrow \text{reps de } \text{So}(9,1),$$

$$[0] \quad [2] \quad [4]$$

de los cuales son físicos

$$\underline{8} \times \underline{8}' = \underline{8}_v + \underline{56}_t \leftarrow \text{reps de } \text{So}(8)$$

$$[1] \quad [3]$$

Campos de  
Norma R-R

$$C_{\mu}(x) \quad C_{\mu\nu\lambda}(x)$$

-  $(R_-, R_+)$  : igual, con  $n=0, 2, 4$

$\Rightarrow$  estados físicos  $\underline{\mathcal{B}}' \times \underline{\mathcal{B}} = \underline{\mathcal{B}}_V + \underline{\mathcal{B}}_t$

Campos de Norma R-R  $\hat{C}_N(x)$   $\hat{C}_{N\lambda}(x)$

-  $(NS_+, R_+)$  : estados  $\epsilon_{\mu\tilde{s}} \Psi_{-1/2}^{\mu} |0, \tilde{s}; k\rangle_{NS-R}$

que se pueden separar de manera covariante en

$$u_{\tilde{s}'} (\Gamma_{\mu})_{\tilde{s}\tilde{s}'} \Psi_{-1/2}^{\mu} |0, \tilde{s}; k\rangle_{NS-R} \quad (\text{i.e., } \epsilon_{\mu\tilde{s}} = u_{\tilde{s}'} (\Gamma_{\mu})_{\tilde{s}\tilde{s}'})$$

y  $u_{\mu\tilde{s}} \Psi_{-1/2}^{\mu} |0, \tilde{s}; k\rangle_{NS-R}$  con  $\Gamma_{\tilde{s}'\tilde{s}}^{\mu} u_{\mu\tilde{s}} = 0$ ,

lo cual corresponde a descomposición

$$\underline{10} \times \underline{16} = \underline{16} + \underline{144} \quad \leftarrow \text{reps de } so(9,1).$$

condiciones de estado físico

$$G_{1/2} = 0 = \tilde{G}_0 \Rightarrow k^{\mu} \epsilon_{\mu\tilde{s}} = 0 = k_{\mu} \Gamma_{\tilde{s}'\tilde{s}}^{\mu} \epsilon_{\nu\tilde{s}'},$$

$$G_{-1/2} |0, \tilde{s}; k\rangle_{NS-R} \approx 0 \Rightarrow \epsilon_{\mu\tilde{s}} \approx \epsilon_{\mu\tilde{s}} + k_{\mu} T_{\tilde{s}}$$

seleccionan

$$\underline{\mathcal{B}}_V \times \underline{\mathcal{B}} = \underline{\mathcal{B}}' + \underline{\mathcal{B}} \quad \leftarrow \text{reps de } so(8)$$

$$\lambda_{\tilde{s}'}(x) \quad \chi_{\mu\tilde{s}}(x)$$

Dilatino Gravitino

Notar que relación de equivalencia

$$E_{\mu\tilde{s}} \simeq E_{\mu s} + \kappa_{\mu} \tilde{J}_{\tilde{s}}$$

(que es consecuencia de existencia de estado nulo)

es expresión de invariancia de norma en espaciotiempo

$$\chi_{\mu\tilde{s}}(x) \simeq \chi_{\mu s}(x) + \partial_{\mu} \tilde{J}_{\tilde{s}}(x)$$

↑ parámetro fermiónico

¡¡ Supersimetría local en espaciotiempo !!

- (R<sub>+</sub>, NS<sub>+</sub>) : igual, con  $\tilde{s} \rightarrow s$

Estados físicos  $\underline{8} \times \underline{8}_v = \underline{8}' + \underline{56}$

$$\hat{\chi}_{\tilde{s}}(x) \quad \hat{\chi}_{\mu s}(x)$$

- (NS<sub>+</sub>, R<sub>-</sub>) : igual a (NS<sub>+</sub>, R<sub>+</sub>), con  $\tilde{s} \rightarrow \tilde{s}'$

Estados físicos  $\underline{8}_v \times \underline{8}' = \underline{8} + \underline{56}'$

$$\chi_{\tilde{s}}(x) \quad \chi_{\mu s'}(x)$$

- (R<sub>-</sub>, NS<sub>+</sub>) : igual, con  $\tilde{s}' \rightarrow s'$

Estados físicos  $\underline{8}' \times \underline{8}_v = \underline{8} + \underline{56}'$

$$\hat{\chi}_{\tilde{s}}(x) \quad \hat{\chi}_{\mu s'}(x)$$

## Operadores de Vértice

$$-NS: \quad \Psi_r^{\sim} \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-1/2} \Psi^{\sim}(z) \quad r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$$

El estado  $|\Phi_1\rangle$  que corresponde a  $\bar{O}=1$  satisface

$$\begin{aligned} \Psi_r^{\sim} |\Phi_1\rangle &\leftrightarrow \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-1/2} \underbrace{\Psi^{\sim}(z) \cdot 1}_{\Psi^{\sim}(0) + z\partial\Psi^{\sim}(0) + \dots} \\ &= 0 \quad \forall r > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\Phi_1\rangle = |0\rangle_{NS}$$

De la misma manera vemos que

$$\Psi_{-r}^{\sim} |0\rangle_{NS} \leftrightarrow \frac{1}{(r-1/2)!} \partial^{r-1/2} \Psi^{\sim}(0) \quad \forall r > 0,$$

y  $\Psi_{-r_1}^{\sim} \dots \Psi_{-r_n}^{\sim} |0\rangle_{NS} \leftrightarrow$  producto en orden normal.

$$\text{Ej. } \sum_{\omega} \Psi_{-1/2}^{\sim} |0; k\rangle_{NS} \leftrightarrow \sum_{\omega} \Psi^{\sim} e^{ik \cdot X}$$

Notar que con  $k^2=0$  este vértice tiene  $h=1/2$ .

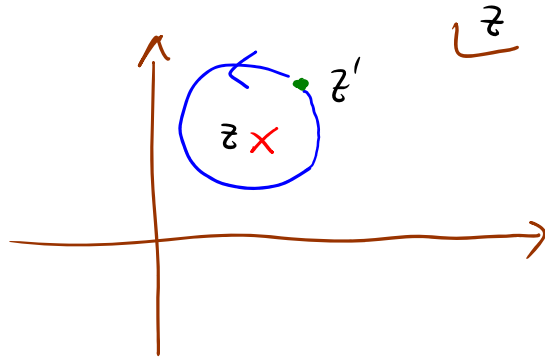
Como veremos más adelante, para obtener  $h=1$  hace falta contribución de superfantasmas.

Como hubiéramos esperado, todos estos vértices  $V_{NS}(z)$  tienen espín entero bajo  $SO(9,1)$ , y satisfacen

$$V_{NS}(z) \psi^{\mu}(z') \sim : \partial^{r_1 - 1/2} \psi^{\mu_1}(z) \cdots : \psi^{\mu}(z') + \dots$$

$$\sim \partial^{r_1 - 1/2} \left( \frac{\eta^{\mu_1 \mu}}{z - z'} \right) \cdots + \dots$$

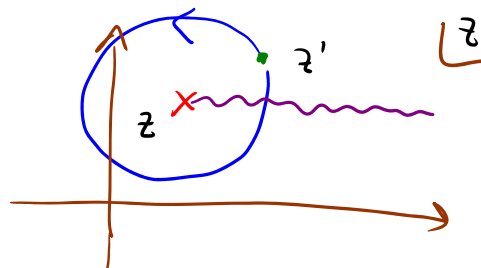
de donde vemos que  $\psi^{\mu}(z')$  es periódico al rodear  $V_{NS}(z)$ .



La inserción de  $V_{NS}(z)$  no cambia  $\therefore$  las condiciones de periodicidad para  $\psi^{\mu}(z')$  alrededor del origen, lo cual refleja el hecho de que la emisión/absorción de un bosón no cambia la estadística del estado inicial.

- R: Los vértices  $V_R(z)$  deben tener espín semientero bajo  $SO(9,1)$ , y satisfacen

$$V_R(z) \tilde{\psi}(z') \sim \frac{1}{\sqrt{z-z'}} \dots,$$



de tal manera que  $\tilde{\psi}(z')$  sea antiperiódico al rodear a  $V_R(z')$ , como corresponde al hecho de que emisión/absorción de un fermión sí cambia bosón  $\rightarrow$  fermión y fermión  $\rightarrow$  bosón.

¡Es imposible construir semejante  $V_R(z)$  usando solo  $\psi$  y sus derivadas!

Se requiere **bosonizar**  $\psi^w$ : curiosamente, en 2 dimensiones un par de espinores Majorana-Weyl  $\psi, \psi'$  (p.ej.  $\psi^2, \psi^3$ ) ¡resultan ser equivalentes a (la parte analítica de) un escalar  $\varphi$ !

$$\text{Definiendo } \psi(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^2(z) + i\psi^3(z)),$$

$$\bar{\psi}(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^2(z) - i\psi^3(z)),$$

tenemos EPOs

$$\psi(z) \bar{\psi}(z') = \frac{1}{z-z'} + \dots \quad (\text{como } b \text{ y } c),$$



$$\Psi(z)\Psi(z') \sim z-z' \quad , \quad \bar{\Psi}(z)\bar{\Psi}(z') \sim z-z'$$

Por otro lado, usando  $\varphi(z)\varphi(z') = -\ln(z-z') + : \varphi(z)\varphi(z') :$

(con  $\varphi(z)$  la parte analítica de un campo escalar,) tenemos

$$: e^{+i\varphi(z)} : : e^{-i\varphi(z')} : = \frac{1}{z-z'} + \dots ,$$

$$: e^{+i\varphi(z)} : : e^{+i\varphi(z')} : = z-z' + \dots ,$$

$$: e^{-i\varphi(z)} : : e^{-i\varphi(z')} : = z-z' + \dots$$

Podemos  $\therefore$  identificar

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(z) \simeq e^{+i\varphi(z)} \\ \bar{\Psi}(z) \simeq e^{-i\varphi(z)} \end{array} \right. \leftarrow \begin{array}{l} \text{Pesos conformes} \\ h = \frac{1}{2} = h_{\Psi} = h_{\bar{\Psi}} \end{array}$$

(recordar que  $: e^{ik \cdot X} :$  tiene  $h = \frac{k^2}{2} \frac{\alpha'}{2}$ )

Carga central  $c^{\Psi, \bar{\Psi}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = c^{\varphi}$  ✓

Además,  $\langle \varphi(z)\varphi(z') \rangle = -\ln(z-z')$

$$\Rightarrow_{|z|=|z'|} [\hat{\varphi}(z), \hat{\varphi}(z')] = \pm i\pi ,$$

y usando Campbell-Baker-Hausdorff tenemos  $\therefore$

$$:e^{+i\hat{\varphi}(z)}: :e^{+i\hat{\varphi}(z')} = \exp\left(-[\hat{\varphi}(z), \hat{\varphi}(z')]\right) :e^{+i\hat{\varphi}(z')} : :e^{+i\hat{\varphi}(z)} :$$

-1 ✓

Comparando EPOs

$$:e^{+i\varphi(z)}: :e^{-i\varphi(-z)}: = \frac{1}{z-(-z)} :e^{+i\varphi(z)-i\varphi(-z)}:$$

$$= \frac{1}{2z} + i\partial\varphi(0) + 2z \left( -\frac{1}{2} : \partial\varphi\partial\varphi(0) : \right) + \dots$$

y  $T^\varphi(0)$

$$\psi(z)\bar{\psi}(-z) = \frac{1}{z-(-z)} + : \psi(z)\bar{\psi}(-z) :$$

$$= \frac{1}{2z} + : \psi\bar{\psi}(0) : + 2z \left( -\frac{1}{2} : \psi\partial\bar{\psi}(0) + \bar{\psi}\partial\psi(0) : \right) + \dots$$

$T^{\psi, \bar{\psi}}(0) = T^{\psi, \psi'}(0)$

concluimos en particular que

$$: \psi\bar{\psi}(z) : \simeq i\partial\varphi(z) \quad \text{y} \quad T^{\psi, \bar{\psi}}(z) \simeq T^\varphi(z)$$

Corriente de Noether asociada a  $\delta\varphi(z) = \epsilon$

Corriente de Noether asociada a  $\delta\psi(z) = +i\epsilon\psi(z)$ ,  $\delta\bar{\psi}(z) = -i\epsilon\bar{\psi}(z)$ .

Considerando todas las FPOs posibles podemos establecer equivalencia entre todos los operadores locales formados con  $\psi, \bar{\psi}$  y sus derivadas y todos los operadores locales formados con  $:e^{i\eta\phi}: (\eta \in \mathbb{Z})$  y sus derivadas.

Las funciones de correlación en ambas teorías son analíticas (meromorfas) y poseen las mismas singularidades,  $\therefore$  deben ser idénticas.

En nuestro caso, para bosonizar  $\psi^{\tilde{w}}(z)$  agrupamos

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(+\psi^0 + \psi^1), \quad \bar{\psi}_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi^0 + \psi^1) \\ \psi_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^2 + i\psi^3), \quad \bar{\psi}_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^2 - i\psi^3) \\ \vdots \\ \psi_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^8 + i\psi^9), \quad \bar{\psi}_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^8 - i\psi^9) \end{array} \right.$$

(notar que modos cero de  $\psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha$  en sector R son respectivamente  $b_\alpha^+, b_\alpha$ ), y definimos

$$\psi_\alpha(z) \simeq e^{+i\varphi_\alpha(z)}, \quad \bar{\psi}_\alpha(z) \simeq e^{-i\varphi_\alpha(z)} \quad \alpha=0,1,\dots,4$$

( sutileza : para que  $e^{\pm i\varphi_\alpha}$  anticomute con  $e^{\pm i\varphi_\beta} \forall \alpha, \beta$ ,  
 debemos agregar 'cociclos'  $C_\alpha$  tales que  
 $\{C_\alpha, C_\beta\} = 0 \forall \alpha \neq \beta, \quad C_\alpha^2 = 1.$  )

Consideremos ahora operadores  $:e^{\pm i\varphi_\alpha/2}:$ , que satisfacen

$$:e^{-\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z)}: :e^{+\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z')} = \frac{1}{\sqrt{z-z'}} :e^{+\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z')} + \dots$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Psi_\alpha(z')}$  ↑ corte!

$$:e^{+\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z)}: :e^{-\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z')} = \frac{1}{\sqrt{z-z'}} :e^{-\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z')} + \dots$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{\Psi}_\alpha(z')}$

Usándolos podemos formar el producto

$$J_s(z) \equiv : \exp \left[ i \sum_\alpha s_\alpha \varphi_\alpha(z) \right] : \quad \text{campo de espín,}$$

que produce el corte deseado en  $\Psi^m \forall m$ , y

resulta ser además espínor de  $so(9,1)$  con

autovalor  $s_\alpha$  bajo generador de Lorentz

$$S_\alpha = i \delta_{\alpha,0} \oint_{2\pi i} \frac{dz}{z} J^{2\alpha, 2\alpha+1}(z) = i \delta_{\alpha,0} \oint_{2\pi i} \frac{dz}{z} \underbrace{:\Psi_\alpha \bar{\Psi}_\alpha(z):}_{\approx (-i) \delta_{\alpha,0} i \partial \varphi_\alpha(z)}$$

$$= -\frac{i}{2} : \psi^{2\alpha} \psi^{2\alpha+1} - \psi^{2\alpha+1} \psi^{2\alpha} :$$

Concluimos entonces que

$$|S\rangle_R \equiv |S_0, S_1, \dots, S_4\rangle_R \longleftrightarrow \mathcal{J}_S(z) \equiv \exp\left[i \sum_{\alpha} S_{\alpha} \phi_{\alpha}(z)\right]:$$

09/05/06

El único problema que queda por resolver es

que  $:e^{\pm \frac{i}{2} \phi_{\alpha}}:$  tiene  $h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$ , por lo que

$$\mathcal{J}_S(z) \text{ tiene } h = 5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \neq 1.$$

Este problema se soluciona al incorporar la contribución de los superfantasmas. En particular,  $V_R$  debe producir también un corte en  $\beta, \gamma$ . Hace falta entonces "bosonizar" a  $\beta, \gamma$ , para lo cual se requieren 3 campos:

- 1 bosón  $\phi(z)$  con  $\langle \phi(z) \phi(z') \rangle = -\ln(z-z')$  y  $T^{\phi} = -\frac{1}{2} : \partial \phi \partial \phi : = -\partial^2 \phi \Rightarrow C^{\phi} = 1 + 12v^2 = 13$

proviene de término  $\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} R v \phi$

en acción ( $\leftrightarrow$  fondo dilatónico lineal), con  $v = -1$ .

$:e^{n\phi}:$  tiene  $h = -\frac{1}{2} n^2 - n$ . ↖ contribución de término adicional en  $T^{\phi}$

• 2 fermiones  $\eta(z), \zeta(z)$ , con

$$\eta(z)\zeta(z') = \frac{1}{z-z'} + \dots,$$

$$\eta(z)\eta(z') \sim z-z' \sim \zeta(z)\zeta(z') \quad (\text{como sistema } b,c),$$

$$T^{\eta,\zeta} = -:\eta\partial\zeta: \Rightarrow h_\eta = 1, h_\zeta = 0, c^{\eta,\zeta} = -2$$

Notar que  $c^\phi + c^{\eta,\zeta} = 13 - 2 = 11 = c^{\beta,\gamma}$  ✓

Reproducimos entonces todas las Epos si identificamos

$$\begin{array}{ccc} \beta(z) \simeq e^{-\phi(z)} \partial\zeta(z), & \gamma(z) \simeq e^{+\phi(z)} \eta(z) & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ h = \frac{3}{2} & h = -\frac{1}{2} & h = 1 \\ \underbrace{h = -\frac{(-1)^2}{2} - (-1) = \frac{1}{2}}_{h = \frac{3}{2}} & \underbrace{h = -\frac{1}{2}(1)^2 - (1) = -\frac{3}{2}}_{h = -\frac{1}{2}} & \end{array}$$

Esto implica en particular que  $T^{\beta,\gamma} \simeq T^{\phi,\eta,\zeta}$  ✓

$$y \quad \underbrace{-:\beta\gamma(z):} \simeq \underbrace{-\partial\phi(z)}$$

corriente asociada a

corriente asociada a  $\phi(z) \rightarrow \phi(z) + a$

$$\beta(z) \rightarrow e^{-i\theta} \beta(z), \quad \gamma(z) \rightarrow e^{i\theta} \gamma(z)$$

(anómala si  $\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} R \neq 0$ )

$$\uparrow \text{ carga } -1 \quad \uparrow \text{ carga } +1$$

$e^{n\phi}$  tiene carga  $n$  ✓

"número de fantasmas"

Para completar operadores de vértice, quisiéramos ahora determinar operadores  $O_{NS}(z)$ ,  $O_R(z)$

que corresponden respectivamente a

$$|0\rangle_{NS} \quad \text{tal que} \quad \beta_{r \geq \frac{1}{2}} |0\rangle_{NS} = 0 = \gamma_{r \geq \frac{1}{2}} |0\rangle_{NS} \quad \text{y}$$

$$|0\rangle_R \quad \text{tal que} \quad \beta_{r \geq 0} |0\rangle_R = 0 = \gamma_{r \geq 1} |0\rangle_R \quad .$$

(  $|0\rangle_R$  es la contraparte de  $|\downarrow\rangle$ , que satisfacía  $b_{n \geq 0} |\downarrow\rangle = 0 = c_{n \geq 1} |\downarrow\rangle$  . )

Bajo el mapeo estado  $\leftrightarrow$  operador, estas condiciones se traducen en

$$\oint_{\frac{\mathcal{L}}{2\pi i}} z^{r+1/2} \beta(z) O_{NS}(0) = 0 = \oint_{\frac{\mathcal{L}}{2\pi i}} z^{r-3/2} \gamma(z) O_{NS}(0) \quad \text{y}$$

$\uparrow r \geq 1/2$ 
 $\uparrow r \geq 1/2$

$$\oint_{\frac{\mathcal{L}}{2\pi i}} z^{r+1/2} \beta(z) O_R(0) = 0 = \oint_{\frac{\mathcal{L}}{2\pi i}} z^{r-3/2} \gamma(z) O_R(0) \quad ,$$

$\uparrow r \geq 0$ 
 $\uparrow r \geq 1$

es decir,  $\beta(z) O_{NS}(0) \sim z^{-1}$ ,  $\gamma(z) O_{NS}(0) \sim z$ ,  
 $\beta(z) O_R(0) \sim z^{-1/2}$ ,  $\gamma(z) O_R(0) \sim z^{1/2}$ .  
 $\leftarrow$  corte esperado  $\rightarrow$

Claramente  $O_{NS}, O_R \neq 1$ . De hecho, ningún producto de  $\beta, \gamma$  y sus derivadas reproduce estas EPOs.

Pero en descripción 'bosonizada' podemos ver que

$$O_{NS}(z) \simeq e^{-\phi(z)} \quad \text{y} \quad O_R(z) \simeq e^{-\phi(z)/2}.$$

Este resultado nos sirve para finalmente entender 2 temas que habíamos dejado pendientes.

Primero, la contribución del vacío  $|0\rangle_{NS}^{\beta, \gamma}$  ó  $|0\rangle_R^{\beta, \gamma}$  al número "fermiónico" (en realidad, espinorial) en la hoja de mundo,

$$F \equiv \underbrace{S^0 + S^1 + S^2 + S^3 + S^4}_{\text{contribución de } \psi^m} \underbrace{-\frac{1}{2} - \Delta}_{\text{según prometimos, contribución de } \beta, \gamma} \pmod{2}$$

$$\Rightarrow \{(-1)^F, \psi_{-r}^m\} = 0 \quad \Rightarrow \{(-1)^F, \beta_{-r}\} = 0 = \{(-1)^F, \gamma_{-r}\}$$

La definición natural de  $F^{\beta, \gamma}$  que logra esto es

$$F_{\Delta}^{\beta, \gamma} \equiv - \left[ \sum_{r>0} (\beta_{-r} \gamma_r + \gamma_{-r} \beta_r) + \delta_{\Delta, 0} \gamma_0 \beta_0 \right] = - \oint \frac{dz}{2\pi i} \circ \beta \gamma(z) \circ$$

(no confundir con "operador de número"  $N_{\Delta}^{\beta, \gamma} \equiv \sum_{r \in \mathbb{Z} + \Delta} r \circ \beta_{-r} \gamma_r \circ$ ).



Pero comparando  $(X(z)Y(z')) = : \beta(z)Y(z') : + (z-z')^{-1}$   
 $= : \beta(z)Y(z') : + (z'/2)^{1/2} (z-z')^{-1}$

tenemos  $: \beta Y(z) : = - : \beta Y(z) : \approx -\partial \phi(z)$  corriente de número de fantasma,

de modo que  $O_{NS} = : e^{-\phi} :$  tiene  $F_{\Delta=1/2}^{\beta, \gamma} = n_f = -1 = -\frac{1}{2} - \Delta$  ✓

mientras que  $O_R = : e^{-\phi/2} :$  tiene  $F_{\Delta=0}^{\beta, \gamma} = n_f = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \Delta$ . ✓

Segundo, los pesos conformes de estos operadores son

respectivamente  $h_{NS} = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{1}{2}$

y  $h_R = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$ ,

que justo completan a  $V_{NS}^{X, \psi}$  ( $h = \frac{1}{2}$  en capa de masa) y  $V_R^{X, \psi}$  ( $h = \frac{5}{8}$  en capa de masa) para tener  $h_{tot} = 1$ . ✓

P.ej.,

$$\sum_{\omega} \psi_{-\frac{1}{2}}^{\omega} |0; k\rangle_{NS}^{\psi, X} |0\rangle_{NS}^{\beta, \gamma} \longleftrightarrow V_{NS}^{(-1)}(z) \equiv \sum_{\omega} \psi^{\omega} e^{ik \cdot X} e^{-\phi}(z) :$$

$$h = \frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{4} k^2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$u_s |s; k\rangle_R^{\psi, X} |0\rangle_R^{\beta, \gamma} \longleftrightarrow V_R^{(-\frac{1}{2})}(z) \equiv u_s : \psi_s e^{ik \cdot X} e^{-\phi/2}(z) :$$

$$h = 5 \times \frac{1}{8} + \frac{\alpha'}{4} k^2 + \frac{3}{8} = 1$$

Incorporando la parte de modos derechos, obtenemos así vértices  $V_i(z, \bar{z})$  con  $(h, \bar{h}) = (1, 1)$ , que usamos para construir invariantes conformes

$$V_i \equiv g_c N_i \int d^2z V_i(z, \bar{z})$$
 que se insertan en integral funcional para calcular amplitudes de dispersión.

Recordar que si incluimos vacío de fantasmas

$|\downarrow\rangle \leftrightarrow c(z) \quad (h=-1)$  obtenemos vértices fijos

$$g_c N_i c(z) \tilde{c}(\bar{z}) V_i(z, \bar{z})$$
 que también son invariantes

conformes (y se usan para eliminar redundancia

asociada a vectores de Killing conformes

$\leftrightarrow$  modos cero de  $c(z)$  y  $\tilde{c}(\bar{z})$ ).

Así como la existencia de fantasmas (fermiónicos)

da lugar a estas 2 versiones alternativas

de los vértices, la existencia de superfantasmas

(bosónicos) permite escribir los vértices de la

supercuerda en un número infinito de distintas versiones o "cuadros" (que resultan útiles para eliminar redundancia debida a espinores de Killing conformes  $\leftrightarrow$  modos cero de  $\mathcal{Y}(z)$  y  $\tilde{\mathcal{Y}}(\bar{z})$ ). Los vértices en distinto cuadro difieren en su número de fantasmas

$$\eta_f \equiv - \oint \frac{dz}{2\pi i} : \beta \mathcal{Y}(z) : \simeq - \oint \frac{dz}{2\pi i} \partial \phi(z),$$

es decir, utilizan  $e^{\eta_f \phi}$  con distintos valores de  $\eta_f$ .

P.ej., en lugar de

$$\epsilon_{\omega} \psi_{-1/2}^{\omega} |0; k\rangle_{NS} \longleftrightarrow V_{NS}^{(-1)}(z) = \epsilon_{\omega} : \psi^{\omega} e^{ik \cdot X} e^{-\phi} :$$

podemos usar su pariente superconforme

$$G_{-1/2} \epsilon_{\omega} \psi_{-1/2}^{\omega} |0; k\rangle_{NS} \longleftrightarrow V_{NS}^{(0)}(z) = \left\{ G_{-1/2}, V_{NS}^{(-1)} \right\} \\ = \epsilon_{\omega} : \left( i \partial X^{\omega} + \frac{\alpha'}{2} k \cdot \psi \psi^{\omega} \right) e^{ik \cdot X} :$$

que (si  $\epsilon \cdot k = 0$ ) también tiene peso conforme  $h=1$ , y puede  $\therefore$  integrarse para obtener  $V^{(0)} = \int dz V^{(0)}(z)$  invariante.

(Si implementamos supersimetría en 2dim geométricamente generalizando hoja de mundo  $\rightarrow$  super-hoja de mundo,  
 $(z, \bar{z})$   $\rightarrow$   $(z, \bar{z}; \theta, \bar{\theta})$   
 coords. fermiónicas

entonces  $V_{NS}^{(-1)}$  y  $V_{NS}^{(0)}$  forman parte de un solo  
'super campo'

$$V(z, \theta) = V_{NS}^{(-1)}(z) + \theta V_{NS}^{(0)}(z),$$

de tal forma que  $V_{NS}^{(-1)}(z) = V(z, \theta=0)$  es vértice fijo,  
 mientras que  $V_{NS}^{(0)}(z) = \int d\theta V(z, \theta).$

De manera similar, a  $u_s |s; k\rangle_R$  puede asociársele

$$V_R^{(-1/2)}(z) = u_s : \mathcal{D}_s e^{ik \cdot X} e^{-\phi/2} : \quad \text{"wadro } -1/2 \text{" } \circ$$

$$V_R^{(+1/2)}(z) = u_s (\Gamma_{\mu})_{s s'} : \mathcal{D}_{s'} (i\alpha X^{\mu} + \frac{\alpha'}{2} k \cdot \psi \psi^{\mu}) e^{ik \cdot X} e^{+\phi/2} : ,$$

"wadro + 1/2"

que (si  $k_{\mu} \Gamma^{\mu} u = 0$ ) tiene también  $h=1$ .

Más en general, a partir de  $V^{(n_f)}$  se puede obtener  $V^{(n_f+1)}_{(0)} \equiv [Q_{\text{BRST}}, \xi V^{(n_f)}_{(0)}] = \{Q_{\text{BRST}}, \xi(0)\} V^{(n_f)}_{(0)}$

$\{Q_{\text{BRST}}, \xi(z)\}$  es el operador de cambio de retrato.

[Ver Polchinski Sec. 12.5 ; Friedan, Martinec, Shenker NPB 271 (1986), 93.]

La existencia de vértices en diferentes cuadros se vuelve importante al calcular amplitudes de dispersión, porque

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} V_1^{(n_1)} V_2^{(n_2)} \dots \propto \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\phi_0 e^{\phi_0 \chi} e^{n_1 \phi_0} e^{n_2 \phi_0} \dots$$

incluye  $-\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} Q\phi$

$\Rightarrow$  amplitud bien definida solo si

$$\sum_i n_i = n_1 + n_2 + \dots = -\chi = -2 + 2g + b + c \quad (= \sum_i \tilde{n}_i).$$

P.ej., en esfera ( $\chi=2$ ), para amplitud de 4 puntos

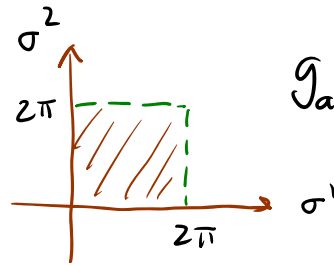
usamos vértices izquierdos  $V_{NS}^{(-1)} V_{NS}^{(-1)} V_{NS}^{(0)} V_{NS}^{(0)}$ ,

$V_R^{(-1/2)} V_R^{(-1/2)} V_{NS}^{(-1)} V_{NS}^{(0)}$ , etc.

11/05/06

## Invariancia Modular

Recordar que en toro  $T^2$



$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 + \tau_2^2 \end{pmatrix}$$

$\exists$  difeos grandes (no conectados a la identidad) que forman grupo modular  $SL(2, \mathbb{Z})$ , generado por

$$T: \left\{ \begin{array}{l} \sigma^1 \rightarrow \tilde{\sigma}^1 = \sigma^1 - \sigma^2 \\ \sigma^2 \rightarrow \tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \end{array} \right. \Rightarrow \tau \simeq \tau + 1$$

$$S: \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}^1 = \sigma^2 \\ \tilde{\sigma}^2 = -\sigma^1 \end{array} \right. \Rightarrow \tau \simeq -\frac{1}{\tau}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau \simeq \tilde{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \end{array} \right\}$$

Invariancia modular juega un papel clave en finitud UV y, más importante aún, unitariedad de la teoría.

Al calcular amplitudes de supercuerdas en  $T^2$ , debemos elegir "condiciones de borde" para  $\psi^w(\sigma^1, \sigma^2)$  a lo largo de  $\sigma^1$  y  $\sigma^2$ .

(Más en general, en variedad  $M$  debemos especificar estructura de espín:

relación entre  $\psi_{(A)}(\sigma)$  en distintas regiones  $A$ .

[Ver GSW Vol. II, Sec. 12.1 ] )



$\exists$  4 opciones :  $(+ +)^{\sigma^1 \sigma^2}$ ,  $(+ -)$ ,  $(- -)$ ,  $(- +)$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_R \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{NS}$

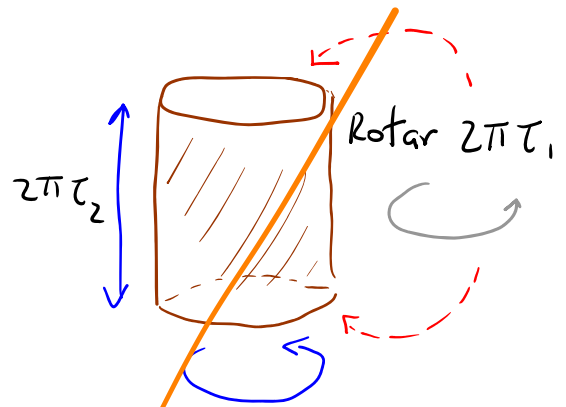
Bajo transformaciones modulares,

$S, T : (+ +) \rightarrow (+ +) \quad (- -) \rightarrow (- -), (- +)$   
 $(+ -) \rightarrow (- +), (+ -)$   
 $(- +) \rightarrow (+ -), (- -)$

Así que, p.ej., si incluimos  $(+ -)$  entonces debemos incluir también  $(- +)$  y  $(- -)$  para que amplitudes a 1 lazo tengan oportunidad de ser invariantes modulares. Notar en particular que necesariamente incluiremos al menos un sector R izquierda (y uno derecho).

~~Analizaremos ahora el requisito de invariancia modular más de cerca ...~~

Recordar que amplitud de cero puntos en  $T^2(\tau)$  se puede calcular a través de una traza en formalismo Hamiltoniano:



$$\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)} = \text{Tr}_{H_{\perp}} \left[ (\pm 1)^F e^{-2\pi\tau_2 \hat{H} + 2\pi\tau_1 i \hat{P}} \right] \equiv \mathcal{Z}(\tau)$$

Dependiendo de si campos fermiónicos son  $\begin{cases} \text{antiperiódicos} \\ \text{periódicos} \end{cases}$  en dirección  $\sigma^2$

Usar solo  $D-2$  osciladores transversales  $X^i$  y  $\psi^i$  (los otros 2 se cancelan con  $b, c$  y  $\beta, \gamma$ )

$$= (q\bar{q})^{-c/24} \text{Tr}_{H_{\perp}} \left[ (\pm 1)^F q^{L_0} \bar{q}^{\tilde{L}_0} \right], \quad q \equiv e^{2\pi i \tau}$$

Contribución de  $\psi^i$  con distintas estructuras de espín es

$$\mathcal{Z}_{(++)}^{\psi}(\tau) = \text{Tr}_R \left[ (-1)^F q^{H^{\psi}} \right], \quad \mathcal{Z}_{(+-)}^{\psi}(\tau) = \text{Tr}_R \left[ q^{H^{\psi}} \right],$$

$$\mathcal{Z}_{(-+)}^{\psi}(\tau) = \text{Tr}_{NS} \left[ (-1)^F q^{H^{\psi}} \right], \quad \mathcal{Z}_{(--)}^{\psi}(\tau) = \text{Tr}_{NS} \left[ q^{H^{\psi}} \right],$$

donde  $H^{\psi} \equiv \sum_{r>0} r \psi_{-r}^i \psi_r^i + \frac{1}{3} \begin{matrix} R \\ NS \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} (D-2)(+1/24) \\ (D-2)(-1/48) \end{matrix}$



Tenemos entonces

$$Z_{(- -)}^{\Psi} = q^{-1/6} \left[ \prod_{r=1}^{\infty} (1+q^r) \right]^8 = \underbrace{\left\{ q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) \right\}^{-4}}_{\equiv \eta(\tau)^{-4}} \underbrace{\left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) (1+q^{n-1/2})^2 \right\}^4}_{\equiv \Theta_3(0|\tau)^4}$$

Eta de Dedekind

Función Theta de Jacobi

$$Z_{(- +)}^{\Psi} = -q^{-1/6} \left[ \prod_{r=1}^{\infty} (1-q^r) \right]^8 = -\eta(\tau)^{-4} \underbrace{\left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) (1-q^{n-1/2})^2 \right\}^4}_{\equiv \Theta_4(0|\tau)^4}$$

par  $(-1)^F$

$$Z_{(+ -)}^{\Psi} = q^{1/3} \left[ \prod_{r=0}^{\infty} (1+q^r) \right]^8 = \eta(\tau)^{-4} \underbrace{\left\{ q^{1/8} (1+i) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) (1+q^n)^2 \right\}^4}_{\equiv \Theta_2(0|\tau)^4}$$

$$Z_{(++)}^{\Psi} = -q^{1/3} \left[ \prod_{r=0}^{\infty} (1-q^r) \right]^8 = -\eta(\tau)^{-4} \underbrace{\left\{ q^{1/8} (1-i) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) (1-q^n)^2 \right\}^4}_{\equiv \Theta_1(0|\tau)^4}$$

par  $(-1)^F$

¿Cómo combinar para obtener invariancia modular?

Usando  $\eta(\tau+1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau)$ ,  $\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau)$ ,

$$\theta_3(0|\tau+1) = \theta_4(0|\tau), \quad \theta_3(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \theta_3(0|\tau),$$

$$\theta_4(0|\tau+1) = \theta_3(0|\tau), \quad \theta_4(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \theta_2(0|\tau),$$

$$\theta_2(0|\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \theta_2(0|\tau), \quad \theta_2(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \theta_4(0|\tau),$$

$$\theta_1(0|\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \theta_1(0|\tau), \quad \theta_1(0|-1/\tau) = -i(-i\tau)^{1/2} \theta_1(0|\tau),$$

se puede verificar que es invariante la combinación

$$Z_{TOT}^{\Psi}(\tau) \equiv \frac{1}{2} \left( Z_{(-)}^{\Psi} + Z_{(-+)}^{\Psi} - Z_{(+)}^{\Psi} + Z_{(++)}^{\Psi} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \eta(\tau)^{-4} \left( \theta_3(0|\tau)^4 - \theta_4(0|\tau)^4 - \theta_2(0|\tau)^4 + \theta_1(0|\tau)^4 \right)$$

(En realidad

$$Z_{TOT}^{\Psi}(\tau+1) = e^{4\pi i/3} Z_{TOT}^{\Psi}(\tau), \quad Z_{TOT}^{\Psi}(-1/\tau) = Z_{TOT}^{\Psi}(\tau),$$

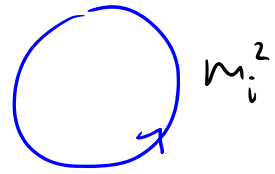
pero la fase se cancela al multiplicar por contribución

de modos derechos  $Z_{TOT}^{\Psi}(\bar{\tau}) = \left( Z_{TOT}^{\Psi}(\tau) \right)^*$

Recordar que amplitud total es el toro

$$M_{T^2}^{(0)} \equiv \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_F \frac{d^2\tau}{4(\text{Im}\tau)^2} Z^X(\tau, \bar{\tau}) Z_{\text{TOT}}^\Psi(\tau) \tilde{Z}_{\text{TOT}}^{\tilde{\Psi}}(\bar{\tau})$$

se puede interpretar como suma sobre amplitud a un lazo para cada partícula en el espectro de la teoría libre:



$$M_{T^2}^{(0)} \sim \sum_i M_{S^1}^{(0)}(m_i^2) = \sum_i (-1)^{F_i} \int_0^{\infty} \frac{dT}{2T} (2\pi T)^{-5} e^{-m_i^2 T/2}$$

número fermiónico en el espaciotiempo

Vemos entonces que

$$Z_{\text{TOT}}^\Psi(\tau) = \frac{1}{2} (Z_{(-)}^\Psi + Z_{(-+)}^\Psi - Z_{(+)}^\Psi + Z_{(++)}^\Psi)$$

$$= \text{Tr}_{NS} \left[ \gamma^H \frac{1}{2} (1 + (-1)^F) \right] - \text{Tr}_R \left[ \gamma^H \frac{1}{2} (1 \pm (-1)^F) \right]$$


Proyección Gliozzi-Scherk-Olive (GSO)  $\Rightarrow$

~~$$NS_+ : |0; k\rangle_{NS}, \epsilon_{\omega}^{\psi} |0; k\rangle_{NS}, (\epsilon_{\omega}^{\alpha} + \epsilon_{\omega\nu}^{\psi} |0; k\rangle_{NS}, \dots$$~~

$$R_{\pm} : u_s |s; k\rangle_R \text{ con } \Gamma u = \pm u, \dots$$

Si bien esto da invariancia modular, no es la única posibilidad. P.ej., también funciona

$$Z_{\text{tot}}^{\Psi}(\tau) = Z_{(++)}^{\Psi} = -\eta(\tau)^{-4} \Theta_1(0|\tau)^4 = \text{Tr}_R \left[ \eta^{H^{\Psi}} (-1)^F \right].$$

Pero la teoría No puede contener solo  $R_+$  y  $R_-$ , porque EPO  $V_R V_R \sim V_{NS} \Rightarrow$  interacción 

Una teoría de cuerdas consistente, además de ser invariante modular, debe poseer interacciones bien definidas: las EPOs deben

- Cerrar ( $\Delta: NS \times NS = NS = R \times R$ ,  $NS \times R = R = R \times NS$ ;  
 $(-1)^F: + \times + = + = - \times -$ ,  $+ \times - = - = - \times +$ )

y

- ser univaluadas (P.ej., en  $R_+ \times R_- = NS_-$  tenemos

$$\begin{aligned} &: e^{-\phi/2} e^{\frac{i}{2}\varphi_0} e^{\frac{i}{2}\varphi_1} \dots e^{\frac{i}{2}\varphi_4}(z) : e^{-\phi/2} e^{\frac{i}{2}\varphi_0} e^{\frac{i}{2}\varphi_1} \dots e^{\frac{i}{2}\varphi_3} e^{-\frac{i}{2}\varphi_4}(0) : \\ &= \underbrace{z^{-1/4} z^{1/4} z^{1/4} z^{1/4} z^{1/4} z^{-1/4}}_{\sqrt{z}} : e^{-\phi} e^{i\varphi_0} e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} e^{i\varphi_3}(0) : + \dots \end{aligned}$$

$\sqrt{z}$  corte que debe ser compensado por corte en modos derechos

Lo mismo sucede en  $R_+ \times NS_-$  y  $R_- \times NS_-$ , pero no en los demás productos. )

Las proyecciones GSO que encontramos arriba dan lugar a 2 teorías que satisfacen estos requisitos:

- II B: incluir sectores con  $(-1)^F = +1$ ,  $(-1)^{\tilde{F}} = +1$ ,  
 es decir,  $(NS_+, NS_+) \mid (R_+, R_+) \mid (R_+, NS_+) \mid (NS_+, R_+)$   
 $m^2=0$ :  $\varphi \ B_{(2)} \ h_{\mu\nu} \mid C_{(1)} \ C_{(2)} \ C_{(4)}^+ \mid \chi'_{NS} \ \lambda'_S \mid \chi^2_{NS} \ \lambda^2_S$   
 rep de  $SO(8)$ :  $\underline{1} \ \underline{28} \ \underline{35} \mid \underline{1} \ \underline{28} \ \underline{35}_+ \mid \underline{56} \ \underline{8}' \mid \underline{56} \ \underline{8}'$

- II A: incluir sectores con  $(-1)^F = +1$ ,  $(-1)^{\tilde{F}} = \begin{cases} +1 & NS \\ -1 & R \end{cases}$ ,  
 es decir,  $(NS_+, NS_+) \mid (R_+, R_-) \mid (R_+, NS_+) \mid (NS_+, R_-)$   
 $m^2=0$ :  $\varphi \ B_{(2)} \ h_{\mu\nu} \mid C_{(1)} \ C_{(3)} \mid \chi'_{NS} \ \lambda'_S \mid \chi^2_{NS} \ \chi^2_S$   
 rep de  $SO(8)$ :  $\underline{1} \ \underline{28} \ \underline{35} \mid \underline{8}_V \ \underline{56}_6 \mid \underline{56} \ \underline{8}' \mid \underline{56}' \ \underline{8}$

! Ninguna de estas 2 teorías tiene tachibón! ✓

( $\Rightarrow$  Fondo  $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ,  $\Phi = \Phi_0$ ,  $B_{(2)} = \dots = 0$  es estable.)

Ambas teorías incluyen bosones y fermiones ✓

Notar que paridad en espaciotiempo

$$P: X^i \rightarrow -X^i, \quad \psi^i \rightarrow -\psi^i \quad \forall i=1, \dots, 9$$

$$\Rightarrow \Gamma^i \rightarrow -\Gamma^i, \quad \Gamma \rightarrow -\Gamma \quad \text{y} \quad \underline{8} \leftrightarrow \underline{8'}, \quad \underline{56} \leftrightarrow \underline{56'},$$

de modo que  $\text{IIA}$  es invariante bajo  $P$  (no quiral) y  $\text{IIB}$  es no invariante bajo  $P$  (quiral).

(Vemos también que la proyección  $G50$

$$(-1)^F = (-1)^{\tilde{F}} = \begin{cases} +1 & \text{NS} \\ -1 & \text{R} \end{cases} \text{ da teoría equivalente a IIB,}$$

$$\text{y } (-1)^F = \begin{cases} +1 & \text{NS} \\ -1 & \text{R} \end{cases}, \quad (-1)^{\tilde{F}} = +1 \text{ es equivalente a IIA.}$$

118/05/06

Ambas teorías incluyen 2 gravitinos  $\chi^1, \chi^2$ ,

con sus correspondientes invariancias de norma

$$\chi^A(x) \simeq \chi^A(x) + \partial_\omega \tau^A(x) \quad A=1,2$$

↖ parámetro espinorial

que, por consistencia, deben reflejar simetrías de las teorías en conjunto.

↔ ¡ 2 supersimetrías locales en espaciotiempo!

Teorías con supersimetría  $N=2$  en  $D=10$

(por eso denominamos a estas teorías 'tipo II').

Las corrientes asociadas son

$$j_s(z) = e^{-\phi/2} j_s(z) \quad h = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1 \quad \checkmark$$

$$\text{y } \tilde{j}_s(\bar{z}) = e^{-\tilde{\phi}/2} \tilde{j}_s(\bar{z}) \quad \tilde{h} = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1, \quad \checkmark$$

y las cargas correspondientes

$$Q'_s \equiv Q_s \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} j_s(z), \quad Q^2_s \equiv \tilde{Q}_s \equiv \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \tilde{j}_s(\bar{z})$$

transforman como espinores bajo  $SO(9,1)$ :

son 32 **supercargas**  $\begin{cases} \underline{16} + \underline{16}' & \text{en IIA} \\ \underline{16} + \underline{16} & \text{en IIB} \end{cases}$

que satisfacen **superálgebra**  $\{Q, Q\} \sim P_\mu \Gamma^\mu$

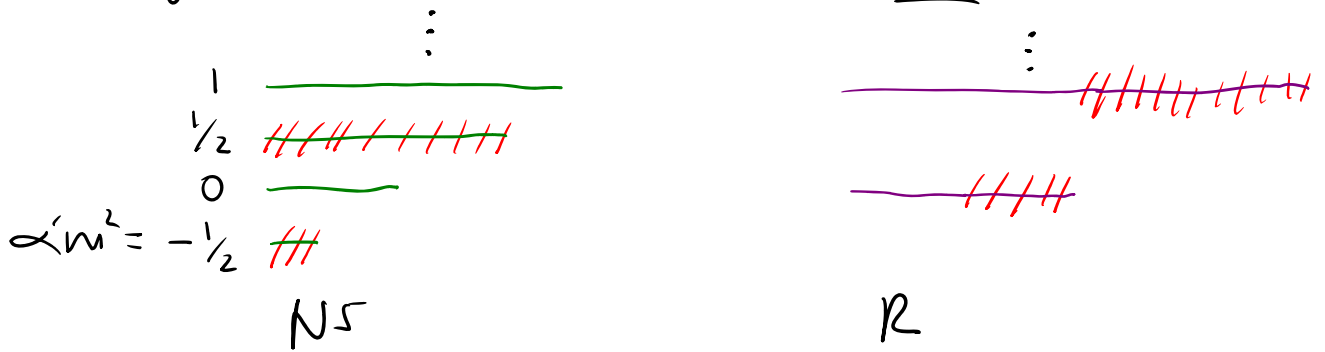
y convierten  $|bosón\rangle \leftrightarrow |fermión\rangle$

Se puede verificar que el espectro de ambas teorías es supersimétrico observando que

$$\chi_{\text{tot}}^{\psi}(\tau) = \frac{1}{2} \eta(\tau)^{-4} \left( \underbrace{\Theta_3(0|\tau)^4 - \Theta_4(0|\tau)^4 - \Theta_2(0|\tau)^4}_{= 0 \text{ por identidad 'abstrusa' de Jacobi}} \pm \underbrace{\Theta_1(0|\tau)^4}_{= 0 \text{ por modo cero } \int \psi_0 = 0} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{T^2}^{(\alpha)} = \sum_i \mathcal{M}_{S^1}^{(\alpha)}(m_i^2) = 0$$

Es decir, después de proyección GSO, por cada bosón con masa  $m_i^2$  existe un fermión con la misma masa:



P.ej., con  $m^2=0$  hay  $\left. \begin{array}{l} 128 \text{ estados bosónicos} \\ 128 \text{ estados fermiónicos} \end{array} \right\} \underline{256} = 2^8$ .

Multiplete de Supergravedad  $N=2$  en  $D=10$



Esto es justo como corresponde a representación no masiva de superálgebra  $N=2$  en  $D=10$ : yendo al marco donde  $k_\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$  se puede ver que la mitad de las 32 supercargas aniquilan a los estados, y la otra mitad forman 8 pares de operadores de creación/aniquilación fermiónicos.

(En general, con  $n$  supercargas se obtiene rep. no masiva con  $2^{n/4}$  estados, y rep. masiva con  $2^{n/2}$  estados. [Ver p.ej. Polchinski Vol. II Apéndice B])

Existe otra manera de lograr invariancia modular: pidiéndola no para los modos izquierdos y derechos por separado, sino para su producto.

Esto da lugar a otras 2 teorías 'consistentes', que resultan de una proyección GSO diagonal:

- OB: Sectores con  $\Delta = \tilde{\Delta}$ ,  $(-1)^F = (-1)^{\tilde{F}}$

es decir,  $(NS_+, NS_+) \mid (NS_-, NS_-) \mid (R_+, R_+) \mid (R_-, R_-)$

$m^2 \leq 0$ :  $\varphi, B_{(2)}, h_{\mu\nu} \mid \emptyset \mid C_{(0)}^-, C_{(2)}^-, C_{(4)}^+ \mid C_{(0)}^+, C_{(2)}^+, C_{(4)}^-$

rep de  $so(d)$ :  $\underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35} \mid \underline{1} \mid \underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35}_+ \mid \underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35}_-$   
( $d=8$  ó  $9$ )

- OA: Sectores con  $\Delta = \tilde{\Delta}$ ,  $(-1)^F = \begin{cases} (-1)^{\tilde{F}} NS \\ -(-1)^{\tilde{F}} R \end{cases}$

es decir,  $(NS_+, NS_+) \mid (NS_-, NS_-) \mid (R_+, R_-) \mid (R_-, R_+)$

$m^2 \leq 0$ :  $\varphi, B_{\mu\nu}, h_{\mu\nu} \mid \emptyset \mid C_{(1)}^-, C_{(3)}^- \mid C_{(1)}^+, C_{(3)}^+$

rep de  $so(d)$ :  $\underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35} \mid \underline{1} \mid \underline{8}_v \quad \underline{56}_t \mid \underline{8}_v \quad \underline{56}_t$   
( $d=8$  ó  $9$ )

En estos casos la amplitud  $\tau$  en lazo involucra

$$\mathcal{Z}_{\text{TOT}}^{\psi, \tilde{\psi}}(\tau) = \frac{1}{2} |\eta(\tau)|^{-8} \left( |\theta_3(0|\tau)|^8 + |\theta_4(0|\tau)|^8 + |\theta_2(0|\tau)|^8 \pm |\theta_1(0|\tau)|^8 \right)$$

que es  $\neq 0$  (teoría evidentemente no es supersimétrica) pero invariante modular.

En estas teorías ~~no~~ fermiones, y espectro incluye taquión,

$\therefore$  parecen tan poco interesantes como cuerda bosónica.

Quizás estas teorías se vuelven estables en ciertos fondos no triviales [ver p.ej. Klebanov-Tseytlin hep-th/9811035].

Es posible entenderlas como proyecciones de IIB/A bajo número fermiónico en espaciotiempo  $(-1)^{F}$  [Bergman, Gaberdiel 9906055].

se ha postulado además que OA es equivalente ('dual') a IIA en cierto fondo no supersimétrico

[Costa-Gutperle, 0012072], y que tal vez indica decaimiento OA en fondo plano  $\rightarrow$  IIA en fondo plano

[Gutperle-Ströminger, 0104136; Adams-Polchinski-Silverstein, 0108075]

¿Teorías con cuerdas abiertas? Recordar  $C \rightarrow D$  : teoría consistente incluye necesariamente cuerdas cerradas.

Hemos visto que invariancia modular requiere proyección GSO para sector de cuerdas cerradas.

Para tener interacciones bien definidas, sector de

Cuerdas abiertas debe incluir también proyección GSO:

$$\begin{array}{l}
 \text{--- I (abierto):} \quad NS_+ \quad R_+ \quad \leftarrow \text{(elegimos } R_+ \text{ en vez de } R_- \text{ por la conexión con II B que necesitaremos más abajo)} \\
 m^2=0: \quad A_{\mu\nu} \quad \eta_s \\
 \text{rep de } so(8): \quad \underline{8}_v \quad \underline{8}
 \end{array}$$

$16=2^4$  estados  $\leftrightarrow$  rep no masiva de SUSY  $N=1$  en  $D=10$

$\therefore$  sector de cuerdas cerradas debe poseer solo SUSY  $N=1$ , y en particular, 1 solo gravitino.

La única manera de proyectar IIA ó IIB a  $N=1$  reteniendo invariancia bajo Poincaré es

$\text{IIB}/\Omega$ : cuerdas "IIB" no orientadas  $\equiv$  I (cerrada)

$$\begin{array}{l}
 \uparrow \text{paridad en} \\
 \text{hoja de mundo: } z \leftrightarrow \bar{z} \quad \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_n^{\tilde{}} \leftrightarrow \tilde{\alpha}_n^{\tilde{}} \\ \psi_r^{\tilde{}} \leftrightarrow \tilde{\psi}_r^{\tilde{}} \\ \partial_s \leftrightarrow \tilde{\partial}_s \end{array} \right. \\
 (\sigma \leftrightarrow 2\pi - \sigma)
 \end{array}$$

Proyección retiene estados con  $\Omega = +1$ .

En  $(NS_+, NS_+)$  y  $(R_+, R_+)$  sobreviven

$$\varphi \quad \cancel{B_{\mu\nu}} \quad h_{\mu\nu} \quad \cancel{C_{(0)}} \quad C_{(2)} \quad \cancel{C_{(4)}}^+$$

Sobrevive además combinación lineal  $(NS_+, R_+) + (R_+, NS_+)$ :

$$\lambda_{s'} \equiv \lambda_{s'}^1 + \lambda_{s'}^2 \quad \chi_{\mu s} \equiv \chi_{\mu s}^1 + \chi_{\mu s}^2$$

En conjunto tenemos  $\underline{1}$   $\underline{35}$   $\underline{28}$   $\underline{56}$  y  $\underline{8}'$  de  $so(8)$ :

**Multiplete de Supergravedad  $N=1$  en  $D=10$**

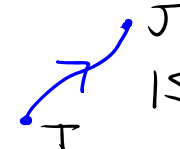
(64 bosones + 64 fermiones)

1 supercarga  $Q_s \equiv Q_s^1 + Q_s^2$

Por consistencia cuerda abierta también debe ser no orientada

Recordar que en sector de cuerda abierta

$$\Omega: \begin{matrix} z \leftrightarrow -\bar{z} \\ \sigma \quad \pi-\sigma \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_n^{\omega} \leftrightarrow (-1)^n \alpha_n^{\omega} \\ \psi_r^{\omega} \leftrightarrow (-1)^r \psi_r^{\omega} \end{cases}$$

y al agregar índices de Chan-Paton,   $1 \leq I, J \leq N$ ,  
tenemos  $\Omega: |IJ\rangle \leftrightarrow |JI\rangle$ , ó

$$\Omega: |IJ\rangle \leftrightarrow M_{JJ'} |J'I'\rangle M_{I'I}^{-1} \text{ con } M \equiv i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{N/2} \\ -\mathbb{1}_{N/2} & 0 \end{pmatrix},$$

a partir de lo cual obtenemos grupo de norma

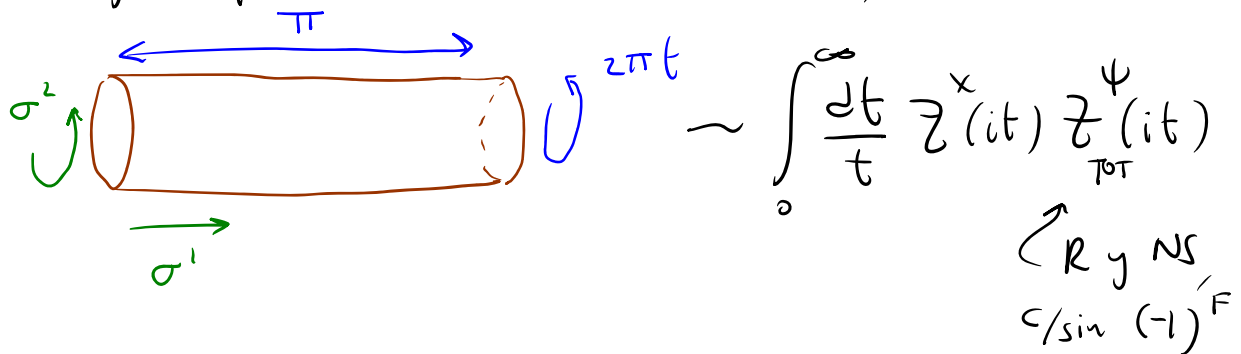
$SO(N)$  ó  $Sp(N/2)$ .

Pero de esta familia infinita de teorías

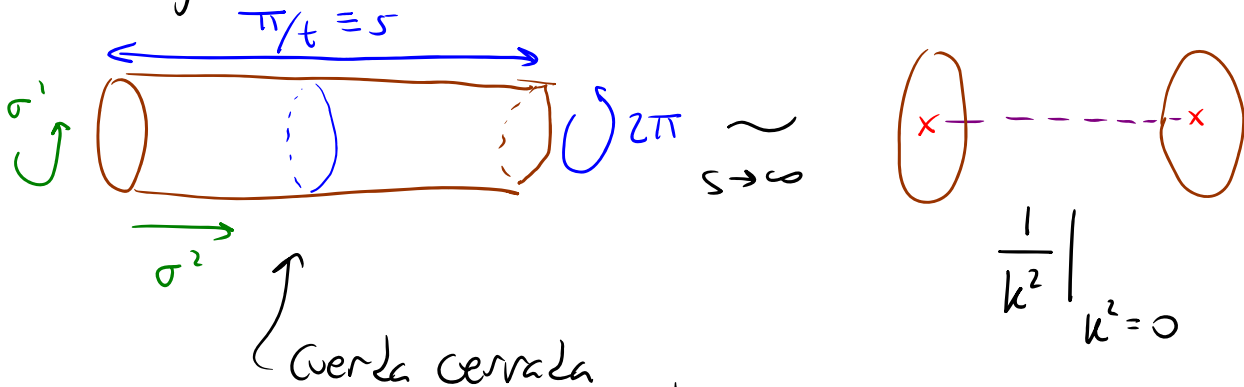
¡solo 1 resulta ser consistente!

Para cuerdas abiertas, el requisito de ausencia de renacuajos juega un papel análogo al de invariancia modular para cuerdas cerradas:

al igual que en la cuerda bosónica,



contiene divergencia en límite  $t \rightarrow 0$ , debido a renacuajo de estados no masivos de cuerda cerrada,



Cuerda cerrada  
 NS-NS : términos en  $Z_{TOT}^\Psi \underline{\sin} (-1)^F$  en traza


R-R : términos en  $Z_{TOT}^\Psi \underline{\cos} (-1)^F$  en traza

Esta divergencia se traduce en anomalías tanto en inv. superconforme (2-dim) como en inv. de norma (10-dim).

Sabemos que la existencia de un renacuajo (vértice de 1 pata en la acción efectiva) es una señal de que el fondo no resuelve las ecs. de mov., por lo que corrección al fondo que logre satisfacer ecs. de mov. eliminará renacuajo y divergencia. Pero en este caso, ecs. de mov. son inconsistentes y no tienen solución (p.ej., renacuajo  $R_2$  se traduce en términos  $\mu \int d^{10}x C_{0,1,\dots,9}$  en acción efectiva, cuya variación  $\Rightarrow \mu=0$ ), así que el renacuajo debe simplemente estar ausente — es decir, debe cancelarse de alguna manera.


Sorprendentemente,

↙ 'cilindro' con  $\Omega$  en traza



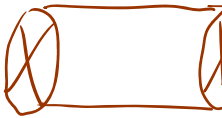
$C_2$

+  $\frac{1}{2}$



$M_2$

+  $\frac{1}{2}$



$K_2$

↘ 'toro' con  $\Omega$  en traza

NS-NS

$$= (N^2 \pm 2 \cdot 32N + 32^2) \frac{1}{8\pi (8\pi^2 \alpha')^5} \int_0^\infty ds [16 + \mathcal{O}(e^{-s})]$$

↗ para  $Sp(N/2)$   
 $so(N)$

[Ver Polchinski Vol. II, Sec. 10.8]

(El signo relativo aparece porque en el caso

$$SO(N) \text{ hay } \begin{cases} \frac{1}{2} N(N+1) \text{ estados con } \Omega = +1 \\ \frac{1}{2} N(N-1) \text{ estados con } \Omega = -1 \end{cases}$$

+N como factor total, mientras que en

$$Sp(N/2) \text{ hay } \begin{cases} \frac{1}{2} N(N-1) \text{ estados con } \Omega = +1 \\ \frac{1}{2} N(N+1) \text{ estados con } \Omega = -1 \end{cases}$$

-N como factor total . )

La contribución del sector R-R,

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ (cylinder)} + \frac{1}{2} \text{ (cylinder)} + \frac{1}{2} \text{ (cylinder)} \right]_{R-R}$$

tiene la misma magnitud pero el signo opuesto.

¡¡ Ambos renaquijos se cancelan solo para  $SO(32)$  !!

(En la cuerda bósónica ocurre cancelación similar para  $SO(9,12)$  )

$\uparrow$   
 $2^5$

$\uparrow$   
 $2^{13}$

**Solo teoría  $SO(32)$  es consistente** : teoría tipo I

27/05/06



## Teorías Heteróticas

Aprovechando que los modos izquierdos y derechos de la cuerda cerrada son independientes, podemos usar

{ Modos Izquierdos de Cuerda Bosónica Orientada  
 { Modos Derechos de Supercuerda Orientada

para construir teoría superconforme  $(0,1)$ , con

Campos	$(c, \tilde{c})$		
{	$X^\mu(z); \tilde{X}^\mu(\bar{z}), \tilde{\Psi}^\mu(\bar{z})$	$\mu=0, \dots, 9 \Rightarrow$	$(10, 15)$
	espinores $\lambda^A(z)$	$A=1, \dots, 32 \Rightarrow$	$(16, 0)$
	$b(z), c(z); \tilde{b}(\bar{z}), \tilde{c}(\bar{z}), \hat{\beta}(\bar{z}), \tilde{\gamma}(\bar{z})$	$\Rightarrow$	$(-26, -15)$
		$(0, 0)$	✓

donde  $\lambda^A(z) \xleftrightarrow{\text{Bosonización}} X^k(z) \quad k=10, \dots, 25.$

La acción y constricciones son

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left( \frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \lambda^A \bar{\partial} \lambda^A + \tilde{\Psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{\Psi}_\mu \right)$$

$$T = -\frac{1}{\alpha'} \partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2} \partial \lambda^A \partial \lambda_A$$

$$\tilde{T} = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} \tilde{X}^\mu \bar{\partial} \tilde{X}_\mu - \frac{1}{2} \bar{\partial} \tilde{\Psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{\Psi}_\mu$$

$$\tilde{J} = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\Psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{X}_\mu$$

(Notar que  $\lambda^A$  y  $\tilde{\Psi}^m$  tienen la misma acción, pero diferentes constricciones.)

Simetría global en hoja de mundo es  $SO(9,1) \times SO(32)$ .

Notar que, a diferencia de la cuerda abierta con factores de Chan-Paton, obtenemos aquí simetría interna no abeliana con carga esparcida por toda la cuerda, no únicamente en los extremos.

La 'condición de borde' más general para  $\lambda^A$  es

$$\lambda^A(\sigma+2\pi, \sigma^2) = M^{AB} \lambda^B(\sigma^1, \sigma^2)$$

↑ matriz  $O(32)$

Se conocen 9 elecciones distintas de  $M^{AB}$  y proyección GSO que dan lugar a teorías consistentes (con invariancia modular e interacciones bien definidas). De estas, solo 2 son supersimétricas. Las 7 restantes son análogas a teorías Tipo 0, excepto por una que no tiene taquión y posee grupo de norma  $SO(16) \times SO(16)$ . [Ver Polchinski Vol. II, Cap. 11]

## ① Teoría Heterótica $SO(32)$

Para  $\tilde{\Psi}^{\omega}(\bar{z})$ , imponemos  $(-1)^{\tilde{F}} = +1$

$\tilde{NS}$	$\tilde{\Psi}_{-\frac{1}{2}}^{\omega}(0; k)_{\tilde{NS}}$	$\frac{8}{\alpha'}$
$\tilde{R}$	$ \tilde{S}; k\rangle_{\tilde{R}}$	$\frac{8}{\alpha'}$

estados con  $m^2 = 0$

Para  $\lambda^A(z)$  escogemos la misma periodicidad  $\forall A$ ,

encontrando  $\therefore$  2 sectores

—	NS :	$M = -1$
\	R :	$M = +1$

Definiendo un operador de número fermiónico  $F$  que incluya a todos los  $\lambda^A$ , imponemos  $(-1)^F = +1$

Las constantes de orden en  $L_0^{X, \lambda} + L_0^{b, c}$  son  $\therefore$

—	NS :	$8(-\frac{1}{24}) + 32(-\frac{1}{48}) = -1$
\	R :	$8(-\frac{1}{24}) + 32(+\frac{1}{24}) = +1$

Los niveles izquierdos más bajos son  $\therefore$

• Nivel  $N=0$  :  $|0; k\rangle_{NS}$   $m^2 = -\frac{4}{\alpha'}$  Taquión

Tiene  $(-1)^F = +1$  porque en este caso  $\nexists \beta, \gamma$

PERO no se puede empatar con ningún nivel derecho.

• Nivel  $N=1/2$  :  $\lambda_{-1/2}^A |0; k\rangle \quad m^2 = -2/\alpha'$

Tiene  $(-1)^F = -1$  y es  $\therefore$  eliminado por proyección GSO

• Nivel  $N=1$  :  $\alpha_{-1}^M |0; k\rangle_{NS} \quad \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B |0; k\rangle_{NS} \quad m^2 = 0$

rep  $SO(8) \times SO(32)$  :  $(\underline{8}_v, \underline{1}) \quad (\underline{1}, \underline{496})$  rep. adjunta

Tienen  $(-1)^F = +1$   $\checkmark$   $\left( \frac{32 \times 31}{2} \right)$  de  $SO(32)$

Es posible empatarlos con niveles derechos no masivos  $\checkmark$

Al combinar con los modos derechos, vemos entonces que los campos sin masa de esta teoría son

$[(\underline{8}_v, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{496})] \quad (\underline{8}_v + \underline{8})$

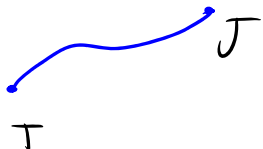
$\nwarrow \tilde{NS}_+ \quad \swarrow \tilde{R}_+$

$= (\underline{1}, \underline{1}) + (\underline{28}, \underline{1}) + (\underline{35}, \underline{1}) + (\underline{56}, \underline{1}) + (\underline{8}', \underline{1})$  Multiplete de  $SU(8)$   
 $N=1$

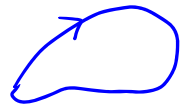
$+ (\underline{8}_v, \underline{496}) + (\underline{8}, \underline{496})$  Multiplete Vectorial (SYM) en rep. adjunta de  $SO(32)$

¡ Notar que estos son los mismos campos que la teoría Tipo I ! ( $\because$  ambas teorías tienen la misma acción a bajas energías.)

Pero niveles con  $m^2 > 0$  son diferentes. En particular,

I:  2 cargas vectoriales 32

$\Rightarrow$  todos los estados  $|\dots; I, J\rangle$  pertenecen a reps. tensoriales de  $so(32)$ :  $[2]$  y  $(2)$   
496      528

H0:  Carga distribuida  $\leftrightarrow \lambda_{-r}^A$   $r \in \mathbb{Z} + \Delta$   
 $\lambda_{(2)}^A$

$\Rightarrow$  se pueden encontrar estados en representaciones arbitrarias de  $so(32)$

(p.ej.,  $\exists$  espinores de  $so(32)$  con  $m^2 = +4/\alpha'$ )

## ② Teoría Heterótica $E_8 \times E_8$

Dividimos  $\lambda^A(z)$  en 2 grupos  $\begin{cases} A = 1, \dots, 16 \\ A' = 17, \dots, 32 \end{cases}$

con 'condiciones de borde' independientes, y

consideramos 8 sectores  $(\begin{smallmatrix} NS & NS' & \tilde{NS} \\ R & R' & \tilde{R} \end{smallmatrix})$  con

proyección GSO  $(-1)^F = (-1)^{F'} = (-1)^{\tilde{F}} = 0$ .

Los niveles derechos son como antes:  $\underline{8}_v + \underline{8}$  con  $m^2 = 0$ .

Los niveles izquierdos son:

-  $NS - NS'$  (constante de orden  $-1$ , como antes)

• Nivel  $N=1$  es el primero que puede empizarse ( $m^2 = 0$ ):

$$\alpha_{-1}^N |0\rangle_{NS, NS'} \quad \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B |0\rangle_{NS, NS'} \quad \lambda_{-1/2}^{A'} \lambda_{-1/2}^{B'} |0\rangle_{NS, NS'}$$

$$(\underline{8}_v, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{120}, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{1}, \underline{120}) \text{ de } SO(8) \times SO(16) \times SO(16)$$

$\uparrow$   $\frac{16 \times 15}{2}$  rep adjunta de  $SO(16)$

-  $R - R'$  (constante de orden  $+1$ , como antes)

No da estados sin masa

- R-NS' (Constante de orden  $8(-\frac{1}{24}) + 16(\frac{1}{24}) + 16(-\frac{1}{48}) = 0$ )

• Nivel  $N=0$  :  $m^2 = 0$

De manera similar a lo que sucedió para el vacío R en la supercuerda, la existencia de los modos cero  $\lambda_0^A$  implica que estados en este sector son

$|\sigma, 0; k\rangle_{R-NS'}$  con  $\sigma = \pm \frac{1}{2}$   $\alpha = 1, \dots, 8$

y que transforman como espinor de  $SO(16)$

De estos  $2^8 = 256$  estados, la mitad sobreviven

proyección GSO  $(-1)^F = +1$  :  $2^8 = \underline{128} + \cancel{128}'$

así que estados físicos pertenecen a  $(\underline{1}, \underline{128}, \underline{1})$ .

- NS-R' De manera similar,  $(\underline{1}, \underline{1}, \underline{128})$ .

Combinando con  $\underline{8}_V$  de modos derechos, se obtienen

campos de norma en  $\underline{120} + \underline{128}$  de cada  $SO(16)$

adjunta  $\uparrow$   $\uparrow$  espinorial

$\underbrace{\hspace{10em}}$   
 rep. adjunta  $\underline{248}$  de  $E_8$  !

$\therefore$  Grupo de Norma es  $E_8 \times E_8$

Solo el subgrupo  $SO(16) \times SO(16)$  es manifiesto en esta presentación de la teoría.

Los generadores adicionales que están en  $E_8$  pero no en  $SO(16)$  son espinores

$$\exp \left[ i \sum_{\alpha=1}^8 \sigma_{\alpha} X^{\alpha+9}(\tau) \right], \quad \exp \left[ i \sum_{\alpha=9}^{16} \sigma_{\alpha} X^{\alpha+9}(\tau) \right]$$

$\uparrow$  bosonización de  $\lambda^{2\alpha-1}, \lambda^{2\alpha}$   $\uparrow$

con  $\sigma_{\alpha} = \pm 1/2$  (y número par de  $-1/2$ 's)

Los estados con  $m^2=0$  son:

$$(\underline{1}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{28}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{35}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{56}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{8}, \underline{1}, \underline{1})$$

Multiplete de  $SU(6) \times U(1)$

$$+ (\underline{8}_V, \underline{248}, \underline{1}) + (\underline{8}, \underline{248}, \underline{1}) + (\underline{8}_V, \underline{1}, \underline{248}) + (\underline{8}, \underline{1}, \underline{248})$$

Multiplete Vectorial (SYM)  $E_8 \times E_8$

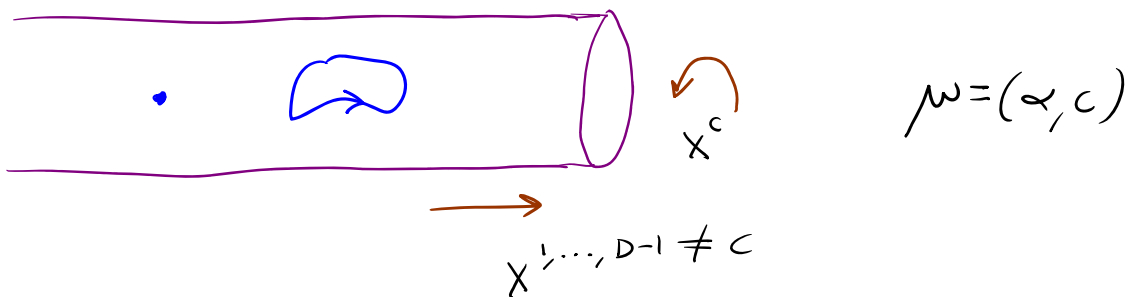


## 4. Dualidad T y D-branas

Si queremos eventualmente hacer contacto con el mundo real, necesitamos esconder 6 dimensiones.

La manera más obvia es postular que son compactas y pequeñas. Consideremos primero el caso más sencillo posible: una dimensión compactificada en un círculo:

$$x^c \simeq x^c + 2\pi R \quad (\text{p.ej.}, c=9)$$



La presencia de este círculo modifica la teoría en 3 aspectos:

1) El momento se discretiza,

$$p^c = \frac{n}{R} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{número de Kaluza-Klein}$$

(porque  $e^{i(2\pi R)\hat{p}^c} |\psi\rangle = |\psi\rangle$ ).

Esto sucede tanto para teorías de partículas como de cuerdas. Para cada campo asociado podemos hacer descomposición de Fourier

$$\phi(x^\mu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i \frac{n}{R} x^c} \phi_n(x^\alpha),$$

obteniendo una colección infinita de campos definidos en  $D-1$  dimensiones,  $\{\phi_n\}$ , con masas

$$m_n^2 \equiv -P_\alpha P^\alpha = P_c P^c - P_\mu P^\mu = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + M^2$$

↑ masa  $(D-1)$ -dimensional

← masa  $D$ -dimensional

Notar que para  $R$  pequeño  $m_n^2$  es grande a menos que  $n=0$ , de modo que

$R \rightarrow 0 \Rightarrow$  retener solo  $\phi_0(x^\alpha)$ , independiente de  $x^c$

Reducción Dimensional

2) Campos con Índices Espaciotemporales se descomponen en bloques, p.ej.,

$$G_{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix} \begin{matrix} (D-1) \times (D-1) \\ g_{\alpha\beta} \end{matrix} & \begin{matrix} A_\alpha \\ \vdots \\ \sigma \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_\beta \\ \vdots \\ \sigma \end{matrix} & \end{pmatrix}$$

$D \times D$

Bajo reducción dimensional,

$$\frac{1}{2k^2} \int d^D x \sqrt{-G} R \rightarrow \frac{2\pi R}{2k^2} \int d^{D-1} x \left[ \sqrt{-g} R + F^2 + (\partial\sigma)^2 \right]$$

y la invariancia bajo difeos del tipo

$$x^c \rightarrow x'^c = x^c + \lambda(x^a)$$

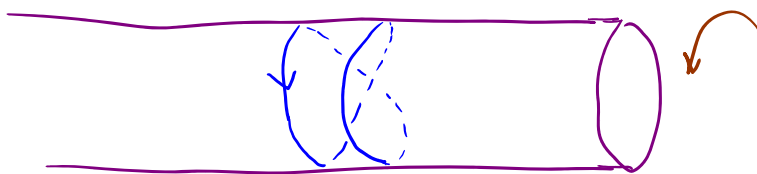
se convierte en invariancia de norma  $U(1)$

$$A_\alpha \rightarrow A'_\alpha = A_\alpha - \partial_\alpha \lambda$$

La carga asociada es número de  $k$  y

(de modo que en reducción dimensional retenemos solamente estados neutros).

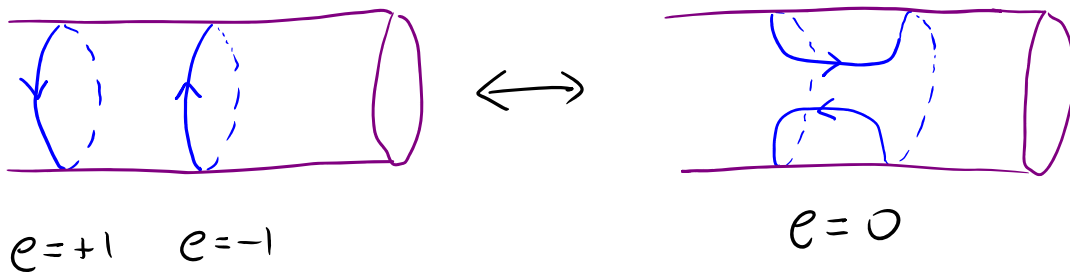
3) Cuerdas cerradas pueden enrollarse alrededor del círculo,



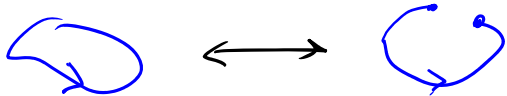
lo cual se expresa en cambio en condición de periodicidad

$$X^c(\sigma + 2\pi, \tau) = X^c(\sigma, \tau) + e \cdot 2\pi R \quad e \in \mathbb{Z} \quad \begin{array}{l} \text{número de} \\ \text{enrollamiento} \end{array}$$

El enrollamiento de una cuerda puede cambiar en teoría con interacciones, pero, por razones topológicas, el enrollamiento total se conserva en interacciones de cuerda cerrada:



Notar que esto nos obliga a incluir en teoría completa sectores con  $e$  arbitrario.

En teoría en cuerdas abiertas,  $e_{\text{tot}}$  claramente no se conserva en procesos .

¿Qué sucede en el caso de cuerdas cerradas

no orientadas? Recordar que en este caso espectro

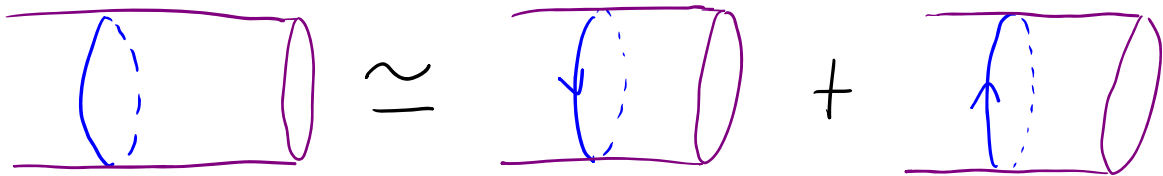
se trunca para retener solo estados invariantes bajo

$$\Omega : \alpha_n^M \leftrightarrow \tilde{\alpha}_n^M, \quad e \leftrightarrow -e,$$

p.ej.  $\tilde{\alpha}_{-1}^M |0,0; k_\alpha, 1, 1\rangle + \alpha_{-1}^M |0,0; k_\alpha, 1, -1\rangle$

$n \nearrow \quad \curvearrowright e$   $n \nearrow \quad \curvearrowright e$

Es decir,



Debido a esto, las interacciones conservan solo el enrollamiento total módulo 2:

$$(V_{+1} + V_{-1})(V_{+1} + V_{-1}) \rightarrow (V_{+2} + V_{-2}) + V_0.$$

Regresando a cuerda orientada, si imponemos la nueva condición de periodicidad

$$X^c(e^{2\pi i} z, e^{-2\pi i} \bar{z}) = X^c(z, \bar{z}) + e \cdot 2\pi R$$

en expansión usual  $X^c(z, \bar{z}) = X^c(z) + \tilde{X}^c(\bar{z})$ ,

$$X^c(z) = X_I^c + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left( -\alpha_0^c \ln z + \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^c}{z^n} \right),$$

$$\tilde{X}^c(\bar{z}) = X_D^c + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left( -\tilde{\alpha}_0^c \ln \bar{z} + \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^c}{n \bar{z}^n} \right),$$

encontramos que  $\alpha_0^c$  y  $\tilde{\alpha}_0^c$  ya no tienen que ser iguales:

$$X^c(e^{2\pi i} z, e^{-2\pi i} \bar{z}) = X^c(z, \bar{z}) + \underbrace{i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} (-\alpha_0^c + \tilde{\alpha}_0^c) 2\pi i}_{= e \cdot 2\pi R}.$$

Recordando además que

$$\text{Noether} \Rightarrow P^c = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}}_{\frac{n}{R}} (\alpha_0^c + \tilde{\alpha}_0^c) \equiv \frac{1}{2} (P_I^c + P_D^c),$$

podemos despejar

$$P_I^c \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^c = \frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'}$$

$$P_D^c \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\alpha}_0^c = \frac{n}{R} - \frac{eR}{\alpha'}$$

( $n$  y  $e$  son aquí operadores con autovalores enteros)

Notar que para direcciones no compactas,  $P^\alpha = P_I^\alpha = P_D^\alpha$ .

Con estas definiciones, las relaciones de conmutación para los modos cero son simplemente

$$[X_I^c, P_I^c] = i = [X_D^c, P_D^c], \quad [X_\pm^c, P_D^c] = 0 = [X_D^c, P_\pm^c].$$

Dado que

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4} P_I^\omega P_{I\omega} + N, \quad \tilde{L}_0 = \frac{\alpha'}{4} P_D^\omega P_{D\omega} + \tilde{N},$$

el espectro de masas en  $D-1$  dimensiones que se obtiene a partir de condiciones de estado físico

$$L_0 + A = 0, \quad \tilde{L}_0 + \tilde{A} = 0 \quad \text{es}$$

$$m^2 \equiv -P^\alpha P_\alpha = \begin{cases} P_I^c P_{Ic} - P_I^{\tilde{c}} P_{I\tilde{c}} = \left(\frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{4}{\alpha'}(N+A) \\ P_D^c P_{Dc} - P_D^{\tilde{c}} P_{D\tilde{c}} = \left(\frac{n}{R} - \frac{eR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N} + \tilde{A}) \end{cases}$$

es decir,

$$m^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{eR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} + A + \tilde{A})$$

$$\tilde{N} - N = ne + A - \tilde{A} \quad (\text{emparejamiento de niveles})$$

Pej., para cuerda bosónica  $(A^{x,b,c} = \tilde{A}^{\tilde{x},\tilde{b},\tilde{c}} = -\frac{24}{24} = -1)$ ,

estados sin masa son

$$\sum_{\alpha\beta} \alpha_{-1}^{\alpha} \tilde{\alpha}_{-1}^{\beta} |0,0; k^{\alpha}, 0,0\rangle \rightarrow \varphi, B_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta}$$

$$\alpha_{-1}^c \tilde{\alpha}_{-1}^c |0,0; k^{\alpha}, 0,0\rangle \rightarrow \sigma \equiv h_{cc}$$

$$\sum_{\alpha} (\alpha_{-1}^{\alpha} \tilde{\alpha}_{-1}^c \pm \alpha_{-1}^c \tilde{\alpha}_{-1}^{\alpha}) |0,0; k, 0,0\rangle \rightarrow A_{\alpha}^{(h)} \equiv h_{\alpha c}, A_{\alpha}^{(B)} \equiv B_{\alpha c}$$

Campo de norma  $U(1) \times U(1)$

con cargas asociadas  $n$  e

(Recordar que la cuerda se acopla a  $B_{\mu\nu}$  de manera análoga al modo en que partícula se acopla a  $A_{\mu}$ ).

En el caso de cuerda sin enrollar la carga neta bajo  $B_{\mu\nu}$  en cualquier dirección  $\nu$  es cero, pero para cuerda enrollada tenemos acoplamiento

$$\int d\tau d\sigma B_{c\alpha} \partial_a (\epsilon^{ab} X^c \partial_b X^\alpha) \rightarrow \int d\tau A_\alpha^{(B)} \partial_c X^\alpha (e \cdot 2\pi R),$$

es decir, cuerda porta carga neta  $\propto e$  bajo  $B_{c\alpha}$ .

Un hecho curioso es que existen 12 estados adicionales que se vuelven no masivos si ajustamos  $R = l_c \equiv \sqrt{\alpha'}$ :

$$\tilde{\alpha}_{-1}^{\tilde{\alpha}} |0, 0; k, \pm 1, \pm 1\rangle, \quad \tilde{\alpha}_{-1}^c |0, 0; k, \pm 1, \pm 1\rangle,$$

$$\alpha_{-1}^{\tilde{\alpha}} |0, 0; k, \pm 1, \mp 1\rangle, \quad \alpha_{-1}^c |0, 0; k, \pm 1, \mp 1\rangle,$$

$$|0, 0; k, \pm 2, 0\rangle, \quad |0, 0; k, 0, \pm 2\rangle.$$

En particular, tenemos aquí 4 nuevos bosones de norma (campos vectoriales no masivos), de modo que al ajustar  $R \rightarrow l_c$ , simetría se ensancha.

Portan carga bajo  $U(1) \times U(1)$  original, así que tenemos ahora un grupo de norma no abeliano.



En base a las EPOs de los operadores de vértice correspondientes, es posible deducir que el grupo en cuestión es  $SU(2) \times SU(2)$  (6 generadores). Y a partir de las interacciones (codificadas, peq., en la acción efectiva) uno puede entender que al pasar de  $R=l_c$  a  $R=l_c + \epsilon$  esta simetría se rompe espontáneamente:

$$SU(2) \times SU(2) \xrightarrow[\langle \sigma \rangle \neq 0]{\text{Higgs}} U(1) \times U(1).$$

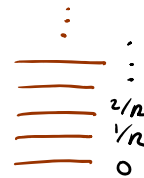
Regresaremos a esto más adelante...

Volviendo a análisis de espectro, consideremos ahora 2 límites:

1)  $R \rightarrow \infty$

Descompactificación

$$\Rightarrow \begin{cases} n/R \text{ se vuelve continuo} \\ e \neq 0 \Rightarrow m \sim \left| \frac{eR}{\alpha'} \right| \rightarrow \infty \end{cases}$$



$$\Rightarrow P_I^c = P_D^c = P^c \quad \text{Recuperamos teoría no compacta ✓}$$

2)  $R \rightarrow 0$  ¿Reducción Dimensional?

$$\Rightarrow \begin{cases} n \neq 0 \Rightarrow m \sim \left| \frac{n}{R} \right| \rightarrow 0 \\ i \frac{eR}{\alpha'} \text{ se vuelve continuo!} \end{cases} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ 2R/\alpha' \\ R/\alpha' \end{array}$$

$$\Rightarrow p_I^c = -p_D^c = p^c \quad \text{¡Dimensión compacta no desaparece!}$$

¡Vemos entonces que el efecto de 1) y 2) es esencialmente el mismo!

De hecho, espectro

$$m^2 = \left( \frac{n}{R} \right)^2 + \left( \frac{eR}{\alpha'} \right)^2 + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} + A + \tilde{A})$$

$$ne = \tilde{N} - N + \tilde{A} - A$$

es invariante bajo transformación

$$\left. \begin{array}{l} R \leftrightarrow R_T \equiv \frac{\alpha'}{R} \\ (n, e) \leftrightarrow (n_T, e_T) \equiv (e, n) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} p_I^c \leftrightarrow (p_I^c)_T \equiv p_I^c \\ p_D^c \leftrightarrow (p_D^c)_T \equiv -p_D^c \end{cases}$$

Dualidad T  
(de 'target')

Kikkawa, Yamasaki (1984)  
Sakai, Serda (1985)  
Nair, Shapere, Strominger, Wilczek (1986)

La teoría con radio  $R_\pi$  es idéntica a la teoría con radio  $R$ , pero reescrita en términos de

$$X_\pi^c(z, \bar{z}) \equiv X^c(z) - \tilde{X}^c(\bar{z})$$

↳ incorpora  $P_D^c \rightarrow -P_D^c$ , pero preserva

$$T(z), \tilde{T}(\bar{z}) \text{ y EPO } X^c(z_1, \bar{z}_1) X^c(z_2, \bar{z}_2),$$

∴ espectro e interacciones son idénticas

En resumen,  $\mathbb{T}$  = paridad en espacio, actuando

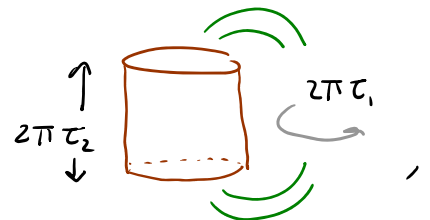
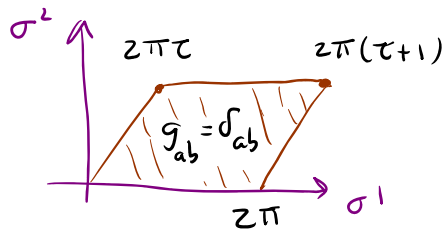
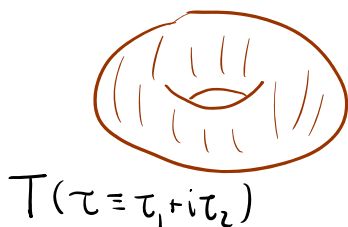
07/09/06

sólo sobre modos derechos

Se puede mostrar invariancia en cada orden de la expansión perturbativa.

Amplitud a un lazo es suma sobre espectro libre,

así que debe ser invariante: en toro,



la función de partición (contribución de  $X^c$ )

$$\mathcal{Z}^{X^c}(\tau) \equiv \int_{T^2(\tau)} \mathcal{D}X^c(\sigma', \sigma^2) e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X^c \partial_a X^c}$$

se descompone en una suma sobre sectores con distintos números de enrollamiento:

$$X^c(\sigma' + 2\pi, \sigma^2) = X^c(\sigma', \sigma^2) + e \cdot 2\pi R \quad \forall e, f \in \mathbb{Z}$$

$$X^c(\sigma' + 2\pi\tau_1, \sigma^2 + 2\pi\tau_2) = X^c(\sigma', \sigma^2) + f \cdot 2\pi R$$

↑ necesario para preservar invariancia modular

La integral gaussiana se puede calcular escribiendo

$$X^c(\sigma', \sigma^2) = X_{cl}^c(\sigma', \sigma^2) + \eta(\sigma', \sigma^2),$$

donde

$$X_{cl}^c(\sigma', \sigma^2) = e \sigma'^R + (f - e\tau_1) \frac{\sigma^2 R}{\tau_2}$$

es solución de ec. de mov. con enrollamiento  $(e, f)$ ,

y  $\eta(\sigma', \sigma^2)$  es una función periódica arbitraria.

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{X^c}(\tau) = \mathcal{Z}^\eta(\tau) 2\pi R \sum_{e, f = -\infty}^{\infty} \exp \left[ -\frac{\pi R^2}{\alpha' \tau_2} \underbrace{\left( (f - e\tau_1)^2 + e^2 \tau_2^2 \right)}_{|f - e\tau_1|^2} \right]$$

contribución usual de coordenada no compacta  $\int dx$

de integral sobre mod cero de  $X^c$

Notar que la suma es invariante modular: no cambia  
 bajo  $\tau \rightarrow \tau' = \tau + 1$ ,  $(e, f) \rightarrow (e', f') = (e, f - e)$   
 ni bajo  $\tau \rightarrow \tau' = -1/\tau$  ( $\Rightarrow \tau'_2 = \frac{\tau_2}{|\tau|^2}$ ),  
 $(e, f) \rightarrow (e', f') = (f, -e)$

Para mostrar que también es invariante bajo  
 dualidad  $T$ , necesitamos "fórmula de resumación  
 de Poisson" [ver GSW vol. 2, p. 71]:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi \frac{(m-b)^2}{a}\right] = \sqrt{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi a n^2 + 2\pi i b n\right].$$

Tomando  $m=f$ ,  $a = \frac{\alpha' \tau_2}{R^2}$ ,  $b = e\tau$ , podemos reescribir

$$\tilde{Z}^c(\tau) = Z^c(\tau) 2\pi \sqrt{\alpha' \tau_2} \sum_{n, e=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi \tau_2 \left(\frac{\alpha' n^2}{R^2} + \frac{e^2 R^2}{\alpha'}\right) + 2\pi i \tau_1 n e\right],$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\alpha' (P_I^c)^2/4 & \frac{1}{\alpha'} (P_D^c)^2/4}}$

$\underbrace{2\pi i \tau_1}_{\tau \equiv e} \rightarrow \underbrace{\hspace{2em}}_{\tau} \underbrace{\hspace{2em}}_{\tau}$

donde invariancia bajo  $P_I^c \rightarrow P_I^c$ ,  $P_D^c \rightarrow -P_D^c$  es manifiesta.

Esta última expresión es de hecho la que resulta directamente de definición hamiltoniana

$$Z^X(\tau) = \text{Tr}_{X^c} \left[ \exp(-2\pi\tau_2 H + 2\pi\tau_1 P) \right] = (\eta\bar{\eta})^{-g/24} \text{Tr} \left[ \eta^{L_0+A} \bar{\eta}^{\tilde{L}_0+\tilde{A}} \right]$$

(donde vemos también explícitamente invariancia

bajo  $\alpha_n^c \rightarrow \alpha_n^c, \tilde{\alpha}_n^c \rightarrow -\tilde{\alpha}_n^c$ ).

¿Qué sucede a orden más alto en la expansión perturbativa?

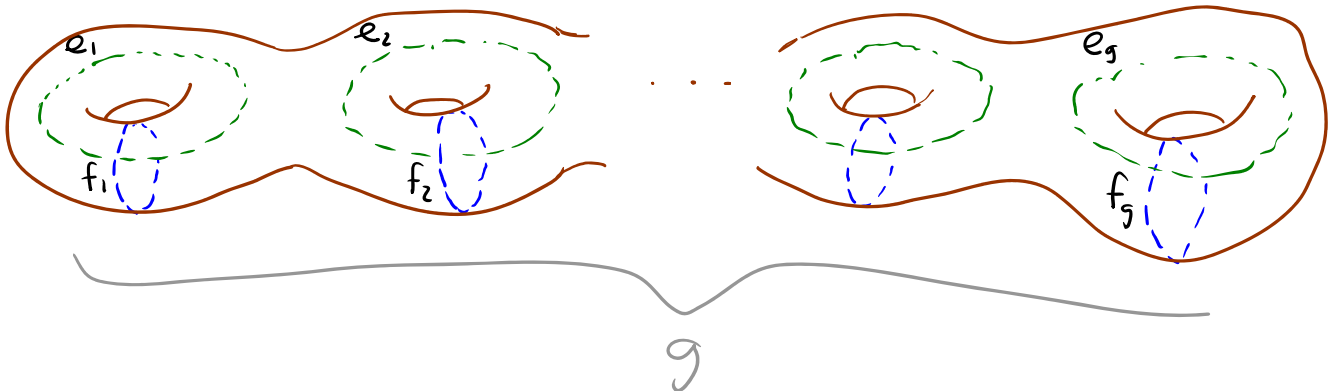
La superficie de género  $g > 1$  (es decir, con  $g$  manijas)

tiene módulos complejos  $\tau_M, M=1, \dots, 3g-3$

(Riemann-Roch:  $k-m = 3\chi \Rightarrow 6(g-1)$  módulos reales)

Para definir  $X^c(\sigma_1, \sigma_2)$  sobre ella, debemos especificar

$2g$  números de enrollamiento  $(e_i, f_i) i=1, \dots, g$



Se puede mostrar entonces que la función de partición toma la forma

$$Z_g^{X^c}(R; \tau_M) \propto R \sum_{e_i, f_i} \exp \left[ -\frac{\pi R^2}{\alpha'} (f_i - e_j \bar{\Omega}_{ji}) (\Omega_2^{-1})_{ik} (f_k - e_l \bar{\Omega}_{lk}) \right],$$

donde  $\Omega_{ij}(\tau_M) \equiv (\Omega_1)_{ij} + i(\Omega_2)_{ij}$  es la "matriz de periodos"  
 $2g \times g$ , simétrica

( $\Omega(\tau) = \tau$  en el caso  $g=1$ ) [ver Giverson, Porrati, Rabinovici, hep-th/9401139]

Después de usar la fórmula de Poisson para reemplazar  $f_i \rightarrow n_i$  se tiene entonces

$$Z_g^{X^c}(R; \tau_M) \propto R^{1-g} \sum_{n_i, e_i} \exp \left[ i \frac{\pi \alpha'}{2} (P_{I_i}^c \Omega_{ij} P_{I_j}^c - P_{D_i}^c \bar{\Omega}_{ij} P_{D_j}^c) \right],$$

donde  $P_{D_i}^c \equiv \frac{n_i}{R} \pm \frac{e_i R}{\alpha'}$  son los momentos izquierdos derechos

de las  $g$  cuerdas que circulan alrededor de los lazos.

Bajo dualidad  $T$  encontramos entonces

$$Z_g^{X_{\text{PT}}^c}(R_{\text{PT}}; \tau_M) = \left( \frac{R}{l_c} \right)^{2g-2} Z_g^{X^c}(R; \tau_M)$$

$\uparrow$   
 $-X_g$

Concluimos entonces que amplitud total

$$\mathcal{Z}[\Phi, R] = \sum_{g=0}^{\infty} e^{-\Phi \chi_g} \int_M d\tau \int \mathcal{F}_g(\tau) \mathcal{Z}_g^{\chi^c}(R; \tau)$$

es invariante bajo dualidad  $\Gamma$  siempre y cuando

$$\Phi_{\Gamma} = \Phi - \ln(R/l_c),$$

es decir,

$$g_{c\Gamma} = g_c \left( \frac{l_c}{R} \right)$$

Podemos verificar esta fórmula notando que las amplitudes de dispersión de gravitones con  $e=n=0$  (que son estables invariantes bajo  $\Gamma$ ) pueden leerse a partir de acción efectiva

$$S = \frac{1}{2K^2} \int d^d x^c d^{d-1} x^a \dots \stackrel{n=0}{=} \frac{2\pi R}{2K^2} \int d^{d-1} x^a \dots$$

$$\equiv \frac{1}{2K_{d-1}^2} = \frac{2\pi R_{\Gamma}}{2K_{\Gamma}^2} \quad (\text{porque amplitud es } \Gamma\text{-invariante})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{g_c^2}{R} = \frac{g_{c\Gamma}^2}{R_{\Gamma}} &\quad \Rightarrow \quad g_{c\Gamma} = g_c \left( \frac{l_c}{R} \right) \quad \checkmark \end{aligned}$$



Hemos visto entonces que dualidad  $T$  es una simetría de expansión perturbativa de la teoría de cuerdas bosónica, que relaciona entre sí 2 estados (fondos) a primera vista distintos.

Recordar ahora que si ajustamos el radio de  $x^c$  a su valor autodual  $R = l_c = R_T$ , la simetría de norma se ensancha de  $U(1) \times U(1)$  a  $SU(2) \times SU(2)$ , y que cerca de este punto, cambiar  $R$  significa encender  $\langle \sigma \rangle \neq 0$ , donde  $\sigma \equiv h_{cc}$  porta carga bajo 4 de las 6 transformaciones en  $SU(2) \times SU(2)$ .

Escogiendo de manera apropiada los 4 parámetros correspondientes, podemos de hecho rotar

$$\langle \sigma \rangle \leftrightarrow -\langle \sigma \rangle, \text{ que corresponde a } R = l_c \left(1 + \frac{\langle \sigma \rangle}{2}\right) \leftrightarrow R_T = \frac{l_c^2}{R} \approx l_c \left(1 - \frac{\langle \sigma \rangle}{2}\right).$$

$\Rightarrow$   $T$  es una simetría de norma!

Por consistencia de la teoría, debe  $\therefore$  preservarse incluso a nivel no perturbativo.

12/09/06

Con solo una dimensión compacta, hemos encontrado el grupo de dualidad discreto  $\mathbb{Z}_2$ .

Encontraremos un grupo mucho mayor al compactificar sobre toro  $d$ -dimensional  $T^d \equiv \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_d$ .

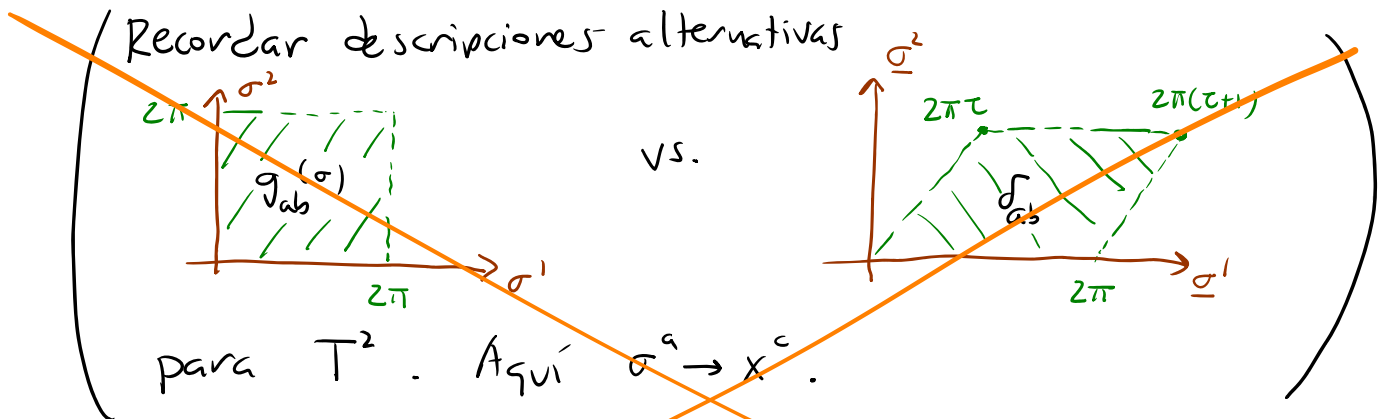
En este caso, conviene usar coords.

$$x^c \simeq x^c + 2\pi l_c, \quad c=1, \dots, d$$

$$\Leftrightarrow X^c(\sigma^1 + 2\pi, \sigma^2) = X^c(\sigma^1, \sigma^2) + e^c 2\pi l_c,$$

↑ número de enrollamiento

codificando el tamaño y la forma del toro en métrica constante  $G_{cc'}$ . Pej., toro recto:  $G_{cc'} = \frac{R_c^2}{\alpha'} \delta_{cc'}$ .



Descripción con métrica plana se puede obtener en coords.

$$x^c \equiv e_c^c X^c, \quad \text{con } G_{cc'} \equiv e_c^c e_{c'}$$

↑ muchas-pata / vielbein /  $d$ -ada.

Sobre  $d \geq 2$  dimensiones compactas podemos encender, además de métrica, campo antisimétrico constante  $B_{cc'}$ . Nuestra compactificación estará caracterizada entonces por

$$G_{cc'} + B_{cc'} \iff \frac{d(d+1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} = d^2 \text{ parámetros.}$$

Notar que  $B_{cc'}$  constante es "pura norma"

( $H_{(3)} = d B_{(2)} = 0$ ), y el término correspondiente en la acción,  $\int d\sigma d\tau B_{cc'} \underbrace{\partial_\sigma X^c \partial_\tau X^{c'}}_{\partial_\sigma (X^c \partial_\tau X^{c'})}$ , es una derivada total.

Pero, debido a que dimensiones involucradas son compactas, su presencia sí cambia la física

(de manera análoga a lazo de Wilson  $\int d\tau A_c \partial_\tau X^c$ , que para su eliminación requiere una transformación de norma "grande":  $A_c \rightarrow A_c - \partial_c \lambda$  con  $\lambda(x_c)$  no periódica).

El término con  $B_{cc'}$  no afecta ec. de mov. y  $\therefore$  expansión en modos, pero sí cambia definición del momento conjugado a  $X^c$ , y modifica  $\therefore$  relación entre el



Dados  $G_{cc'}$  y  $B_{cc'}$ , los autovalores de  $P_{I_c}$  y  $P_{D_c}$ ,

$$K_r \equiv \frac{l_c}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} k_{I_c} \\ k_{D_c} \end{pmatrix} \quad \forall n_c, e^c \in \mathbb{Z} \text{ forman una red } \mathcal{R}$$

en espacio de momentos 2d-dimensional.

Cada punto en esta red representa un posible estado (para modos cero en las  $d$  dimensiones compactas).

Los operadores de vértice correspondientes,

$$V_{(n_c, e^c)}(z, \bar{z}) = : \exp [ik_{I_c} X^c(z) + ik_{D_c} \tilde{X}^c(\bar{z})] :,$$

tienen EPO

$$V(z, \bar{z}) V'(0, 0) \sim z^{\frac{\alpha'}{2} k_I \cdot k'_I} \bar{z}^{\frac{\alpha'}{2} k_D \cdot k'_D} V''(0, 0),$$

que solo es univaluada (permitiendo  $\therefore$  que interacciones estén bien definidas) si exigimos que

$$\frac{\alpha'}{2} k_I \cdot k'_I - \frac{\alpha'}{2} k_D \cdot k'_D \equiv K \cdot K' \in \mathbb{Z} \quad \forall K, K' \in \mathcal{R}$$

Conviene  $\therefore$  considerar a nuestra red  $\mathcal{R}$

como subespacio de  $\mathbb{R}^{d,d}$   $\leftarrow$  métrica  $\text{diag}(+1, +1, \dots, -1, -1, \dots)$

Para que teoría sea invariante modular, es necesario exigir que  $\mathcal{R}$  sea una red par y autodual, es decir,

$$K \circ K' \equiv K_I \cdot K'_I - K_D \cdot K'_D \in 2\mathbb{Z} \quad \forall K, K' \in \mathcal{R}$$

$$y \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}^* \equiv \{ K' \in \mathbb{R}^{d,d} \mid K \circ K' \in 2\mathbb{Z} \quad \forall K \in \mathcal{R} \}$$

↑ red dual a  $\mathcal{R}$

Esta descripción de posibles  $G_{cc'}, B_{cc'}$  se conoce con el nombre de compactificación de Narain.

Aunque no es obvio, resulta que todas las redes pares autoduales en  $\mathbb{R}^{d,d}$  están conectadas entre sí a través de transformaciones  $O(d, d, \mathbb{R})$ : dada una compactificación de Narain  $\mathcal{R}_0$ , podemos obtener todas las demás rotándola de todas las maneras posibles. Las redes resultantes describen en general teorías/compactificaciones físicamente distintas. Pero no lo son si rotación en cuestión deja  $K_I \cdot K'_I$  y  $K_D \cdot K'_D$  invariantes,

porque en ese caso EPOs y espectro No cambian.  
 El espacio de redes que describen compactificaciones  
 que en un principio parecerían físicamente  
distintas es entonces

$$\frac{O(d, d, \mathbb{R})}{O(d, \mathbb{R}) \times O(d, \mathbb{R})}, \text{ que según podemos verificar,}$$

tiene el número correcto de parámetros:

$$\frac{2d(2d-1)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} = d^2. \quad \checkmark$$

Para describir el efecto que una rotación  
 $O(d, d, \mathbb{R})$  tiene sobre los campos de fondo  
 $G_{cc'}$  y  $B_{cc'}$ , conviene cambiar de base para  
 convertir  $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$ ,  
 y definir entonces

$$O(d, d, \mathbb{R}) \equiv \left\{ M = \left( \begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} \right) \mid M^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$d \times d$   $\nearrow$   
 con entradas reales

$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}}_{\text{en nueva base}}$

En esta nueva base, la red que corresponde al fondo  $G_{cc'} = \delta_{cc'}$ ,  $B_{cc'} = 0$  (es decir, un toro recto con radios propios autoduales, y sin tensor antisimétrico) es simplemente

$$\mathcal{R}_0 \equiv \left\{ \begin{pmatrix} e^c \\ n_{c'} \end{pmatrix} \mid e^c, n_{c'} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Y, empaquetando los campos de fondo (en el caso general) en una sola matriz constante

$$E_{cc'} \equiv G_{cc'} + B_{cc'},$$

el efecto de una rotación

$$M: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}^{(M)} \equiv M \mathcal{R}, \quad M \in O(d, d, \mathbb{R}),$$

es transformar

$$M: E \mapsto E^{(M)} \equiv (aE + b)(cE + d)^{-1}$$

(de donde uno puede deducir  $G^{(M)}$  y  $B^{(M)}$ ).

Como habíamos visto antes, en general

$$M \in \frac{O(d, d, \mathbb{R})}{O(d, \mathbb{R}) \times O(d, \mathbb{R})} \quad \text{conecta compactificaciones}$$



~~$\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^{(M)}$  que dan lugar a espectros distintos,  
y son  $\therefore$  físicamente No equivalentes.~~

Pero notemos ahora que el subgrupo de rotaciones  
con componentes enteras,

$$O(d, d, \mathbb{Z}) = \left\{ Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid Z^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

deja invariante a la compactificación de referencia  
 $\mathbb{R}_0$  (aunque permuta los distintos puntos entre sí)  
lo cual implica que  $M\mathbb{R}_0$  y  $(MZ)\mathbb{R}_0$   
son físicamente equivalentes.

Este subgrupo discreto es entonces el grupo de  
dualidad  $\Gamma$  (simetría no trivial) para  $d$  dimensiones  
compactas, y tenemos

$$E_{\Gamma} = (aE + b)(cE + d)^{-1}$$

En general, estas transformaciones mezclan  
a la métrica  $G$  con el tensor antisimétrico  $B$ !

El grupo  $O(d, d, \mathbb{Z})$  es generado por:

1) Difeos grandes de  $T^d$

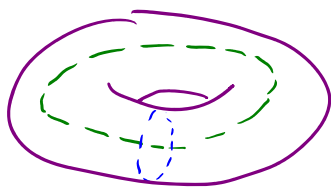
$$Z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^T)^{-1} \end{pmatrix} \quad a \in SL(d, \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow G \rightarrow a G a^T, \quad B \rightarrow a B a^T,$$

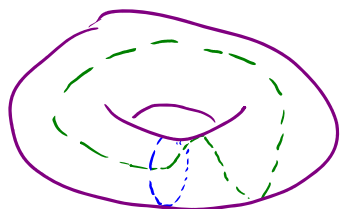
como corresponde a difeos  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = a^{-1} \vec{x}$ ,

en donde la matriz  $a$  debe tener entradas enteras para preservar la periodicidad.

P.ej., en  $d=2$



$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



y la transformación análoga para el otro ciclo generan el grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

2) Carrimiento Entero de  $B$

$$Z = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & b \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad b = -b^T$$

$$\Rightarrow G \rightarrow G, \quad B \rightarrow B + b$$

Este tipo de transformaciones son claramente simetrías, puesto que solo permutan los distintos

$$k_{\frac{I}{D}c} = \frac{1}{\hbar^2} [n_c - B_{cc'} e^{c'} \pm G_{cc'} e^{c'}] \text{ entre sí.}$$

A nivel de la integral funcional, el punto es que la acción euclídeana cambia por un múltiplo de  $2\pi i$ .

3) Generalización de  $R \leftrightarrow \alpha/R$  sobre cada  $S^1$

$$Z_i = \begin{pmatrix} \mathbb{1} - U_i & U_i \\ U_i & \mathbb{1} - U_i \end{pmatrix}, \quad (U_i)_{cc'} \equiv \delta_{ic} \delta_{ic'}$$

si  $G_{cc'} = \frac{R_c^2}{\alpha'} \delta_{cc'}$  y  $B_{cc'} = 0$ , entonces

$Z_i$  solo cambia  $G_{ii} \rightarrow 1/G_{ii}$

(dejando invariantes a  $B_{cc'}$  y las componentes restantes de  $G_{cc'}$ ), lo cual corresponde

precisamente a  $R_i \rightarrow \alpha'/R_i$ .

En el caso general,  $Z_i$  mezcla  $G$  con  $B$ .

Una simetría discreta adicional, que no forma parte de  $O(d, d, \mathbb{Z})$ , es la paridad en la hoja de mundo,  $\Omega$ , que intercambia  $k_{I_c} \leftrightarrow k_{D_c}$ , lo cual equivale a modificar el fondo  $(G, B) \leftrightarrow (G, -B)$ .

Notar que en esta descripción, las relaciones de conmutación de los modos son

$$[X^c, P_{c'}] = \delta_{c'}^c,$$

$$[\alpha_m^c, \alpha_n^{c'}] = m G^{cc'} \delta_{m, -n} = [\tilde{\alpha}_m^c, \tilde{\alpha}_n^{c'}],$$

así que bajo dualidad  $T$  los estados de la cuerda  $\alpha_{-n}^c \dots \tilde{\alpha}_{-n'}^{c'} \dots |n_c, e^c\rangle$  cambian

$$\text{no solo porque } \begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e_\pi \\ n_\pi \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix},$$

sino además porque los osciladores transforman de manera no trivial:

$$\alpha_n(E) \rightarrow (d - cE^T)^{-1} \alpha_n(E_\pi), \quad \tilde{\alpha}_n(E) \rightarrow (d + cE)^{-1} \tilde{\alpha}_n(E_\pi).$$

Se puede mostrar que  $O(d, d, \mathbb{Z})$  es una simetría de la expansión perturbativa, siempre y cuando el dilatón transforme de acuerdo con

$$\Phi \rightarrow \Phi_{\pi} = \Phi - \frac{1}{4} \ln \left( \frac{\det G}{\det G_{\pi}} \right),$$

es decir,

$$g_{c\pi} = g_c \left( \frac{\det G_{\pi}}{\det G} \right)^{1/4}$$

Notar que elemento de volumen  $\sqrt{\det G_{\pi}}$  solo cambia en las rotaciones que involucran transformaciones del tipo 3).

Es posible generalizar dualidad  $\mathbb{T}$  a fondos no triviales  $G_{\mu\nu}(x), B_{\mu\nu}(x), \Phi(x)$  independientes de una coordenada  $x^c$  (pero, en general, dependientes de coordenadas restantes  $x^{\alpha \neq c}$ ). [Ver p.ej. Giveon, Porrati, Rabinovici]

La transformación en este caso está dada por

$$G_{cc}^{\mathbb{T}} = \frac{1}{G_{cc}}, \quad G_{c\alpha}^{\mathbb{T}} = \frac{B_{c\alpha}}{G_{cc}}, \quad G_{\alpha\beta}^{\mathbb{T}} = G_{\alpha\beta} - \frac{G_{\alpha c} G_{\beta c} + B_{\alpha c} B_{\beta c}}{G_{cc}},$$

$$B_{cc}^{\mathbb{T}} = 0, \quad B_{c\alpha}^{\mathbb{T}} = \frac{G_{c\alpha}}{G_{cc}}, \quad B_{\alpha\beta}^{\mathbb{T}} = B_{\alpha\beta} - \frac{G_{\alpha c} B_{c\beta} + B_{\alpha c} G_{c\beta}}{G_{cc}},$$

$$\Phi^{\mathbb{T}} = \Phi - \frac{1}{4} \ln \left( \frac{\det G}{\det G^{\mathbb{T}}} \right)$$

Reglas de Buscher

¿Cuál es el efecto de  $T$  sobre fermiones en supercuerdas?

Consideremos IIA. Sabemos que

$$T_c : X^c(z) \rightarrow +X^c(z), \quad \tilde{X}^c(\bar{z}) \rightarrow -\tilde{X}^c(\bar{z});$$

por invariancia superconforme debemos tener entonces

$$T_c : \psi^c(z) \rightarrow +\psi^c(z), \quad \tilde{\psi}^c(\bar{z}) \rightarrow -\tilde{\psi}^c(\bar{z})$$

Esto implica en particular que, en sector  $R$ ,

$$\tilde{\psi}_0^c \rightarrow -\tilde{\psi}_0^c \Rightarrow \tilde{F} \rightarrow -\tilde{F},$$

es decir,  $(-1)^{\tilde{F}} \rightarrow -(-1)^{\tilde{F}}$ .

Dado que esto invierte la proyección GSO para modos derechos, concluimos que ¡teoría  $T$ -dual es IIB!

En efecto,

$$\text{IIA en círculo con radio } R_A \text{ y acoplamiento } g_{cA} \quad \stackrel{T}{=} \quad \text{IIB en círculo con radio } R_B = \frac{l_c^2}{R_A} \text{ y } g_{cB} = g_{cA} \left( \frac{l_c}{R_A} \right)$$

Notar en particular la relación entre los campos sin masa de ambas teorías:

- En sector NS-NS, campos de IIA y IIB coinciden:

$$\varphi, B_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}$$

- En sector R-R, IIA tiene  $C_{(1)}, C_{(3)}$  y IIB tiene  $C_{(0)}, C_{(2)}, C_{(4)}^+$ . Sabemos que

$$\mathbb{T}_c: |s\rangle \rightarrow |s\rangle, |\tilde{s}\rangle \rightarrow (\mathbb{T}^c)_{\tilde{s}\tilde{s}'} |\tilde{s}'\rangle,$$

donde  $\mathbb{T}_c \equiv \Gamma^c \Gamma$  es la matriz de paridad en dirección de  $x^c$  (anticomuta con  $\Gamma^c$ , conmuta con  $\Gamma^a$ ). P.ej., si  $c=9$ , tenemos

$$\Gamma^9 \propto b_4^+ - b_4 \Rightarrow \mathbb{T}^9 |\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_3, \pm \frac{1}{2}\rangle \propto |\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_3, \mp \frac{1}{2}\rangle$$

Tenemos por tanto

$$(C \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n})_{s\tilde{s}} |s, \tilde{s}, k\rangle_{k-R} \xrightarrow{\mathbb{T}_c} \pm (C \underbrace{\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} \Gamma^c}_{(\Gamma^c)^2 = +1}) |s, \tilde{s}, k\rangle_{k-R}$$

$\Rightarrow$  si  $\Gamma^c$  estaba presente se cancela; si no, se agrega



Vemos entonces que

$$\begin{array}{ccc}
 \text{IIA} & \xrightarrow{\mathbb{T}_c} & \text{IIB} \\
 C_\alpha & \longleftrightarrow & C_{\alpha c} \\
 C_c & \longleftrightarrow & C \\
 C_{\alpha\beta\gamma} & \longleftrightarrow & C_{\alpha\beta\gamma c} \\
 C_{\alpha\beta c} & \longleftrightarrow & C_{\alpha\beta}
 \end{array}$$

De manera similar, las supercargas

$$Q, \tilde{Q} \xrightarrow{\mathbb{T}_c} Q, \pi_c \tilde{Q} .$$

Notar además que, en el caso de varias dimensiones compactas,

$$\mathbb{T}_{c_1 \dots c_d} : \text{IIA} \longrightarrow \begin{cases} \text{IIA} & \text{si } d \in 2\mathbb{Z} \\ \text{IIB} & \text{si } d \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}$$



Examinemos ahora el caso de la cuerda heterótica

Conviene usar para modos izquierdos descripción puramente bosónica,

$$\lambda^A(z) \quad A=1, \dots, 32 \longrightarrow X^h(z) \quad h=1, \dots, 16$$

Tras compactificar en  $T^d$  imponemos

condición de periodicidad sobre  $x^c$ ,  $c=10-d, \dots, 9$

y  $\therefore$  obtenemos momentos

$$K^v \equiv \frac{l_c}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} k_I^{9+h} \\ k_I^c \\ k_D^c \end{pmatrix} \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^{16+d, d}$$

con  $\mathcal{R}$  red par autodual con signatura  $(16+d, d)$

$$(K \cdot K \equiv \frac{l_c^2}{2} (k_I^{9+h} \delta_{hh'} k_I^{9+h'} + k_I^c G_{cc'} k_I^{c'} - k_D^c G_{cc'} k_D^{c'}))$$

Consideremos primero teoría sin compactificar ( $d=0$ ).

En este caso  $\mathcal{R}$  es una red euclídea (signatura

$(16, 0)$ ). Se sabe que, módulo rotaciones  $O(16)$ ,

$\exists$  exactamente 2 redes pares autoduales en  $\mathbb{R}^{16}$ :

$$\mathcal{R}_{16} \equiv \left\{ (n_1, \dots, n_{16}), (n_1 + \frac{1}{2}, \dots, n_{16} + \frac{1}{2}) \mid n_r \in \mathbb{Z}, \sum_{r=1}^{16} n_r \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

y

 $\mathcal{R}_8 \times \mathcal{R}_8$ , donde

$$\mathcal{R}_8 \equiv \left\{ (n_1, \dots, n_8), (n_1 + \frac{1}{2}, \dots, n_8 + \frac{1}{2}) \mid n_r \in \mathbb{Z}, \sum_{r=1}^8 n_r \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

Recordando que

$$m^2 = \underbrace{k_{I_{9+h}} k_{I_{9+h}}}_{\frac{2}{\alpha'} K_h K_h} + \frac{4}{\alpha'} (N-1) = \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - \tilde{\Delta})$$

como en  
supercuerdas

$$\frac{2}{\alpha'} K_h K_h \equiv \frac{2}{\alpha'} \tilde{f}_h \tilde{f}_h \equiv \frac{2}{\alpha'} \tilde{f}^2$$

observamos que estados sin masa tienen

$$* \tilde{f}^2 = 0, N=1: \sum_{\mu} \alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\psi}_{-1/2}^{\nu} |0, 0; k_{\mu}, 0^{16}\rangle \leftrightarrow \varphi_{\mu\nu}^h, h_{\mu\nu}$$

$$\sum_{\mu} \alpha_{-1}^{9+h, \mu} \tilde{\psi}_{-1/2}^{\nu} |0, 0; k_{\mu}, 0^{16}\rangle \leftrightarrow A_{\mu}^h$$

bosones de norma en 16 direcciones  $t_h$   
que conmutan ("subálgebra de Cartan")

Operadores de vértice  $i\partial X^{9+h}(\tau)$

$$* \quad \overset{\circ}{g}^2 = 2, N=0 : \quad \sum_{\mu} \binom{g}{\mu} \Psi_{-1/2}^{\mu} |0,0, \mu; g\rangle \leftrightarrow A_{\mu}^g$$

bosones de norma en 480 direcciones de  $t_g$  con carga  $g_h$  bajo  $t_h$ :

Operadores de Vértice  $e^{ik_{Ih} X^h(z)}$  ;  
 $i\partial X^h(z) : e^{ik_{Ih} X^h(0)} : \sim \sum' \frac{k_{Ih}}{z} : e^{ik_{Ih} X^h(z)} :$

$$\Rightarrow [t_h, t_g] = g_h t_g$$

•  $R_{16}$  :  $g = (\pm 1, \pm 1, 0^{14})$  ó permutaciones

$$4 \binom{16}{2} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 15}{2} = 480$$

480 "Raíces" de  $so(32) \Rightarrow$  Grupo de Norma es  $SO(32)$

•  $R_8 \times R_8$  :  $g = (\pm 1, \pm 1, 0^6, 0^8)$  ó  $(0^8, \pm 1, \pm 1, 0^6)$

ó permutaciones  $4 \binom{8}{2} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 7}{2} = 112$  112

ó  $g = (\pm \frac{1}{2}^8, 0^8)$  ó  $(0^8, \pm \frac{1}{2}^8)$  ó permutaciones

% número par de  $-\frac{1}{2}$ 's

$$1 + \binom{8}{2} + \binom{8}{4} + \binom{8}{6} + 1 = 128$$

240+240 "Raíces" de  $E_8 \times E_8 \Rightarrow$  grupo de Norma  $E_8 \times E_8$

Recuperamos entonces las 2 teorías de cuerdas conocidas.

Para  $d \geq 1$ , se sabe que existe una sola red por autodual, es decir, todas las redes con estas características están conectadas entre sí por rotaciones  $O(16+d, d, \mathbb{R})$ .

Por analogía con cuerda bosónica, el espacio de compactificaciones que a primera vista parecerían dar teorías distintas es

$$\frac{O(16+d, d, \mathbb{R})}{O(16+d, \mathbb{R}) \times O(d, \mathbb{R})}, \text{ el cual tiene dimensión}$$

$$\frac{(16+2d)(15+2d)}{2} - \frac{(16+d)(15+d)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} = d^2 + 16d$$

En términos de los campos que definen la compactificación,

$$G_{cc}, B_{cc} \Rightarrow \frac{d(d+1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} = d^2 \text{ parámetros}$$

$$+ A_c^h \quad h=1, \dots, 16 \Rightarrow \frac{16d \text{ parámetros}}{}$$

$\uparrow$  constante  
 Total  $d^2 + 16d$  ✓  
 ( $\therefore$  pura norma, como B)

Para los campos de norma vectoriales ( $\leftrightarrow$  líneas de Wilson), tenemos 16 parámetros porque este es el rango del grupo ( $so(32)$  ó  $E_8 \times E_8$ ).

El punto es que  $\mathcal{L}_{SYM} \sim \text{Tr}(F^2)$  incluye potencial  $\propto \text{Tr}([A_c, A_{c'}]^2)$ , de modo que para tener solución estática a las ecs. de mpv. debemos tomar  $A_c$ 's constantes y simultáneamente diagonalizables. Es decir, escribiendo

$$A_c = A_c^h t_h + A_c^{\tilde{q}} t_{\tilde{q}},$$

debemos poner  $A_c^{\tilde{q}} = 0$  y elegir valores de  $A_c^h$ .

En presencia de  $G_{cc'}, B_{cc'}, A_c^h$  (y en coords.

tales que  $x^c \simeq x^c + 2\pi l_c$ ), cuantización canónica da

$$k_{\pm}^c = \frac{n_c}{l_c} + (\pm G_{cc'} + B_{cc'}) \frac{e^{c'}}{l_c} - A_c^h \tilde{q}^h - A_c^h A_{c'}^h \frac{e^{c'}}{2} l_c,$$

$$k_{\pm}^{\tilde{q}+h} = \frac{\sqrt{2}}{l_c} (\tilde{q}^h + A_c^h e^c l_c), \quad c/\tilde{q}^h \in \begin{cases} \mathbb{R}_{16} & \text{en HO} \\ \mathbb{R}_9 \times \mathbb{R}_8 & \text{en HE} \end{cases}$$

[ver Nair, Sarmadi, Witten, NPB 279 (1987), 369]

Como en el caso de la cuerda bosónica, las transformaciones discretas que dejan al espectro

$$m^2 = k_{I_c} G^{cc'} k_{I_{c'}} + k_{I_{q+h}} \delta^{hh'} k_{I_{q+h}'} + \frac{4}{\alpha'} (N-1)$$

invariante forman grupo de dualidad  $T$

$O(16+d, d, \mathbb{Z})$ , y es generado por difeos grandes, corrimientos enteros de  $B_{cc'}$  ó  $A_c^h$ , y transformaciones  $R \leftrightarrow 1/R$  sobre cada eje.

Un punto interesante es que, dado que (módulo  $O(16+d, d, \mathbb{R})$ ) existe una sola red por auto dual  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{16+d, d}$ , debemos obtener el mismo conjunto de redes (y  $\therefore$  teorías) al compactificar HO ó HE...

Es decir, ¡  $\boxed{HO \xleftrightarrow{T} HE}!$

~~Para ver esto un poco más de cerca, consideremos por simplicidad el caso  $d=1$ , donde, en presencia de  $A_{c=9}^h$ , tenemos~~

$$k_{\pm}^q = \frac{n}{R} \pm \frac{eR}{l_c^2} - g_{\pm} A_q^h - \frac{eR}{2} A_c^h A_c^h$$

$$k_{\pm}^{q+h} = \frac{\sqrt{2}}{l_c} (g_{\pm} + eR A_q^h)$$

$$g_{\pm} \in \begin{cases} \mathcal{R}_{16} \text{ en HO} \\ \mathcal{R}_8 \times \mathcal{R}_8 \text{ en HE} \end{cases}$$

donde ahora hemos usado  $\text{Gord } x^q \simeq x^q + 2\pi R \leftrightarrow \theta_{q\mp} = 1$ .

$$\left( \text{Se puede ver que } K \circ K = \frac{l_c^2}{2} (k_{\pm}^2 - k_{\pm}^2) = 2en + g^2 \in 2\mathbb{Z} \checkmark \right)$$

• Si elegimos ahora HO con radio  $R$  y línea de Wilson

$$A_q^h = \begin{cases} \frac{1}{2R} & h=1, \dots, 8 \\ 0 & h=9, \dots, 16 \end{cases} \quad \left( \Rightarrow A_q^h A_q^h = 8 \left( \frac{1}{2R} \right)^2 = \frac{2}{R^2} \right),$$

encontramos que

$$k_{\pm}^q = \frac{n - \frac{1}{2}(g_1 + \dots + g_8) - e}{R} \pm \frac{eR}{l_c^2}$$

$$k_{\pm}^{q+h} = \frac{\sqrt{2}}{l_c} \times \begin{cases} g_{\pm} + \frac{e}{2} & \text{si } h=1, \dots, 8 \\ g_{\pm} & \text{si } h=9, \dots, 16 \end{cases} \quad \forall g \in \mathcal{R}_{16}$$

$$\text{A partir de } m^2 = (k_{\pm}^q)^2 + k_{\pm}^{q+h} k_{\pm}^{q+h} + \frac{4}{\alpha'} (N-1)$$

vemos que para  $n=e=N=0$  solo los estados

con  $g_1 + g_2 + \dots + g_8 = 0$  (y  $g^2 = 2$ ) permanecen

sin masa, es decir,



$$\vec{\eta} = (\pm 1, \mp 1, 0^6, 0^8) \quad (\text{con signos coordinados})$$

$$+ \text{permutaciones: } 2 \binom{8}{2} = 56$$

$$\text{ó} \\ \vec{\eta} = (0^8, \pm 1, \pm 1, 0^6) \quad (\text{cualquier combinación de signos})$$

$$+ \text{permutaciones: } 4 \binom{8}{2} = 112$$

El grupo de norma no roto por línea de Wilson resulta ser  $G = U(8) \times SO(16)$ .

- Si elegimos en cambio HE con radio  $R'$  y

$$A'_9{}^h = \begin{cases} \frac{1}{R'} & h=1,9 \\ 0 & h \neq 1,9 \end{cases} \quad (\Rightarrow A'_9{}^h A'_9{}^h = \frac{2}{R'^2})$$

encontramos que

$$k_{\text{I}}'^9 = \frac{n' - \eta'_1 - \eta'_9 - e'}{R'} \pm \frac{e' R'}{l_c^2}$$

$$k_{\text{I}}'^{9+h} = \frac{\sqrt{2}}{l_c} \times \begin{cases} \eta'_h + e' & \text{si } h=1,9 \\ \eta'_h & \text{si } h \neq 1,9 \end{cases} \quad \text{c/ } \eta' \in \Lambda_8 \times \Lambda_8$$

a partir de lo cual se puede deducir que el grupo de norma es  $G' = U(8) \times SO(16)$ .

Es posible mostrar que estas 2 redes están conectadas por dualidad T, con  $R' = \frac{l_c^2}{R}$ .

El mapeo del estado general  $(\bar{q}, n, e) \rightarrow (\bar{q}', n', e')$  es complicado [ver Ginsparg, PRD 35 (1987), 648]; pero resulta fácil de ver explícitamente en subsector con  $k_I^{q+n} = 0 = k_I'^{q'+n}$ .

Para estos estados tenemos

$$\bar{q}_h = \begin{cases} -e/2 & h=1, \dots, 8 \\ 0 & h=9, \dots, 16 \end{cases} \Rightarrow k_{\text{I}}^{\bar{q}} = \frac{n+e}{R} \pm \frac{eR}{l_c^2},$$

$$\text{y } \bar{q}'_h = \begin{cases} -e & h=1, 9 \\ 0 & h \neq 1, 9 \end{cases} \Rightarrow k_{\text{I}}'^{\bar{q}'} = \frac{n'+e'}{R'} \pm \frac{e'R'}{l_c^2},$$

que satisfacen  $k_{\text{I}}'^{\bar{q}'} = k_{\text{I}}^{\bar{q}}$ ,  $k_{\text{D}}'^{\bar{q}'} = -k_{\text{D}}^{\bar{q}}$  bajo

$$R' = \frac{l_c^2}{R}, \quad e' = n+e, \quad n' = -n \quad (\Rightarrow e+n' = e).$$

26/09/06

¿Qué pasa con teoría tipo I bajo  $T$ ?

2 novedades  $\begin{cases} \text{cuerdas abiertas} \\ \text{cuerdas no orientadas} \end{cases}$

Estudiaremos cada una por separado.

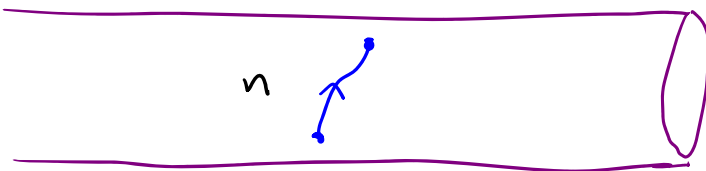
Consideremos primero teoría con cuerdas abiertas orientadas (pej., cuerda bosónica).

Incluye necesariamente cuerdas cerradas, y sabemos que al compactificar en  $S^1$ ,



$T$ :  $\begin{matrix} \text{sector de cuerdas} \\ \text{cerradas con } (n, e) \end{matrix} \longleftrightarrow \begin{matrix} \text{sector de cuerdas cerradas} \\ \text{con } (n_T, e_T) = (e, n) \end{matrix}$

¿Qué sucede con el sector de cuerdas abiertas?



Posee número KK pero no enrollamiento,  $\therefore$  No puede mapearse a sector de cuerdas abiertas y mismas propiedades.

En particular, cuando  $R \rightarrow 0$  tenemos

$$m^2 \sim \left(\frac{n}{R}\right)^2 \rightarrow \infty \text{ si } n \neq 0 \Rightarrow \text{reducción dimensional!}$$

Es decir, las cuerdas abiertas en descripción T-dual se mueven no en  $D$  sino en solo  $D-1$  dimensiones...

¿Cómo es que esto no contradice el hecho de que tendremos cuerdas cerradas en  $D$  dimensiones?

Lo que distingue a las cuerdas abiertas de las cerradas son sus extremos, donde imponemos ciertas condiciones de borde.

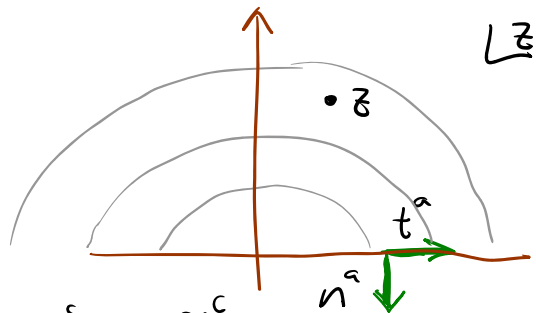
En la teoría original,

$$X^c(z, \bar{z}) = X^c(z) + \tilde{X}^c(\bar{z})$$

imponemos c.b. Neumann

(extremo libre):  $\partial_n X^c \Big|_{\partial M} = 0 \leftrightarrow \partial X^c \Big|_{z=\bar{z}} = \bar{\partial} \tilde{X}^c \Big|_{z=\bar{z}}$

$\underbrace{\partial_n}_{\equiv \tilde{n}^a \partial_a} = \partial_\sigma \quad \leftarrow \quad \partial_\sigma = i(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}})$



$$\Rightarrow X^c(\bar{z}) = \tilde{X}^c(\bar{z}) \text{ impuesto en } z = \bar{z};$$

truco de duplicación es usar  $\forall z$ , es decir,

$$X^c(z, \bar{z}) = X^c(z) + X^c(\bar{z}).$$

En teoría  $T$  dual tendremos entonces

$$X_{\mathbb{T}}^c(z, \bar{z}) = X_{\mathbb{T}}^c(z) + \tilde{X}_{\mathbb{T}}^c(\bar{z}) = X^c(z) - \tilde{X}^c(\bar{z}),$$

con condiciones de borde  $\partial X|_{z=\bar{z}} = \bar{\partial} \tilde{X}|_{z=\bar{z}}$

$$\Rightarrow \partial X_{\mathbb{T}}^c|_{z=\bar{z}} = -\bar{\partial} \tilde{X}_{\mathbb{T}}^c|_{z=\bar{z}} \iff \partial_t X_{\mathbb{T}}^c|_{\partial\mathcal{M}} = 0$$

$\uparrow$   $\partial_{\bar{z}} = i(z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}})$   $\uparrow$   $\underbrace{\partial_t}_{\equiv t^a \partial_a} = \partial_c$

es decir, c.b. Dirichlet (extremo fijo).

Podemos satisfacerlas tomando

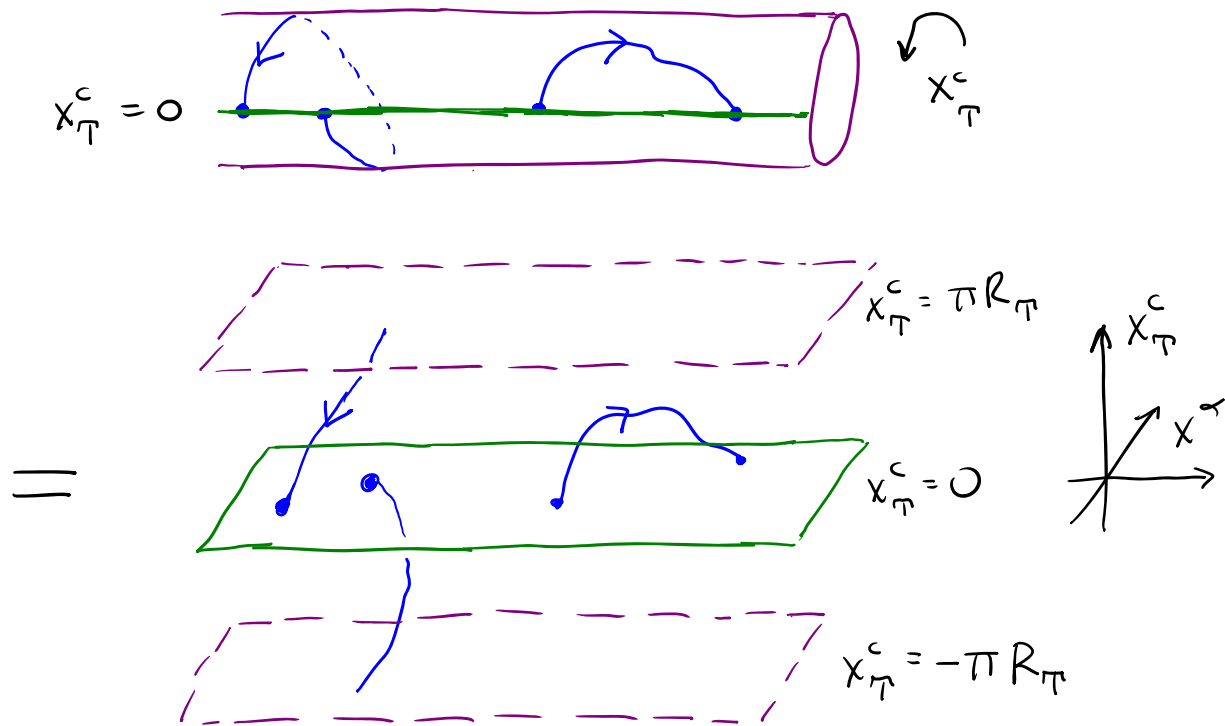
$$X_{\mathbb{T}}^c(\bar{z}) = -\tilde{X}_{\mathbb{T}}^c(\bar{z}) \quad \text{impuesto en } z=\bar{z};$$

truco de duplicación es usar  $\forall z$ , es decir,

$$X_{\mathbb{T}}^c(z, \bar{z}) = X_{\mathbb{T}}^c(z) - X_{\mathbb{T}}^c(\bar{z}).$$

En cualquier caso, tenemos  $X_{\mathbb{T}}^c(z, \bar{z}) = 0 \quad \forall z=\bar{z}$ ,

de donde vemos que ambos extremos de la cuerda abierta están fijos en  $x_{\mathbb{T}}^c = 0$  (aunque pueden moverse libremente a lo largo de  $x^{\alpha}$ ):



Semejante cuerda abierta no puede tener números KK  $n_\pi (=e=0)$ , pero sí enrollamiento  $e_\pi$ :

$$\begin{aligned}
 X_\pi^c(\sigma=\pi, \tau) - X_\pi^c(\sigma=0, \tau) &= \int_0^\pi d\sigma \underbrace{\partial_\sigma X_\pi^c(\sigma, \tau)}_{i(\bar{z}\partial X_\pi^c(z) - \bar{z}\bar{\partial} X_\pi^c(\bar{z}))} \\
 &= \int_0^\pi d\sigma \underbrace{\partial_\sigma X_\pi^c(\sigma, \tau)}_{i(\bar{z}\partial X_\pi^c(z) + \bar{z}\bar{\partial} X_\pi^c(\bar{z}))} \\
 &= 2\pi\alpha' \left(\frac{n}{R}\right) \equiv e_\pi 2\pi R_\pi
 \end{aligned}$$

con  $e_\pi = n$

Recordemos ahora que, en teoría original, espectro es

$$M^2 = \left(\frac{n}{\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N-1),$$

y estados sin masa  $\alpha'^{M/2} |0; k_\alpha, 0\rangle$  representan fotón: fluctuación infinitesimal en campo de norma  $A_\mu(x)$  definido en  $D$  dimensiones.

El operador de vértice correspondiente es  $\partial_\tau X^\mu$

$$(\leftrightarrow \partial_\tau X^\mu \leftrightarrow \partial X^\mu + \bar{\partial} \tilde{X}^\mu = 2\partial X^\mu), \quad \text{y } \therefore$$

cuerda abierta en fondo  $A_\mu(x)$  no trivial se describe con

$$S \rightarrow S + \int d\tau A_\mu(X) \partial_\tau X^\mu$$

El término adicional modifica las condiciones de borde:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X_\mu \partial_a X^\mu + \int d\tau A_\mu \partial_\tau X^\mu$$

$$\begin{aligned} \delta X^\mu \implies \delta S &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial^2 X^\mu \delta X_\mu \\ &+ \int d\tau \left[ \frac{1}{2\pi\alpha'} \delta X_\mu \partial_\sigma X^\mu + \delta X^\nu \partial_\nu A_\mu \partial_\tau X^\mu + A_\mu \partial_\tau \delta X^\mu \right] \\ &\quad - \underbrace{\partial_\tau X^\mu \partial_\nu A_\mu \delta X^\nu} \end{aligned}$$

así que condiciones de borde son ahora

$$\partial_\sigma X^{\tilde{m}} + 2\pi\alpha' F_{\tilde{m}\nu} \partial_\tau X^\nu = 0$$

(las cuales se reducen a Neumann usual cuando  $F_{\tilde{m}\nu} = 0$ ).

Recordemos también que no cualquier  $A_{\tilde{m}}(x)$  constituye un fondo consistente para la propagación de la cuerda:  $A_{\tilde{m}}(x)$  debe definir teoría 2-dim conforme, para lo cual es necesario que satisfaga ec. de mov.

Al orden más bajo en  $\alpha'$ , esta ecuación es simplemente la de Maxwell en el vacío:  $\partial_{\tilde{m}} F^{\tilde{m}\nu} = 0$ .

Las soluciones más sencillas son aquellas con

$$F_{\tilde{m}\nu} = \text{constante} \iff A_{\tilde{m}} \text{ lineal.}$$

Para poder discutir dualidad T, tomemos

$$A_{\tilde{m}} = A_{\tilde{m}}(x^{\tilde{a}}) = F_{\tilde{a}\tilde{m}} x^{\tilde{a}} \quad (\text{independiente de } x^c),$$

o, para ser más concretos,  $A_\alpha = 0$ ,  $A_c = f X^1$ .

En este caso, condiciones de borde para cuerda abierta son

$$\partial_\sigma X^1 + 2\pi\alpha' \partial_\tau X^c = 0, \quad \partial_\sigma X^c - 2\pi\alpha' f \partial_\tau X^1 = 0 \quad (\text{y } \partial_\sigma X^{\tilde{a} \neq 1} = 0).$$



En descripción  $T$ -dual, estas se convierten en

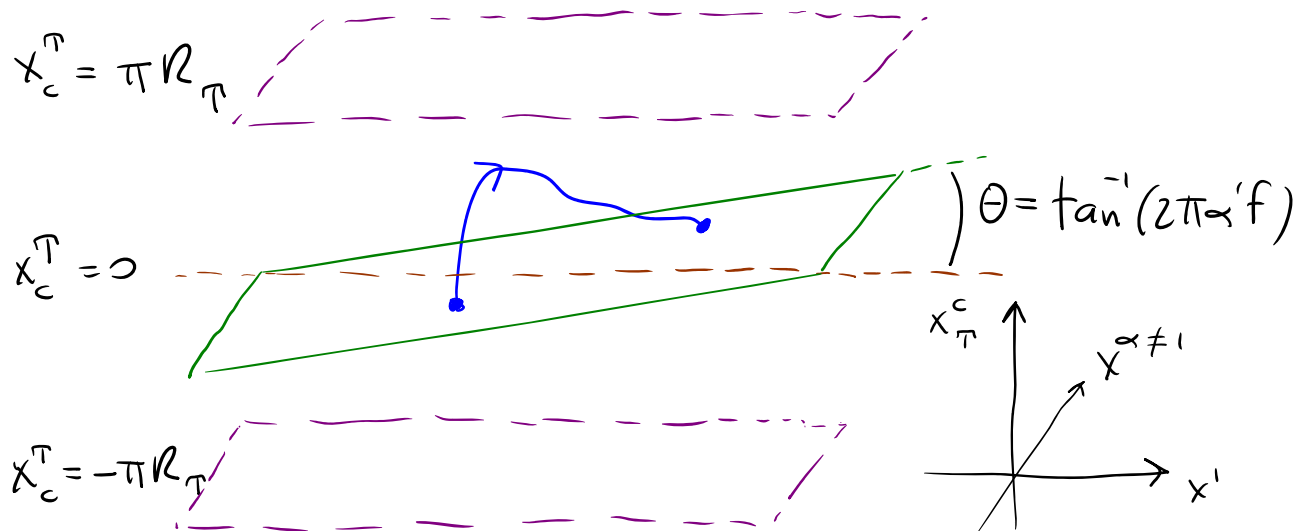
$$\partial_\sigma X' + 2\pi\alpha' f \partial_\sigma X_\tau^c = 0, \quad \partial_\tau X_\tau^c - 2\pi\alpha' f \partial_\tau X' = 0 \quad (\partial_\sigma X^{\alpha \neq 1} = 0)$$

es decir,

$$\partial_\sigma (X' + 2\pi\alpha' f X_\tau^c) = 0 \quad \text{Neumann}$$

$$\partial_\tau (X_\tau^c - \underbrace{2\pi\alpha' f}_{A_c} X') = 0 \quad \text{Dirichlet}$$

de donde vemos que ambos extremos de la cuerda están ahora fijos sobre un hiperplano inclinado:



La conclusión es entonces que, en teoría  $T$ -dual,

$\Phi_c(x^\alpha) \equiv 2\pi\alpha' A_c(x^\alpha)$  describe la posición del

hiperplano en la dirección  $X_\tau^c$ .

El ejemplo que hemos visto es

$$F_{ic}(x^\alpha) = f \iff A_c(x^\alpha) = f x^i \iff \underline{\Phi}_c(x^\alpha) = 2\pi\alpha' f x^i$$

Campo magnético

Hiperplano inclinado con  
pendiente cte.  $\tan\theta = 2\pi\alpha' f$

pero igualmente es posible ver que

$$F_{oc}(x^\alpha) = f \iff A_c(x^\alpha) = f x^o \iff \underline{\Phi}_c(x^\alpha) = 2\pi\alpha' f x^o$$

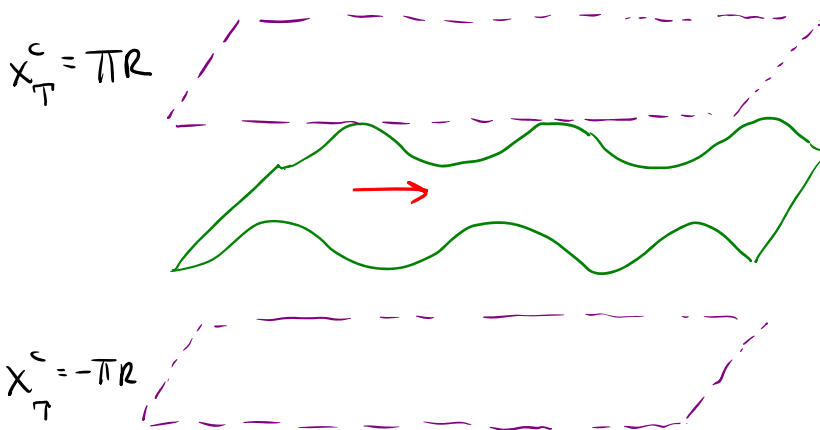
Campo eléctrico

Hiperplano moviéndose  
con velocidad cte.  $v = 2\pi\alpha' f$

Otro ejemplo es onda electromagnética plana,

$$A_c(x^\alpha) = \int dk e^{ik(x^i - x^o)} f(k), \text{ que también resuelve}$$

ec. de Maxwell, y corresponde a hiperplano ondulatorio:



$$\underline{\Phi}_c(x^\alpha) = \int dk e^{ik(x^i - x^o)} 2\pi\alpha' f(k)$$

[ver Callan y Klebanov,  
hep-th/9511173]

Vemos entonces que el hiperplano es un objeto dinámico, capaz de cambiar su orientación, moverse u oscilar: **D-brana**  $\left\{ \begin{array}{l} \text{"D" de Dirichlet} \\ \text{"brana" de membrana} \end{array} \right.$

Regresando al caso con fondo  $A_c = 0$  ( $\Leftrightarrow \Phi_c = 0$ ), espectro de cuerda abierta en descripción T-dual es

$$m^2 = \left( \frac{e_{\tau} R_{\tau}}{\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N-1)$$

Los estados sin masa son ahora de 2 tipos distintos:

$$\alpha_{-1}^{\alpha} |0; k, 0\rangle \xleftrightarrow{e_{\tau}} \text{Vértice } \partial_{\tau} X^{\alpha}$$

y

$$\alpha_{-1}^c |0; k, 0\rangle \xleftrightarrow{} \text{Vértice } \partial_{\tau} X^c$$

El primero representa una fluctuación infinitesimal en campo de norma  $A_{\tau}(x^{\alpha})$  que vive sobre hiperplano. El segundo representa una fluctuación infinitesimal en la posición del hiperplano ("coordenada colectiva") a lo largo de la única dirección transversal  $x_{\tau}^c$ ; es el bosón de Goldstone asociado a la ruptura espontánea de la invariancia translacional.

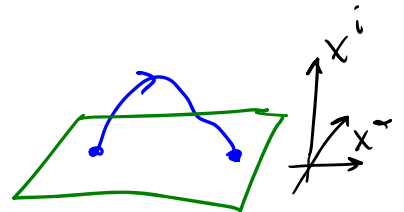
Nuestra conclusión es entonces que, justo como las cuerdas cerradas describen excitaciones de la generalización cuerdística del espaciotiempo, las cuerdas abiertas describen excitaciones de la D-brana en la cual se encuentran sus extremos.

[28/09/06]

Notar que podemos generalizar fácilmente al caso donde T-dualizamos más direcciones:

$$T_{\underbrace{D-1, D-2, \dots, p+1}_{l \equiv D-p-1 \text{ direcciones}}} \Rightarrow \text{c.b.} \begin{cases} \partial_n X^\alpha = 0 & \alpha = 0, \dots, p \text{ Neumann} \\ \partial_t X^i = 0 & i = p+1, \dots, D-1 \text{ Dirichlet} \end{cases}$$

donde lo que obtenemos es una **D<sub>p</sub>-brana** (hiperplano con p dimensiones espaciales),



cuyas excitaciones nuevamente son unidimensionales — están descritas por cuerdas abiertas que empiezan y terminan en la brana. La cuantización de estas cuerdas da lugar a una torre infinita de estados, asociados a campos que viven sobre el hiperplano.

En particular, tenemos campos sin masa

$A_\alpha(x^\alpha)$  : campo de norma sobre  $D_p$ -brana


$\Phi^i(x^\alpha)$  : Campos escalares sobre  $D_p$ -brana,  
que describen su posición en las  $D-p-1$   
direcciones transversales.

Hemos descubierto entonces una nueva serie de  
objetos extendidos en la teoría de cuerdas, conectados

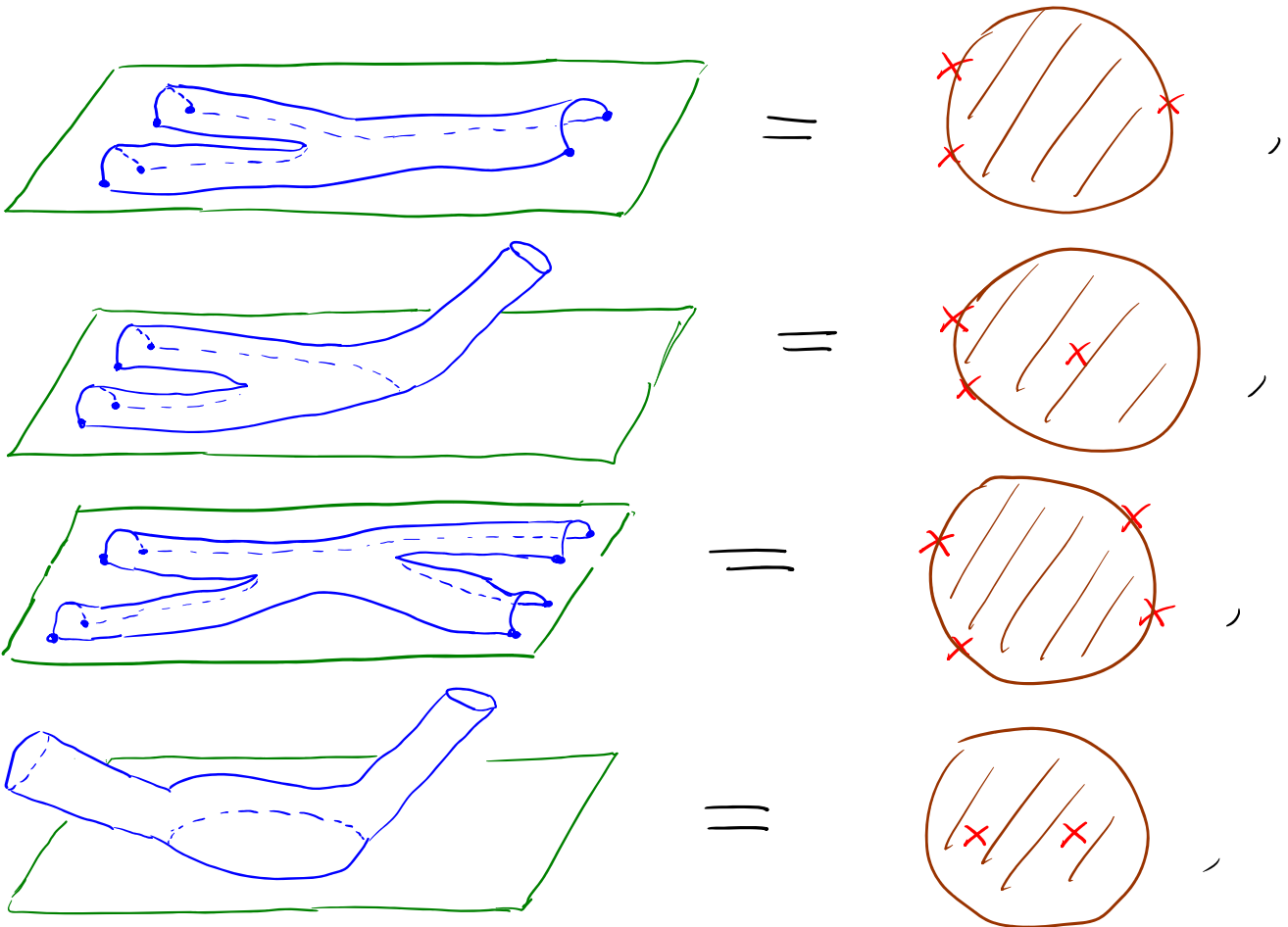
entre sí a través de  $D_p \xrightarrow{T_\mu} \begin{cases} D(p-1) & \text{si } \mu = \alpha \\ D(p+1) & \text{si } \mu = i \end{cases}$

Notar que antes de T-dualizar ( $l=0$ ) teníamos, sin  
saberlo, una  $D(D-1)$ -brana ( $D25$ -brana en el caso  
de la cuerda bosónica,  $D9$ -brana en supercuerda):

hiperplano que llena TODO el espacio, cuyas excitaciones  
son  $\therefore$  cuerdas abiertas que se mueven libremente en  
todas las direcciones.

En el extremo opuesto, si T-dualizamos todas las  
direcciones ( $l=D-1$ ), obtenemos una  $D0$ -brana,   
que es una partícula ¡con una torre infinita de excitaciones!

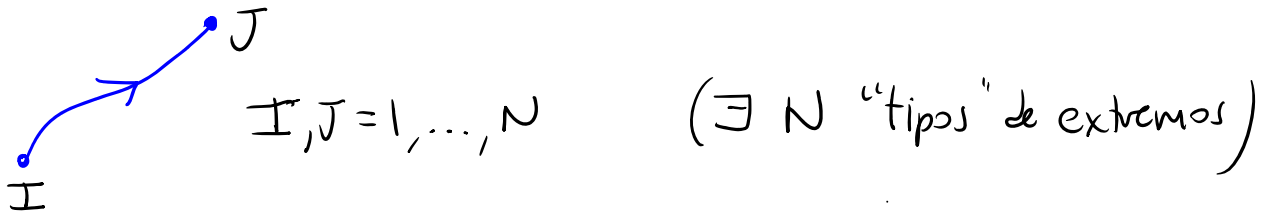
Notar que podemos determinar la manera en que interactúan entre sí (o con el entorno) las distintas excitaciones de la D-brana calculando amplitudes de dispersión de cuerdas abiertas (o abiertas y cerradas):



etc. [ver, p.ej., Hashimoto, Klebanov, hep-th/9611214]

Otra generalización: factores de Chan-Paton.

Recordar que, en teoría original donde cuerda abierta satisface c.b. puramente Neumann, es posible obtener campo de norma no abeliano postulando que en cada extremo existe un grado de libertad adicional, no dinámico, que puede estar en uno de  $N$  estados:



El estado general es entonces una combinación lineal

$$\Lambda_{IJ} |\dots; IJ\rangle \longleftrightarrow \phi_{\dots IJ}(x),$$

↖ factor de Chan-Paton

y las amplitudes incluyen factores  $\text{Tr}(\Lambda^{(1)} \Lambda^{(2)} \dots)$ .

Tanto el espectro como las amplitudes son evidentemente invariantes bajo transformaciones  $U(N)$

$$\Lambda \longrightarrow \Lambda' = U \Lambda U^{-1} = U \Lambda U^\dagger,$$

(sólo  $SO(N)$  ó  $Sp(N)$  en cuerda no orientada).

Esto equivale a redefinir etiquetas para extremos:

$$|IJ\rangle \rightarrow |I'J'\rangle = U_{II'}^{-1} |IJ\rangle U_{J'J}$$

Es decir, extremo final/inicial transforma en representación fundamental/antifundamental de  $U(N)$ ;

mientras que el estado en conjunto transforma en representación adjunta. En caso infinitesimal,

$$\Lambda \rightarrow \Lambda' = e^{i\epsilon^r t_r} \Lambda e^{-i\epsilon^r t_r} = \Lambda + i\epsilon^r [t_r, \Lambda] + \dots$$

Tomando  $U(1)_1 \times U(1)_2 \times \dots \times U(1)_N \subset U(N)$ ,

$N$  generadores simultáneamente diagonalizables

$$t_h = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{i.e., } (t_h)_{IJ} = \delta_{hI} \delta_{hJ})$$

$N^2 - N$  generadores restantes  $(t_q)_{IJ} = \delta_{iI} \delta_{jJ}$

$$[t_h, t_q] = q_h t_q \quad q_h = \begin{cases} +1 & h=i \\ -1 & h=j \\ 0 & h \neq i, j \end{cases}$$

vernos que estado  $|ij\rangle \leftrightarrow \Lambda_{IJ} = \delta_{iI} \delta_{iJ}$

porta carga  $q_i = +1$  bajo  $U(1)_i$  y  $q_j = -1$  bajo  $U(1)_j$ .



Consideremos ahora el efecto de encender un valor de fondo constante para el campo de norma,

$$A_c^h \equiv \frac{\theta_h}{2\pi R} \quad h=1, \dots, N$$

(con  $1 \leq \theta_h < 2\pi$ , porque  $k\alpha$  de Wilson

$$\exp\left[i\oint dx^c A_c^h t_h\right] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & e^{i2\pi R A_c^h} & \\ & & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

es invariante bajo  $A_c^h \rightarrow A_c^h + \frac{\lambda}{R} \quad \lambda \in \mathbb{Z}$ ).

En su presencia, acoplamiento  $\frac{1}{T_h} \int d\tau A_c^h \partial_\tau X^c$  corre la definición del momento conjugado a  $X^c$ ,

que ahora es

$$P_c = \frac{h}{R} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \partial_\tau X^c + \frac{\theta_i - \theta_j}{2\pi R}$$

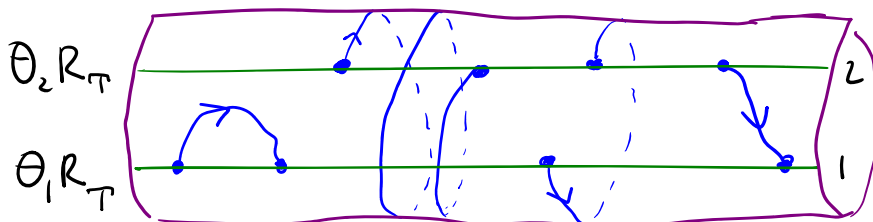
para estado  $|ij\rangle$ .

Pasemos ahora a la descripción T-dual, donde tendremos nuevamente  $N^2$  estados por cada modo de oscilación.

Encontramos que un estado de cuerda abierta del tipo  $|ij\rangle$  tiene número de enrollamiento

$$\begin{aligned} X_{\tau}^c(\sigma=\pi) - X_{\tau}^c(\sigma=0) &= \int_0^{\pi} d\sigma \partial_{\sigma} X_{\tau}^c \\ &= \int_0^{\pi} d\sigma \partial_{\sigma} X^c \\ &= 2\pi\alpha' \left( \frac{n}{R} - \frac{\theta_i - \theta_j}{2\pi R} \right) \\ &= e_{\tau} 2\pi R_{\tau} + \theta_j R_{\tau} - \theta_i R_{\tau} \end{aligned}$$

Dado que cada uno de los extremos de estas  $N^2$  tipos de cuerda abierta vive sobre una D-brana, vemos que tenemos ahora  **$N$  D-branas** en distintas posiciones  $X_{\tau}^c = \theta_1 R_{\tau}, \theta_2 R_{\tau}, \dots, \theta_N R_{\tau}$  :



$ ij\rangle :$	1-1	2-2	1-2	2-1
$e_{\tau} :$	0	+2	-1	0

Confirmamos aquí que  $\Phi_c^h(x^\tau) \equiv 2\pi\alpha' A_c^h(x^\tau)$  describe la posición de la D-brana número  $h$ .  
 Notar que aún en la teoría original teníamos  $N$  D-branas (todas coincidentes, puesto que  $D(D-1)$ -branas llenan todo el espacio), y el grado de libertad de Chan-Paton asociado a cada extremo de una cuerda abierta (simplemente denota a cual de las  $N$  D-branas está adherido!)  
 Y tanto en la descripción original como en la T-dual, la simetría  $U(N)$  se origina simplemente de la posibilidad de reetiquetar a las  $N$  D-branas.

Configuración con:

Lazo de Wilson $A_c^h$	$\Uparrow$ $\longleftrightarrow$	D-branas desplazadas
con $n_1$ $\theta_1/2\pi R$ 's		$n_1$ en $\theta_1 R_\tau$
$n_2$ $\theta_2/2\pi R$ 's		$n_2$ en $\theta_2 R_\tau$
$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$

rompe espontáneamente  $U(N) \rightarrow U(n_1) \times U(n_2) \times \dots$

En teoría T-dual, una cuerda abierta del tipo  $i$ - $j$  debe satisfacer condiciones de borde

$$\begin{cases} \text{en } \sigma=0: & X_{\tau}^c = \theta_i R_{\tau}, \quad \partial_{\sigma} X^{\tau} = 0 \quad \forall \tau \\ \text{en } \sigma=\pi: & X_{\tau}^c = \theta_j R_{\tau} + e_{\tau} 2\pi R_{\tau}, \quad \partial_{\sigma} X^{\tau} = 0 \quad \forall \tau \end{cases}$$

y tiene  $\therefore$  expansión en modos

$$X_{\tau}^c(z, \bar{z}) = \theta_i R_{\tau} + \frac{R_{\tau}}{2\pi i} (2\pi e_{\tau} - \theta_i + \theta_j) \ln\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^c}{m} \left(z^{-m} - \bar{z}^{-m}\right)$$

El espectro resultante es

$$m^2 = \left[ \frac{R_{\tau} (2\pi e_{\tau} + \theta_j - \theta_i)}{2\pi \alpha'} \right]^2 + \frac{1}{\alpha'} (N-1).$$

Si las  $N^2$  D-branas están en la misma posición

(p.ej.  $\theta_h = 0, h=1, \dots, N$ ), obtenemos  $N^2 \cdot D$  estados sin masa

$$(\mathcal{E}_{\alpha})_{IJ} \propto \langle 0, k^{\tau}, 0, IJ \rangle \quad (\mathcal{E}_{\alpha})_{IJ} \propto \langle 0, k^{\tau}, 0, IJ \rangle$$

que representan fluctuaciones en campos en  $D-1$  dimensiones

$$(A_{\alpha})_{IJ} = A_{\alpha}^{\nu}(t_{\nu})_{IJ} \quad \text{campo de norma } U(N)$$

$$(\Phi_c)_{IJ} = \Phi_c^{\nu}(t_{\nu})_{IJ} \quad \text{campo escalar en representación adjunta}$$

$\uparrow$   $N$  objetos  $\leftrightarrow N^2$  grados de libertad!

Si separamos  $\perp$  D-brana, tomando p.ej.

$$\langle \Phi'_c \rangle = \theta_1 R_\tau \neq 0,$$

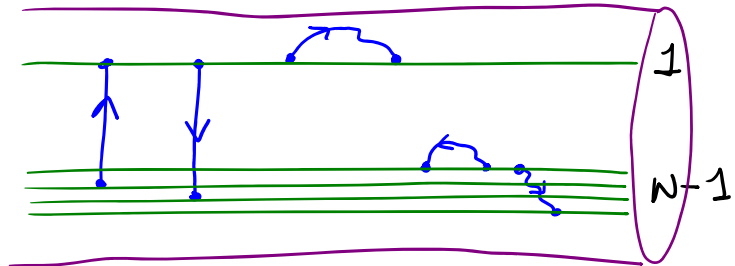
entonces los  $2(N-1) \cdot D$  estados  $|I1\rangle, |IJ\rangle$   $I, J \neq 1$

adquieren masa:

$$m = \frac{R_\tau |\theta_1|}{2\pi \alpha'}$$

$$x_\tau^c = R_\tau \theta_1$$

$$x_\tau^c = 0$$



$\therefore$  Grupo de Norma  $U(N) \rightarrow U(N-1) \times U(1)$

En acción efectiva a bajas energías, esto es precisamente el mecanismo de Higgs:

$$\mathcal{L}_{\text{SYM}} \supset \text{Tr}([\Phi_c, A_\alpha]^2) = \text{Tr}(\underbrace{R_\tau^2 \theta_1^2}_{\substack{\varphi, t_\varphi}} [\underbrace{t_1, t_\varphi}_{\substack{\varphi, t_\varphi}}] A_\alpha^\varphi A_\alpha^{\varphi'} [\underbrace{t_1, t_{\varphi'}}_{\substack{\varphi', t_{\varphi'}}}])$$

$$\propto \underbrace{R_\tau^2 \theta_1^2}_{\propto m^2} \sum_{\varphi | \varphi' \neq 0} A_\alpha^\varphi A_\alpha^{\varphi'} \sim \text{bosones } W$$

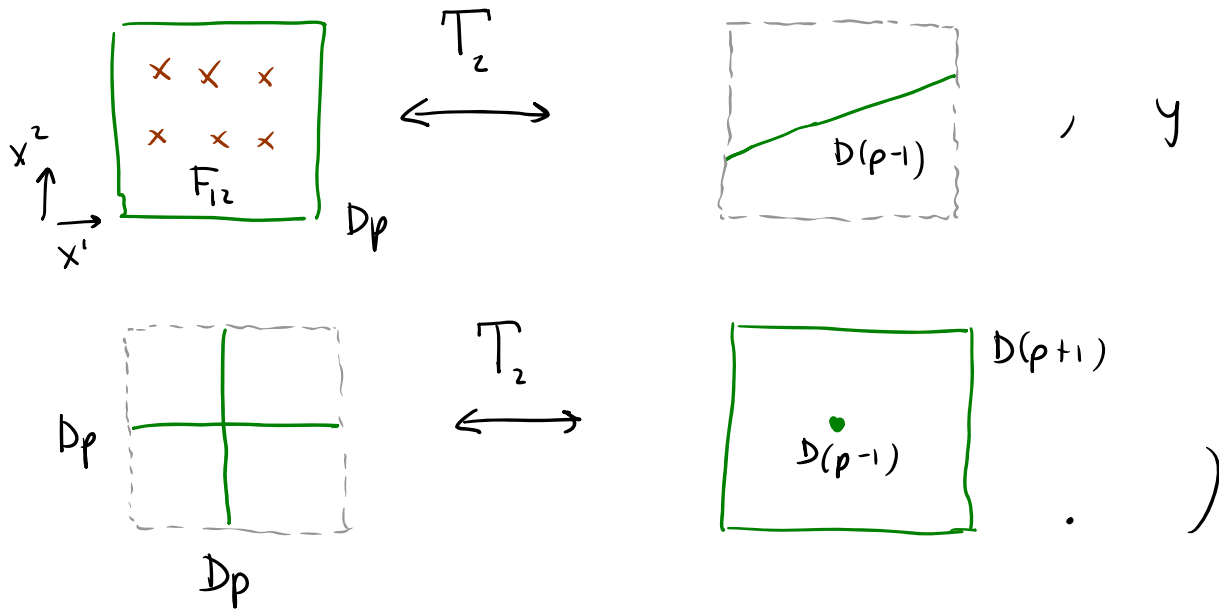
Vale la pena resaltar que el descubrimiento de las D-branas implica una unificación de las teorías con y sin cuerdas abiertas.

En particular, de los  $2 + 2 \times \infty$  tipos de teorías de cuerdas bosónicas (orientadas o no, con o sin cuerdas abiertas, con  $N \geq 1$  grados de libertad de Chan-Paton), podemos concluir directamente que las  $1 + 1 \times \infty$  teorías orientadas son parte de una sola.

En efecto, si comenzamos con la teoría  $U(N)$  con  $N$  arbitrariamente, compactificamos todas las dimensiones espaciales, y encendemos líneas de Wilson  $\Theta_c^h$  y/o campos magnéticos  $F_{cc}^h$ , y/o eléctricos  $F_{oc}^h$  entonces a través de distintas secuencias de dualidades T podemos obtener una teoría con cuerdas cerradas libres de moverse en  $25+1$  dimensiones y cuerdas abiertas con extremos adheridos a  $N$  D-branas de distinta dimensionalidad, ubicadas en

posiciones distintas y/o inclinadas a distintos ángulos  
y/o moviéndose a distintas velocidades.

(Recordar en particular que



Después de ello podemos descompactificar algunas o todas las dimensiones, ajustando los valores de  $\theta_c^h$  para retener solo  $n \in \mathbb{N}$  D-branas cerca del origen (con dimensiones, posiciones, orientaciones y velocidades arbitrarias).  
En nuestra concepción antigua, donde no "veíamos" a las D-branas y nos fijábamos solamente

en lo que hacían las cuerdas cerradas y abiertas, cada una de esta colección infinita de posibles configuraciones hubiera definido una teoría distinta (aunque no habíamos hablado de la mayor parte de ellas porque no poseen invariancia de Poincaré).

Pero ahora entendemos que se trata simplemente de distintos estados dentro de una misma teoría, que se diferencian uno de otro por el número y tipo de  $D_p$ -branas que contienen. Esto incluye en particular al estado con  $n=0$   $D$ -branas, que es precisamente la "teoría" con solo cuerdas cerradas.

---

Para intentar un razonamiento semejante en el caso de las teorías de cuerdas no orientadas (bosónicas o Tipo I), nos falta entender el efecto de la dualidad  $T$  en este contexto.



Consideremos primero cuerdas cerradas no orientadas.  
 Recordar que en este caso la acción de paridad  
 en la hoja de mundo ( $\sigma \leftrightarrow 2\pi - \sigma$ ) es

$$\Omega: \alpha_m^{\omega} \leftrightarrow \tilde{\alpha}_m^{\omega}, \quad (n, e) \leftrightarrow (n, -e)$$

$$\Rightarrow p_{\frac{I}{D}}^c \leftrightarrow p_{\frac{D}{I}}^c,$$

y que en teoría no orientada retenemos solo los  
 estados que son invariantes bajo esta transformación,

$$\text{como p.ej.}, \quad \alpha_{-1}^{\omega} |0, 0; k_{\alpha, 1, -1}^{n, e}\rangle + \tilde{\alpha}_{-1}^{\omega} |0, 0; k_{\alpha, 1, 1}^{n, e}\rangle.$$

Bajo  $T_c$ , la componente  $\mu=c$  se convierte en

$$\alpha_{-1}^c |0, 0; k_{\alpha, -1, 1}\rangle - \tilde{\alpha}_{-1}^c |0, 0; k_{\alpha, 1, 1}\rangle,$$

estado que es simétrico no bajo  $\Omega$ , sino bajo

$$\alpha_m^c \leftrightarrow -\tilde{\alpha}_m^c, \quad (n, e) \leftrightarrow (-n, e)$$

$$\Rightarrow p_{\frac{I}{D}}^c \leftrightarrow -p_{\frac{D}{I}}^c$$

Es decir, lo que en descripción original era

$$\Omega : X^c(z) \leftrightarrow \tilde{X}^c(\bar{z}) \Rightarrow X^c(z, \bar{z}) \leftrightarrow X^c(\bar{z}, z),$$

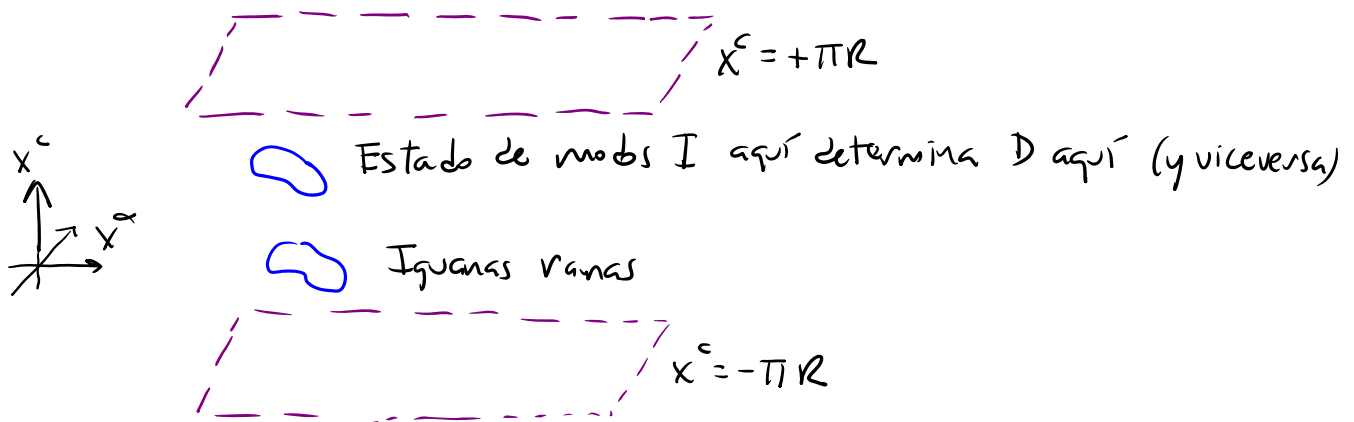
en descripción T-dual se convierte en

$$\Omega \Pi^c : X_{\uparrow}^c(z) \leftrightarrow -\tilde{X}_{\uparrow}^c(\bar{z}) \Rightarrow X_{\uparrow}^c(z, \bar{z}) \leftrightarrow -X_{\uparrow}^c(\bar{z}, z)$$

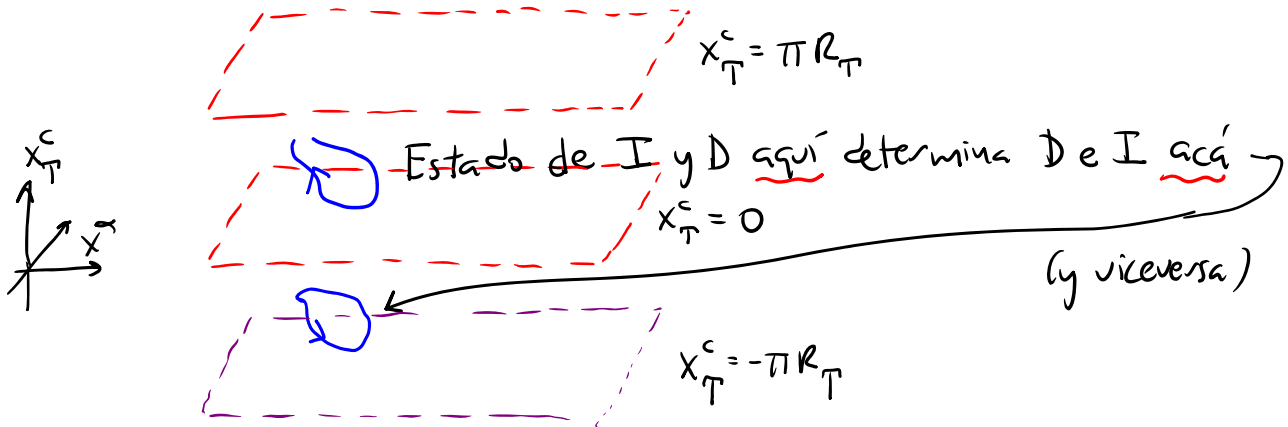
↑ paridad en espaciotiempo a lo largo de  $X_{\uparrow}^c$   
 ↑ paridad en hoja de mundo

y la teoría contiene entonces solo los estados que son simétricos bajo esta transformación.

Mientras que en la teoría original



después de T-dualizar encontramos



El espacio físico se reduce por lo tanto al intervalo

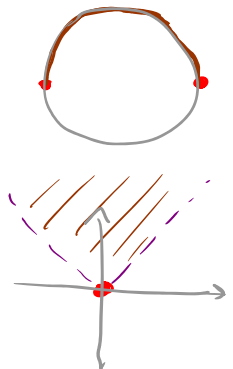
$$S^1/\mathbb{Z}_2 = \left\{ x_T^c \mid 0 \leq x_T^c \leq \pi R_T \right\}$$

←  $\{1, \Omega\pi^c\}$  Orientación (u Orientifolio)

Esta es una generalización del concepto matemático, más conocido, de orbidad (u orbifoldio), abreviación de órbita-variedad, donde se identifican puntos de una variedad conectados por la acción de algún grupo  $G$  de simetrías puramente geométricas.

P.ej.  $S^1/\mathbb{Z}_2 = \left\{ x^c \in \mathbb{R} \mid x^c \simeq x^c + 2\pi R, x^c \simeq -x^c \right\}$   
 ←  $\{1, \pi^c\}$

o  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z \simeq e^{i2\pi/3} z \simeq e^{i4\pi/3} z \right\}$   
 ←  $\{1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\}$



En estos ejemplos vemos que, si  $G$  tiene puntos fijos, la órbita es singular (no es una variedad) ahí. A pesar de ello, la teoría de cuerdas está bien definida en órbitas (gracias a sectores 'torcidos') [Dixon, Harvey, Vafa, Witten, NPB 261 (1985) 678]. Las orientidades son una generalización cuerdística donde tomamos el cociente por  $\Omega G$  en vez de  $G$ . En el caso que estamos estudiando,  $\Omega G = \{1, \Omega\pi^c\}$ , el espacio termina en los hiperplanos  $(D-1)$ -dimensionales  $x_\pi^c = 0$  y  $x_\pi^c = \pi R_\pi$ , los cuales se distinguen precisamente porque quedan fijos bajo  $x_\pi^c \rightarrow -x_\pi^c$ . Notar que si una cuerda se mete a uno de estos 2 hiperplanos, coincide con su imagen, y  $\therefore$  se vuelve no orientada.

Es necesario resaltar también que no hay grados de libertad localizados en estos hiperplanos, por lo que, a diferencia de las D-branas, No son dinámicas.

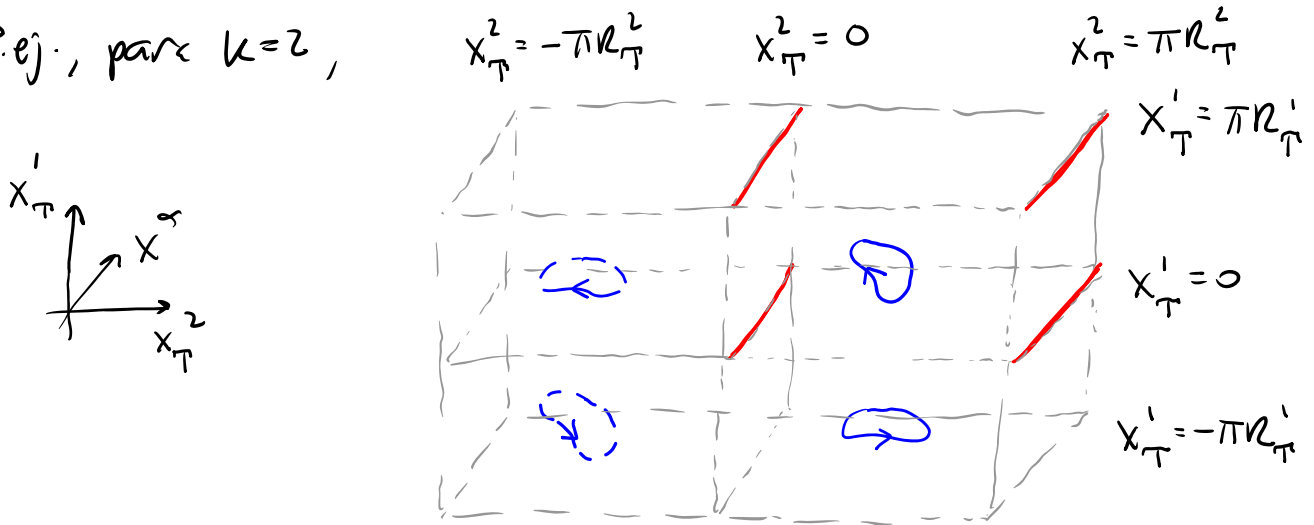
Si empezamos en teoría no orientada y T-dualizamos en  $k=D-1-p$  dimensiones, obtenemos una teoría donde los estados son simétricos bajo  $\Omega\pi^{c_1}\dots\pi^{c_k}$ .

El espacio físico nuevamente se reduce a la mitad,

$$T^k \equiv \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_k \rightarrow T^k / \mathbb{Z}_2 \leftarrow \{1, \Omega\pi^{c_1}\dots\pi^{c_k}\},$$

y obtenemos  $2^k$  hiperplanos fijos  $(p+1)$ -dimensionales que llamamos **Op-planos = orienti-p-planos**.

P.ej., para  $k=2$ ,



Espacio físico: Orientidad  $T^2/\mathbb{Z}_2$

Notar que para  $k \neq 1$ , Op-planos no son la frontera completa del espacio (no tienen dimensión  $D-1$ ).

La teoría original ( $k=0$ ) tenía 1  $O(D-1)$ -plano, que llenaba tod el espacio, por lo que cada punto era su propia imagen. En este caso, las cuerdas necesariamente están inmersas en el  $O$ -plano, y es por ello que son no orientadas.

Aprendemos entonces que las teorías de cuerdas no orientadas son simplemente las teorías orientadas definidas en un fondo distinto, que incluye un  $O(D-1)$ -plano

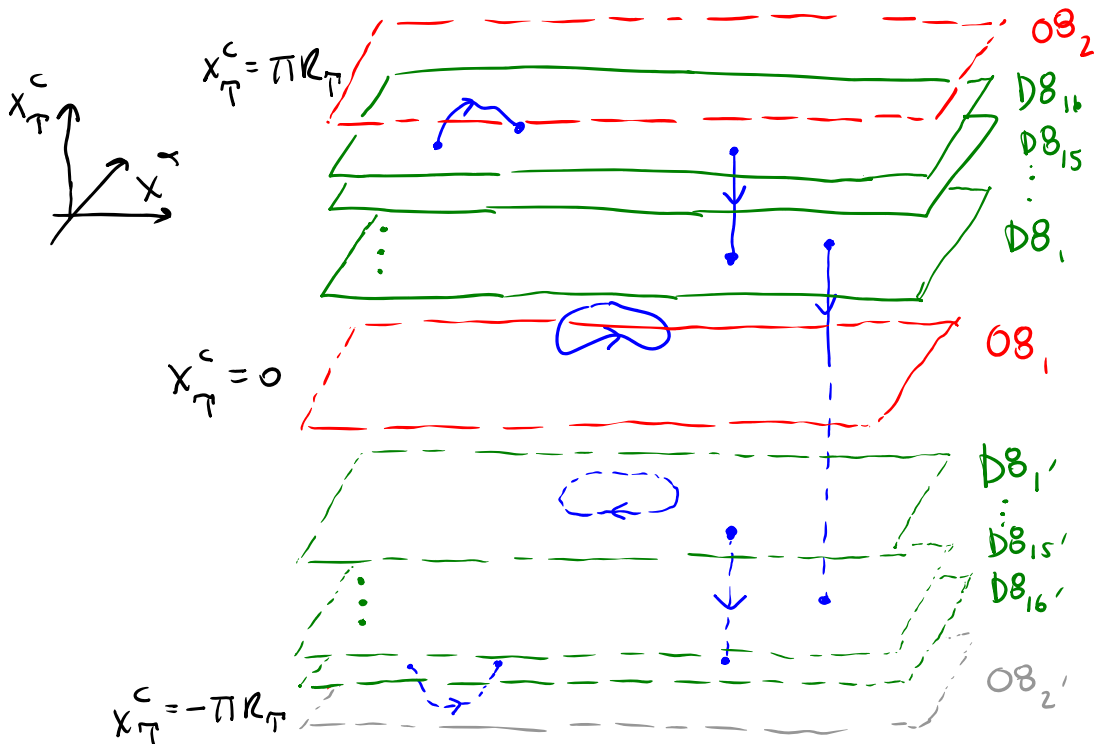
Podemos ahora finalmente entender lo que sucede con teorías tipo I bajo dualidad T.

El hecho de que las cuerdas en I sean no orientadas nos indica que viven sobre un  $O9$ -plano.

El hecho de que I incluya cuerdas abiertas con grado de libertad de Chan-Paton nos indica la presencia de varias  $D9$ -branas.



En descripción  $T$ -dual, tenemos 32 D8-branas en  $x_{\tau}^c = \pm \pi R_{\tau}$ , es decir, 16 D-branas entre los 2 O8-planos, más sus 16 imágenes:



Las cuerdas aquí son orientadas, a menos que estén inmersas en uno de los O8-planos. En el caso de cuerdas abiertas, esto solo es posible si la(s) D-brana(s) involucrada(s) coincide(n) con el O8-plan.



Con  $\theta_n$ 's genéricas, el grupo de norma (tanto en  $I$  como en  $I'$ ) está roto a  $U(1)^{16}$ .

Si  $1 \leq n \leq 16$  D8-branas coinciden fuera de los O8-planes, la simetría se ensancha a  $U(n) \times U(1)^{16-n}$ : hay  $n^2 - n$  nuevos estados sin masa que provienen de las cuerdas que conectan D-branas distintas en este bunched.

Si  $1 \leq n \leq 16$  D8-branas coinciden sobre uno de los O8-planes, aparecen estados sin masa adicionales, que provienen de las cuerdas que conectan una de las  $n$  D-branas y alguna de sus  $n$  imágenes. Todas las cuerdas involucradas son ahora no orientadas, y obtenemos  $\therefore$  grupo de norma ensanchado  $SO(2n) \times U(1)^{16-n}$ .

Cuando  $n=16$  (p.ej.  $\theta_c^h = 0 \forall h$ ) recuperamos  $SO(32)$ .

Ahora, ¿qué tipo de cuerdas cerradas tenemos en  $I'$ ?

En  $I$ , tendríamos cuerdas IIB truncado bajo  $\Omega$

(p.ej.,  $\varphi, \cancel{B}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}, \dots$ ). En  $I'$ , proyección no

elimina ya estados localmente, sino que elimina la mitad del espacio que está detrás de los 08's, por lo que, fuera de los 08-planos tenemos cuerdas cerradas IIA (p.ej., ahora sí retenemos  $B_{\mu\nu}$ ).

En resumen,

$$I \xleftrightarrow{T_c} I' \equiv \text{IIA con 2 08's y 16 D8's} \equiv \text{IIA}.$$

Pero esto implica que

$$I = \text{IIB con 1 09 y 16 D9's} \equiv \text{IIB}$$

Es decir, I es solo una clase particular de estados de IIB. Si empezamos con I, compactificamos (con posibles lazos de Wilson y/o campos magnéticos y/o eléctricos), T-dualizamos y después descompactificamos, podemos obtener IIA ó IIB en  $9+1$  dimensiones no compactas, con o sin Dp-branas (y con o sin Op-planos), donde p es par en IIA e impar en IIB.

Recordar que en las teorías tipo II existen 2 gravitinos  $\chi, \tilde{\chi}$  (que provienen del sector R-NS y NS-R, respectivamente), y  $\therefore$  2 supercargas

$$\begin{cases} Q_s, \tilde{Q}_{s'} & \in \underline{16} + \underline{16}' & \text{en IIA} \\ Q_s, \tilde{Q}_s & \in \underline{16} + \underline{16} & \text{en IIB} \end{cases}$$

(Recordar que  $s \equiv (s_0, s_1, \dots, s_4)$  con  $s_\alpha = \pm 1/2$  y un número par de  $-1/2$ 's, mientras que  $s' \equiv (s'_0, \dots, s'_4)$  tiene un número impar de  $-1/2$ 's.)

Esto se manifiesta en el hecho de que los estados forman supermultipletes (p.ej., obtenemos  $2^{32/2} = 256$  estados no masivos, y un cierto múltiplo de  $2^{32/2} = 256^2$  estados en cada nivel masivo), y las amplitudes son invariantes bajo **32**

**Supersimetrías:**

$$Q_s = \oint dz J_s(z), \quad \text{con } J_s(z) \propto e^{-\phi/2} e^{i s_\alpha \varphi^\alpha}$$

$\swarrow$  "bosonización" de  $\beta, \gamma$   
 $\nwarrow$  bosonización de  $\psi^m$

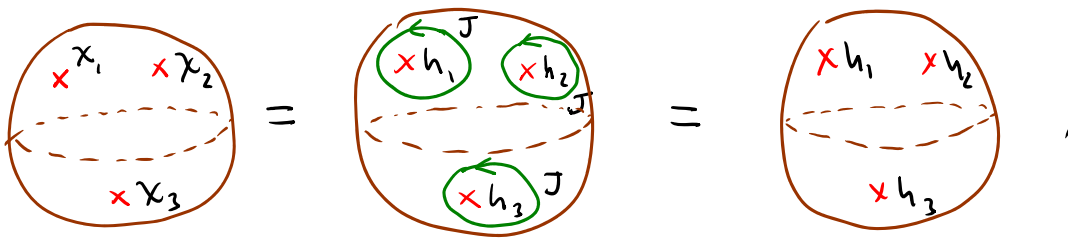
el operador de vértice para  $|s\rangle_R$ ,

por lo que si  $Q_s |h\rangle = |\chi\rangle$

(p.ej.,  $\mathcal{L}_{\text{gravitón}}$   $\mathcal{L}_{\text{gravitino}}$ )

$$\longleftrightarrow V_\chi(z, \bar{z}) = \oint \mathcal{L}_{z'} J_s(z') V_h(z', \bar{z}'),$$

entonces encontramos que



y un número infinito de relaciones similares,  
en cualquier hoja de mundo sin bordes.

Esto implica en particular que la acción efectiva  
es invariante bajo estas 32 supersimetrías.

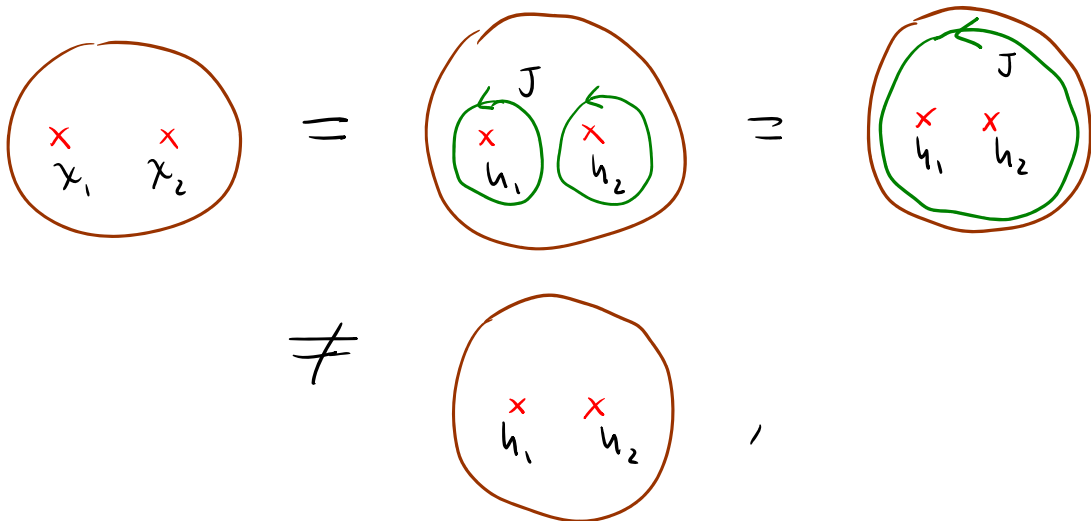
En la teoría tipo I, en cambio, la proyección  
bajo  $\Omega$  (=presencia de  $O9$ ) retiene solo

1 gravitino  $\chi + \tilde{\chi}$ , y tenemos  $\therefore$  solo

1 supercarga  $Q_s + \tilde{Q}_s \in \underline{16}$ .

Esta es la misma SUSY preservada por las condiciones  
de borde  $(N \vee \mu)$  de cuerda abierta (=presencia de  $D9$ ),

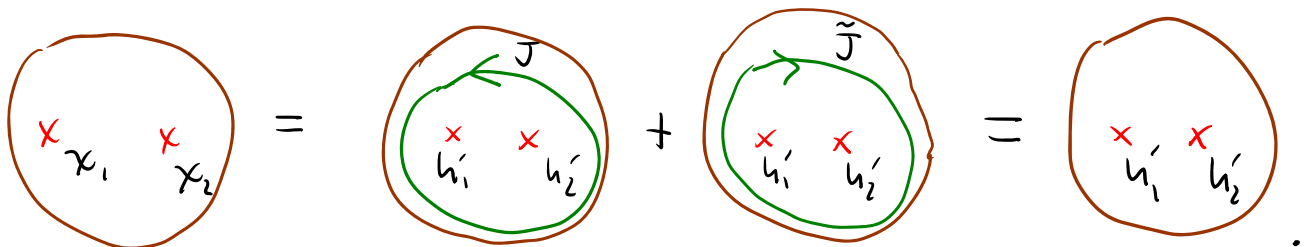
que igualan modos izquierdos con derechos. El punto aquí es que, en presencia de D9-brana(s), tenemos amplitudes No invariantes bajo  $Q_5$  ó  $\tilde{Q}_5$  por separado:



pero, dado que las condiciones de borde implican que  $J_s(z) \Big|_{z=\bar{z}} = \tilde{J}_s(\bar{z}) \Big|_{z=\bar{z}}$ , las amplitudes

sí son invariantes bajo las 16 supersimetrías  $Q_5 + \tilde{Q}_5$ :

$$|\chi\rangle = (Q_5 + \tilde{Q}_5) |h'\rangle \Rightarrow$$



Sabemos que  $T_c: Q, \tilde{Q} \rightarrow Q, \Pi^c \tilde{Q}$ , con  $\Pi^c \equiv \Gamma^c \Gamma$ ,  
 por lo que las condiciones de borde asociadas a una  
D<sub>p</sub>-brana ( $N$  para  $\alpha=0, \dots, p$ ;  $D$  para  $i=p+1, \dots, 9$ )  
 preservan las **16 supersimetrías**

$$\boxed{Q_s + (\Pi^\perp \tilde{Q})_s}, \text{ con } \Pi^\perp \equiv \underbrace{\Pi^{p+1} \dots \Pi^9}_k$$

$k \equiv 9-p$  impar/par en  $\text{IIA/B}$ ,  
 $\therefore \Pi^\perp$  tiene índice  $ss'/ss$  ✓

Notar que

$$\boxed{\Pi^\perp = \pm \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^p}$$

El signo de  $\Pi^\perp$  en cualquier caso depende del orden  
 en que se realizan las  $k$  transformaciones de dualidad  $T$ .

Existen  $\therefore$  2 tipos distintos de D-branas  $p$ -dimensionales,  
 que llamamos D<sub>p</sub>-brana ( $\equiv D_p$ ) y anti-D<sub>p</sub>-brana ( $\equiv \bar{D}_p$ ).

Cada uno de estos objetos preserva un conjunto de  
 16 supersimetrías, pero se trata de conjuntos con  
 intersección vacía, por lo que sistema  $D_p + \bar{D}_p$  no  
 preserva ninguna supersimetría.

Resumiendo:

- El estado  $|\Omega\rangle \in \text{IIA/B}$  que corresponde al vacío en segunda cuantización (no estado fundamental de 1 cuerda, sino estado sin cuerdas), es decir, el espacio Minkowski  $(9+1)$ -dimensional, es invariante bajo una transformación general

$$\eta_s Q_s + \tilde{\eta}_{\tilde{s}} \tilde{Q}_{\tilde{s}} \quad \text{con } \eta_s, \tilde{\eta}_{\tilde{s}} \text{ arbitrarios}$$

(32 parámetros independientes):

$$|\Omega'\rangle = \exp[i(\eta_s Q_s + \tilde{\eta}_{\tilde{s}} \tilde{Q}_{\tilde{s}})] |\Omega\rangle = |\Omega\rangle$$

$$\iff \boxed{Q_s |\Omega\rangle = 0 = \tilde{Q}_{\tilde{s}} |\Omega\rangle} \quad \forall s, \tilde{s}.$$

- El estado con 1 Dp-brana  $|Dp\rangle \in \text{IIA/B}$  (fondo solitónico sin cuerdas), en cambio, es invariante solo bajo transformaciones  $\eta_s Q_s + \tilde{\eta}_{\tilde{s}} \tilde{Q}_{\tilde{s}}$  con

$$\tilde{\eta}_{\tilde{s}} = \pm (\Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^p)_{\tilde{s}s} \eta_s \quad (\text{16 parámetros independientes})$$

↑ signo dado

$$\Leftrightarrow (Q_{\pm} \Gamma^{01 \dots p} \tilde{Q})_s |D_p\rangle = 0$$

Las otras 16 supersimetrías  $(Q_{\mp} \Gamma^{01 \dots p} \tilde{Q})_s$  están rotas espontáneamente. Esto no es extraño: esperamos justamente que un estado arbitrario rompa la supersimetría (p.ej.  $Q_s |2\text{ gravitón}\rangle \neq 0$ ), y que solo  $|D_p\rangle$  sea invariante bajo todas las 32 supersimetrías. Que la presencia de la Dp-brana rompa SUSY es análogo al hecho de que rompe la invariancia bajo traslaciones. (Y, justo como los escalares  $\psi_{-1/2}^i |0; k\rangle_{NS}$  son los bosones de Goldstone asociados a la ruptura de la invariancia traslacional, los fermiones  $|s; k\rangle_R$  son los 'goldstinos' asociados a la ruptura de la supersimetría.)

Lo que sí es inesperado es que  $|D_p\rangle$  preserva parte (la mitad) de las supersimetrías: es un estado BPS (Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield).



Consideremos, p.ej., la D0-brana:  $(Q_s - \Gamma_{ss'}^\circ \tilde{Q}_{s'}) |D0\rangle = 0$

$$\Rightarrow 0 = \langle D0 | \{ Q_s - \Gamma_{ss'}^\circ \tilde{Q}_{s'}, (Q_t - \Gamma_{tt'}^\circ \tilde{Q}_{t'})^\dagger \} | D0 \rangle \quad \forall_{s,t},$$

$$Q_t^\dagger - \tilde{Q}_{t'}^\dagger (\Gamma_{tt'}^\circ)^\dagger$$

$$- \Gamma_{t't}^\circ \quad \left( \text{porque } \Gamma^\circ = b_9^\dagger - b_0 \right)$$

Utilizando el álgebra de supersimetría

$$\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\} = -p_\mu \Gamma_{ss'}^\mu, \quad \{\tilde{Q}_{s'}, \bar{Q}_s\} = -p_\mu \Gamma_{s's}^\mu$$

$$\{Q_s, \tilde{Q}_t\} = -g \delta_{st} + \dots, \quad \{\tilde{Q}_{s'}, \bar{Q}_{t'}\} = +g \delta_{s't'} + \dots,$$

$\uparrow$  carga central (conservada)

$$0 = \langle D0 | \left( \underbrace{\{Q_s, Q_t^\dagger\}}_{- \{Q_s, \bar{Q}_{t'}\} \Gamma_{t't}^\circ} - \Gamma_{ss'}^\circ \underbrace{\{\tilde{Q}_{s'}, \tilde{Q}_{t'}^\dagger\}}_{- p_\mu \Gamma_{s't}^\mu} \Gamma_{tt'}^\circ - \Gamma_{ss'}^\circ \underbrace{\{\tilde{Q}_{s'}, Q_t^\dagger\}}_{-g \Gamma_{s't}^\circ} + \underbrace{\{Q_s, \tilde{Q}_{t'}^\dagger\}}_{+g \Gamma_{st'}^\circ} \Gamma_{t't}^\circ \right) | D0 \rangle.$$

$$\underbrace{-p_\mu \Gamma_{st'}^\mu}_{+m_{D0} \delta_{st}} \quad \underbrace{-p_\mu \Gamma_{s't}^\mu}_{+m_{D0} \delta_{st}} \quad \underbrace{-g \Gamma_{s't}^\circ}_{-g \delta_{st}} \quad \underbrace{+g \Gamma_{st'}^\circ}_{-g \delta_{st}}$$

$+m_{D0} \delta_{st}$  en marco en reposo

$$p^\mu |D0\rangle = (m_{D0}, 0, 0, \dots) |D0\rangle$$

Concluimos entonces que

$$0 = 2 \int_{st} (m_{D0} - g_{D0}) \Rightarrow m_{D0} = +g_{D0},$$

donde vemos que un estado BPS masivo debe portar carga. Notar que en el caso de la anti-D0-brana

hubiéramos obtenido  $m_{\overline{D0}} = -g_{\overline{D0}}$ ; como esperaríamos,  $m_{D0} = m_{\overline{D0}} > 0$  y  $g_{D0} = -g_{\overline{D0}} > 0$ .

Repetiendo el mismo cálculo actuando con

$Q_s \pm \Gamma_{ss}^0 \tilde{Q}_s$ , sobre un estado  $|X\rangle$  arbitrario y

tomando el término  $s=t$  obtenemos

$$0 \leq |(\tilde{Q}_s \pm \Gamma_{ss}^0 Q_s)|X\rangle|^2 + |(Q_s \pm \Gamma_{ss}^0 \tilde{Q}_s)|X\rangle|^2 \\ = 2(m_X \pm g_X),$$

es decir,

$$m_X \geq |g_X| \quad \text{Desigualdad BPS [Witten, Olive 1978]}$$

(Bautizada así por analogía con una cota similar descubierta por BPS para el monopolo 't Hooft-Polyakov.)

los estados BPS, que son aniquilados por alguna fracción de las supercargas (en este caso, la mitad), son aquellos que saturan esta desigualdad: portan la mínima masa posible para la carga dada. Esto implica en particular que son estables.

Notar que, en el caso de la D0-brana, con  $m_{D0} = \frac{1}{f_{D0}}$ , las 16 supercargas  $Q_s + \Gamma_{ss'}^0 \tilde{Q}_s$ , que no aniquilan  $|D0\rangle$  satisfacen el álgebra

$$\{Q_s + \Gamma_{ss'}^0 \tilde{Q}_s, (Q_t + \Gamma_{tt'}^0 \tilde{Q}_t)^\dagger\} |D0\rangle = 4m_{D0} \delta_{st} |D0\rangle.$$

Recordando que los espinores  $Q, \tilde{Q}$  son, además de Weyl, Majorana ( $\bar{Q}_s \equiv Q_s^\dagger \Gamma_{ss'}^0 = Q_s^T C_{ss'}$ , con  $C \equiv \Gamma^0 \Gamma^3 \Gamma^5 \Gamma^7 \Gamma^9$ ), esto significa que tenemos 8 pares de operadores de creación/aniquilación fermiónicos. Actuando con ellos sobre  $|D0\rangle$ , obtenemos un supermultiplete  $2^8 = 256$ -dimensional.

Es decir, cuando hablamos de 1 D-brana, estamos en realidad considerando uno de 128 estados bosónicos + 128 estados fermiónicos, que tienen toda la misma masa y la misma carga. Este es el mismo número de estados que encontramos en el supermultiplete no masivo (que ahora entendemos como un caso particular de estados BPS, que tienen  $q=0$ ).

En cambio, a partir de un estado masivo no BPS  $|X\rangle$ , con  $m_x > |q_x|$ , obtendríamos un supermultiplete  $2^{32/2} = 2^{16} = 256^2$ -dimensional.

Hemos aprendido  $\therefore$  que los estados BPS tienen otra propiedad especial: forman parte de supermultipletes cortos.

De la misma manera, las Dp-branas con otros valores de  $p$  son masivas y BPS solo porque portan una carga conservada que aparece en el álgebra de supersimetría, cuya forma general involucra

$$\left\{ \underbrace{\tilde{Q}_{\tilde{s}}, \bar{Q}_{t'}}_{\substack{Q_t^+ \Gamma_{tt'}^0}} \right\} = \sum_p \frac{1}{p!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Carga Central} \\ \text{(solo con respecto a } Q, \tilde{Q}, P_w)}}}{\mathcal{F}^{\mu_1 \dots \mu_p}} \left( \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_p} \right)_{\tilde{s} t'}$$

con  $p \begin{cases} \text{par} \\ \text{impar} \end{cases}$  (y  $\tilde{s} = \begin{pmatrix} s' \\ s \end{pmatrix}$ ) en  $\begin{matrix} \text{IIA} \\ \text{IIB} \end{matrix}$ .

¿Qué significa  $\mathcal{F}^{\mu_1 \dots \mu_p}$ ? El punto aquí es que la carga que naturalmente porta un objeto extendido no es una carga escalar convencional.

Sabemos que la línea de mundo asociada a una partícula (0-brana) se acopla de manera natural a un campo de forma convencional  $A_w$

(o, lo que es lo mismo a una **1-forma**  $A_{(1)} \equiv A_w dx^w$ ):

$$S_0 \supset \int_{M_1} A_{(1)} \equiv \int_{M_1} d\tau \underbrace{\partial_\tau X^\mu A_\mu(X(\tau))}_{\equiv A_\tau(\tau)} \quad ,$$

carga  $\nearrow$   
 $M_1$   $\nearrow$  línea de mundo  
retracción de  $A_\mu$  a la línea de mundo

que podemos reescribir como

$$\int d^D x J^\mu(x) A_\mu(x) \quad ,$$

donde la **corriente** está definida por

$$J^\mu(x) \equiv \int_{M_1} d\tau \partial_\tau X^\mu \delta^{(D)}(x - X(\tau)) \quad .$$

Notar que, como esperaríamos,

$$\int d^{D-1} x J^0(x) = \int_{M_1} d\tau \partial_\tau X^0 \delta^{(D)}(x^0 - X^0(\tau)) = \int_{M_1} d\tau \partial_\tau X^0$$

$\nearrow$  densidad de carga escalar  $\nearrow$  carga escalar total

Conocemos también la generalización al caso de una 1-brana — se trata simplemente de la manera en que la hoja de mundo de la cuerda se

acoplamiento naturalmente al campo de norma generalizado

$B_{\mu\nu}$  (o, lo que es lo mismo, a la **2-forma**

$$B_{(2)} \equiv \frac{1}{2} B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu :$$

$$S_2 \supset \rho_2 \int_{M_2} B_{(2)} \equiv \rho_2 \int_{M_2} d\tau d\sigma \underbrace{\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X^\nu B_{\mu\nu}(X(\tau, \sigma))}_{\equiv B_{\tau\sigma}(\tau, \sigma) \text{ retracción a } M_2}$$

↑
densidad de carga
(g/L)

$$= \frac{1}{2} \int d^D x J^{\mu\nu}(x) B_{\mu\nu}(x)$$

con corriente generalizada

$$J^{\mu\nu}(x) \equiv \rho_2 \int d\tau d\sigma \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \epsilon^{ab} \delta^{(D)}(x - X(\tau, \sigma)).$$

Notar que esta corriente se conserva,

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^{\mu\nu}(x) &= \rho_2 \int d\tau d\sigma \partial_b X^\nu \epsilon^{ab} \underbrace{\partial_a X^\mu \partial_\mu \delta^{(D)}(x - X(\tau, \sigma))}_{\partial_a \delta^{(D)}(x - X(\tau, \sigma))} \\ &\quad - \underbrace{\partial_a \partial_b X^\nu \epsilon^{ab} \delta^{(D)}(x - X(\tau, \sigma))}_{= 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(como es necesario para que su acoplamiento a  $B_{\mu\nu}$  sea invariante de norma), por lo que resulta natural definir una **carga conservada generalizada**

$$q^{\mu} \equiv \int \mathcal{D}x \, J^{0\mu}(x) = \rho_2 \int_{M_2} d\tau d\sigma \, \partial_a X^0 \partial_b X^{\mu} \epsilon^{ab} \delta^{(1)}(x - X(\tau, \sigma))$$

que en la norma  $\tau = X^0$  se reduce a

$$q^{\mu} = \rho_2 \int d\sigma \, \partial_{\sigma} X^{\mu} = \rho_2 \int \mathcal{D}X^{\mu}$$

densidad de carga
↑
extensión total de la cuerda en dirección  $\mu$

} carga vectorial total

Este vector claramente contiene información no solo sobre la magnitud de la carga neta, sino también sobre la orientación de la cuerda.

En esencia,  $q^{\mu}$  codifica  $D-1$  'tipos de carga' asociados a ' $D-1$  campos de norma'  $B_{\mu\nu}$ .

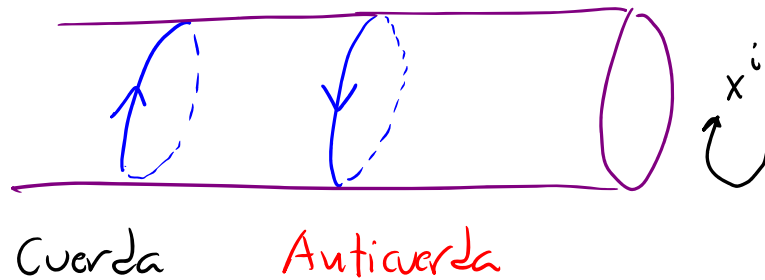


P.ej., para una cuerda cerrada definida sobre  $T^{D-1}$ ,

$$q^i = \rho_i \int dX^i = \rho_i e^i 2\pi R_i \quad (\text{sin suma})$$

↑  
número de enrollamiento

Notar que, de acuerdo con esto, el signo de la carga depende de la orientación de la cuerda:



Todo esto tiene una generalización obvia al caso de una p-brana: su **volumen de mundo** se acopla de manera natural a un campo de norma generalizado  $C_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$  ( $\leftrightarrow$  **(p+1)-forma**)

$$C_{(p+1)} \equiv \frac{1}{(p+1)!} C_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p+1}},$$

$$\int_{\Sigma_p} \rho_p \int_{M_{p+1}} C_{(p+1)} \equiv \rho_p \int_{M_{p+1}} d\sigma \underbrace{\partial_0 X^{\mu_1} \dots \partial_p X^{\mu_{p+1}} C_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}(X(\sigma))}_{\equiv C_{0_1 \dots p}(\sigma) \text{ retracción}}$$

↑  
**densidad de carga** ( $q/p$ -volumen)

$$= \frac{1}{(p+1)!} \int \mathcal{D}^D x \, J^{\omega_1 \dots \omega_{p+1}}(x) C_{\omega_1 \dots \omega_{p+1}}(x),$$

donde la corriente generalizada

$$J^{\omega_1 \dots \omega_{p+1}}(x) \equiv \rho_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} \mathcal{D}^{p+1} \sigma \, \partial_{a_1} X^{\omega_1} \dots \partial_{a_{p+1}} X^{\omega_{p+1}} \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \delta^{(D)}(x - X(\sigma))$$

da lugar a **carga conservada generalizada**

$$\begin{aligned} q^{\omega_1 \dots \omega_p} &\equiv \rho_p \int \mathcal{D}^{D-1} x \, J^{\omega_1 \dots \omega_p}(x) \\ &= \rho_p \int \mathcal{D}^{p+1} \sigma \, \partial_{a_1} X^{\omega_1} \partial_{a_2} X^{\omega_2} \dots \partial_{a_{p+1}} X^{\omega_{p+1}} \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \delta^{(D)}(x^\circ - X^\circ(\sigma)) \end{aligned}$$

$$q^{\omega_1 \dots \omega_p} = \rho_p \int \mathcal{D} X^{\omega_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{D} X^{\omega_{p+1}}$$

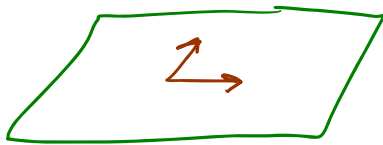
↑  
Carga tensorial  
total

volumen total y orientación

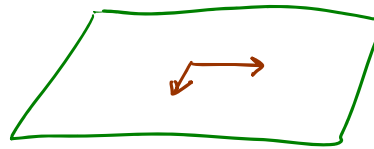
De acuerdo con esto, una  $p$ -brana enrollada 1 vez sobre  $p$ -toro recto en direcciones  $123 \dots p$  tiene carga

$$q^{123 \dots p} = \rho_p (2\pi R_1) \dots (2\pi R_p) = \rho_p V_p$$

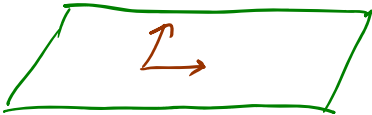
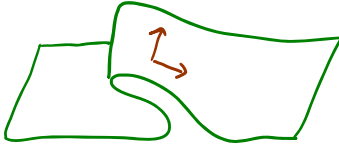
Podemos considerar en particular el límite de descompactificación  $R_i \rightarrow \infty$ , en cuyo caso obtenemos una brana infinita (con densidad de carga  $\rho_p$  finita).  
 Vemos también nuevamente que el signo de la carga depende de la orientación de la brana (elección de un orden canónico para base en espacio tangente):



brana



antibrana

(y  y  tienen cargas iguales).

Ahora, habiendo entendido la naturaleza de la carga generalizada que porta un objeto  $p$ -dimensional,

nos preguntamos ¿a qué campo de norma se acopla una  $D_p$ -brana? Hemos visto que  $g^{\mu_1 \dots \mu_p}$

aparece en  $\{\tilde{Q}, \bar{Q}\} \leftrightarrow (NS, R) \times (R, NS) = (R, R)$ ,

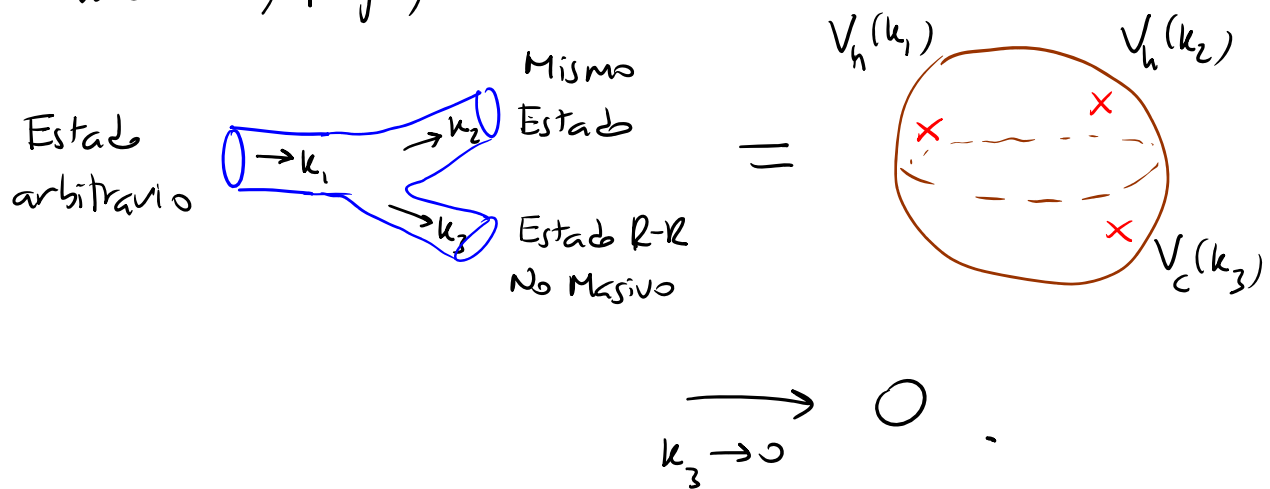
y debe ser por lo tanto una **carga Ramond-Ramond**.

Recordar que los vértices R-R no masivos involucran no directamente al campo de norma

$C_{(p+1)}$  sino a la **intensidad de campo**  $G_{(p+2)} \equiv dC_{(p+1)}$

(cuyas componentes son por definición  $g_{[m_1 m_2 \dots m_{p+2}]}$ ).

Esto implica en particular que las amplitudes en vértices R-R se anulan cuando el momento correspondiente se hace cero, p.ej.,



Vemos aquí que no existen en el lagrangiano efectivo términos  $\sim g_{RR} h^2 C$  (como sí los hay  $\sim g_{NSNS} h^2 B$ ), lo cual indica que ningún estado de oscilación de la cuerda porta carga R-R!

Las D-branas, en cambio, sí portan carga R-R (y no carga NS-NS); con ellas tendremos de hecho una fuente para cada campo de norma.

Para ver esto, recordemos primero que la intensidad de campo R-R  $G_{(p+2)} = dC_{(p+1)}$ , que estaría naturalmente asociada a Dp-brana, satisface en ausencia de fuentes la ec de mov.  $d * G_{(p+2)} = 0$

(generalización de la ec. de Maxwell  $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$ )

y la identidad de Bianchi  $dG_{(p+2)} = 0$  (generalización de  $\partial^\mu * F_{\mu\nu} = 0$ ).

Podemos describir la misma física usando la

**intensidad de campo dual**  $G_{(8-p)} \equiv * G_{(p+2)}$

(análoga a  $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho}$ , que intercambia

$(\vec{E}, \vec{B}) \leftrightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$ ), con campo de norma

asociado  $C_{(7-p)}$  (definido tal que  $G_{(8-p)} = dC_{(7-p)}$ ),

que se acoplaría naturalmente a D(6-p)-brana.

En estas variables, lo que antes era la identidad de Bianchi se reconoce ahora como la ec. de mov.

$\mathcal{D} * G_{(8-p)} = 0$ , y la anterior ec. de mov. es ahora la identidad de Bianchi  $\mathcal{D} G_{(8-p)} = 0$ .

En presencia de una Dp-brana tenemos

$$\mathcal{D} * G_{(p+2)} \propto \rho_p \delta^{(9-p)}(x) \iff \text{Dp-brana es una fuente 'el\u00e9ctrica' para } C_{(p+1)}$$

o, de manera equivalente,

$$\mathcal{D} G_{(8-p)} \propto \rho_p \delta^{(9-p)}(x) \iff \text{Dp-brana es una fuente 'magn\u00e9tica' para } C_{(7-p)}$$

(El hecho de que la identidad de Bianchi para  $G_{(8-p)}$  no se cumpla significa que  $C_{(7-p)}$  no se puede definir globalmente, que es justo la situaci\u00f3n que tenemos para el campo de Maxwell  $A_\mu$  en presencia de un monopolo magn\u00e9tico.)

A la inversa, D(6-p)-brana es una fuente el\u00e9ctrica para  $C_{(7-p)}$  y magn\u00e9tica para  $C_{(p+1)}$ .

Tenemos entonces

• En teoría IIA :	D0	D2	D4	D6	D8
Fuente eléctrica de :	$C_{(1)}$	$C_{(3)}$	$C_{(5)}$	$C_{(7)}$	$C_{(9)}$
Fuente magnética de :	$C_{(7)}$	$C_{(5)}$	$C_{(3)}$	$C_{(1)}$	" $C_{(-1)}$ "

(Notar que  $G_{(10)} = dC_{(9)}$  satisface  $d * G_{(10)} \equiv dG_{(10)} = 0$

$\Rightarrow G_{(10)} = \text{cte}$ ,  $\therefore \nexists$  fluctuaciones

— análogo a  $F_{\mu\nu}$  en 2 dimensiones.

$G_{(10)}$  toma valores distintos en lados opuestos de D8.)

• En teoría IIB :	D(-1)	D1	D3	D5	D7	D9
Fuente eléctrica de	$C_{(0)}$	$C_{(2)}$	$C_{(4)}^+$	$C_{(6)}$	$C_{(8)}$	$C_{(10)}$
Fuente magnética de:	$C_{(8)}$	$C_{(6)}$	$C_{(4)}^+$	$C_{(2)}$	$C_{(0)}$	" $C_{(-2)}$ "

D(-1)-brana denota "objeto" asociado a cuerdas  
 abiertas con condiciones de borde  $D \forall \mu = 0, \dots, 9$ ,  
 objeto que existe entonces solo un instante: instantón

(Notar que  $G_{(11)} = \downarrow C_{(10)} = 0 \Rightarrow C_{(10)} = de.$

$\therefore \nexists$  fluctuaciones — análogo a  $A_m$  en 1 dim.)

Vemos entonces que el hecho de que de que las teorías IIA/B incluyan en su espectro **no perturbativo** Dp-branas con p par/impar (implica que contienen una fuente (eléctrica y magnética) para c/u de los campos de norma Ramond-Ramond!

Para que  $C_{(p+1)}$  tuviera normalización canónica escribiríamos como término cinético

$$- \int d^{10}x \sqrt{-g} \frac{1}{2(p+1)!} g^{\omega_1 \nu_1} \dots g^{\omega_{p+2} \nu_{p+2}} G_{\omega_1 \dots \omega_{p+2}} G_{\nu_1 \dots \nu_{p+2}}$$

$\uparrow$  métrica en espaciotiempo       $\uparrow$  intensidad de campo R-R

$$\left( \Rightarrow [G] = M^5, [C] = M^4 \right),$$

pero en vez de esto usaremos la normalización habitual para los campos de supergravedad:





Notar que para la cuerda usamos este mismo tipo de normalización, puesto que escribimos el término de acoplamiento al campo de norma  $B_{\alpha\beta}$  en la forma

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'}}_{\equiv \rho_{F_1}} \int d^2\sigma \partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X^\nu B_{\mu\nu}(X), \quad \leftarrow [B] = M^0$$

lo cual dice que la densidad de carga de la **cuerda fundamental** ( $\equiv F_1$ ) es igual a su tensión:

$$\tau_{F_1} = \rho_{F_1}$$

Esto pareciera nuevamente provenir de una desigualdad BPS, y en efecto es así: el punto es que, al calcular  $\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\}$  a través de EPO, lo que obtenemos es en realidad

$$V_s(z) \cdot V_{s'}(0) \sim -\frac{1}{2} \Gamma_{ss'}^{\mu\nu} \partial X_\mu^{(0)},$$

de donde

$$\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\} = - P_I^\omega (\Gamma_\omega)_{ss'}$$

$$\equiv p^\omega + \underbrace{q_{NS}^\omega}$$

← Carga central proporcional al enrollamiento de F1:

$$(N, NS) \times (N, NS) = (NS, NS)$$

$$q_{NS}^\omega = \frac{1}{2\pi\alpha'} [X^\omega(\sigma=2\pi) - X^\omega(\sigma=0)] \equiv \Delta X^\omega$$

(para dirección compacta  $\omega=i$ ,  $P_I^i \equiv p^i + q_{NS}^i = \frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'}$ ).

De manera similar,  $\{\tilde{Q}_s, \tilde{Q}_{s'}\} = - P_D^\omega (\Gamma_\omega)_{s's'}$

$$\equiv p^\omega - \underbrace{q_{NS}^\omega}$$

A partir de estas relaciones de anticonmutación, podemos concluir que un estado  $|F1\rangle$  donde la cuerda sin excitar está extendida únicamente en la dirección  $+x^i$ , y tiene  $\therefore q_{NS}^i > 0$ , es BPS:

$$\begin{aligned} [Q_s - (\Gamma^0 \Gamma^i)_{st} Q_t] |F1\rangle &= (1 - \Gamma^0 \Gamma^i)_{st} Q_t |F1\rangle = 0 \\ [\tilde{Q}_s + (\Gamma^0 \Gamma^i)_{\tilde{s}\tilde{t}} \tilde{Q}_{\tilde{t}}] |F1\rangle &= (1 + \Gamma^0 \Gamma^i)_{\tilde{s}\tilde{t}} \tilde{Q}_{\tilde{t}} |F1\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$(\Gamma^0 \Gamma^1)^2 = \mathbb{1}, \quad \sum_s (\Gamma^0 \Gamma^1)_{ss} = \sum_s (2b_0^+ b_0^- - 1)_{ss} = \sum_s (2(s_0 + \frac{1}{2}) - 1) = 0$$

$\Rightarrow (\Gamma^0 \Gamma^1)_{st}$  tiene 8 autovalores +1 y 8 autovalores -1

$\therefore |F1\rangle$  preserva **16 supersimetrías**. La 'anticuerda'  $|\bar{F1}\rangle$ , que tiene  $q_{NS}^i < 0$ , preserva las otras 16. Ambas satisfacen

$$m_{F1} = \pm q_{F1}^i = |q_{F1}^i| \quad \leftrightarrow \quad \tau_{F1} |\Delta X^i| = \rho_{F1} |\Delta X^i|.$$

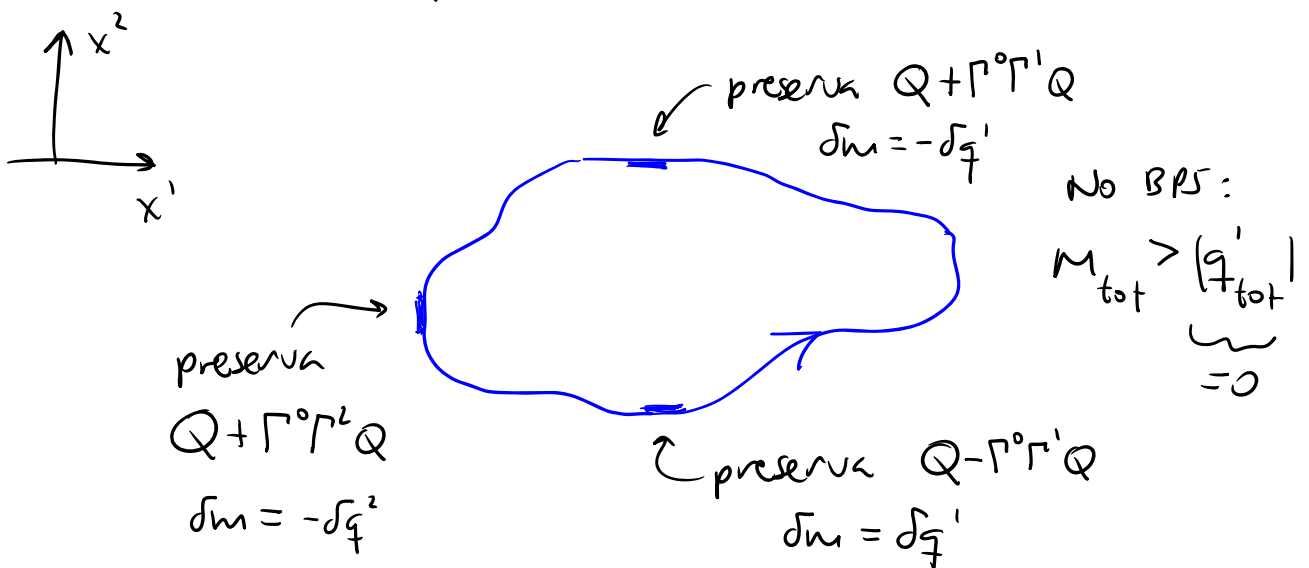
Esto implica en particular que  $\tau_{F1} = \rho_{F1}$ , relación

que, más en general, expresa el hecho de que

cada trozo de una cuerda sin excitar es 'localmente'

BPS (porta tanto carga como masa), aún cuando

la cuerda en su conjunto pudiera no serlo:



Incluyendo las cargas que portan la F1 y las Dp, hemos visto que tenemos el álgebra de supersimetría

$$\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\} = -(p^\mu + q_{\mu s}^\nu)(\Gamma_\mu)_{ss'}$$

$$\{\tilde{Q}_s, \bar{\tilde{Q}}_{s'}\} = -(p^\mu - q_{\mu s}^\nu)(\Gamma_\mu)$$

$$\{\tilde{Q}_{s'}^-, \bar{Q}_{t'}^+\} = + \sum_p \frac{1}{p!} q_{R}^{\mu_1 \dots \mu_p} (\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_p})_{s't'}$$

← par/impar en IIA/B

En esta última expresión, debemos incluir en la suma las cargas R-R portadas por todos los distintos tipos de D-branas presentes en IIA/B.

Recordando que  $q_{R}^{\mu_1 \dots \mu_p} \equiv \int d^10x J_R^{\mu_1 \dots \mu_p}(x)$

es  $\neq 0$  solo para índices espaciales, una opción sería incluir

$$\sum_{p=\begin{cases} 0, 2, 4, 6, 8 \\ 1, 3, 5, 7, 9 \end{cases}} \frac{1}{p!} q_{R}^{\mu_1 \dots \mu_p} (\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_p})_{s't'}$$

Pero, recordando que nuestras supercargas tienen  
 quiralidad definida, una segunda opción es reescribir los  
 términos con  $p \geq 5$  multiplicando por  $\Gamma$  para  
 reemplazar

$$\mathcal{F}_R^{i_1 \dots i_p} \Gamma_{i_1 \dots i_p} \rightarrow \pm \mathcal{F}_R^{i_1 \dots i_p} \underbrace{\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_{10-p}} \epsilon_{i_1 \dots i_p \mu_1 \dots \mu_{10-p}}}_{\Gamma^{0j_1 \dots j_p} \text{ con } j_l \neq i_k}$$

$$\equiv \mathcal{F}_R^{\mu_1 \dots \mu_{10-p}} \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_{10-p}},$$

↑ tiene siempre un índice temporal

después de lo cual tenemos

$$\{\tilde{Q}_s, \bar{Q}_{t'}\} = + \sum_{p=\{0,2,4,1,3,5\}} \frac{1}{p!} \mathcal{F}_R^{\mu_1 \dots \mu_p} \left( \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_p} \right)_s^{t'}$$

con  $\mu_k = 0, \dots, 9$  (y  $\mathcal{F}_R^{\mu_1 \dots \mu_5}$  autodual o anti-autodual).

Notar que, en el lado izquierdo, tenemos  $16 \times 16 = 256$   
 anticomutadores independientes. ¿Cuántas cargas  
 independientes tenemos en el lado derecho?

$$\text{IIA: } 1 + \frac{10 \cdot 9}{2} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 1 + 45 + 210 = 256$$

$p=0$                        $p=2$                        $p=4$

$$\text{IIB: } 10 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 10 + 120 + 126 = 256$$

$p=1$                        $p=3$

En lo que se refiere al anticommutador  $\{\tilde{Q}, \bar{Q}\}$ , no podrían existir  $\therefore$  términos adicionales del lado derecho: tenemos un álgebra 'máximamente extendida'. Así que no más objetos R-R BPS.

Examinemos ahora los anticommutadores restantes desde esta misma perspectiva:

$$\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\} = -(\rho^m + \gamma_{ns}^m) (\Gamma_m)_{ss'}$$

$$\{\tilde{Q}_{s'}, \bar{\tilde{Q}}_s\} = -(\rho^m - \gamma_{ns}^m) (\Gamma_m)_{s's}$$

Sabemos que  $\gamma_{ns}^i$  ( $\leftrightarrow B_{ni}$ ) es parada por  $F_1$ , que puede ser entonces BPS. Y, de manera similar a lo que dijimos para los Dp-branas,  $\gamma_{ns}^0$  puede

interpretarse como la carga asociada a una brana extendida en  $10-1=9$  dimensiones: una **NS5-brana** [ver hep-th/9705162, 0410185].

El campo de norma asociado,  $B_{(10)}$ , claramente no tendría fluctuaciones (justo como  $C_{(10)}$  que se acopla a  $D9$ ).

Obviamente sabemos también el significado de las cargas  $p^m$  ( $\leftrightarrow g_{\mu\nu}$ ). Los estados BPS correspondientes son simplemente estados no masivos.

Claramente, tanto en los anticommutadores  $Q-\bar{Q}$  como en los  $\tilde{Q}-\tilde{\bar{Q}}$ , tenemos más anticómutadores independientes en el lado izquierdo que en el derecho: recordando que las supercargas son Majorana (y  $\therefore \bar{Q}$  no es independiente de  $Q$ ),

$$\frac{16 \times 17}{2} = 136 \text{ anticommutadores vs. } 10 \text{ cargas}$$

En ambos casos podrían existir entonces objetos BPS adicionales que porten  $136-10=126$  nuevas cargas.



Y hemos visto más arriba que 126 es precisamente el número de cargas en un tensor  $g^{\mu_1 \dots \mu_5}$  autodual o anti-autodual.

Esto sugiere  $\therefore$  la posible existencia de 5-branas BPS tanto en IIA como en IIB.

Y estos objetos de hecho existen:

$$\{Q_s, \bar{Q}_s\} \text{ incluye } -\frac{1}{5!} g_{NS+}^{\mu_1 \dots \mu_5} (\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_5})_{ss'}$$

↖ autodual

y

$$\{\tilde{Q}_s, \tilde{\bar{Q}}_s\} \text{ incluye } -\frac{1}{5!} g_{NS-}^{\mu_1 \dots \mu_5} (\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_5})_{s's'}$$

↖ anti-autodual

de manera tal que las cargas

$$\frac{1}{2} (g_{NS+} \pm g_{NS-})^{\mu_1 \dots \mu_5} \text{ son los } \underline{\text{duals magnéticos}}$$

de la carga de F1 (enrollamiento)  $g_{NS}^{\mu}$

y del momento (número de KK)  $p^{\mu}$ , respectivamente,

y los objetos que las portan son

**NSS-brana**, fuente magnética de  $B_{(2)}$

**KK5-brana**, fuente magnética de vector KK  $A_{(1)}$

$$(A_{\mu} \equiv g_{\mu c})^{\uparrow}$$

Como veremos más adelante, ambas se pueden describir como configuraciones solitónicas de los campos de supergravedad.

En base a las propiedades de transformación de las supercargas bajo dualidad  $T$  se puede mostrar

que

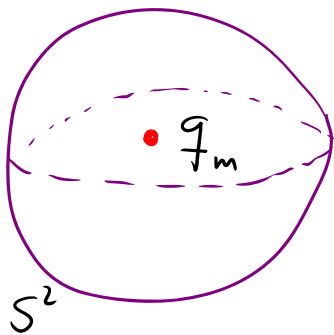
$$\begin{array}{ccc} \text{NSS en IIA/B} & \xleftrightarrow{T_{\alpha}} & \text{NSS en IIB/A} \\ \text{NSS en IIA/B} & \xleftrightarrow{T_i} & \text{KK5 en IIB/A} \end{array}$$

(donde  $\alpha, i$  denotan respectivamente direcciones paralelas y perpendiculares a las 5-branas)

[ Ver hep-th/9708086 ].

Habiendo visto ya que la teoría 'de cuerdas' incluye fuentes tanto eléctricas como magnéticas para diversos campos de norma, debemos recordar que Dirac mostró que en tales circunstancias las cargas eléctricas y magnéticas deben satisfacer una cierta **regla de cuantización**.

Su argumento original se refería a un monopolo magnético en  $3+1$  dimensiones,



en cuya presencia la identidad de Bianchi se modifica a

$$dF_{(2)} = g_m \delta^{(3)}(\vec{x})$$

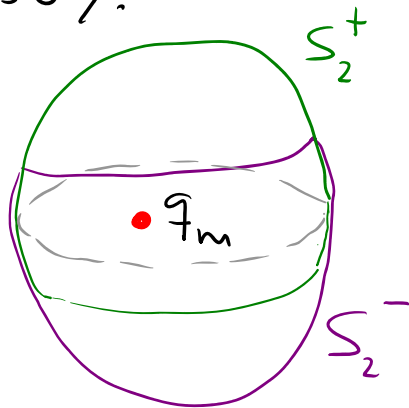
$$\Rightarrow \int_{B_3} dF_{(2)} = \int_{S_2 \equiv \partial B_3} F_{(2)} = g_m$$

(Justo del mismo modo que la ec. de mov.)

$$d * F_{(2)} = j_e \Rightarrow \int_{S^2} * F_{(2)} = g_e . )$$

$q_m \neq 0$  claramente implica que No es posible encontrar  $A_{(1)}$  definido globalmente que satisfaga  $F_{(2)} = \mathcal{D}A_{(1)}$  (porque en ese caso tendríamos necesariamente  $\mathcal{D}F_{(2)} = 0$ ).

Lo que sí resulta posible es definir por separado  $A_{(1)}^+$  y  $A_{(1)}^-$  en los "hemisferios" norte y sur  $S_2^+$  y  $S_2^-$ , respectivamente, con  $A_{(1)}^+ = A_{(1)}^- + \mathcal{D}\lambda$



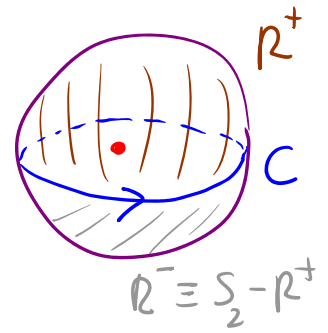
en la franja ecuatorial  $S_2^+ \cap S_2^-$  (lo cual es necesario para garantizar que ambos campos de norma definan la misma intensidad de campo en el traspase,

$$\mathcal{D}A_{(1)}^+ = F_{(2)} = \mathcal{D}A_{(1)}^-).$$

Una carga eléctrica que se mueva a lo largo de una curva  $C$  en la franja ecuatorial se acopla directamente a  $A_{(1)}^+$  ó  $A_{(1)}^-$ , adquiriendo  $\therefore$  una fase

$$\exp(iq_e \oint_C A_{(1)}^+) = \exp(iq_e \int_{R^+} F_{(2)}) \equiv \Phi^+$$

ó  $\leftarrow C = \partial R^+ \rightarrow$



$$\exp(iq_e \oint_C A_{(1)}^-) = \exp(-iq_e \int_{R^-} F_{(2)}) \equiv \Phi^-$$

$\leftarrow C = -\partial R^- \rightarrow$

Por consistencia debemos tener entonces  $\Phi^+ = \Phi^-$ ,  
es decir,

$$1 = \exp\left[iq_e \left(\int_{R^+} F_{(2)} + \int_{R^-} F_{(2)}\right)\right] = \exp\left[iq_e \int_{S_2} F_{(2)}\right]$$

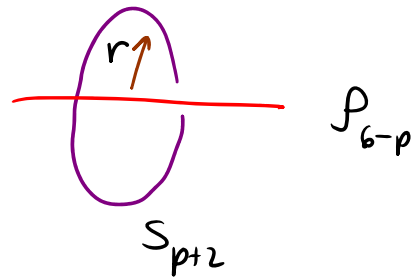
$$= \exp[iq_e q_m]$$

$$\Rightarrow q_e q_m = 2\pi n \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

Este argumento se generaliza directamente al caso en  $D$  dimensiones donde  $p$ -brana es una fuente eléctrica para campo de norma  $C_{(p+1)}$  y  $(D-4-p)$ -brana es su contraparte magnética

[Nepomechie (1985); Teitelboim (1986)].

A nosotros nos interesa el caso  $D=9+1$ , donde el monopolo magnético no es en general una cero-brana como consideró Dirac, sino una  $(6-p)$ -brana. Semejante objeto tiene  $3+p$  dimensiones transversales, que podemos separar en una dirección radial y una esfera  $(p+2)$ -dimensional.



Con la normalización (propia de supergravedad) que adoptamos para el campo de norma  $A_{(p+1)}$ , la identidad de Bianchi es ahora

$$\downarrow F_{(p+2)} = 2K^2 \rho_{6-p} \delta^{(3+p)}(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2K^2} \int_{S_{p+2}} F_{(p+2)} = \rho_{6-p}$$

(mientras que la ec. de mov. es

$$\downarrow *F_{(p+2)} = 2K^2 \rho_p \delta^{(9-p)}(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2K^2} \int_{S_{8-p}} *F_{(p+2)} = \rho_p ).$$

Definiendo como antes  $A_{(p+1)}^{\pm}$  en "hemisferios"  $S_{p+2}^{\pm}$ , y considerando una  $p$ -brana que se mueve en

La franja ecuatorial  $S_{p+2}^+ \wedge S_{p+2}^-$ , acoplándose al campo de norma a través de  $\rho \int_{M_{p+1}} A_{(p+1)}^+$ , obtenemos la condición de cuantización

$$2k^2 \rho_p \rho_{6-p} = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Para branas 'localmente' BPS, como lo son todas las que hemos visto hasta ahora, esto implica

$$2k^2 \tau_p \tau_{6-p} = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Tomemos p.ej. el caso de la cuerda fundamental, que está cargada eléctricamente bajo  $B_{(2)}$ , y tiene

$$\tau_{F1} \equiv \frac{1}{2\pi l_c^2}.$$

Su dual magnético, la NS5-brana, debe tener una tensión que es un múltiplo de  $\frac{2\pi}{2k^2 \tau_{F1}}$ . Si suponemos que porta el cantidad mínima de carga magnética,

y fijamos la normalización de la constante de acoplamiento de cuerdas  $g_c$  definiendo

$$2\kappa^2 \equiv 16\pi G_N \equiv (2\pi)^7 g_c^2 l_c^8,$$

concluiríamos que

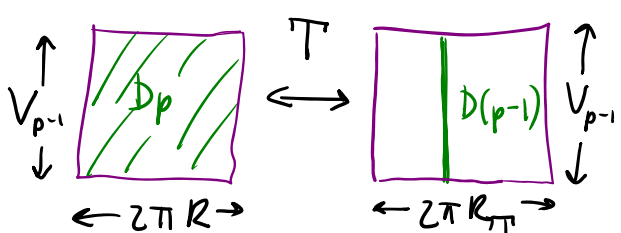
$$\tau_{NS5} = \frac{1}{(2\pi)^5 g_c^2 l_c^6}$$

De manera similar, si suponemos que las  $D_p$ -branas y  $D(6-p)$ -branas portan el cuanto mínimo de carga (respectivamente eléctrica y magnética) asociada a  $C_{(p+1)}$ , tendríamos

$$\tau_{D_p} \tau_{D(6-p)} = \frac{1}{(2\pi)^6 g_c^2 l_c^8}$$

$$\Rightarrow \tau_{D_p} = \frac{1}{(2\pi)^{a_p} g_c^{b_p} l_c^{p+1}} \quad \text{con } a_p + a_{6-p} = 6, b_p + b_{6-p} = 2 \quad \forall p.$$

Recordando además que  $D_p \xleftrightarrow{T} D(p-1)$ , debemos tener

$$\tau_{D_p} \sqrt{V_{p-1}} 2\pi R = \tau_{D(p-1)}^T \sqrt{V_{p-1}},$$




es decir,

$$\frac{1}{(2\pi)^{a_p} g_c^{b_p} l_c^{p+1}} 2\pi R = \frac{1}{(2\pi)^{a_{p-1}} g_c^{b_{p-1}} l_c^p} \underbrace{\left( g_c \frac{l_c}{R} \right)^{b_{p-1}}}$$

$$\Rightarrow a_{p-1} = a_p - 1, \quad b_{p-1} = 1 \quad \forall p.$$

Junto con la condición de cuantización, esto implicaría

$$\tau_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}}.$$

Más adelante calcularemos explícitamente la tensión de las D-branas, verificando este resultado.

Notar que, cuando  $g_c \ll 1$  tenemos

$$\tau_{F1} l_c^2 \sim \mathcal{O}(g_c^0) \ll \tau_{Dp} l_c^{p+1} \sim \mathcal{O}(g_c^{-1}) \ll \tau_{NS5} l_c^6 \sim \mathcal{O}(g_c^{-2})$$

lo cual pone de manifiesto el carácter no perturbativo de Dp-branas y NS5-branas.

Notar también que  $\frac{\tau_{F1}}{\tau_{D1}} = g_c$  nos da una manera más 'operacional' de entender nuestra definición de  $g_c$ .

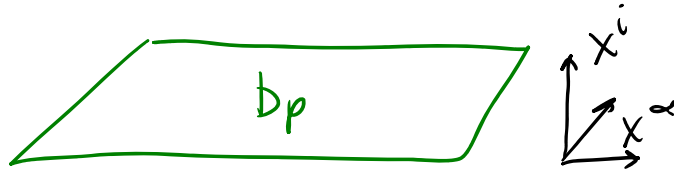
Como habíamos dicho antes, las interacciones de las excitaciones de una D-brana (cuerdas abiertas) entre sí y con su entorno (cuerdas cerradas) se pueden determinar a partir de cálculos de amplitudes de dispersión. Y como siempre, los resultados se pueden resumir en una acción efectiva para los modos no masivos.

Es relativamente fácil deducir la forma de la parte bosónica de esta acción.

Parametrizando el volumen de mundo  $M_{p+1}$  con coords.  $\sigma^a$ ,  $a=0, \dots, p$ , la trayectoria de la Dp-brana en el espaciotiempo puede ser descrita de manera covariante a través de  $\mathcal{D}$  funciones  $X^\mu(\sigma^a)$ .

Anteriormente habíamos considerado la cuantización de cuerdas abiertas asociadas a una Dp-brana plana en el espacio tiempo de Minkowski.

Para tal brana resulta natural escoger la norma estática  $\sigma^a = x^a$   $a=0, \dots, p$ ,



en cuyo caso la  $D_p$ -brana sin excitar corresponde a

$$X^\alpha(x) = x^\alpha \quad \alpha=0, \dots, p, \quad X^i(x) = x_0^i \quad i=p+1, \dots, 9$$

y una trayectoria más general se describe a través de

$$X^\alpha(x) = x^\alpha, \quad X^i(x^\alpha) = x_0^i + \Phi^i(x^\alpha),$$

donde  $\Phi^i$  son precisamente los campos escalares que se obtienen como modos no masivos de las cuerdas abiertas. En un espaciotiempo de Minkowski, por invariancia bajo translaciones la acción solo puede depender de  $\partial_\alpha \Phi^i$ . De hecho, la propuesta natural al orden más bajo en derivadas es generalización de Nambu-Goto:

$$-T_{p+1} \int_{M_{p+1}} \sqrt{-\det(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu})} \quad \text{Divac,}$$

tensión
Volumen

que es invariante tanto bajo diffeos en el volumen de mundo como bajo Poincaré en el espaciotiempo.

Recordando que dualidad  $T_i$  convierte al campo escalar  $\Phi^i$  en el campo de normas  $A^i \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \Phi^i$ , vemos que la acción debe involucrar a la intensidad de campo  $F_{\alpha\beta}$  de una manera específica:

$$-T_p \int_{M_{p+1}} d^{p+1} \sigma \sqrt{-\det(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{ab})}$$

Si los escalares no están excitados (o consideramos D9-brana), esto se reduce a

$$-T_p \int_{M_{p+1}} d^{p+1} \sigma \sqrt{-\det(\eta_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} \quad \text{Born-Infeld}$$

¡Notar que esta acción incluye una serie infinita de correcciones en  $\alpha'$ ! A través del cálculo de la anomalía de Weyl ( $\leftrightarrow$  función  $\beta$ ), es posible mostrar que esta es la acción exacta para F constante [Fradin, Tseytlin; Abouelsaad, Callan, Nappi, Yost]

Pero le hacen falta correcciones que involucren derivadas de  $F$  ( $\leftrightarrow$  la acción de Dirac recibirá también correcciones con derivadas segundas o más altas de los campos escalares).

Consideremos ahora la manera en que la D-brana se acopla a un fondo no trivial de cuerdas cerradas.

Para la métrica  $g_{\mu\nu}$ , obviamente habrá que reemplazar  $\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$  con la nueva métrica inducida

$$g_{ab}(\sigma) \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^b} g_{\mu\nu}(X(\sigma))$$

Trabajando en el marco de cuerdas (no de Einstein), el campo dilatónico debería aparecer a través de un factor  $e^{-\varphi}$  en el disco  $\leftrightarrow$  nivel árbol.

Y recordando que  $F_{\mu\nu}$  cambia bajo una transformación de norma de  $B_{\mu\nu}$ ,

(cuerda abierta se acopla a  $B_{\mu\nu}$  y  $A_\mu$  a través de

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{M_2} d^2\sigma \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu} + \int_{\partial M_2} d\tau \partial_\tau X^\mu A_\mu,$$

que es invariante bajo la transformación simultánea

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{\Lambda_\mu}{2\pi\alpha'} \quad \Rightarrow \quad F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\pi\alpha'} (\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu)$$

Vemos que la acción de la D-brana debe involucrar no a  $F_{(2)}$  ó a  $B_{(2)}$  por separado, sino a la combinación invariante de normas  $B_{(2)} + 2\pi\alpha' F_{(2)} \equiv \mathcal{F}_{(2)}$ .

En conjunto tenemos  $\therefore$  la acción **Dirac-Born-Infeld**

$$S_{\text{DBI}} \equiv -\tau_p \int d^{p+1}\sigma e^{-\varphi} \sqrt{-\det(g_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})}$$

$$\text{con } g_{ab} \equiv \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}, \quad B_{ab} \equiv \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu},$$

que en efecto se obtiene a partir de función  $\beta$  [Leigh].

Sabemos además que  $\mathbb{D}_p$  se acopla a campo  
Ramond-Ramond  $C_{(p+1)}$  a través de término

$$\pm \tau_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} C_{(p+1)} \equiv \pm \tau_p \underbrace{\int d\sigma^0 \dots d\sigma^p}_{\text{densidad de carga } \rho_p} \underbrace{\partial_{\sigma^0} X^{\mu_0} \dots \partial_{\sigma^p} X^{\mu_p}}_{\text{retracción } C_{\sigma^0 \dots \sigma^p}(\sigma)} C_{\mu_0 \dots \mu_p}(X(\sigma))$$

Por dualidad  $T$ , deben existir términos adicionales  
que acoplen campos R-R en  $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ , y  $\dots$ ,  
por invariancia bajo transformaciones de norma de  $B_{(2)}$ ,  
con  $\tilde{F}_{(2)} \equiv B_{(2)} + 2\pi\alpha' F_{(2)}$ .

El resultado se puede resumir en la acción tipo

**Cheern-Simons** ó **Wess-Zumino** [Douglas]

$$S_{WZ} = \pm \tau_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} e^{\tilde{F}_{(2)}} \wedge \sum_{\mathbb{Z}} C_{(q)}$$

$$\equiv \pm \tau_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} C_{(p+1)} \pm \tau_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} \tilde{F}_{(2)} \wedge C_{(p-1)} \pm \dots$$

$$\text{donde } (T_{(n)} \wedge T'_{(n')})_{a_1 \dots a_{n+n'}} \equiv \frac{1}{n!n'!} T_{[a_1 \dots a_n} T'_{a_{n+1} \dots a_{n+n}]}$$

Los términos más allá del primero muestran que  $D_p$  se puede acoplar también a  $C_{(q)}$  con  $q=p-1, p-3, \dots$   
 P.ej., si consideramos una  $D_p$ -brana que porta un campo magnético  $F_{12} \neq 0$  (ó  $B_{12} \neq 0$ ), el segundo término es (en norma estática  $\sigma^a = x^a$ )

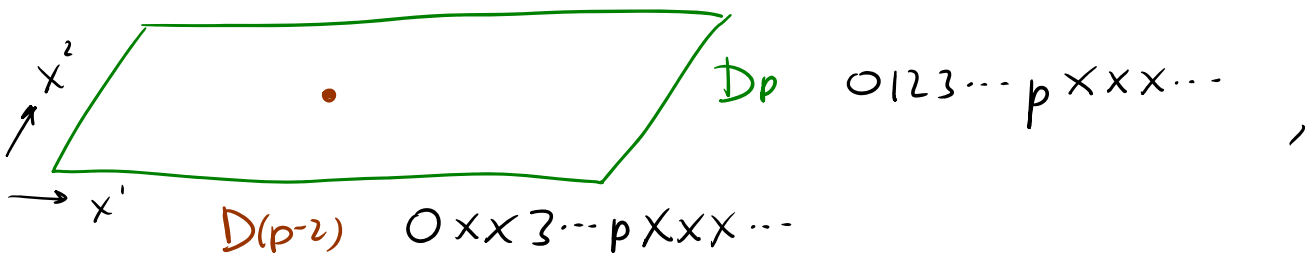
$$\pm \tau_p \int dx^0 \dots dx^p 2\pi\alpha' F_{12} C_{03\dots p} \quad ,$$

$M_{p+1}$

es decir, esta  $D_p$  porta (además de carga bajo  $C_{(p+1)}$ ) carga de  $D(p-2)$ -brana

$$q^{3\dots p} = \underbrace{\pm \tau_p 2\pi\alpha' F_{12} V_{12}}_{\rho_{p-2}} \int dx^3 \dots dx^p$$

Para entender la interpretación física de esto, notemos primero que un estado con  $D_p$  y  $D(p-2)$  superpuestas,





No preservaría ninguna supersimetría:

$$Dp \text{ preserva } \tilde{\eta} = \Gamma^{012 \dots p} \eta \quad (16 \text{ supersimetrías})$$

$$D(p-2) \text{ preserva } \tilde{\eta} = \pm \Gamma^{03 \dots p} \eta \quad (16 \text{ supersimetrías})$$

$\Rightarrow$  superpuestas preservarían sdo  $\eta$  tal que

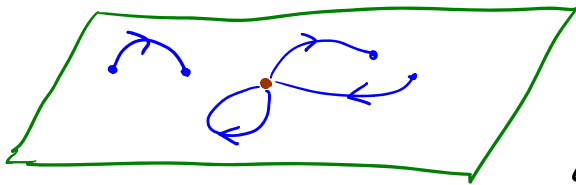
$$\Gamma^{012 \dots p} \eta = \pm \Gamma^{03 \dots p} \eta \Rightarrow \Gamma^{12} \eta = \pm \eta,$$

lo cual es imposible porque

$$(\Gamma^{12})^2 = -1 \Rightarrow \Gamma^{12} \text{ tiene autovalores } \pm i$$



Dado que esta configuración No es BPS, su estabilidad no está garantizada. De hecho, el sistema tiene excitaciones taquiónicas, y es  $\therefore$  perturbativamente inestable.



Sus excitaciones están descritas por cuerdas fundamentales de 4 tipos distintos:

$p-p, (p-2)-(p-2),$   
 asociadas a branas  
 individuales

$(p-2)-p, p-(p-2)$   
 asociadas a sistema conjunto

Para los últimos 2 tipos,  $X^{0,3,\dots,p}(z, \bar{z})$  satisfacen condiciones de borde Neumann en ambos extremos, y  $X^{p+1,\dots,q}(z, \bar{z})$  satisfacen condiciones Dirichlet en ambos extremos, pero  $X^{1,2}(z, \bar{z})$  son D en  $\sigma=0$  y N en  $\sigma=\pi$ , o viceversa. La expansión en modos correspondiente es entonces antiperiódica,

$$X^{1,2}(z, \bar{z}) = i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \frac{\alpha_r^{1,2}}{r} (z^{-r} + \bar{z}^{-r}) \quad \begin{array}{l} \text{para D-N} \\ \text{N-D} \end{array}$$

$\uparrow$   
 $z \equiv e^{\sigma^2 + i\sigma'}$

$$\Rightarrow z = \begin{cases} \bar{z} & \text{en } \sigma=0 \\ e^{2\pi i} \bar{z} & \text{en } \sigma=\pi \end{cases}$$

Recordando que, en el plano  $w \equiv \sigma^2 + i\sigma'$ , el campo fermiónico  $\psi^w$  en el sector R tiene (por definición) la misma periodicidad que  $X^w$ , y en el sector NS tiene la periodicidad opuesta a  $X^w$ , vemos que la constante de orden para  $L_0$  (energía de punto cero) en el caso de cuerdas  $p-(p-2)$  ó  $(p-2)-p$  es

$A_R = 0$  (por supersimetría en hoja de mundo) y

$$A_{NS} = \underbrace{(8-2)}_{\substack{\text{bosón} \\ \text{periódico}}} \underbrace{\left(-\frac{1}{24}\right)}_{X^{1,2}} + \underbrace{(8-2)}_{\substack{\text{fermión} \\ \text{antiperiódico}}} \underbrace{\left(-\frac{1}{48}\right)}_{\substack{\psi_{\beta,\gamma} \\ \psi^{1,2}}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{bosón} \\ \text{antiperiódico}}} \underbrace{\left(+\frac{1}{48}\right)}_{X^{1,2}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{fermión} \\ \text{periódico}}} \underbrace{\left(+\frac{1}{24}\right)}_{\psi^{1,2}}$$

$$= -\frac{4}{24} - \frac{4}{48} = -\frac{1}{4} < 0$$

(Más en general,  $A_{NS} = -\frac{1}{2} + \frac{\#_{ND}}{4}$ , así que los sectores NS y R solo podrían ser degenerados si  $\#_{ND} = 0, 4, 8$ .)

El estado más bajo  $|0, s_1\rangle_{NS}$  es  $\therefore$  un taquión,  
 $\psi_{\nu}^{0,3,\dots,9}$   $\psi_{\nu}^{1,2}$   
 $\nu \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$   $\nu \in \mathbb{Z}$

y la contribución adicional de  $s_1$  al número fermiónico (en la hoja de mundo)  $F$  hace que este estado

(fermiónico en el espaciotiempo) sobreviva la proyección GSO  $(-1)^F = \pm 1$ .

El sistema  $D_p - D(p-2)$  quiere  $\therefore$  decaer. El resultado final de este decaimiento debe portar las mismas cargas y tener menos energía, es decir, debe ser un estado ligado  $D_p - D(p-2)$ .

A partir del álgebra supersimétrica en marco en reposo,

$$\left\{ \begin{bmatrix} Q \\ \tilde{Q} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q^\dagger & \tilde{Q}^\dagger \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \mathbb{1} + \begin{bmatrix} 0 & g^{3\dots p} \\ \mp g_{RR}^{3\dots p} & 0 \end{bmatrix} \Gamma^{03\dots p} \\ + \begin{bmatrix} 0 & g^{1\dots p} \\ \pm g_{RR}^{1\dots p} & 0 \end{bmatrix} \Gamma^{01\dots p} \quad \begin{matrix} (\Gamma^{03\dots p})^2 = \mp 1 \\ (\Gamma^{01\dots p})^2 = \pm 1 \end{matrix}$$

para  $\frac{p(p+1)}{2}$  impar,  
par,

deducimos que los autovalores de la matriz hermítica

$$\begin{bmatrix} m & \pm i g_{D(p-2)} \pm g_{Dp} \\ \mp i g_{D(p-2)} \pm g_{Dp} & m \end{bmatrix} \text{ deben ser no negativos,}$$

por lo que la determinante  $m^2 - (g_{D(p-2)}^2 + g_{Dp}^2) \geq 0$ ,

es decir, cualquier estado con ambos tipos de carga debe

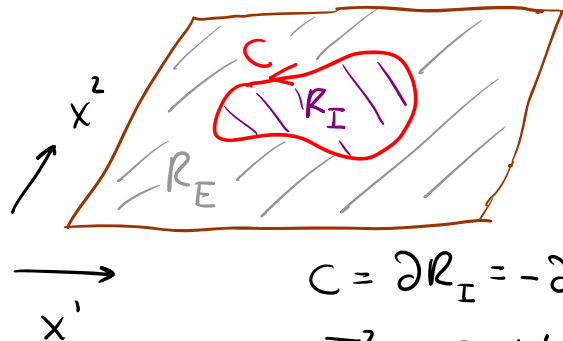


En base a este resultado, interpretamos al sistema  $Dp + F_{12}$  constante como un estado ligado de 1  $Dp$ -brana y  $n_{p-2}$   $D(p-2)$ -branas, donde

$$n_{p-2} = \frac{q_{D(p-2)}}{\tau_{p-2} V_{3\dots p}} = \frac{\tau_p V_{12} 2\pi\alpha' F_{12} \cancel{V_{3\dots p}}}{\tau_{p-2} \cancel{V_{3\dots p}}} = \frac{1}{2\pi} V_{12} F_{12}$$

Esto solo tiene sentido si  $\frac{1}{2\pi} V_{12} F_{12} \in \mathbb{Z}$ , y en un  $T^2$  tenemos justamente

$$\begin{aligned} \exp(i \oint_C A_{(1)}) &= \exp\left(i \int_{R_I} F_{(2)}\right) \\ &= \exp\left(-i \int_{R_E} F_{(2)}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} C &= \partial R_I = -\partial R_E \\ T^2 &= R_I \cup R_E \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exp\left(i \int_{T^2} F_{(2)}\right) = 1,$$

es decir, el flujo magnético debe estar cuantizado,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{T^2} F_{(2)} = n \in \mathbb{Z}. \quad \checkmark$$

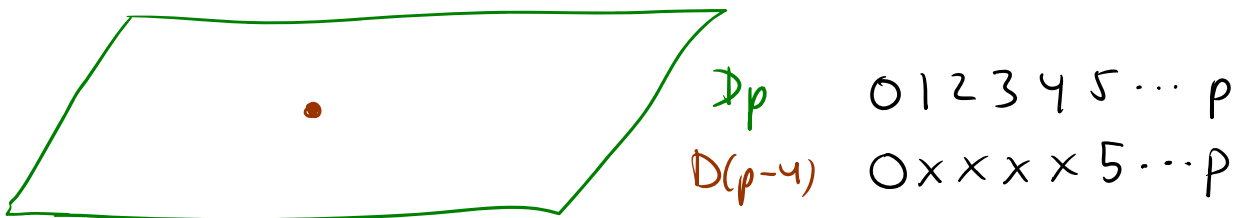
$$\underbrace{V_{12} F_{12}}_{\text{si } F_{12} = \text{cte.}}$$

Al formarse el estado ligado, las  $D(p-2)$ -branas se disuelven en  $Dp$  y se convierten en campo magnético constante.

De manera similar, los términos adicionales en  $S_{\text{wb}}$  que acoplan  $F \wedge F$ ,  $F \wedge F \wedge F$ , ...

a  $C_{(p-3)}$ ,  $C_{(p-5)}$ , ..., implican que la  $Dp$ -brana puede portar carga de  $D(p-4)$ ,  $D(p-6)$ , etc.

El primer caso es curioso, porque



superpuestas preservarían supersimetrías tales que

$$\tilde{\eta} = \Gamma^{01\dots p} \eta = \pm \Gamma^{05\dots p} \eta \iff \underbrace{\Gamma^{1234}} \eta = \pm \eta,$$

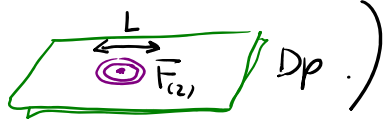
$$(\Gamma^{1234})^2 = +1$$

$$\text{Tr}(\Gamma^{1234}) = 0$$

es decir, un total de 8 supersimetrías. (Las  $32-8=24$  supercargas rotas generan un multiplete  $2^{12}$ -dimensional.)

Para una cuerda  $D_p - D_{(p-4)}$  ó  $D_{(p-4)} - D_p$  obtenemos las constantes de orden  $A_{rr} = 0$  y  $A_{rr} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 0$ , lo cual indica que, como era de esperarse, no existe tachión (y el espectro es de hecho supersimétrico). La desigualdad BPS en este caso resulta ser

$$m \geq |q_{D_p}| + |q_{D_{(p-4)}}|,$$

así que, de existir un estado ligado, debe ser 'marginal' (o 'en umbral'). Estos de hecho existen y son descritos por  $D_p$  con  $(F \wedge F)_{1234} \sim F_{12} F_{34} \neq 0$  [ver Sen, hep-th/9511026]. (Para sistemas con 2 o más  $D_p$ 's, el estado ligado está descrito por un instantón [Witten, 9511030; Vafa 9512078]   $D_p$ .)

Para  $N$   $D_p$ -branas paralelas sabemos que  $A_a$  y  $X^i$  se convierten en matrices  $N \times N$ , y la teoría efectiva es entonces no abeliana, con grupo de norma  $U(N)$ .



Parte de ella se puede deducir usando dualidad T, a partir de la acción no abeliana para N D1-branas.

P.ej.,

$$S_{\text{DBI/NA}} = -T_1 \int d^{10}x \text{TrS} \left[ e^{-\varphi} \sqrt{-\det(g_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} \right]$$

retracciones usando  
 $D_a X^i = \partial_a X^i + i[A_a, X^i]$

y campos  $g_{\mu\nu}(X), B_{\mu\nu}(X), \varphi(X)$   
 matriz

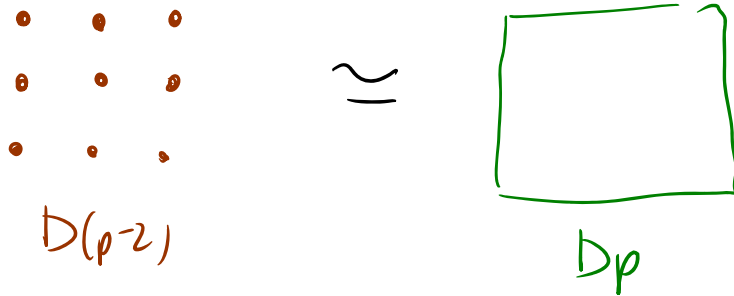
Traza sobre índices  $U(N)$ ,

considerando solo productos simétricos de  $F$ 's y  $DX$ 's  
 (dejando fuera así términos con derivadas covariantes de  $F$ ) [Tseytlin, hep-th/9701125]

Al T-dualizar  $D9 \rightarrow Dp$ , aparecen términos con conmutadores  $[X^i, X^j]$  [Myers, hep-th/9910053]

Procedimiento similar para  $S_{\text{WZ/NA}}$  produce acoplamientos de  $Dp$ -branas con  $C_{(p+2)}, C_{(p+4)}, \text{etc.}$  Es decir, una colección de  $Dp$ 's puede portar carga de  $D(p+2), D(p+4), \text{etc.}$

Este es el llamado 'efecto dieléctrico' [Myers] :



Hasta aquí discutimos solo la parte básica de la acción. La extensión supersimétrica para el caso abeliano ha sido analizada en un foro plano en [Asanagic, Popescu, Schwarz, hep-th/9610249, 9612080] y para un foro general en

[Cederwall, von Gussich, Nilsson, Westerberg, 9610148, " + Sundell, 9611159 ].

Para el caso no abeliano, ver

[Collinucci, de Roo, Eerink, hep-th/0205150

Bergshoeff, de Roo, Sevrin, 0011264 ].

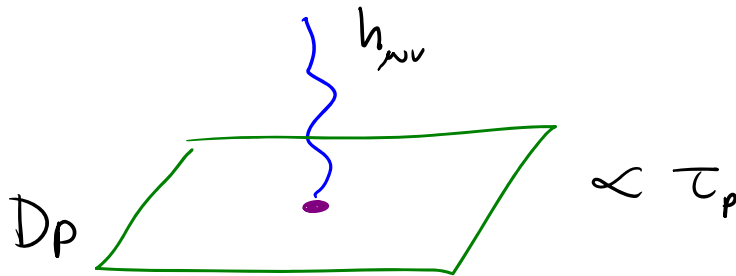
Ahora, ¿cómo podemos calcular la tensión de  $D_p$ ?

Evidentemente  $\tau_p = \frac{\text{energía}}{p\text{-volumen}}$  controla la intensidad

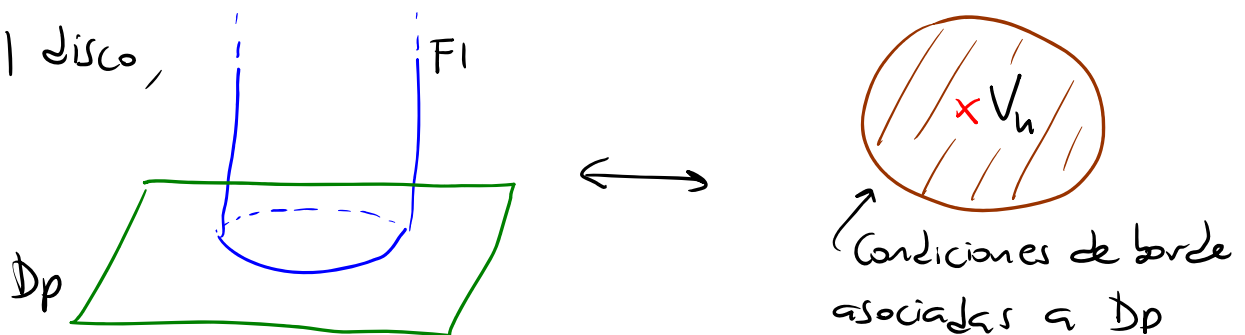
con que la D-brana se acopla al campo gravitacional.

En efecto,  $S_{\text{DBI}}$  implica que  $D_p$  es fuente de

$h_{\mu\nu}(x) \equiv g_{\mu\nu}(x) - \eta_{\mu\nu}$ , con 'constante de acoplamiento'  $\tau_p$ . En particular, el término de  $\mathcal{O}(h)$  en  $S_{\text{DBI}}$  corresponde al vértice de 1 pata (renacuajo)

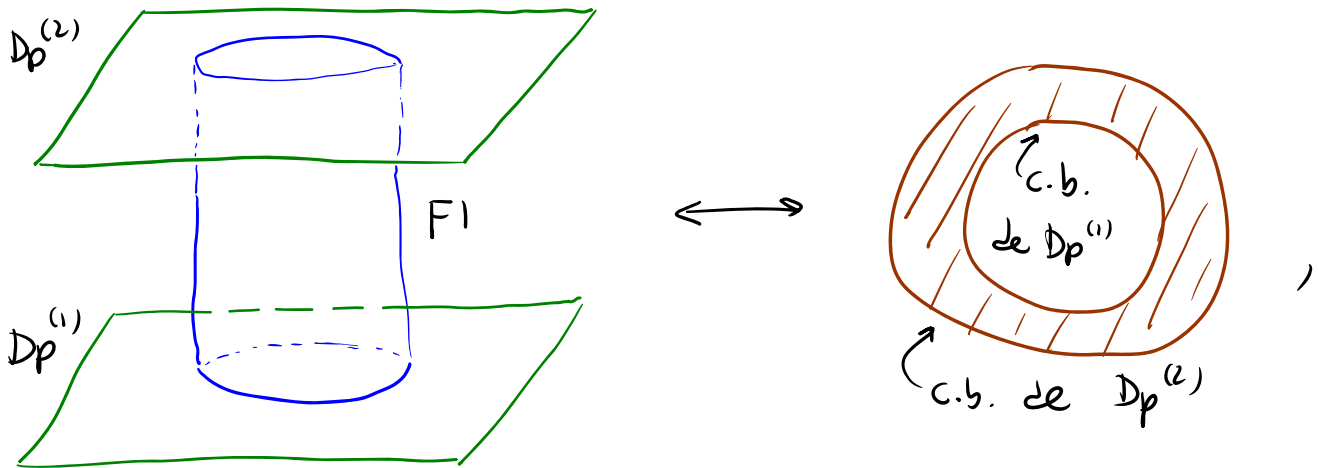


Este vértice se deduce a partir de amplitud de 1 cuerda en el disco,

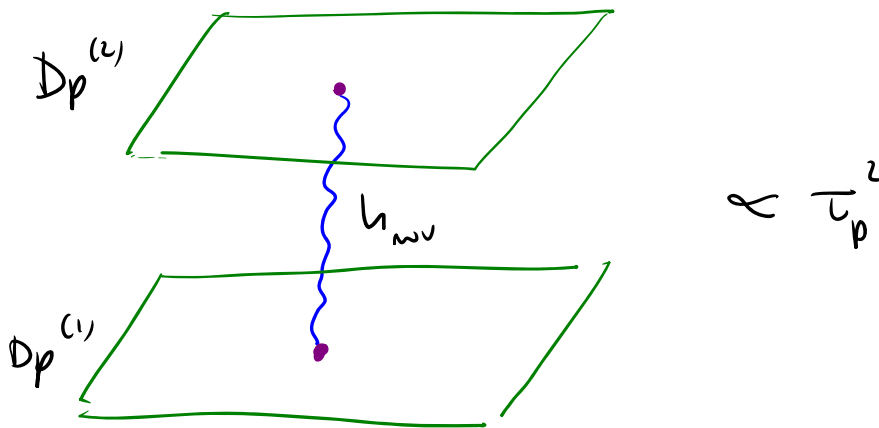


Pero es un poco difícil determinar la normalización correcta de esta amplitud.

Nos resultará más fácil calcular la amplitud que describe la interacción entre 2 Dp-branas paralelas,



que se puede comparar con el diagrama de campos



~~Calcularemos primero este último diagrama.~~

~~En realidad nos interesan también los diagramas análogos donde las Dp's intercambian un  $\varphi$  ó  $B_{\mu\nu}$ , porque, como veremos más adelante, la amplitud~~

de cuerdas incluye a todos los campos NS-NS no masivos en un mismo paquete.

Necesitamos determinar la forma explícita de los vértices y propagadores, a partir de la acción efectiva  $S_S + S_{DBI}$ , donde

$$S_S = \frac{1}{2K^2} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\varphi} \left[ R + 4(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{12} H^2 \right]$$

$K^2 \equiv 8\pi G_N$  incluye  $e^{2\varphi}$

(parte de de  $\Phi(x) = \varphi_0 + \varphi(x)$ )

+ R-R + fermiones

$g_{\mu\nu}(x)$  métrica en marco de cuerdas

$$= \frac{1}{2K^2} \int d^D x \sqrt{-g_E} \left[ R_E - \frac{4}{D-2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{12} e^{-\frac{8\varphi}{D-2}} H_E^2 \right] + \dots,$$

$$g_{E\mu\nu} \equiv e^{-\frac{4\varphi(x)}{D-2}} g_{\mu\nu}(x) = e^{-\varphi/2} g_{\mu\nu}(x)$$

métrica en marco de Einstein

incluye  $e^{-\varphi_0}$

$$S_{DBI} = -T_p \int d^{p+1} x e^{-\varphi} \sqrt{-\det(g_{ab} + B_{ab})}$$

$$= -T_p \int d^{p+1} x e^{-\left(\frac{p-3}{4}\right)\varphi} \sqrt{-\det(g_{Eab} + e^{-\varphi/2} B_{ab})}$$

Para obtener los vértices, desarrollamos  $S_{\text{DBI}}$  a orden lineal en  $\varphi$ ,  $B_{\mu\nu}$  y  $h_{\mu\nu} \equiv g_{E\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$  (campos  $d$ -dimensionales, no canónicamente normalizados):

$$S_{\text{DBI}} = -\tau_p V_{p+1} - \tau_p \int d^{p+1}x \left[ \left(\frac{p-3}{4}\right)\varphi + \frac{1}{2}h_{\alpha}^{\alpha} + \mathcal{O}(h^2) \right]$$

$$= \text{cte.} - \int d^{10}x \left[ J_{\varphi}(x)\varphi(x) + \frac{1}{2}T^{\mu\nu}(x)h_{\mu\nu}(x) + J_B^{\mu\nu}(x)B_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(h^2) \right]$$

$$\text{con } \begin{cases} J_{\varphi}(x) \equiv \tau_p \left(\frac{p-3}{4}\right) \delta^{(9-p)}(x^i) \\ T^{\mu\nu}(x) \equiv \tau_p \hat{\eta}^{\mu\nu} \delta^{(9-p)}(x^i) \\ J_B^{\mu\nu}(x) \equiv 0 \end{cases}, \quad \hat{\eta}^{\mu\nu} \equiv \begin{cases} \eta^{\mu\nu} & \text{si } \mu=\alpha, \nu=\beta \\ 0 & \text{si } \mu \text{ ó } \nu = i \end{cases}$$

Para obtener los propagadores, desarrollamos  $S_s$  a orden cuadrático en los mismos campos:

$$S_s = \frac{1}{2k^2} \int d^p x \left[ \frac{1}{4}h_{\mu\nu} \partial^2 \underbrace{\left( h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h \right)}_{\equiv \bar{h}^{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\varphi \partial^2 \varphi + \dots \right]$$

en norma  $\partial_{\mu}\bar{h}^{\mu\nu} = 0$  (de Doder = harmónica = Lorenz)

$$\left( \Rightarrow \text{ec. de mov. } \partial^2 \bar{h}^{\mu\nu} = k^2 T^{\mu\nu} \checkmark \right)$$

Para el dilatón tenemos entonces el propagador

$$\langle \varphi(k) \varphi(-k) \rangle = -2K^2 \frac{1}{k^2} \equiv \text{---}$$

Para el gravitón, escribiremos el término cinético como

$$\frac{1}{2k^2} \frac{1}{2} h_{\mu\nu} M^{\mu\nu\lambda\rho} \partial^2 h_{\lambda\rho}$$

$$\text{con } M^{\mu\nu\lambda\rho} \equiv \frac{1}{4} (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho}),$$

tenemos el propagador

$$\langle h_{\mu\nu}(k) h_{\lambda\rho}(-k) \rangle = -2k^2 \frac{1}{k^2} D_{\mu\nu\lambda\rho} \equiv \text{---}$$

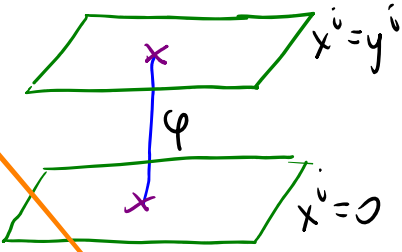
donde

$$D_{\mu\nu\lambda\rho} \equiv \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda} - \frac{2}{D-2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho}$$

$$\text{satisface } M^{\mu\nu\lambda\rho} D_{\lambda\rho\sigma\tau} = \frac{1}{2} (\delta_{\sigma}^{\mu} \delta_{\tau}^{\nu} + \delta_{\tau}^{\mu} \delta_{\sigma}^{\nu}).$$

Con estos ingredientes podemos finalmente calcular

los 2 diagramas que nos interesan,



$$= \int d^{10}_x d^{10}_{x'} J_\varphi(x) \left( 2K^2 \int \frac{d^{10}k}{(2\pi)^{10}} \frac{e^{ik \cdot (x-x')}}{k^2} \right) J_\varphi(x')$$

$$= 2K^2 \tau_p^2 \left( \frac{p-3}{4} \right)^2 \int d^{p+1}_x d^{p+1}_{x'} \int \frac{d^{10}k}{(2\pi)^{10}} \frac{e^{ik_{||} \cdot (x-x')} e^{ik_{\perp} \cdot (y-0)}}{k_{||}^2 + k_{\perp}^2}$$

$$\int \frac{d^{p+1}(x+x')}{2^{p+1}} \int d^{p+1}(x-x') \leftarrow (2\pi)^{p+1} \delta^{(p+1)}(k_{||})$$

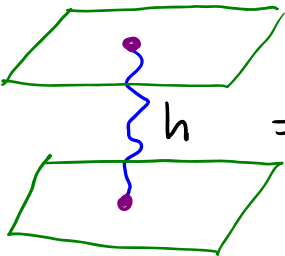
$$= 2K^2 \tau_p^2 \left( \frac{p-3}{4} \right)^2 V_{p+1} \int \frac{d^{9-p}k_{\perp}}{(2\pi)^{9-p}} \frac{e^{ik_{\perp} \cdot y}}{k_{\perp}^2}$$

$\equiv \Delta_{9-p}(y)$  propagador escalar en direcciones transversales

$$= \text{cte} \cdot (y^2)^{-\left(\frac{7-p}{2}\right)}$$

$D_{\mu\nu\lambda\rho}$

y de manera similar



$$= 2K^2 \tau_p^2 V_{p+1} \frac{1}{2} \hat{\eta}^{\mu\nu} \left( \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} \right) \frac{1}{2} \hat{\eta}^{\lambda\rho} \Delta_{9-p}(y)$$

$$\frac{1}{4} \left[ (p+1) + (p+1) - \frac{1}{4} (p+1)^2 \right]$$

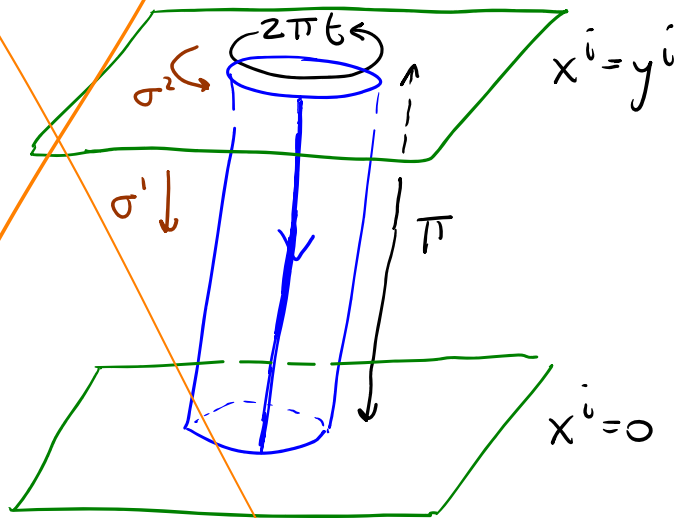


La amplitud total de interacción entre las 2 Dp-branas a través de campos NS-NS sin masa es entonces

$$M_{NS-NS}^{m_{NS-NS}}(y) = 2K^2 \tau_p^2 V_{p+1} \Delta_{p+1}^2(y) \left[ \left(\frac{p-3}{4}\right)^2 + \frac{p+1}{2} - \left(\frac{p+1}{4}\right)^2 \right]$$

$$\frac{p^2 - 6p + 9 + 8p + 8 - p^2 - 2p - 1}{16} = 1$$

Pasemos ahora al cálculo en cuerdas, donde nos interesa determinar la amplitud de cero puntos en el anillo / cilindro, que podemos interpretar como un lazo de cuerda abierta. Como vimos antes, en el formalismo canónico la normalización de este lazo está completamente definida:





Como es usual, la amplitud se factoriza,

$$M_{c^2} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{2t} \text{Tr}_0(e^{-2\pi t \hat{H}_0}) \text{Tr}_x(e^{-2\pi t \hat{H}_x}) \left[ \text{Tr}_{NS}^{6p} (e^{-2\pi t \hat{H}_\psi}) - \text{Tr}_R^{6p} (e^{-2\pi t \hat{H}_\psi}) \right]$$

bosones                      fermiones

donde  $\text{Tr}_{NS}^{6p}(\dots) = \frac{1}{2} \text{Tr}_{NS}(\dots) + \frac{1}{2} \text{Tr}_{NS}((-1)^{\hat{F}} \dots)$ ,

y tenemos

2 orientaciones

$$\text{Tr}_0(e^{-2\pi t \hat{H}_0}) = 2 V_{p+1} \int \frac{d^p k}{(2\pi)^p} e^{-2\pi t \alpha' k^2 - \frac{t y^2}{2\pi \alpha'}}$$

$$= 2 V_{p+1} (8\pi^2 \alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{t y^2}{2\pi \alpha'}}$$

$$\text{Tr}_x(e^{-2\pi t \hat{H}_x}) = \left( e^{\frac{2\pi t}{24}} \frac{1}{\pi} \sum_{N_n=0}^{\infty} e^{-2\pi t n N_n} \right)^8$$

$\underbrace{e^{\frac{2\pi t}{24}}}_{\tilde{q}^{-1/24}} \underbrace{\frac{1}{\pi} \sum_{N_n=0}^{\infty} e^{-2\pi t n N_n}}_{(1-\tilde{q}^n)^{-1}} \tilde{q} \equiv e^{-2\pi t}$

$$\equiv \eta(it)^{-8}$$

← función eta de Dedekind

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{Tr}_{NS} \left( e^{-2\pi t \hat{H}_\psi} \right) &= \frac{1}{2} \left( e^{\frac{2\pi t}{48}} \prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} (1 + e^{-2\pi t r}) \right)^8 \\
&= \frac{1}{2} q^{-1/6} \left[ \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2}) \right]^8 \\
&= \frac{1}{2} \left[ q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \right]^{-4} \left[ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) (1 + q^{n-1/2})^2 \right]^4 \\
&\equiv \frac{1}{2} \frac{\Theta_3(0|it)^4}{\eta(it)^4} \quad \leftarrow \text{función teta de Jacobi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{Tr}_{NS} \left( (-1)^{\hat{F}} e^{-2\pi t \hat{H}_\psi} \right) &= -\frac{1}{2} \left( e^{\frac{2\pi t}{48}} \prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} (1 - e^{-2\pi t r}) \right)^8 \\
&= -\frac{1}{2} q^{-1/6} \left[ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-1/2}) \right]^8 \\
&\equiv -\frac{1}{2} \frac{\Theta_4(0|it)^4}{\eta(it)^4}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \text{Tr}_R \left( e^{-2\pi t \hat{H}_\Psi} \right) = \frac{1}{2} (8+8) \left( e^{-\frac{2\pi t}{24}} \prod_{r=1}^{\infty} (1+e^{-2\pi t r}) \right)^8$$

$$= \frac{1}{2} q^{1/3} \left[ \sqrt{2} \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n) \right]^8$$

$$\equiv \frac{1}{2} \frac{\Theta_2(0|it)^4}{\eta(it)^4} ,$$

$$\frac{1}{2} \text{Tr}_R \left( (-1)^{\hat{F}} e^{-2\pi t \hat{H}_\Psi} \right) = \frac{1}{2} (8-8) \left( e^{-\frac{2\pi t}{24}} \prod_{r=1}^{\infty} (1-e^{-2\pi t r}) \right)^8$$

$$\equiv \frac{1}{2} \frac{\Theta_1(0|it)^4}{\eta(it)^4} = 0 .$$

Juntámbolos todo concluimos que

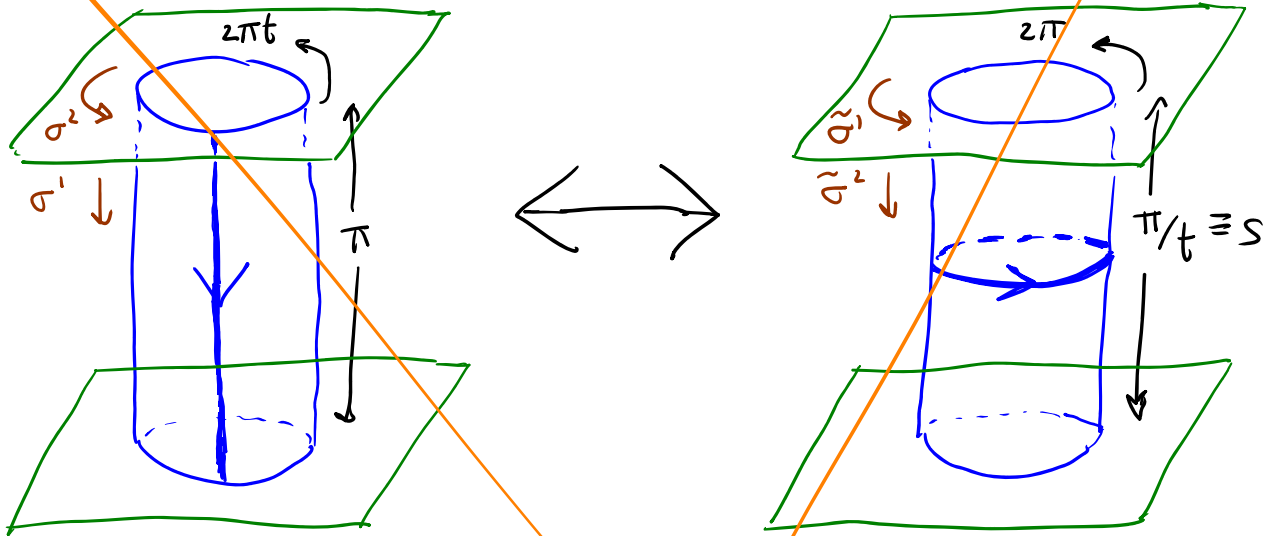
$$\mathcal{M}_{\zeta^2}(y) = Z V_{p+1} \int_0^{\infty} \frac{dt}{2t} (8\pi^2 \alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-t \frac{y^2}{2\pi \alpha'}} \eta(it)^{-8} \frac{1}{2} \left[ \frac{\Theta_3(it)^4 - \Theta_4(it)^4 - \Theta_2(it)^4}{\eta(it)^4} \right]$$

$$= 0 \quad \text{porque} \quad \Theta_3(0|\tau)^4 = \Theta_4(0|\tau)^4 + \Theta_2(0|\tau)^4$$

identidad abstrusa de Jacobi

Este resultado es consecuencia del espectro super-simétrico de la cuerda abierto.

Pero vos interesa reinterpretar esta amplitud en términos de una cuerda cerrada:



Al hacer esta traducción, los estados de cuerda cerrada en el sector NS-NS ( $\psi^i$  antiperiódico en  $\tilde{\sigma}^1 = \sigma^2/t$ ) corresponden a los términos sin  $(-1)^F$  en la traza sobre estados de cuerda abierta, mientras que las cuerdas cerradas R-R ( $\psi^i$  periódico en  $\tilde{\sigma}^1 = \sigma^2/t$ ) corresponden a los términos con  $(-1)^F$  en la traza de cuerdas abierta.

Esperaríamos en particular una **repulsión** R-R por el hecho de que las 2 Dp's tienen cargas del

mismo signo bajo  $C_{01\dots p}$ , y una atracción NS-NS  
debida a la interacción gravitacional/dilatónica.

El hecho de que  $M_{c^2}^{(0)} = 0$  indica que la  
repulsión R-R se cancela (incluso para estados masivos)  
con la atracción NS-NS, de modo que las Dp-branas  
paralelas NO ejercen ninguna fuerza neta una  
sobre la otra. Esto es consecuencia de la  
condición BPS:  $M_{TOT} = Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 = M_1 + M_2$ ,  
por lo que no puede existir una energía potencial.

(Para un sistema Dp- $\bar{D}p$ , donde no se presenta ninguna  
simetría, la contribución del sector R-R tiene  
el signo contrario, y se suma  $\therefore$  al sector NS-NS  
para dar una atracción neta.)

De hecho  $M_2(y)$  diverge cuando  $y \rightarrow 0$ , porque  
aparece un taquión en el espectro de cuerdas abiertas.

Ver [Banker, Susskind, hep-th/9511194]. )

Quedámonos solo con las trazas sin  $(-1)^F$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{2t} \text{Tr}_0(e^{-2\pi t \hat{H}_0}) \text{Tr}_x(e^{-2\pi t \hat{H}_x}) \left[ \frac{1}{2} \text{Tr}_{NS} (e^{-2\pi t \hat{H}_\psi}) - \frac{1}{2} \text{Tr}_K (e^{-2\pi t \hat{H}_\psi}) \right] \\ &= 2 \sum_{\nu+1} \int_0^{\infty} \frac{dt}{2t} (8\pi^2 \alpha' t)^{-\frac{\nu+1}{2}} e^{-\frac{t y^2}{2\pi \alpha'}} \eta(it)^{-d} \left[ \frac{1}{2} \frac{\Theta_3(0|it)^4}{\eta(it)^4} - \frac{1}{2} \frac{\Theta_2(0|it)^4}{\eta(it)^4} \right] \end{aligned}$$

Esto incluye todavía la contribución de todos los modos de cuerdas cerradas (= todos los modos de cuerdas abiertas). Para aislar la contribución de los modos no masivos, recordemos que dan la contribución dominante en el límite  $s \equiv \frac{\pi}{t} \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow 0$ ), que corresponde propagación de la cuerda cerrada a través de una gran distancia. (Todos los modos de cuerdas abiertas contribuyen a este límite. Los modos no masivos de cuerdas abiertas dan la contribución dominante en el límite opuesto  $t \rightarrow \infty$  ( $s \rightarrow 0$ ).)



Usando

$$\eta(it) = t^{-1/2} \eta(i/t), \quad \Theta_3(0|it) = t^{-1/2} \Theta_3(0|i/t),$$

$$\Theta_2(it) = t^{-1/2} \Theta_4(i/t), \quad \Theta_4(0|it) = t^{-1/2} \Theta_2(0|i/t),$$

y cambiando la variable de integración  $t \rightarrow s = \pi/t$ ,

$$M = \int_{NS-NS} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left( \frac{8\pi^3}{s} \right)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2s}} \left( \frac{\pi}{s} \right)^4 \eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^{-8} \frac{1}{2} \left[ \frac{\Theta_3(0|\frac{is}{\pi})^4}{\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^4} - \frac{\Theta_4(0|\frac{is}{\pi})^4}{\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^4} \right].$$

Cuando  $s \rightarrow \infty$  tenemos  $q \equiv e^{-2s} \ll 1$  y  $\therefore$

$$\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^{-8} = \left[ q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \right]^{-8} = q^{-1/3} [1 + 8q + \mathcal{O}(q^2)],$$

$$\frac{\Theta_3(0|\frac{is}{\pi})^4}{\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^4} = q^{-1/6} \left[ \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2}) \right]^8 = q^{-1/6} [1 + 8q^{1/2} + \mathcal{O}(q)],$$

$$\frac{\Theta_4(0|\frac{is}{\pi})^4}{\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^4} = q^{-1/6} \left[ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-1/2}) \right]^8 = q^{-1/6} [1 - 8q^{1/2} + \mathcal{O}(q)],$$

así que

$$\eta^{-8} \left( \frac{\Theta_3^4}{\eta^4} - \frac{\Theta_4^4}{\eta^4} \right) = q^{-1/3} [1 + \mathcal{O}(q)] q^{-1/6} \underbrace{[1 + 8q^{1/2} - 1 + 8q^{1/2} + \mathcal{O}(q)]}_{16q^{1/2}}$$

$$= 16 + \mathcal{O}(q),$$

de modo que

$$M_{NS-NS} = V_{p+1} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left( \frac{8\pi^3 \alpha'}{s} \right)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\alpha' s}} \left( \frac{\pi}{s} \right)^4 \left[ 0 \cdot e^s + \delta + \delta(e^{-s}) \right]$$

tachión  $\nearrow$        $\uparrow$  modos no masivos       $\uparrow$  modos con  $m^2 = 2/\alpha'$

Separando la contribución de los modos no masivos, y reescribiendo la integral usando  $T \equiv \alpha' s$ , tenemos

$$M_{NS-NS}^{m^2=0} = V_{p+1} \delta(8\pi^2 \alpha')^{-\frac{p+1}{2}} (\pi \alpha')^4 \int_0^\infty dT T^{-(\frac{p+1}{2})} e^{-y^2/2T}$$

$$\int_0^\infty dT \int \frac{d^{p+1}k}{(2\pi)^{\frac{p+1}{2}}} e^{-\frac{T}{2}k^2 + ik \cdot y}$$

completar cuadrado

$$(2\pi)^{\frac{p+1}{2}} \int \frac{d^{p+1}k}{(2\pi)^{p+1}} \frac{e^{ik \cdot y}}{k^2}$$

$$\Delta_{p+1}(y)$$

es decir,

$$M_{NS-NS}^{m^2=0}(y) = V_{p+1} (2\pi)^{p+1} \alpha'^{\frac{p+1}{2}} \Delta_{p+1}(y)$$

Iguálalo a resultados en campos,  $2\kappa^2 \tau_p^2 V_{p+1} \Delta_{p+1}(y)$ ,

concluimos finalmente que

$$\tau_p = \frac{\sqrt{\pi}}{k} (2\pi l_c)^{3-p},$$

o, recordando nuestra convención

$$g_c \equiv \frac{\tau_{F1}}{\tau_{D1}} = \frac{1/2\pi l_c^2}{\sqrt{\pi}(2\pi)^2 l_c^2 / k} = \frac{k}{\sqrt{\pi}(2\pi)^3 l_c^4}$$

(es decir,  $2k^2 \equiv (2\pi)^7 g_c^2 l_c^8$ ),

$$\tau_p = \frac{1}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}}$$

Este es justamente el valor que habíamos deducido antes, con lo cual verificamos la consistencia con dualidad T y el hecho de que una  $D_p$ -brana porta el cuanto mínimo de carga. ✓

Ya que estamos en el tema de la normalización de los acoplamientos, conviene notar que, con este valor para  $\tau_p$ , la acción efectiva para  $N$  Dp-branas ( $S_{\text{DBIN}_A}$ ) se reduce a bajar energías a super-Yang-Mills (con 16 supersimetrías) en  $p+1$  dimensiones (que se puede entender como la reducción dimensional de SYM  $N=1$  en  $9+1$  dim),

$$S_{\text{SYM}} = \frac{1}{4g_{\text{YM}}^2} \int d^{p+1}x \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \text{fermiones},$$

↑ incluye  $A_\alpha, \Phi_i$

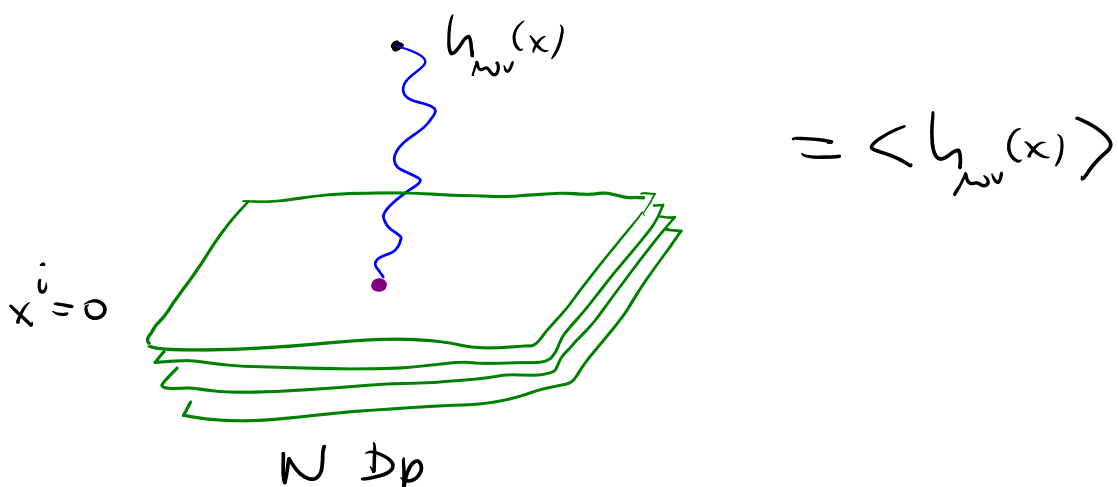
con  $g_{\text{YM}}^2 = (2\pi)^{p-2} g_c^2 l_c^{p-3}$

El caso más familiar (p.ej. por QCD) es  $p=3$ , donde  $[g_{\text{YM}}^2] = M^0$ . Esta teoría (SYM  $N=4$   $U(N)$  en  $3+1$  dim) resulta ser invariante conforme aún a nivel cuántico ( $\beta_{g_{\text{YM}}} = 0$ , a diferencia de QCD). Para  $p \leq 3$  acoplamiento dimensional  $g_{\text{YM}}^2 E^{p-3} \rightarrow \infty$  en  $E \rightarrow \infty$  super-renormalizable no renormalizable.

Resto que sabemos que una Dp-brana es fuente del campo gravitacional (+ dilatómico + R-R), esperaríamos que una colección de  $N \gg 1$  Dp-branas deforme el espacio de manera apreciable (notar que por ser BPS, podemos simplemente apilar un número arbitrario de Dp-branas paralelas).

Bajo condiciones apropiadas (que detallaremos más adelante), deberíamos entonces poder describir este fondo curvo como una solución de las eqs. de movimiento de supergravedad.

Podemos deducir la forma asintótica de los campos a partir de nuestra cuenta previa:



Tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle h_{\alpha\beta}(x) \rangle &= - \int d^p x' \frac{1}{2} T^{\mu\nu}(x') \left[ 2K^2 \int \frac{d^{10} k}{(2\pi)^{10}} \frac{e^{ik \cdot (x-x')}}{k^2} \mathcal{D}_{\mu\nu\alpha\beta} \right] \\
 &= - \frac{1}{2} 2K^2 N \tau_p \int d^p x' \int \frac{d^{10} k}{(2\pi)^{10}} \frac{e^{ik_{||} \cdot (x-x')} e^{ik_{\perp} \cdot (x-0)}}{k_{||}^2 + k_{\perp}^2} \hat{\eta}^{\mu\nu} \mathcal{D}_{\mu\nu\alpha\beta} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\Delta_{9-p}(x_{\perp})} \underbrace{\hspace{10em}}_{\hat{\eta}^{\mu\nu} \left( 2\eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \right)} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{[2 - \frac{1}{4}(p+1)] \eta_{\alpha\beta}}
 \end{aligned}$$

así que

$$\langle h_{\alpha\beta}(x) \rangle = 2K^2 N \tau_p \left( \frac{p-7}{8} \right) \Delta_{9-p}(x_{\perp}).$$

Usando

$$\Delta_d(x) \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2} = 2^{-2} \pi^{-d/2} \Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right) \frac{1}{x^{d-2}},$$

$$2K^2 = (2\pi)^7 g_c^2 l_c^8 \quad \text{y} \quad \tau_p = \frac{1}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}}, \quad \text{esto es}$$

$$\begin{aligned}
 \langle h_{\alpha\beta}(x) \rangle &= \left( \frac{p-7}{8} \right) \underbrace{(4\pi)^{\frac{5-p}{2}} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right) N g_c l_c^{7-p}}_{\equiv C_p} \underbrace{\frac{1}{x_{\perp}^{7-p}}}_{\equiv \frac{1}{r^{7-p}}} \eta_{\alpha\beta}. \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv R^{7-p}}
 \end{aligned}$$

De manera similar

$$\begin{aligned} \langle h_{ij}(x) \rangle &= -\frac{1}{2} 2K^2 N \tau_p \Delta_{9-p}(x_\perp) \underbrace{\hat{\eta}^{\mu\nu} \left[ 2\eta_{\mu i} \eta_{\nu j} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta_{ij} \right]}_{O - \frac{1}{4}(p+1)} \\ &= \left(\frac{p+1}{8}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x) \rangle &= -2K^2 \tau_p \left(\frac{p-3}{4}\right) \Delta_{9-p}(x_\perp) \\ &= \left(\frac{3-p}{4}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p} \end{aligned}$$

Para  $r \gg R$  tenemos entonces

$$\begin{aligned} ds_E^2 &= \left[ 1 + \left(\frac{p-7}{8}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p} \right] \underbrace{(-dx_0^2 + \dots + dx_p^2)}_{\equiv dx_{||}^2} \\ &\quad + \left[ 1 + \left(\frac{p+1}{8}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p} \right] \underbrace{(dx_{p+1}^2 + \dots + dx_9^2)}_{\equiv dx_\perp^2} \\ &= dx_{||}^2 + r^2 dx_\perp^2 \\ &= dx_{||}^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2 \end{aligned}$$

y

$$\Phi(r) = \underbrace{\Phi_0}_{\ln g_c} + \underbrace{\left(\frac{3-p}{4}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p}}_{\equiv \varphi(r)}$$

La solución correspondiente de las ecs. de supergravedad  
 $\forall r$  resulta ser

$$ds_E^2 = A(r)^{\frac{p-7}{3}} dx_{||}^2 + A(r)^{\frac{p+1}{3}} dx_{\perp}^2$$

$$e^{\frac{\Phi}{4}} = g_c A(r)^{\frac{3-p}{4}}$$

$$C_{01\dots p} = | - A(r)^{-1} |$$

*p-brana negra extrema*  
 (con carga  $R^{-2}$ )

[Hobowitz, Strominger '91]

$$\text{con } A(r) \equiv 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p}$$

función armónica en  
 espacio transversal

Es más habitual dar la métrica en el marco de cuerdas:

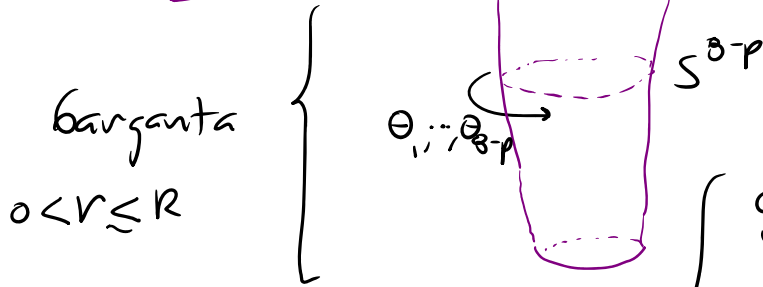
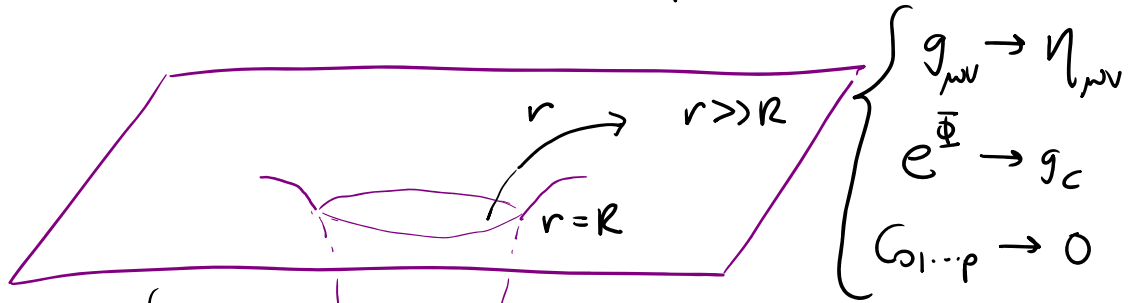
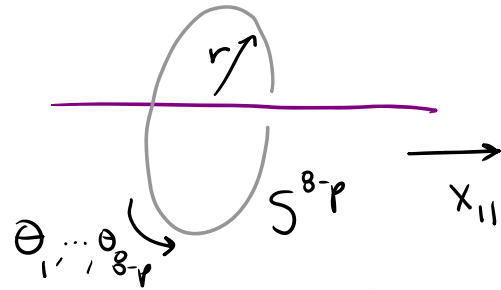
$$ds_c^2 = e^{\frac{\Phi}{2}} ds_E^2 = A^{-1/2} dx_{||}^2 + A^{1/2} dx_{\perp}^2$$

Como esperaríamos, esta solución es BPS, y preserva 16  
 supersimetrías globales (Y de hecho, resulta más fácil  
 determinarla a partir de las condiciones BPS

$$\left. \begin{aligned} \delta \chi_m &= (\mathbb{D}_m + \dots) \epsilon(r) = 0 \\ \delta \lambda &= (\dots) \epsilon(r) = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \epsilon(r) &= f(r) \begin{pmatrix} \eta \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \\ \tilde{\eta} &= \Gamma^{0\dots p} \eta \end{aligned} .$$



La geometría es estática, y análoga a un agujero negro cargado asintóticamente plano:



$$\begin{cases}
 g^{rr} \rightarrow 0 : \text{horizonte (área=0)} \\
 g_{tt} \rightarrow 0 : \text{superficie de límite estacionario} \\
 R \sim r^{\frac{3-p}{2}} \rightarrow \begin{cases} \infty & p > 3 \\ \text{cte.} & p = 3 \\ 0 & p < 3 \end{cases} \\
 \leftarrow \text{Ricci} \\
 e^{\Phi} \sim g_c r^{-\frac{(7-p)}{4}(3-p)} \rightarrow \begin{cases} 0 & p > 3 \\ \text{cte} & p = 3 \\ \infty & p < 3 \end{cases}
 \end{cases}$$

Recordar que supergravedad es apenas una aproximación a la acción efectiva de cuerdas, válida cuando

- 1) la curvatura es pequeña (para suprimir correcciones del tipo  $\alpha' R^2$ ) y

2) la constante de acoplamiento  $g_c e^{\varphi} \ll 1$  (para suprimir correcciones debidas a hojas de mundo con género  $m \geq 1$ )

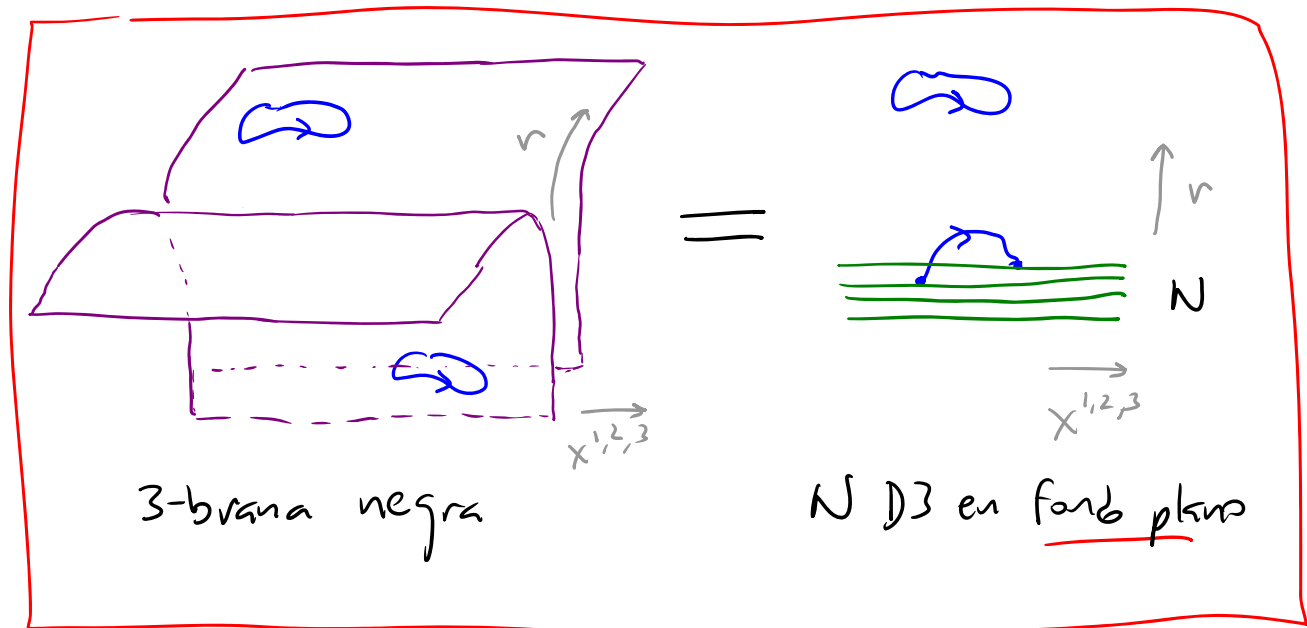
La  $p$ -brana negra extrema cumple con el primer requisito  $\forall r$  si  $p \leq 3$  y  $R \gg l_c \iff g_c N \gg 1$  y satisface el segundo requisito  $\forall r$  si  $p \geq 3$  y  $g_c \ll 1$ .

Vemos entonces que solo la solución con  $p=3$  es completamente confiable  $\forall r$  si  $g_c N \gg 1, g_c \ll 1$  (los casos con  $p \neq 3$  sufren algún tipo de corrección en  $r \rightarrow \infty$  ó en  $r \rightarrow 0$  aún cuando  $g_c N \gg 1, g_c \ll 1$ ).

Y notemos ahora algo muy curioso: en esta solución confiable  $\forall r$ , la 3-brana negra extrema, la geometría es completamente suave (si  $g_c N \gg 1$ ), y se puede extender en la región detrás del horizonte para obtener un espaciotiempo geodésicamente completo [ver hep-th/9405124].  
 ¡¡ No queda  $\therefore$  rastro alguno de la fuerza de los campos !!

¿cómo queda entonces la pila de  $N$  D3-branas??

La interpretación moderna es que la 3-brana negra extremal y la pila de D3-branas sin excitar dan descripciones alternativas del mismo sistema físico, es decir, tenemos una **dualidad** (cuya forma precisa e incluso existencia es algo controvertida):



Esta dualidad se puede poner a prueba comparando cantidades calculadas en las 2 descripciones; pero existe una limitación importante: del lado izquierdo, la descripción con el modelo sigma no lineal es perturbativa solo si  $g_c N \gg 1$  (de otra manera habría que sumar todas las

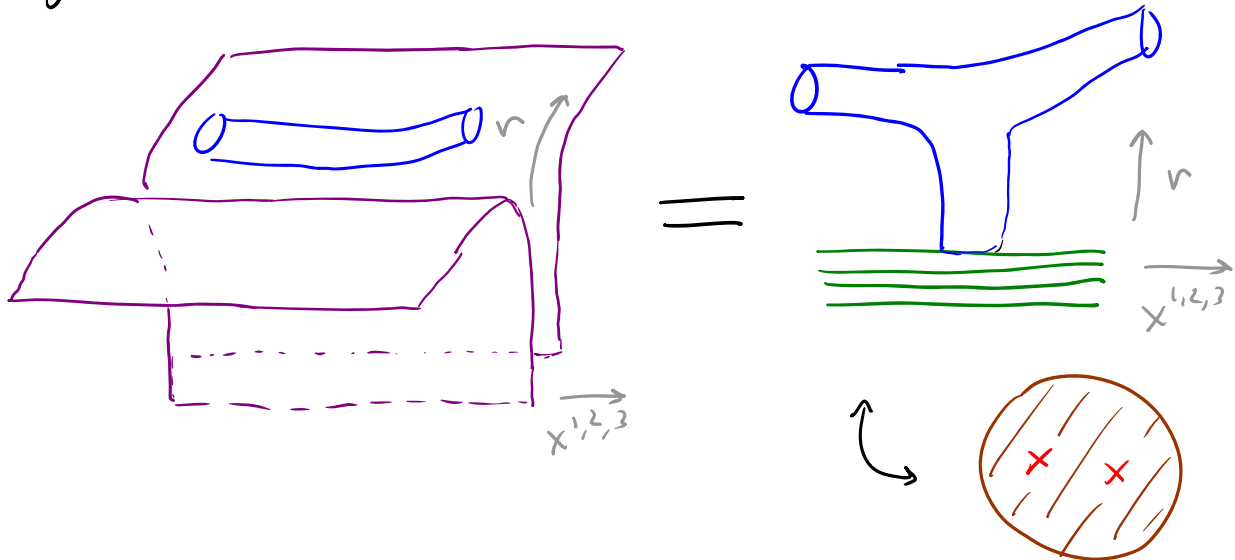
correcciones en  $\alpha'$ ), mientras que la descripción en el lado derecho es perturbativa solo si  $g_c N \ll 1$  (de otra manera habría que sumar sobre hojas de mundo con un número arbitrario de agujeros).

Así que, de entrada, solo tenemos control cuantitativo sobre estas 2 descripciones en regímenes mutuamente excluyentes. (Existe un problema técnico adicional: incluso cuando  $g_c N \gg 1$ , del lado izquierdo no tenemos una buena descripción perturbativa, por el hecho de que el fondo incluye un campo  $R-R$ , cuyo operador de vértice  $R-R$  crea un cono en la hoja de mundo, ocasionando que el modelo sigma no lineal no esté bien definido en el formalismo RNS [ver sin embargo hep-th/9904104, 0307032 para RNS, hep-th/9805028 para GS, hep-th/0411170 para B].)

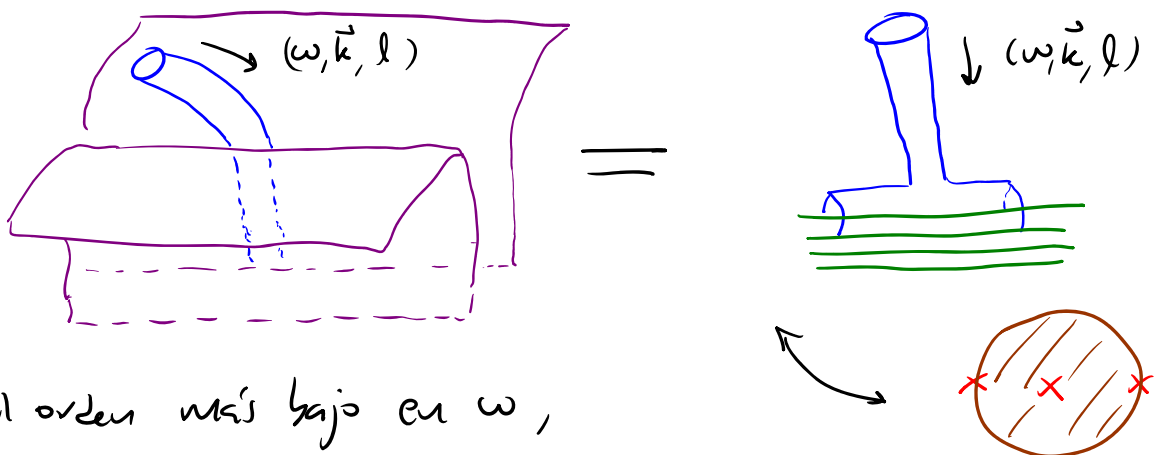
En general resulta difícil entonces comparar cálculos realizados en los 2 lenguajes.

A pesar de esto, algunas comparaciones funcionan.

P.ej., la amplitud de dispersión de cuerda cerrada



en el límite de baja transferencia de momento  
(es decir,  $r \gg R$ ) [ver hep-th/9510200, 9601057, 9603194],  
y la amplitud de absorción para ondas parciales de dilatación

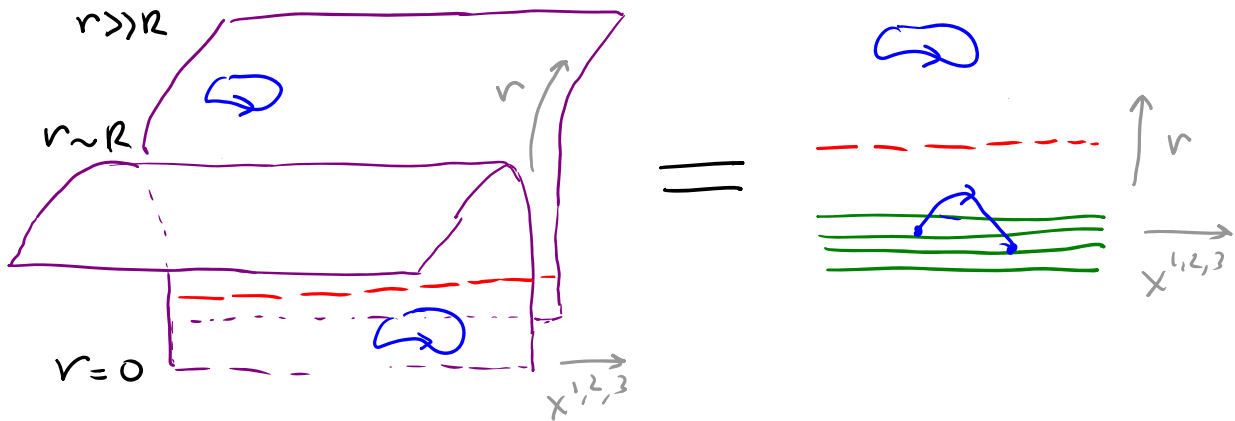


al orden más bajo en  $\omega$ ,

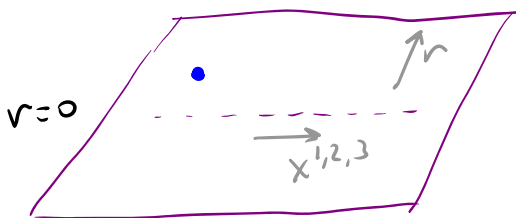
$$\sigma_{\varphi}^{(l)} = \frac{\pi^4}{24} \frac{(l+3)(l+1)}{[(l+1)!]^4} \left(\frac{\omega R}{2}\right)^{4l} \omega^3 R^8$$

[ver hep-th/9611214, 9702076, 9905174].

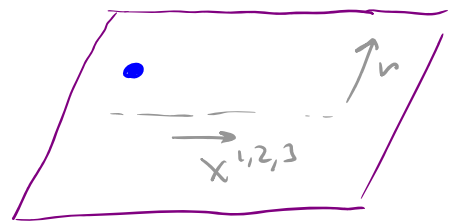
Notar que a bajas energías,  $\omega \ll \frac{1}{R}$ , en ambas descripciones las branas se desacoplan del "bulto":



Y de hecho, si  $g_c N \gg 1$  tenemos  $R \gg l_c$  así que estamos en el régimen  $\omega \ll \frac{1}{R} \ll \frac{1}{l_c}$  (límite de Maldacena:  $\omega R \rightarrow 0$  con  $g_c N \gg 1$  fijo), donde las 2 descripciones se simplifican a



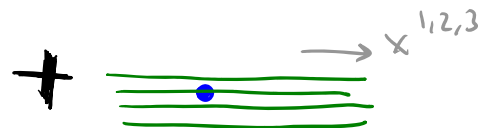
Supergravedad IIB en  
Fondo Plano (9+1 dim)



Supergravedad IIB en  
Fondo Plano (9+1 dim)



Cuerdas IIB en Fondo  
Cercano al Horizonte (9+1 dim)



Super-Yang-Mills  $N=4$   
SU(N) (3+1 dim)

El fondo cercano al horizonte resulta de reemplazar

$$A(r) = 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^4 \xrightarrow{r \ll R} \left(\frac{R}{r}\right)^4.$$

La geometría es

$$ds_c^2 = ds_E^2 = \underbrace{\frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2)}_{\text{anti-de Sitter } 4+1 \text{ dim}} + \underbrace{\frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2}_{\text{esfera 5-dim}} \\ \text{con radio de curvatura } R \quad \text{con radio } R$$

(espaciotiempo máximamente simétrico

con constante cosmológica negativa  $\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2}$ )

el dilatación es constante, y tenemos  $N$  unidades de flujo Ramond-Ramond a través de la 5-esfera.

La conclusión es entonces que, como un caso límite de la dualidad entre la 3-brana negra y una pila de D3-branas, tenemos la equivalencia aún más sorprendente

$$\text{Teoría de Cuerdas IIB} \quad = \quad \text{Super-Yang-Mills } \mathcal{N}=4 \\ \text{en } \text{AdS}_5 \times S^5 \quad \quad \quad \text{SU(N) en } 3+1 \text{ dim} \quad !!$$

[Maldacena '97, ver peq. compendio hep-th/9905111]

Dado que en el lado derecho tenemos una teoría cuántica de campos completamente convencional (y en particular, no gravitacional), que está bien definida a cualquier escala energética (es incluso invariante conforme), esta dualidad norma/gravedad o correspondencia ADS/CFT nos presenta por primera vez con una definición no perturbativa de la teoría de cuerdas IIB! Notar que los distintos estados que podemos considerar del lado izquierdo no están restringidos a pequeñas fluctuaciones del fondo — podemos considerar, p.ej. un agujero negro dentro de  $AdS_5$ , y a través de la dualidad tendremos una descripción alternativa en términos de la teoría de norma. La única restricción que nos impone la elección de SYM  $N=4$  como teoría de norma específica es que los fondos accesibles deben ser asintóticamente  $AdS_5 \times S^5$ .



Es posible argumentar de manera similar para obtener una dualidad en el caso de  $D_p$ -branas con  $p \neq 3$ , aunque la situación ahí es más complicada por el hecho de que el fondo de branas negras correspondiente no es confiable para toda  $r$  [ver hep-th/9802042, 9807137].

Regresando a la discusión general de las soluciones de brana negra, vale la pena señalar que se conoce también solución que describe a una pila de  $N$   $D_p$ -branas excitadas, con una densidad de energía (adicional a su tensión) distribuida uniformemente en las direcciones longitudinales, la  **$p$ -brana negra no extrema**!

$$ds_c^2 = A^{-1/2} [-f dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_p^2] + A^{1/2} \left[ \frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_{8-p}^2 \right]$$

$$e^{\Phi} = g_c A^{\frac{3-p}{4}} \quad C_{0\dots p} = \coth \gamma [1 - A^{-1}]$$

$$\text{on } A = 1 + \tanh \gamma \left( \frac{R}{r} \right)^{7-p}$$

$$R^{7-p} \equiv c_p N g_c l_c^{7-p}$$

$$f = 1 - \left( \frac{r_h}{r} \right)^{7-p}$$

$$\sinh^2 \gamma \equiv \sqrt{\frac{1}{4} + \left( \frac{R}{r_h} \right)^{2(7-p)}} - \frac{1}{2}$$

Esta geometría tiene 2 horizontes, en  $r=r_h$  y  $r=0$  (similar al agujero negro Reissner-Nordström, es decir, Schwarzschild + carga eléctrica).

Sabemos que el álgebra de supersimetría implica la cota BPS  $M \geq Q$  (que en términos de la brana negra se relaciona con la ausencia de una singularidad desnuda — 'censura cósmica' ).

Dado que la geometría es asintóticamente plana, existe una definición natural de su masa (= energía total, ya que el sistema está en reposo), a partir del comportamiento asintótico de la métrica:

$$g_{\infty}^E \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -1 + \frac{2k^2}{(d-2)\Omega_{d-2-p}} \frac{M}{V_p r^{d-3-p}} \quad \text{ADM} \\ \text{(Arnowitt, Deser, Misner)}$$

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \quad \text{volumen de } S^d$$

$$\Rightarrow M = \frac{\tau_p V_p}{c_p g_c} \left(\frac{r_h}{l_c}\right)^{7-p} \left[ \cosh^2 \gamma + \frac{1}{7-p} \right]$$

$$c_p \equiv (2\sqrt{\pi})^{5-p} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right)$$

La carga R-R, por otro lado, puede calcularse usando la ley de Gauss como habíamos visto antes:

$$\frac{Q}{V_p} = \frac{1}{2K^2} \int_{S^{d-p}} *G_{(p+2)}$$

← resultado es independiente del radio de  $S^{d-p}$

$$\Rightarrow Q = \frac{\tau_p V_p}{c_p g_c} \left( \frac{r_h}{l_c} \right)^{7-p} \sinh \gamma \cosh \gamma$$

(es precisamente a partir de este resultado y la condición de cuantización  $Q = N \tau_p V_p$  que hemos

identificado  $N = \frac{1}{c_p g_c} \left( \frac{r_h}{l_c} \right)^{7-p} \sinh \gamma \cosh \gamma$

$$\longleftrightarrow \sinh^2 \gamma = \sqrt{\frac{1}{4} + \left( \frac{R}{r_h} \right)^{2(7-p)} - \frac{1}{2}}.$$

Es fácil verificar que  $\cosh^2 \gamma + \frac{1}{7-p} \geq \sinh \gamma \cosh \gamma$ , así que efectivamente tenemos  $M \geq Q$ . Para lograr saturar la desigualdad BPS debemos tomar  $\gamma \rightarrow \infty$ ,  $r_h \rightarrow 0$  con  $r_h^{7-p} \sinh^2 \gamma = R^{7-p}$  fijo, en cuyo caso recuperamos

La solución extremal, con  $M = N \tau_p V_p$ , justo como una pila de  $N$  Dp-branas. El límite opuesto  $\gamma \rightarrow 0$  con  $r_h$  fija resulta en una p-brana negra neutra, que equivale a un agujero negro de Schwarzschild en  $10-p$  dim ( $\times T^p$ ). Es importante resaltar que, justo como un agujero negro, las branas negras tienen propiedades termodinámicas.

Concretamente, poseen una entropía de Bekenstein-Hawking

$$S_{BH} \equiv \frac{A_h^E}{4G_N} = \frac{\Omega_{8-p}}{4G_N} V_p r_h^{8-p} \cosh \gamma$$

y una temperatura de Hawking [ver p.ej. Birrell, Davies]

$$T_H \equiv \frac{\text{Gravedad superficial}}{2\pi} = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\partial g_{tt}/\partial r}{\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}} \right) \Big|_{r=r_h} = \frac{7-p}{4\pi r_h \cosh \gamma}.$$

Vemos que  $T_H \rightarrow 0$  en el límite extremal, como esperaríamos deb a que la solución BPS es estable y no puede radiar. Y en este límite tenemos también  $S_{BH} \rightarrow 0$ , como esperaríamos en base a la descripción alternativa en términos de Dp-branas, deb a que existe 1 solo estado de las  $N$  D-branas sin excitar.

Por cierto que, para el caso extremal, el requisito  $\partial_{\perp}^2 A = 0$  permite también una solución multicentrada

$$A(\vec{x}_{\perp}) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{C_p g_c N_k l_c^{7-p}}{|\vec{x}_{\perp} - \vec{y}_k|^{7-p}},$$

que corresponde a un sistema con  $n$  pilas de  $D_p$ -branas, con  $N_k$  de ellas en  $\vec{x}_{\perp} = \vec{y}_k$ . La razón física por la cual esto es posible es por supuesto el hecho de que no existe fuerza entre objetos BPS del mismo tipo.

Otra generalización es considerar soluciones con más de un tipo de carga. Para ello curiosamente basta con 'superponer' las funciones armónicas correspondientes. P.ej., para el sistema  $D_p - D_{(p+4)}$ ,

$$ds_c^2 = A_p^{-1/2} A_{p+4}^{-1/2} (-dx_0^2 + \dots + dx_p^2) + A_p^{1/2} A_{p+4}^{-1/2} (dx_{p+1}^2 + \dots + dx_{p+4}^2) \\ + A_p^{1/2} A_{p+4}^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_{4-p}^2)$$

$$e^{\Phi} = g_c A_p^{\frac{3-p}{4}} A_{p+4}^{-\frac{p+1}{4}}, \quad C_{01\dots p} = 1 - A_p^{-1}, \quad C_{01\dots p+4} = 1 - A_{p+4}^{-1}$$

Notar que en este caso ambas funciones armónicas dependen solo de la coordenada radial en el espacio  $(5-p)$ -dimensional ortogonal a las  $D(p+4)$ -branas, es decir, las  $Dp$ 's no están localizadas, sino esparcidas uniformemente en  $x^{p+1}, \dots, x^{p+4}$ .

Un caso particularmente interesante es el sistema D1-D5, donde si compactificamos la dirección  $x^1$  y agregamos  $N_{KK}$  unidades de momento  $p_1$  como una tercera carga, obtenemos una 5-brana negra cuya masa

$$M = N_1 \tau_1 V_1 + N_5 \tau_5 V_{12345} + \frac{N_{KK}}{(V_1/2\pi)}$$

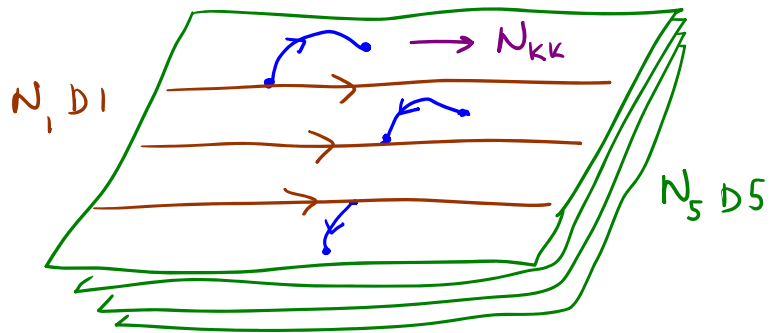
satura la desigualdad BPS correspondiente y es por tanto extremal, a pesar de lo cual tiene un área de horizonte finita, que se traduce en una entropía

$$S_{BH} = 2\pi \sqrt{N_1 N_5 N_{KK}}$$

Este resultado es confiable si  $g_c N_1, g_c N_5, g_c N_{KK} \gg 1$  (y  $V_1, (V_{12345})^{1/5} \gg l_c$ ). Pero debe que  $\exp(S_{BH})$  cuenta el número total de estados que tienen las

Cargas dadas, y los estados en cuestión son BPS y por tanto absolutamente estables, debe ser posible reproducir este mismo resultado aún en el régimen  $g_c N_1, g_c N_5, g_c N_{KK} \ll 1$ , donde la descripción en términos de  $N_1$  D1-branas,  $N_5$  D5-branas, y un cierto número de cuerdas D1-D5 que portan momento  $p_1^{(d)} = \frac{n_2}{(V_1/2\pi)} > 0$  es perturbativa.

Y efectivamente, al hacer el conteo de estados microscópicos en la teoría de cuerdas correspondiente se encuentran



$$S_{\text{micro}} = 2\pi \sqrt{N_1 N_5 N_{KK}} \quad \checkmark$$

[Strominger, Vafa '96; ver hep-th/9607235, 0203048].

En algunos casos casi-extremales, los resultados posibles también obtener un acuerdo perfecto  $S_{\text{micro}}(g_c N \ll 1) = S_{\text{BH}}(g N \gg 1)$ . Más en general, aún cuando el cálculo microscópico no esté completamente bajo control, se puede verificar

que existe un acuerdo cualitativo del tipo (esquemático)

$$S_{\text{micro}}(\int_c N \sim 1) \sim S_{\text{BH}}(\int_c N \sim 1),$$

conocido como principio de correspondencia

[Hornowitz, Polchinski '96; ver hep-th/9712253, 0008241].

Regresando a la discusión general, para completar nuestro repertorio de branas negras básicas [ver 9412184, 9611203, 9701088], es importante señalar que se conoce también la solución que corresponde a una pila de cuerdas fundamentales extendidas a lo largo de la dirección  $x^1$ ,

$$ds_c^2 = A_{F1}^{-1} [-dx_0^2 + dx_1^2] + dr^2 + r^2 d\Omega_7^2$$

$$e^{\Phi} = g_c A_{F1}^{-1/2}$$

$$B_{01} = 1 - A_{F1}^{-1}$$

Cuerda Negra

[Dabholkar,

Harvey '89]

$$\text{con } A_{F1}(r) = 1 + \left(\frac{R_{F1}}{r}\right)^6, \quad R_{F1}^6 \equiv 32\pi^2 N g_c^2 l_c^6$$

que es BPS y tiene  $M = N T_{F1} V_1$  con  $T_{F1} = \frac{1}{2\pi l_c^2}$ .

En este caso hay una singularidad en  $r=0$ : las Ecs.

de mov. se satisfacen con una  $\delta(r)$  como fuente.



Y se conoce también la contraparte magnética, que describe a un conjunto de NS5-branas apiladas,

$$ds_c^2 = -dx_0^2 + \dots + dx_5^2 + A_{NS5} [dr^2 + r^2 d\Omega_3^2]$$

$$e^{\Phi} = g_c A_{NS5}^{1/2}$$

$$B_{012345} = 1 - A_{NS5}^{-1}$$

5-brana Negra

[Calkin, Harvey,

Strominger;

Duff, Lu 191]

con  $A_{NS5}(r) = 1 + \left(\frac{R_{NS5}}{r}\right)^2$ ,  $R_{NS5}^2 \equiv N l_c^2$ .

Esta solución también es BPS, y tiene

$$M = N T_{NS5} V_5, \quad \text{con} \quad T_{NS5} = \frac{1}{(2\pi)^5 g_c^2 l_c^6}.$$

Esta solución tiene una garganta infinita (medida con  $ds_c^2$ ) cuya sección transversal es una  $S^3$  con radio  $\xrightarrow{r \rightarrow 0} R$ , y a lo largo de la cual  $g_c e^{\Phi} \propto r^{-1} \rightarrow \infty$ .

A partir de un análisis de fluctuaciones (modos normalizados) alrededor de la 5-brana negra, se pueden deducir los grados de libertad que residen en el volumen de mundo de NS5:

$$\begin{cases} X^i(x^\alpha), A_\alpha(x^\alpha) + \text{superparejas} & \text{en IIB} \\ X^i(x^\alpha), A_{\alpha\beta}^+(x^\alpha) + \text{superparejas} & \text{en IIA} \end{cases}.$$

## 2. Dualidad y Teoría M

Dualidad  $\equiv$  equivalencia no trivial entre 2 teorías

Hasta ahora hemos visto 2 ejemplos:

- Dualidad T, donde es posible tener

$g_c \ll 1 \xleftrightarrow{T} g_{c_T} \ll 1$ , lo cual permite verificar la dualidad directamente en la expansión perturbativa.

- Dualidad Norma/Gravedad, donde si bien

$$g_c \ll 1 \longleftrightarrow g_{YM}^2 \ll 1, \text{ sabemos que los}$$

los regímenes perturbativos son mutuamente excluyentes:

$$g_c N \ll 1 \Rightarrow \text{acoplamiento fuerte en hoja de mundo de la cuerda}$$

$$g_c N \gg 1 \Rightarrow \text{acoplamiento fuerte en teoría de normas.}$$

En lo que resta del curso argumentaremos que existen también dualidades tales que

$$g_c \ll 1 \xleftrightarrow{S'} g_c' \gg 1$$

Dualidad S'

(de 'strong coupling')

Claramente estas dualidades resultan (como ADS/CFT) más difíciles de verificar, pero de existir serían extremadamente útiles, puesto que nos permitirían entender el comportamiento de una teoría fuertemente acoplada empleando una descripción alternativa que es débilmente acoplada!

Analizaremos esta posibilidad para cada una de las 5 teorías de supercuerdas en  $\mathcal{D}+1$  dimensiones. ¿Cómo proceder? La observación clave es que estas teorías preservan tantas supersimetrías ( $\geq 16$ ) que la acción efectiva para sus campos no masivos está determinada de manera única por la supersimetría (y el contenido de campos). La acción efectiva calculada a nivel árbol es por tanto exacta — no puede recibir correcciones cuánticas. Cualquier posible dualidad del tipo antes mencionado debe ser entonces visible en las propias acciones efectivas.

Consideremos primero la acción efectiva de cuerdas IIB  
( $\rightarrow$  supergravedad IIB). La parte bosónica es

$$S_{\text{IIB}} = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^{10}x \left\{ \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left[ R + 4(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} H_{(3)}^2 \right] \quad \text{NS-NS} \right. \\ \left. + \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} G_{(1)}^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} \overset{\vee}{G}_{(3)}^2 - \frac{1}{2 \cdot 5!} \overset{\vee}{G}_{(5)}^2 \right] \quad \text{R-R} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} C_{(4)} \wedge H_{(3)} \wedge G_{(3)} \right\} \quad \text{'Chern-Simons'}$$

donde

$$\overset{\vee}{G}_{(3)} \equiv G_{(3)} - C_{(0)} \wedge H_{(3)}$$

$$\overset{\vee}{G}_{(5)} \equiv G_{(5)} - \frac{1}{2} C_{(2)} \wedge H_{(3)} + \frac{1}{2} B_{(2)} \wedge G_{(3)} \quad (\text{con } G_{(p+2)} \equiv dG_{(p+1)})$$

son intensidades de campo invariantes bajo las diversas transformaciones de norma (análogas a  $\tilde{F}_{(2)} \equiv F_{(2)} + B_{(2)}$  en la acción de Born-Infeld), y debemos recordar

imponer a mano la restricción de auto dualidad

$$*\overset{\vee}{G}_{(5)} = \overset{\vee}{G}_{(5)} \quad \text{a nivel de las ecs. de mov.}$$

Esta acción es invariante bajo un grupo de transformaciones

$SL(2, \mathbb{R})$  que mezcla  $\Phi$  con  $C_{(0)}$ ,  $H_{(3)}$  con  $G_{(3)}$ , y

dejan invariante a  $\check{G}_{(5)}$  y a  $\check{g}_{E,\mu\nu} \equiv e^{-\Phi/2} g_{\mu\nu}$ .

Agrupando

$$\lambda \equiv C_{(0)} + i e^{-\Phi}, \quad F_{(3)} \equiv \begin{bmatrix} H_{(3)} \\ G_{(3)} \end{bmatrix},$$

y definimos  $\Lambda \equiv \frac{1}{\text{Im} \lambda} \begin{bmatrix} |\lambda|^2 & -\text{Re} \lambda \\ -\text{Re} \lambda & 1 \end{bmatrix}$ ,

podemos reescribir

$$S_{\text{IIB}} = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^{10}x \left\{ \sqrt{-g_E} \left[ R_E - \frac{\partial_\mu \bar{\lambda} \partial^\mu \lambda}{2(\text{Im} \lambda)^2} - \frac{1}{2 \cdot 3!} F_{(3)}^i \Lambda_{ij} F_{(3)}^j \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4 \cdot 5!} \check{G}_{(5)}^2 - \frac{1}{4} \epsilon_{ij} C_{(4)} \wedge F_{(3)}^i \wedge F_{(3)}^j \right] \right\},$$

donde encontramos invariancia bajo

$$\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \iff \Lambda' = (M^{-1})^T \Lambda M^{-1} \text{ con } M \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R}),$$

$$F'_{(3)} = M F_{(3)},$$

$$\check{G}'_{(5)} = \check{G}_{(5)}, \quad \check{g}'_{E,\mu\nu} = \check{g}_{E,\mu\nu}$$

¿Será entonces  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  una simetría de la teoría de cuerdas IIB?

Recordar que la cuerda fundamental porta carga

bajo  $B_{(2)}$ : número de enrollamiento  $e \in \mathbb{Z}$ .

Actuando con  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , una cuerda con  $e=1$

se convertiría en un objeto con cargas  $(a, c)$  bajo  $(B_{(2)}, C_{(2)})$ ,

$\therefore$  debemos tener  $a, c \in \mathbb{Z}$ .

El grupo máximo que pudiera ser simetría de la teoría de cuerdas  $\text{II B}$  es entonces  $SL(2, \mathbb{Z}) \subset SL(2, \mathbb{R})$

[Hull, Townsend '94]. Este grupo incluye en particular

a  $S \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , cuyo efecto es

$$\lambda' = -\frac{1}{\lambda}, \quad H'_{(3)} = -G_{(3)}, \quad G'_{(3)} = H_{(3)}$$

si  $C_{(0)} = 0$ ,  
esto es  $\Phi' = -\Phi$

$$\Rightarrow \boxed{g'_c = 1/g_c}$$

$$\Rightarrow B_{(2)} \leftrightarrow C_{(2)} \Rightarrow \boxed{F_1 \leftrightarrow D_1}$$

Notar que  $T_{F_1} = \frac{1}{2\pi \alpha_c^2}$  y  $T_{D_1} = \frac{1}{2\pi g_c \alpha_c^2}$

medidas en el marco de Einstein son

$$T_{F_1}^{(E)} = \frac{\sqrt{g_c}}{2\pi \alpha_c^2} \leftrightarrow T_{D_1}^{(E)} = \frac{1}{2\pi \sqrt{g_c} \alpha_c^2} \quad \checkmark$$

Cuando  $g_c \ll 1$  tenemos  $T_{FI} \ll T_{DI}$ , pero

para  $g_c \gg 1$ ,  $T_{DI} \ll T_{FI}$ .

Si  $S$  es en verdad una simetría (autodualidad)

de la teoría IIB completa, entonces al cuantizar

a la D1-brana cuando  $g_c \gg 1$  obtendríamos exactamente

el mismo espectro que dedujimos al cuantizar a la FI

débilmente acoplada (y a la inversa, el espectro de FI

para  $g_c \gg 1$  coincidiría con el espectro de DI para  $g_c \ll 1$ ).

Más en general, si el grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$  completo es una

simetría, obtendremos una familia infinita de predicciones

para el espectro no perturbativo de la teoría IIB.

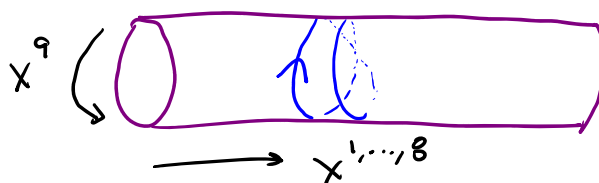
No podemos verificarlas para el espectro completo

(no sabemos calcular cuando  $g_c \gg 1$ ); pero sí para los

estados que son BPS.

Consideremos una cuerda fundamental IIB en

$$M^{8,1} \times S^1_R$$



Definiendo  $P_I^{\tilde{q}} = \frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'}$  ,  $P_D^{\tilde{q}} = \frac{n}{R} - \frac{eR}{\alpha'}$  ,

Sabemos que cuando  $g_c \ll 1$  el espectro está dado por

$$M^2 = P_I^2 + \frac{4}{\alpha'} (N + A) \quad \text{podemos restringir al sector } R,$$

$$= P_D^2 + \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} + \tilde{A}) \quad \text{por supersimetría NS dan los mismos resultados}$$

con la condición de empataamiento de niveles

$$N + A - \tilde{N} - \tilde{A} = ne .$$

Si  $N=0$  , entonces  $m = |P_I^{\tilde{q}}| = \left| \frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'} \right|$  (y  $\tilde{N} = -ne$ ).

A partir de  $\{Q, \bar{Q}\} = -P_I^m \Gamma_m$  podemos deducir

que estos estados son invariantes bajo  $1/4$  de las

supersimetrías : aquellas descritas por  $\eta = \pm \Gamma^{09} \eta$  .

Análogamente , los estados en  $\tilde{N}=0$  ← signados

tienen  $m = |P_D^{\tilde{q}}| = \left| \frac{n}{R} - \frac{eR}{\alpha'} \right|$  (y  $N = ne$ ),

y son invariantes bajo las 8 supersimetrías  $\tilde{\eta} = \pm \Gamma^{09} \tilde{\eta}$  .

En ambos casos los estados forman parte de **multipletes**

**Grutas** , con  $2^{(32-8)/2} = 16 \cdot 256$  estados.



Por otro lado, si  $N = \tilde{N} = 0$ , entonces

$$m = \frac{|n|}{R}, \quad e = 0 \quad \text{ó} \quad m = \frac{|e|R}{\alpha'}, \quad n = 0,$$

y los estados son invariantes bajo  $1/2$  de las supersimetrías, formando por tanto parte de multipletes ultracortos, con  $2^{(32-16)/2} = 256$  estados.

Vimos antes que en la teoría IIB tenemos un total de

$$\begin{matrix} N_S & R & \tilde{N}_S & \tilde{R} \\ (8+8) & \times & (8+8) & = 256 \text{ estados físicos en } N = \tilde{N} = 0, \end{matrix}$$

es decir, un solo multiplete ultracorto para cada valor de  $e$  (con  $n=0$ ), o cada valor de  $n$  (con  $e=0$ ).

En particular, para  $n=0, e=1$



tenemos 256 estados con

$$m = \frac{R}{\alpha'} \quad \longleftrightarrow \quad m_E = \frac{R\sqrt{g_c}}{\alpha'}, \quad \text{que portan carga}$$

$e_{F1} = 1$  bajo  $B_{NS}$  y  $e_{D1} = 0$  bajo  $C_{NS}$ .

Una transformación arbitraria  $\begin{pmatrix} p & r \\ \tilde{p} & \tilde{r} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$

modifica las cargas  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} p \\ \tilde{p} \end{pmatrix}$ , con  $p\tilde{r} - \tilde{p}r = 1$ ,

y cambia

$$\lambda \equiv C_{(0)} + i e^{-\frac{\Phi}{f}} = 0 + \frac{i}{g_c} \rightarrow \lambda' = \frac{p\lambda + r}{f\lambda + s},$$

$$\text{es decir, } g_c' = \frac{f^2}{g_c} + s^2 g_c, \quad C_{(0)}' = \frac{p f + s r g_c^2}{f^2 + s^2 g_c^2}.$$

Los nuevos estados deben estar presentes en el espectro de la teoría cuando el acoplamiento y el escalar RR toman estos valores (notar que en general  $g_c' \gg 1$ ), pero como en BPS, y  $\therefore$  estables, deben estar allí también para otros valores de los 'módulos' (parámetros) de la teoría, y en particular para  $g_c \ll 1$ ,  $C_{(0)} = 0$ .  
Tenemos entonces la siguiente

Predicción:  $\forall p, f$  primos relativos,  $\exists$  un único multiplete ultracorto (256 estados) en carga  $\begin{pmatrix} p \\ f \end{pmatrix}$  bajo  $\begin{pmatrix} B_{\mu\nu} \\ C_{\mu\nu} \end{pmatrix}$ , número de KK  $n=0$  y masa  $m_E = \frac{R}{\alpha' \sqrt{\text{Im} \lambda}} |p - f\lambda|$ .

De manera similar, considerando los estados de la cuerda fundamental con  $n > 0, e=1, \tilde{N}=0$  ( $\Rightarrow N=n$ )  
 ó  $n < 0, e=1, N=0$  ( $\Rightarrow \tilde{N}=-n$ )  
 encontramos una segunda

Predicción:  $\forall p, q, n$  con  $n \neq 0$  y  $p, q$  primos relativos,  
 $\exists d_n$  multipletes cortos (16·256 estados) con cargas

$\begin{pmatrix} p \\ q \\ n \end{pmatrix}$  bajo  $\begin{pmatrix} B_{nq} \\ C_{nq} \\ g_{nq} \end{pmatrix}$ , donde  $d_n$  está dado por

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n q^n = \frac{1}{16} \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+q^n}{1-q^n} \right)^8 \quad (\text{p.ej.}, d_1=1, d_2=9, d_3=60).$$

se deduce a partir de función de partición

Para intentar verificar estas predicciones, consideremos primero los estados con  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $n=0$ .

El candidato obvio es

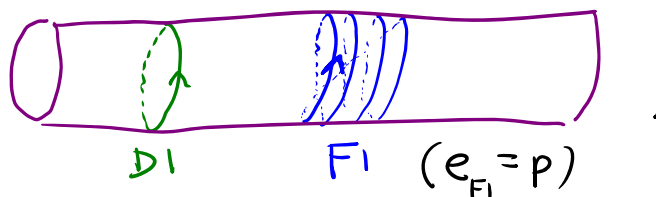
simplemente una D1-brana:



Sabemos que D1 sin excitar preserva 16 supersimetrías,

y da lugar por tanto precisamente a 1 multiplete ultracorto (256 estados). ✓

Ahora, ¿cómo podemos obtener estados con cargas  $(p, 1)$ ? La configuración obvia sería



Tiene las cargas correctas, pero su masa total

$$(p \tau_{F1} + \tau_{D1}) 2\pi R = (p + \frac{1}{g_c}) \frac{R}{\lambda_c^2}$$

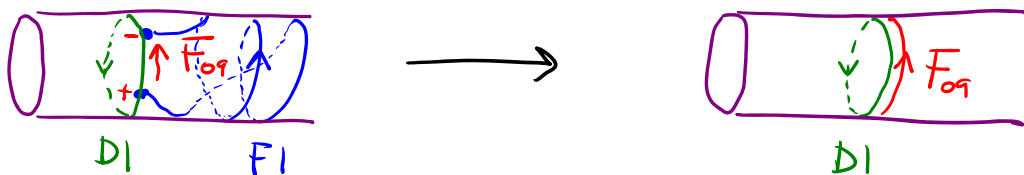
no satura la desigualdad BPS correspondiente,

$$m_{p,1} \geq \sqrt{q_{F1}^2 + q_{D1}^2} = \sqrt{(p \tau_{F1})^2 + (1 \tau_{D1})^2} (2\pi R),$$

lo cual sugiere que este estado podría ser inestable.

Y efectivamente, el sistema reduce su energía

cuanb la cuerda fundamental se rompe y se desarrolla:



La configuración final es una D1 que porta flujo eléctrico, con  $F_{09} = \text{cte.}$  por la ec. de mov.

¿Cómo es que este proceso no viola la conservación de la carga  $q_{F1}$ ? El punto es que a partir de

$$S_{\text{DBI}} = -T_{\text{D1}} \int dx^0 dx^9 \sqrt{1 - (B_{09} + 2\pi\alpha' F_{09})^2}$$

tenemos

$$\left. \frac{\delta S_{\text{DBI}}}{\delta B_{09}} \right|_{B_{09}=0} = \frac{1}{2\pi\alpha' g_c} \frac{2\pi\alpha' F_{09}}{\sqrt{1 - (2\pi\alpha' F_{09})^2}}$$

de modo que la D1 con  $F_{09} \neq 0$  porta justamente esta densidad de carga bajo  $B_{09}$ . Notar que

esta expresión coincide con  $\frac{1}{2\pi\alpha'} \Pi_{A_9} \equiv \frac{\delta S_{\text{DBI}}}{\delta (2\pi\alpha' F_{09})}$ , que

obedece la regla de cuantización  $\Pi_{A_9} 2\pi R = \frac{p}{\frac{1}{2\pi R}}$

con  $p \in \mathbb{Z}$ , debido a la periodicidad

$$A_9 \simeq A'_9 \equiv A_9 + \frac{1}{R} \iff \exp\left[i \int dx^9 A_9\right] = \exp\left[i \int dx^9 A'_9\right].$$

En conjunto tenemos entonces  $p = \frac{1}{g_c} \frac{2\pi\alpha' F_{09}}{\sqrt{1 - (2\pi\alpha' F_{09})^2}}$ ,

y reconocemos que la DI con  $F_{09} \neq 0$  representa un estado ligado  $1 D1 + p F1$ ,  
cuya energía

$$\begin{aligned}
 m &= T_{D1} \int dx^9 \left[ \frac{(2\pi\alpha' F_{09})^2}{\sqrt{1 - (2\pi\alpha' F_{09})^2}} + \sqrt{1 - (2\pi\alpha' F_{09})^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\alpha' g_c} (2\pi R) \frac{1}{\sqrt{1 - (2\pi\alpha' F_{09})^2}} \\
 &= (2\pi R) \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi\alpha' g_c}\right)^2 + \left(\frac{p}{2\pi\alpha'}\right)^2}
 \end{aligned}$$

satura la desigualdad BPS.

(Notar que esto es análogo al sistema

$D2$  con flujo magnético = estado ligado  $D2 + D0$ ,  
y de hecho, ambos sistemas son equivalentes si  
en verdad la teoría IIB es  $S^1$ -autódual:

$$\left( \begin{array}{ccc}
 D2: 012 & \xrightarrow{T_9} & D3: 0129 \\
 D0: 0xx & & D1: 0xx9
 \end{array} \xrightarrow{S^1} \begin{array}{ccc}
 D3: 0129 & \xrightarrow{T_{12}} & D1: 09 \\
 F1: 0xx9 & & F1: 09
 \end{array} \right)$$

Este estado ligado preserva 16 supersimetrías y por tanto forma parte de un múltiplete ultracorto. ✓

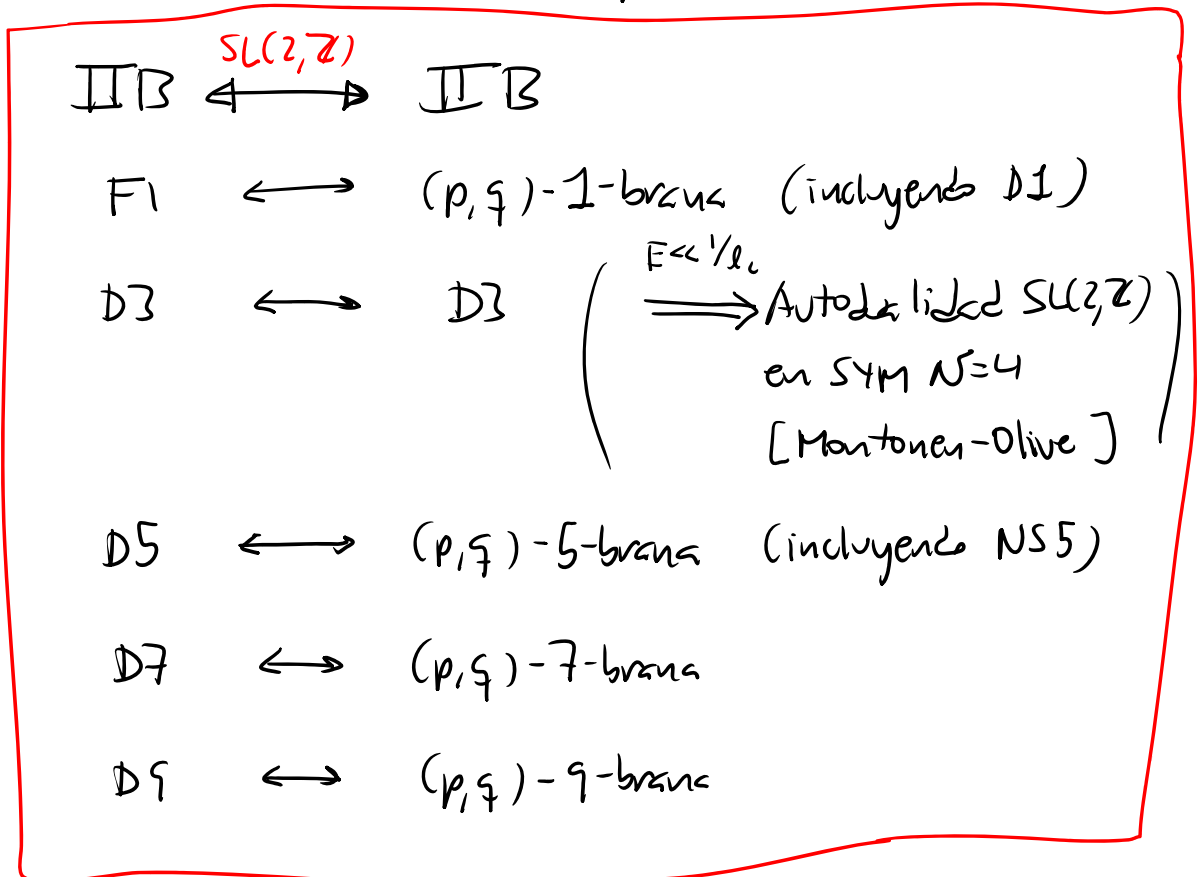
Para el caso  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  con  $q > 1$ , se requiere un análisis de la teoría  $U(q) \simeq U(1) \times SU(q)$  en el sector con  $p$  unidades de flujo eléctrico.

La componente  $U(1)$  tiene la información del centro de masa del sistema, mientras que la parte  $SU(q)$  codifica los grados de libertad internos. Se puede mostrar que existe un estado ligado ( $\leftrightarrow$  vacío no degenerado de la teoría  $SU(q)$ , con una brecha de masa) ¡si y solo si  $p, q$  son primos relativos! [Witten '95] ✓

De manera similar, se puede verificar que existen múltipletes cortos para cada elección de  $n \neq 0$ ,  $p, q$  primos relativos. Esto requiere un conteo de las distintas maneras de repartir las  $n$  unidades de momento entre los diversos modos de cuerdas abiertas que representan excitaciones del sistema de  $q$  D1 +  $p$  unidades

de flujo eléctrico. (Para obtener estados BPS, en el caso  $n \geq 0$  nuevamente debemos excitar solo cuerdas con momento  $p_q^{(R)} \geq 0$ .) La respuesta resulta ser precisamente  $d_n$ . ✓

Tenemos entonces evidencia para la (auto-)dualidad



Y en particular, hemos aprendido con esto que

$$\text{II} \text{ IIB}(g_c) \xrightarrow{g_c \gg 1} \text{II} \text{ IIB}(g_c' \ll 1) !!$$

(Notar, sin embargo, que aún no entendemos  $g_c \sim 1$ .)



Al compactificar, se obtiene un grupo de dualidad más grande,  $S + T \subset$  **Dualidad U** [Hull, Townsend '94]

¿Será posible encontrar un comportamiento análogo en otras teorías? Consideremos la teoría I, donde tenemos un grupo de norma  $SO(32)$ . La posibilidad más natural (aunque no única) sería que la hipotética descripción  $S$ -dual tuviera el mismo grupo de norma, en cuyo caso tenemos solo 2 candidatos:

$$I(g_c) \xrightarrow{g_c \gg 1} ? I(g_c \ll 1) \text{ ó } HO(g_c \ll 1)?$$

Y de hecho, se encuentra que las acciones efectivas de I y HO están relacionadas a través de la redefinición de campos

$$\Phi^{(I)} = -\Phi^{(HO)} \quad \Rightarrow \quad g_c^{(I)} = \frac{1}{g_c^{(HO)}}$$

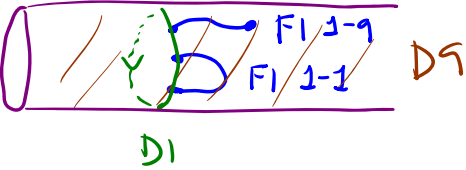
$$G_{(3)}^{(I)} = H_{(3)}^{(HO)} \quad \Rightarrow \quad D|_I \leftrightarrow F|_{HO}$$

$$g_{E\mu\nu}^{(I)} = g_{E\mu\nu}^{(HO)}, \quad A_{(1)}^{(I)} = A_{(1)}^{(HO)}.$$

Es natural entonces conjeturar que

$$I \xleftrightarrow{S'} HO \quad [\text{Witten, '95}]$$

En este caso nuevamente es posible mostrar que los estados BPS coinciden. En particular,

I:  tiene excitaciones no

masivas que coinciden exactamente con las de  $F1_{HO}$ .

Existe además evidencia de otros tipos.

Pej., notando que

$$\begin{array}{ccc} I \text{ en } M^{0,1} \times S^1 & \xleftrightarrow{S'} & HO \text{ en } M^{0,1} \times S^1 \\ \updownarrow T_9 & & \updownarrow T_9 \\ I' (=IA) \text{ en } M^{0,1} \times S^1 & & HE \text{ en } M^{0,1} \times S^1 \end{array}$$

y recordando que para ciertos valores de los módulos en  $HO/HE$  tenemos auto-dualidad  $T$  y ensanchamiento de la simetría de norma (aparición de vectores sin masa adicionales), esperaríamos observar estos mismos fenómenos en  $I/I'$ . Más aún, se puede mostrar

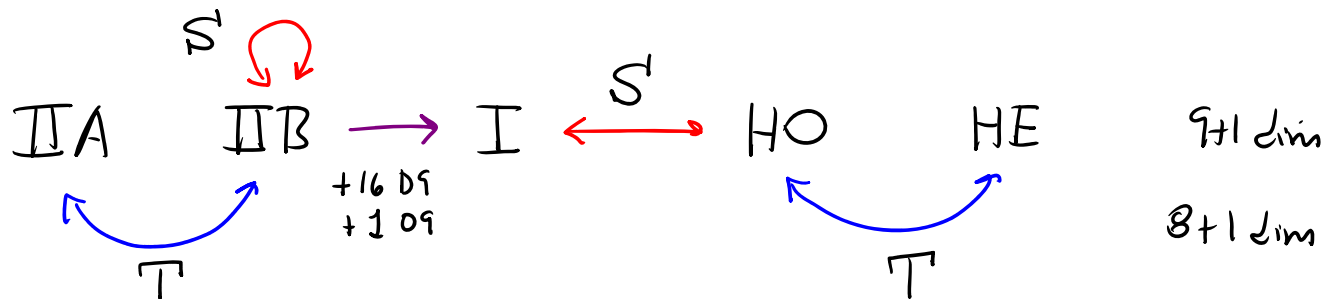
que esto sucede en particular en situaciones donde  $g_c^{(I')} \ll 1$  y  $R_9^{(I')} \gg l_c$ , donde ingenuamente podríamos entender  $I'$  de manera perturbativa.

Pero en  $I/I'$  no encontramos estos fenómenos, ¡así que pareceríamos tener una contradicción seria!

El problema se evita milagrosamente: con un análisis más detallado, se encuentra que la expansión perturbativa no es válida en  $I'$  si  $R^{(I')} > 1/g_c^{(I')}$ , que es justo la región donde HO/HE tienen física exótica. Este milagro constituye entonces evidencia para la dualidad [Polchinski, Witten '95].

Otro ejemplo altamente no trivial es el hecho de que el estado espinorial bajo  $SO(32)$  más ligero en el espectro de la cuerda fundamental Ho, que es estable a pesar de ser no BPS, aparece en  $I$  ¡como una D-brana no BPS! [Sen '98]

Con las dualidades que hemos descubierto hasta ahora, hemos conectado entre sí a las 5 teorías de supercuerdas:



(y  $\infty$  un número infinito de nuevas "teorías", que se definen usando distintos arreglos de D-branas y/o Op-planos).

Hemos aprendido además como describir el comportamiento de IIB, I y HO cuando  $g_c \gg 1$ .

¿Qué podemos decir respecto a IIA y HE?

La acción efectiva de IIA es

$$S_{IIA} = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^{10}x \left\{ \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left[ R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2 \cdot 3!} H_{(3)}^2 \right] \right. \\ \left. + \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2 \cdot 2!} G_{(2)}^2 - \frac{1}{2 \cdot 4!} G_{(4)}^2 \right] - \frac{1}{2} B_{(2)} \wedge G_{(4)} \wedge G_{(4)} \right\} \quad \text{y } G_{(4)} \equiv G_{(4)} - C_{(1)} \wedge H_{(3)}$$

Esta acción no sugiere ninguna auto-dualidad ni conexión con alguna otra teoría de cuerdas.  
 Lo que sí se sabe desde hace mucho es que se puede obtener como la reducción dimensional de una teoría de campos: **supergravedad en 10+1 dim.**

Esta teoría consiste de 3 campos no masivos

$$g_{MN}^{(11)}, A_{(3)} \leftrightarrow A_{MNP} \quad (F_{(4)} = dA_{(3)}), \quad \Psi_a^M \begin{matrix} \leftarrow (\mu, 10) \\ \leftarrow \text{espinor de } \text{so}(10,1) \end{matrix}$$

$$\text{rep } \text{so}(9): \underbrace{44 + 84}_{128 \text{ grados de libertad bosónicos}} \quad \underbrace{128}_{128 \text{ grados de libertad fermiónicos}}$$

tiene supersimetría  $N=1$  en 10+1 dim (32 supercargas)

y está descrita por la acción (parte bosónica)

$$S_{11D} = \frac{1}{2\kappa_{11}^2} \int d^{11}x \left\{ \sqrt{-g^{(11)}} \left[ R^{(11)} - \frac{1}{2 \cdot 4!} F_{(4)}^2 \right] - \frac{1}{3!} A_{(3)} \wedge F_{(4)} \wedge F_{(4)} \right\}$$

$$\equiv 16\pi G_N^{(11)} \equiv (2\pi)^9 \ell_p^{(11)9}$$

Compactificamos  $x^{10} \simeq x^{10} + 2\pi R$  y haciendo la

reducción dimensional ( $\equiv$  tomando todos los campos independientes de  $x^{10}$ , lo cual se justifica dinámicamente para  $R$  pequeño),  $S_{11D}$  reproduce  $S_{IIA}$  si

identificamos  $g_{MN}^{(11)} \rightarrow (g_{\mu\nu}, C_\nu, \Phi)$  a través de

$$ds^2 \equiv g_{MN}^{(11)} dx^M dx^N = e^{-\frac{2\Phi}{3}} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{\frac{4\Phi}{3}} [dx^{10} + C_\nu dx^\nu]^2$$

y  $A_{MNP} \rightarrow (C_{\mu\nu\rho}, B_{\mu\nu})$  a través de

$$C_{\mu\nu\rho} = A_{\mu\nu\rho 10}, \quad B_{\mu\nu} = A_{\mu\nu 10}$$

$$\frac{1}{2K^2} = \frac{2\pi R}{2K_{(11)}^2}$$