lunes, 28 de enero de 2013 10:10 p.m.

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CUERDAS

0. Motivación: ¿Por qué cuerdas?

La teoría de cuerdas es uno de nuestros intentos más recientes por entender de qué está hecho nuestro universo.

El lenguaje que hasta ahora utilizamos para responder a esta pregunta es el de la teoría cuántica de campos. Para poder contrastarlo con la teoría de cuerdas, nos conviene iniciar con un breve repaso del lenguaje de campos.

Por definición, un campo es una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante del tiempo: $\varphi(t,\vec{x}) \longleftrightarrow \varphi_{\vec{x}}(t)$

$\vec{x}$: índice continuo $\in \mathbb{R}^3$

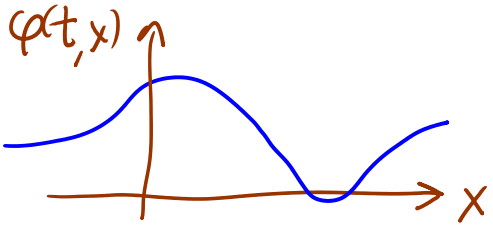
análogo a $x_n(t)$ en sistema con N partículas

n: índice discreto $n=1,\dots,N$

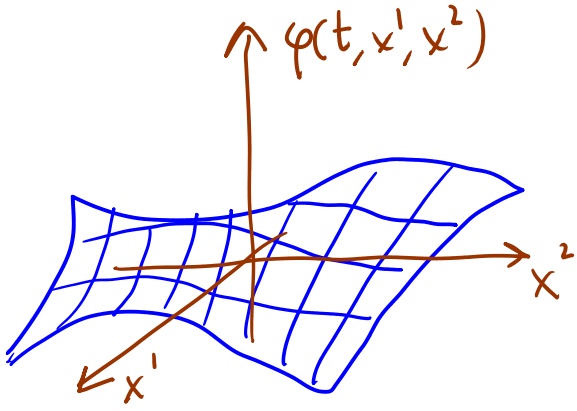
Un 'campo' en 0+1 dimensiones $\varphi(t)$ sería exactamente análogo a un sistema de 1 partícula que se mueve en 1 dim, $y(t)$.

lunes, 28 de enero de 2013 10:29 p.m.

Un campo en 1+1 dim $\varphi_x(t)$ es exactamente análogo a una cuerda que puede oscilar en 1 dim transversa, $y(x,t)$.



Un campo en 2+1 dimensiones $\varphi(t,x^1,x^2)$ es exactamente análogo a la membrana de un tambor, que oscila en 1 dim transversa, $y(t,x^1,x^2)$



Un campo en 3+1 dim $\varphi(t,\vec{x})$ es entonces análogo a 1 gelatina/jalea que llena 3 dim espaciales y oscila en 1 dim transversa, $y(t,\vec{x})$. Ejemplos sencillos serían los campos que describen a la temperatura o la presión o la densidad o la velocidad del aire en un cuarto.

A partir de la definición vemos que cualquier campo (en d+1 dim con $d \geq 1$) es un sistema con un número infinito (y no denumerable) de grados de libertad.

Tras cuantizar, sus excitaciones resultan ser partículas (objetos que de origen no tienen extensión espacial).

En el material suplementario (pp. 3-59 que aparecen tachadas en el archivo disponible en la página del curso, http://www.nucleares.unam.mx/~alberto/apuntes/indice.html#poscuerdastodo) puede encontrarse un breve repaso de las ideas básicas de teoría cuántica de campos y relatividad general, así como del Modelo Estándar y sus diversas limitaciones, que incluyen en particular el gran reto de cuantizar la gravedad.

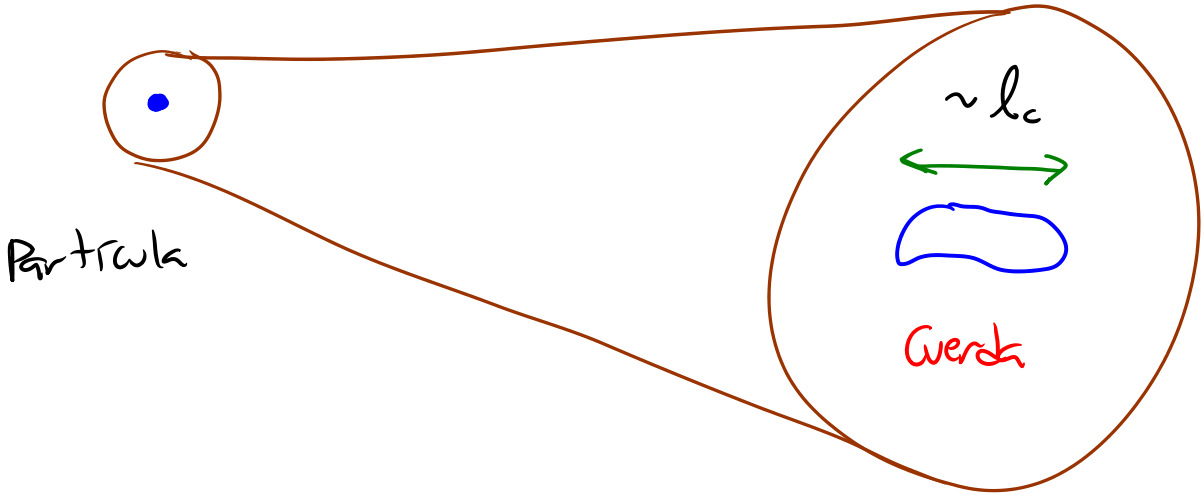
Con la teoría cuántica de campos como antecedente, podemos preguntarnos ¿qué es una teoría de cuerdas?

La respuesta corta: ¡no sabemos! (se encuentra todavía en construcción. Conocemos pedazos interesantes, pero no tenemos una definición completa.)

La respuesta larga: es una generalización de las teorías cuánticas de campo, cuyo punto de partida es proponer que las excitaciones básicas no son ya partículas (objetos 0-dimensionales), sino cuerdas (objetos 1-dimensionales), que podemos visualizar

lunes, 11 de febrero de 2013 11:02 a.m.

como 'ligas' infinitesimalmente delgadas, que tienen una cierta longitud característica l_c (en inglés, l_s):

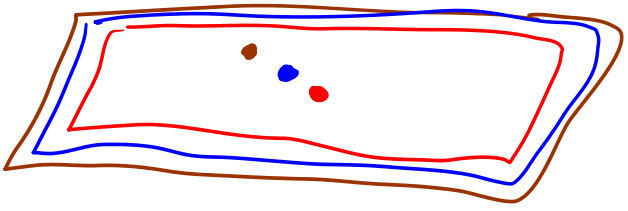


Semejante objeto podría, además de moverse como un todo, oscilar en un número infinito de maneras distintas (análogas a las distintas notas de una cuerda de violín). En una descripción cuántica, cada uno de estos modos de vibración resulta tener las propiedades básicas de un tipo específico de partícula (masa, espín, cargas) Así que, a partir de lo que en realidad es 1 solo tipo de cuerda, ¡obtenemos lo que parecen ser un número infinito de partículas!

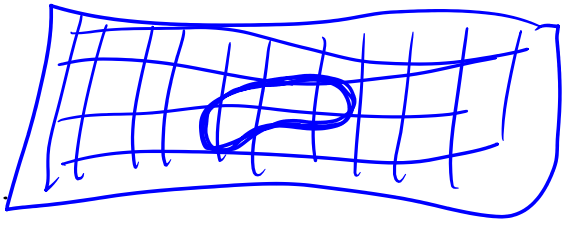
lunes, 11 de febrero de 2013 11:14 a.m.

Es importante resaltar que, así como entendemos que las partículas de cada tipo son pequeñas 'onditas' en una 'gelatina' determinada (el campo asociado), las cuerdas representan igualmente pequeñas fluctuaciones de una especie de 'gelatina' mucho más complicada, que es básicamente lo que llamamos el "campo de cuerdas".

En esencia, la propuesta de la teoría de cuerdas es entonces



reemplazar al espaciotiempo y a los campos usuales (p.ej., los del Modelo Estándar) por un solo 'multicampo' ('multigelatina') con excitaciones unidimensionales.



L!: 09/08/21

En el material suplementario (pp. 63-76) puede encontrarse una enumeración de las ventajas de adoptar el lenguaje de cuerdas como propuesta básica para entender la composición básica del universo. Además de una lista de las principales limitaciones que a la fecha padece todavía el lenguaje de cuerdas, en su implementación más famosa, que es la búsqueda de una descripción completa, unificada y consistente de nuestro universo a nivel microscópico, una "teoría de todo". Esto requiere en particular aclarar un frecuente malentendido: tal como la teoría de campos, la teoría de cuerdas es un lenguaje genérico, por lo que predicciones concretas deben esperarse de, y son en efecto generadas por, *modelos específicos* construidos con ella, tal como sucede en campos (p.ej. el Modelo Estándar, el Modelo de Gran Unificación SU(5), etc.).

lunes, 11 de febrero de 2013 03:58 p.m.

Es justo valorar que, en su 'vertiente fenomenológica' (donde se busca reproducir al Modelo Estándar y responder todas sus preguntas abiertas), la teoría de cuerdas es a la fecha nuestro más prometedor candidato para obtener lo que arrogantemente se llama una "teoría de todo".

Pero es importante señalar que, independientemente de si eventualmente logra o no alcanzar esta ambiciosa meta, en el transcurso de los años ha desarrollado ya una vertiente 'teórica' de enorme utilidad, constituyéndose en un conjunto de herramientas que han hecho ya contacto con un buen número de ideas y problemas importantes de la física teórica moderna (teorías de norma, acoplamiento fuerte, supersimetría, gran unificación, agujeros negros, mundos brana, no conmutatividad, N grande, cosmología...) e incluso matemáticas.

Estos 'logros teóricos' son a mi juicio la principal razón

por la cual la teoría de cuerdas ha sido intensamente

estudiada durante más de 35 años.

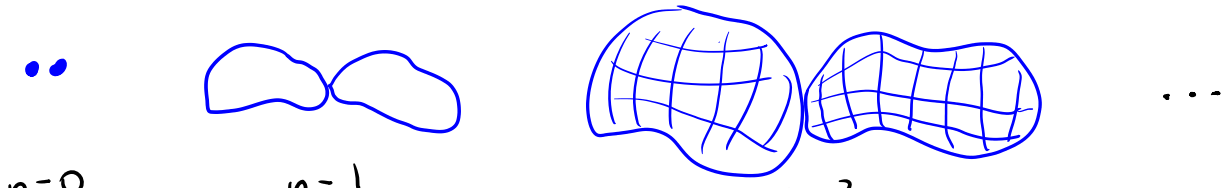
(Y lo que es más, una en particular de estas herramientas, la "correspondencia holográfica", parece capaz de ayudarnos a entender al menos a primas de QCD en el régimen de acoplamiento fuerte, o a teorías de campo similares a algunos sistemas de materia condensada.)

L1: 07/02/23

Por último, podemos plantearnos una pregunta que resulta bastante natural: si estamos dispuestos a considerar que los objetos básicos pudieran no ser 0-dimensionales (partículas), sino 1-dimensionales (cuerdas), ¿por qué no contemplar también la posibilidad de que fueran en realidad 2-dimensionales ('membranas'), o más en general, p-dimensionales ('p-branas')?

Entre mayor sea el valor de p, más "blandas" serán las interacciones, en el sentido de que el punto donde un objeto básico hace contacto con otro es cada vez de menor importancia en comparación con el objeto en su conjunto:

lunes, 11 de febrero de 2013 04:08 p.m.



Pero por otro lado, a mayor p el objeto básico tendrá más grados de libertad intrínsecos, de tal forma que los casos $p \geq 2$ resultan muy difíciles de cuantizar.

En este sentido las cuerdas ($p=1$) son el caso óptimo.

A pesar de ello, sabemos desde hace casi 3 décadas que:

- La teoría de cuerdas (⊂ Teoría M) incluye p-branas con $p = 0, 1, \ldots, 9$ que están todas emparentadas entre sí a través de "dualidades".
- Las "cuerdas" son membranas enrolladas en x^{10}; las "Dp-branas" se describen con cuerdas...

¿¿Teoría de Branas??

En los capítulos 1-3 de este curso nos enfocaremos en la descripción de la teoría de cuerdas (y supercuerdas) en la aproximación perturbativa. En el camino, nos toparemos con los objetos no perturbativos conocidos como D-branas (capítulo 4). Las dualidades, otras branas y la teoría M los encontraremos al final, en el capítulo 5.

lunes, 11 de febrero de 2013 04:22 p.m.

1. Cuerdas Bosónicas I

* Partículas Puntuales

Para describir a una partícula relativista libre a nivel cuántico, existen 2 caminos distintos:

① Cuantizar un campo (lo que, por razones históricas, se conoce a veces como "segunda cuantización")

Los grados de libertad básicos (en el ejemplo de espín 0) son $\varphi(x) \equiv \varphi(x^\mu) \equiv \varphi(t, \vec{x})$

↳ tiempo y espacio entran en el mismo pie

y su dinámica se describe en la acción (de Klein-Gordon)

$$S[\varphi] = \int d^D x \left(-\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right)$$

$\equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$ en fondo plano

$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \cdots, +1)$

con patines (serif): convención para la acción en el espaciotiempo $\int d^D x$

Al cuantizar este campo canónicamente $(\varphi, \pi \to \hat{\varphi}, \hat{\pi})$, se obtienen estados con un número arbitrario de partículas, y es

martes, 12 de febrero de 2013 04:53 a.m.

posible calcular el propagador de Feynman

$$G(x,x') \equiv \langle 0|\, T\{\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(x')\}\,|0\rangle$$

↑ orden temporal ↑ vacío: estado sin partículas

↓ incluye $\int dp^0$

$$= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\, e^{ip\cdot(x-x')}\, \frac{-i}{p^2+m^2}$$

$p^2+m^2 = -(p^0)^2 + \vec{p}^{\,2}$

Feynman descubrió un método alternativo de cuantización, que da los mismos resultados que la cuantización canónica: la llamada **cuantización por integral funcional o integral de trayectoria**, que usaremos mucho en este curso.

En el material suplementario (pp. 82-83) puede encontrarse un muy breve repaso de la definicion de la integral funcional, y su contacto con la cuantización canónica.

La fórmula para funciones de correlación en términos de la integral de trayectoria (sea libre o no la teoría) es

$$G_n(x_1,\dots x_n) \equiv \langle 0|T\{\hat\varphi(x_1)\cdots\hat\varphi(x_n)\}|0\rangle$$

$$= \frac{\int D\varphi\, \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\, e^{iS[\varphi]}}{\int D\varphi\, e^{iS[\varphi]}}.$$

$S[\varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^{D-1}x\, \mathcal{L}$

Condiciones inicial/final se cancelan

En particular, en la teoría libre se encuentra que

$$G_2(x,x') = \frac{\int D\varphi\, \varphi(x)\varphi(x')\, e^{i\int d^Dx \frac{1}{2}\varphi(\partial^2-m^2)\varphi}}{\int D\varphi\, e^{i\int d^Dx \frac{1}{2}\varphi(\partial^2-m^2)\varphi}}$$

integral gaussiana (¡es básicamente la única que sabemos hacer!)

$$= \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D} e^{ip\cdot(x-x')} \frac{-i}{p^2+m^2},$$

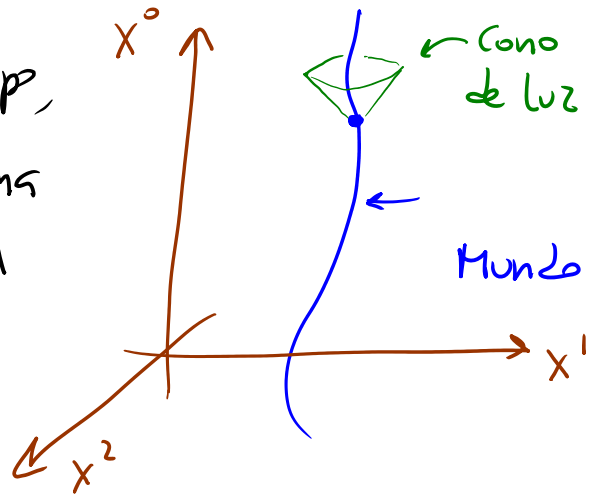
en acuerdo con el propagador de Feynman (libre) que escribimos en la p. 81. Veremos ahora otro camino por el cual podemos recuperar este resultado.

13: 12/02/13

martes, 12 de febrero de 2013 08:28 a.m.

② Cuantizar una partícula ("primera cuantización")

Conforme transcurre el tiempo, una partícula clásica traza una curva (tipo tiempo) en el espaciotiempo, que se conoce como su línea de mundo.

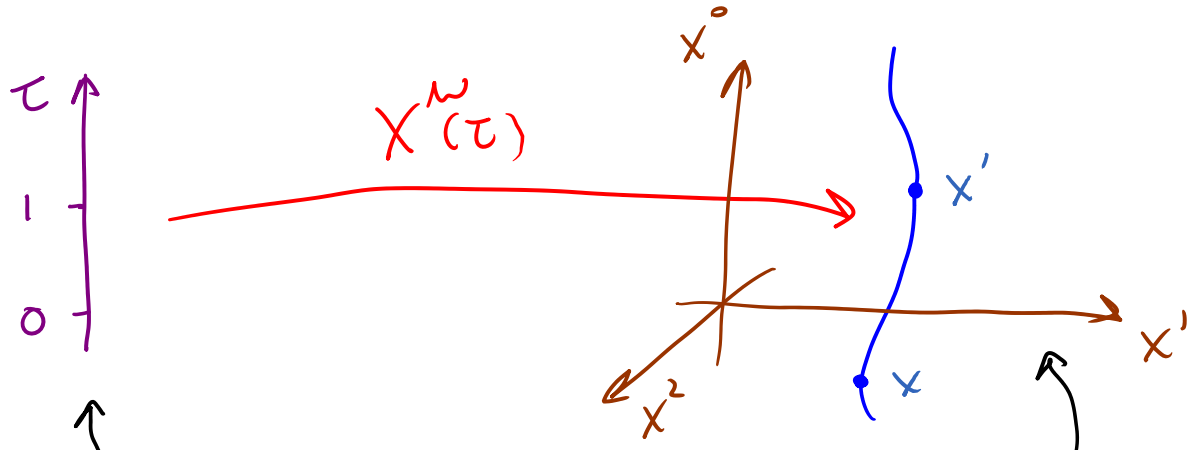


Podemos describirla especificando la función $\vec{X}(X^0)$ en un sistema de coordenadas dado (p.ej., inercial), pero esta descripción no es covariante bajo cambios de coordenadas (p.ej., bajo transformaciones de Lorentz), porque trata a x^0 de manera distinta a $\vec{x}$

Podemos obtener una descripción manifiestamente covariante si nos inventamos un parámetro auxiliar (arbitrario) τ para etiquetar a los distintos puntos a lo largo de la línea de mundo, y especificamos la trayectoria de la partícula dando $X^\mu(\tau)$:

↑ t y $\vec{x}$ en el mismo pie

martes, 12 de febrero de 2013 08:36 a.m.



Espacio ficticio auxiliar (0+1 dim) que nos convendrá llamar **línea de mundo**

Espaciotiempo (D dim)

Ojo con nuestra notación: x^μ minúscula denota un punto cualquiera en el espaciotiempo, y $X^\mu(\tau)$ mayúscula denota a las funciones que describen el encaje de la línea de mundo de la partícula en el espaciotiempo.

La acción de la partícula relativista libre es

$$S[X] = -m\int dt\,\sqrt{1-(\partial_t\vec{X})^2}$$

$$= -m\int d\tau\,\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\,\partial_\tau X^\mu\,\partial_\tau X^\nu}$$

$\tau = X^0 = t$

sin patines (sans serif): convención para acción en líneas de mundo $\int d\tau$

$\eta_{\mu\nu}$, o, más en general, $g_{\mu\nu}(X(\tau))$

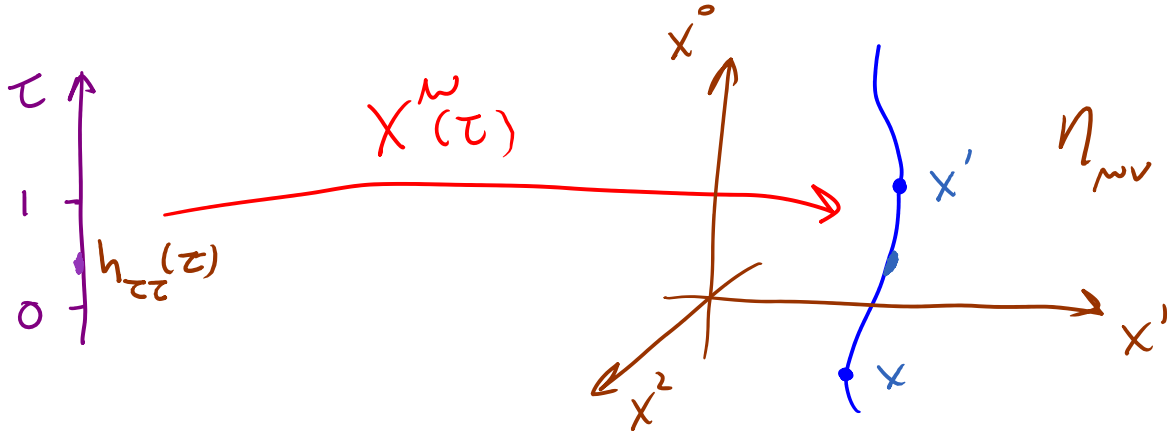
$$= -m \times (\text{tiempo propio})$$

12: 11/08/21

$$= -m \int d\tau \underbrace{\sqrt{-h}}_{\text{"volumen" invariante (p.50)}} \equiv \det h_{\tau\tau} = h_{\tau\tau}$$

con $h_{\tau\tau}(\tau) \equiv \eta_{\mu\nu} \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu$ la **métrica inducida**

sobre la línea de mundo, es decir, la retracción (pullback) de la métrica $\eta_{\mu\nu}$ del espaciotiempo:



$S[X]$ es invariante bajo Poincaré (= Lorentz + translaciones),

$$X^\mu(\tau) \to X'^\mu(\tau) = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\tau) + b^\mu, \quad \eta_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$$

(o más en general, bajo cambios de coordenadas arbitrarios en el espaciotiempo, $X^\mu \to X'^\mu(X)$,

$$\partial_\tau X^\mu \longrightarrow \partial_\tau X'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\partial_\tau X^\nu \qquad \text{vector} \equiv \text{tensor de rango } (1,0)$$

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\lambda\rho} \qquad \text{tensor } (0,2)\Big),$$

y también bajo cambios de coordenadas en la línea de mundo, $\tau \to \tau'(\tau)$

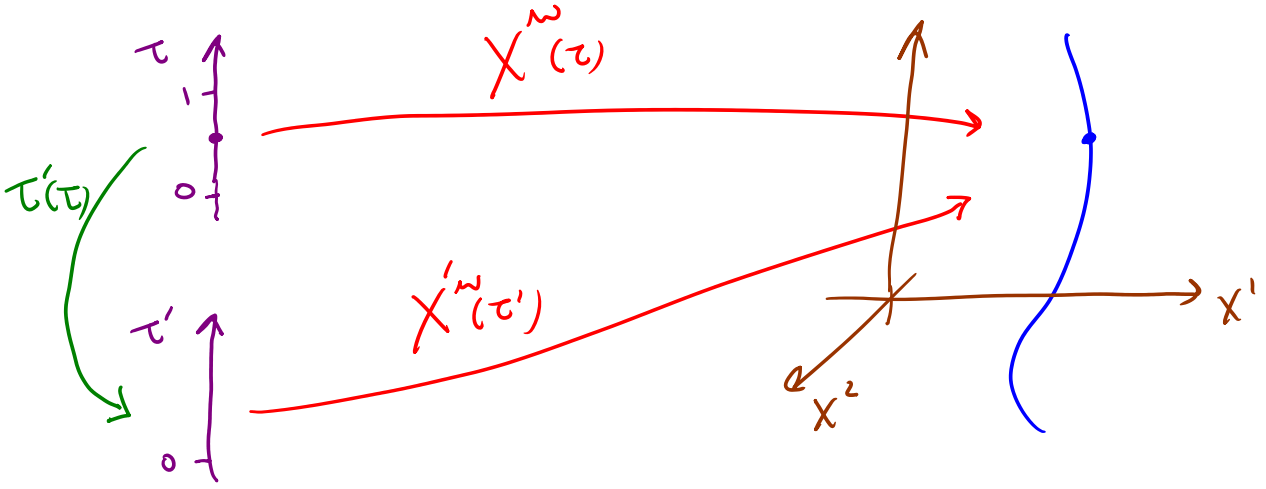
$$X^\mu(\tau) \longrightarrow X'^\mu(\tau') = X^\mu(\tau) \qquad \text{escalar}$$

$$\left(\Rightarrow \partial_\tau X^\mu \longrightarrow \partial_{\tau'} X'^\mu = \frac{\partial \tau}{\partial \tau'}\partial_\tau X^\mu \right.$$ vector dual $\equiv$ tensor $(0,1)$ $\Big)$.

Esta es una "simetría local" desde el punto de vista de la línea de mundo, y ∴ tenemos una teoría de norma, es decir, una teoría redundante, con más variables que grados de libertad físicas, como resultado de haber promovido el tiempo t a una variable $X^0(\tau)$. (Es bien conocido que QED, QCD y el ME son también teorías de norma, redundantes por usar p.ej. $A_\mu(x)$ para describir a las 2 polarizaciones transversales físicas.)

El punto aquí es simplemente que $X^\mu(\tau)$ y $X'^\mu(\tau') = X^\mu(\tau)$ son 2 funciones diferentes que describen

la misma trayectoria física:



Que tengamos esta redundancia por supuesto No es sorprendente: es el precio que pagamos por habernos inventado el parámetro τ para lograr una descripción covariante.

La redundancia que vemos en $S[X^\mu(\tau)]$ es simplemente un recordatorio de que, entre las D funciones $X^\mu(\tau)$ que usamos, solo $D-1$ representan grados de libertad físicos.

Esto genera novedades al cuantizar. Si queremos hacerlo canónicamente, necesitamos primero calcular los momentos conjugados

$$L = -m\sqrt{-(\partial_\tau X)^2}$$

$$p_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_\tau X^\mu)} = +\frac{m\,\partial_\tau X_\mu}{\sqrt{-(\partial_\tau X)^2}} \,.$$

martes, 12 de febrero de 2013 11:12 a.m.

Podemos notar aquí que no todos los p_μ son independientes, puesto que satisfacen la constricción ("de primera clase")

$$p^2 \equiv p_\mu p^\mu = -m^2 \,.$$

↑ conmutan bajo paréntesis de Poisson

Esta es por supuesto la esperada "condición de capa de masa" (mass shell), que nos dice que, dado $\vec{p}$, conocemos p^0 (y NO podemos despejar $\dot{X}^\mu(p)$).

12:01/08/13

Podemos ahora calcular el Hamiltoniano,

$$H \equiv p_\mu \dot{X}^\mu - L = \frac{m \dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \dot{X}^\mu - \left(-m\sqrt{-\dot{X}^2}\right) = 0 \,!$$

Esto nos dice que la evolución en τ NO está determinada de manera única, lo cual es razonable porque τ es un invento.

Tenemos ahora una disyuntiva: podemos primero eliminar la redundancia y después cuantizar, o primero cuantizar y después eliminar la redundancia. La primera opción requiere "fijar la norma", es decir,

imponer una condición que elimine la redundancia, especificando de una vez por todas una elección de τ. P.ej., podemos decir que $X^0 = \tau$. En este caso volvemos a la situación familiar (desde mecánica cuántica no relativista): solo quedan como variables dinámicas $\vec{X}(t)$, cuantizamos imponiendo

$$[\hat{X}^i, \hat{p}^j] = i\,\delta^{ij},$$

de modo que una base para nuestro espacio de Hilbert está dada por $\{|\vec{p}>\}$, y obtenemos la evolución temporal esperada a partir de

$$S = -m\int dt\,\sqrt{1-\dot{\vec{X}}^2}$$

$$\leftrightarrow \quad H = \underbrace{\vec{p}}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{X}}}}\cdot\dot{\vec{X}} - L = \frac{m\dot{\vec{X}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{X}}^2}}\cdot\dot{\vec{X}} - \left(-m\sqrt{1-\dot{\vec{X}}^2}\right)$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1-\dot{\vec{X}}^2}} = \underbrace{\sqrt{\vec{p}^2+m^2}}_{\equiv E_{\vec{p}}} \neq 0.$$

martes, 12 de febrero de 2013 01:25 p.m.

La segunda opción es cuantizar con todo y redundancia, promoviendo las D variables X^μ y sus momentos p_μ a operadores, e imponiendo

$$[\hat{X}^\mu, \hat{P}_\nu] = i\delta^\mu_\nu \quad \leftarrow \text{delta de Kronecker} = \begin{cases} 1 \text{ si } \mu=\nu \\ 0 \text{ si } \mu\neq\nu \end{cases},$$

o lo que es lo mismo,

$$[\hat{X}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \quad \leftarrow \text{métrica inversa} = \begin{cases} -1 \text{ si } \mu=\nu=0 \\ 1 \text{ si } \mu=\nu=i \\ 0 \text{ si } \mu\neq\nu \end{cases}.$$

Una base para nuestro espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es entonces

$$|p\rangle \equiv |p^\mu\rangle \quad \text{tal que} \quad \hat{P}_\nu |p\rangle = P_\nu |p\rangle.$$

Esta descripción es manifiestamente covariante bajo Lorentz, pero el precio que pagamos es que $\mathcal{H}$ es demasiado grande: la mayoría de los estados que contiene NO son físicos.

Para distinguir los que sí son físicos, debemos imponer la constricción ("de primera clase") $p^2+m^2=0$ a nivel cuántico, exigiendo que

$$\boxed{(\hat{p}^2+m^2)|\text{fís}\rangle = 0}.$$

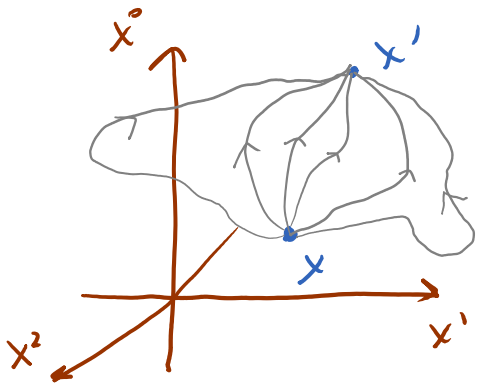
(Esto es análogo a la cuantización "de Gupta-Bleuler" para QED en la norma de Lorentz, si acaso la conoces.)

Los estados físicos forman entonces parte de un espacio de Hilbert reducido $\mathcal{H}_{fís}$ con base dada por $\{|E_{\vec{p}}, \vec{p}\rangle\}$ (si elegimos $p^0 = +E_{\vec{p}}$ en lugar de $-E_{\vec{p}}$, como condición física adicional, que claramente es covariante bajo Lorentz), de modo que recuperamos la física correcta.

En este esquema, es importante tener presente que la evolución temporal importante no es con respecto a τ (arbitrario), sino a X^0 (en algún marco de referencia elegido), a través del operador de traslaciones en el espaciotiempo $\exp(i\hat{p}\cdot X)$. Al calcular el propagador, obtenemos el resultado esperado.

Es posible también cuantizar a $X^\mu(z)$ por medio de la integral de trayectoria. Siguiendo a Feynman, esperaríamos que el propagador libre

martes, 12 de febrero de 2013 02:06 p.m.



esté dado por

$$G_2(x',x) \sim \int_{X^\mu(0)=x^\mu}^{X^\mu(1)=x'^\mu} \mathcal{D}X^\mu(\tau)\; e^{iS[X]}$$

Notar que las variables de integración son claramente distintas a las que teníamos en la descripción en "segunda cuantización", $\int \mathcal{D}\varphi(x)$. Desde la perspectiva de la línea de mundo, podemos de hecho interpretar a la expresión de arriba como una teoría cuántica de campos en 0+1 dimensiones, con D "campos" escalares X^μ.

A través de un análisis un poco largo, se puede recuperar el propagador conocido (p. 81) a partir de esta integral $\int \mathcal{D}X^\mu$.

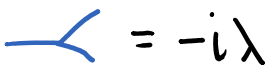
En el material suplementario (pp. 95-111) pueden encontrarse los pasos principales de este cálculo.

martes, 19 de febrero de 2013 09:48 a.m.

Tras realizar los cálculos explícitos, se obtiene finalmente

$$G_2(x', x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip\cdot(x-x')} \frac{-i}{p^2 + m^2}$$ ✓

que efectivamente es el resultado correcto, p. 81 (en esta cuenta se requiere de esfuerzo adicional para reproducir la constante de normalización).

Hasta aquí apenas hemos mostrado que cuantizando directamente a una partícula se puede reproducir el propagador de Feynman para una teoría de campos libre. Para reproducir los diagramas de Feynman de una teoría de campos interactuante, es posible agregar los vértices de interacción a mano (p.ej., , donde — denota la propagación libre y  es una interacción cúbica).

Así que, si uno se pone necio, es posible hablar de partículas cuánticas relativistas SIN usar campos [ver p.ej. Bjorken & Drell, vol. 1]. Pero el resultado

es torpe (p.ej., una batalla para asegurarse de que la descripción sea unitaria), y necesariamente perturbativo, y por tanto, incompleto.

¡Por eso usamos campos!

(Aunque, por otro lado, algunos cálculos de diagramas con lazos se procesan más eficientemente con este método de "primera cuantización", que en una versión inspirada por las técnicas de cuerdas, se conoce también como "formalismo de la línea de mundo" [ver, p.ej. Schubert, hep-th/9610108, 0703186].)

---

* Cuerdas

Para describir a objetos unidimensionales cuánticos y relativistas, existen nuevamente 2 opciones.

(1) Cuantizar cuerdas ("primera cuantización")

Por generalidad, podemos considerar

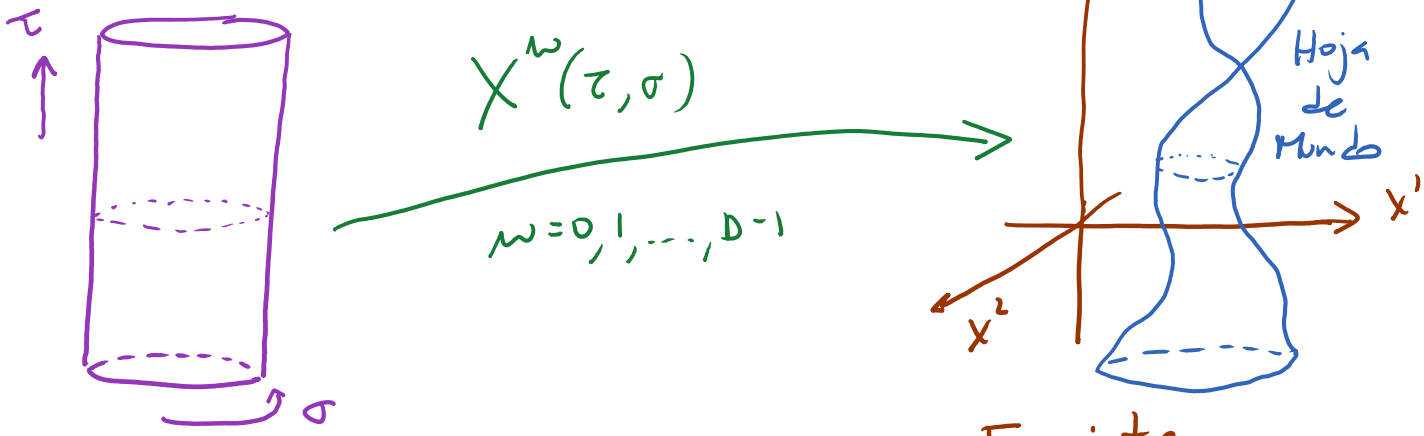
martes, 19 de febrero de 2013 10:52 a.m.

Cuerdas cerradas ó Cuerdas abiertas

(≡ sin extremos) — ningún punto es especial

(≡ con extremos) — los extremos son puntos especiales

En cualquier caso, necesitamos alguna etiqueta para ubicar a los distintos puntos sobre la cuerda a un tiempo dado. Pero además nos falta incorporar la evolución temporal. Por ser la cuerda un objeto unidimensional, su trayectoria al transcurrir el tiempo traza una superficie en el espaciotiempo, que llamamos su hoja de mundo. Análogamente al caso de la partícula, para describir a la cuerda covariantemente nos inventamos 2 parámetros arbitrarios τ, σ y consideramos D mapeos $X^\mu(\tau,\sigma)$:

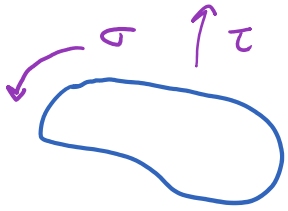


Espacio Ficticio 1+1 dimensional que será útil llamar hoja de mundo

Espaciotiempo D dimensional

martes, 19 de febrero de 2013 11:46 a.m.

Esencialmente, τ es una etiqueta que indica en qué instante estamos examinando a la cuerda, mientras que σ indica cuál punto de la cuerda nos interesa.



En este método, necesitamos escribir una acción para la cuerda en la hoja de mundo, $S[X] = \int d\tau d\sigma L$ (cuya forma explícita veremos en breve), y cuantizar, ya sea canónicamente (fijando o no la norma antes) o con la integral de trayectoria, $\int DX^{\mu}(\tau,\sigma)\, e^{iS[X]}$.

Podremos así hablar de la propagación libre de una cuerda, y eventualmente agregar interacciones (¿a mano?).

(2) Cuantizar un Campo de Cuerdas ("segunda cuantización")

¿Qué cosa es un campo de cuerdas? Un campo ordinario es una función que asigna un número (o varios) a cada punto en el espaciotiempo, $\varphi(x^{\mu})$. Es decir, es un mapeo que corre los datos que podrían describir a una partícula a un instante dado, $x^{\mu} = X^{\mu}(\tau)$. ← fijo

Análogamente, un campo de cuerdas es un mapeo que cuenta los datos que podrían describir a una cuerda en un instante dado, $x^\mu(\sigma) = X^\mu(\tau, \sigma)$. Es decir, es no una función sino un funcional $\Phi[X^\mu(\sigma)]$ (τ fijo), que mapea configuraciones de la cuerda a números.

Para perderle el miedo a este objeto, imaginemos desarrollar a las $X^\mu(\sigma)$ en un conjunto completo de funciones, como p.ej., modos de Fourier,

$$X^\mu(\sigma) = x_0^\mu + \sum_{n\neq 0} \tilde{x}_n^\mu e^{in\sigma} \qquad (\text{con } \tilde{x}_n^* = \tilde{x}_{-n}).$$

(x_0^μ: modo cero: centro de masa)

Tenemos entonces $\Phi[X^\mu(\sigma)] = \Phi(x_0^\mu, \tilde{x}_n^\mu]$, y podemos pensar en descomponer

L3: 16/08/21

$$\Phi[X^\mu(\sigma)] = \sum_{L=1}^{\infty} \varphi_L(x_0^\mu)\, \Phi_L[\tilde{x}_n^\mu] \,.$$

(Φ_L: conjunto completo de funcionales, especificado de antemano)

(p.ej., $\Phi_L[\tilde{x}_n] = \tilde{x}_\ell$, $\tilde{x}_\ell \tilde{x}_{\ell'}$, etc.)

Reconocemos así al campo de cuerdas $\Phi[X^\mu(\sigma)]$ como una colección de un número <u>infinito</u> de campos convencionales $\varphi_i(x)$.

Para codificar la dinámica del campo de cuerdas, necesitamos una acción en el espacio de $X^\mu(\sigma)$'s. Existen varias opciones y enfoques [Witten; Zwiebach; Berkovits; Kaku, Kikkawa; Siegel; ...]

Un ejemplo es la acción de Witten (y Kato, Kugo, Ogawa, Uehara) para cuerdas abiertas,

$$S[\Phi] = \frac{1}{2}\int \Phi * Q_B \Phi + \frac{2g}{3}\int \Phi * \Phi * \Phi$$

"producto estrella" — "carga BRST" — noción formal de integración

[Ver p.ej. hep-th/0311017, 0102085].

La "segunda cuantización" de las cuerdas debiera ser un formalismo más poderoso que la "primera cuantización"; pero es más complicado, y durante muchos años, lo único que se pudo hacer con él fue reproducir

la expansión perturbativa conocida ya a partir de las cuerdas en "primera cuantización".

Hacia finales de los 90 hubo nuevos avances que por fin dejaron claro que la teoría del campo de cuerdas (string field theory) en verdad incluye más información, no perturbativa. Desde entonces ha seguido habiendo avances, pero el tema sigue siendo bastante complicado [ver p.ej. 1912.00521, 1905.06781], y en cualquier caso No parece ser el camino para encontrar la respuesta completa a la pregunta clave, ¿de qué están hechas las cuerdas? Si las cuerdas no son fundamentales, tampoco debemos esperar que lo sea el campo de cuerdas.

En lo que resta del curso trabajaremos con las cuerdas en "primera cuantización", conocida también en este contexto como el formalismo de la hoja de mundo. Como ya hemos dicho, para desarrollar la expansión perturbativa, que es nuestro objetivo central aquí, este camino arroja

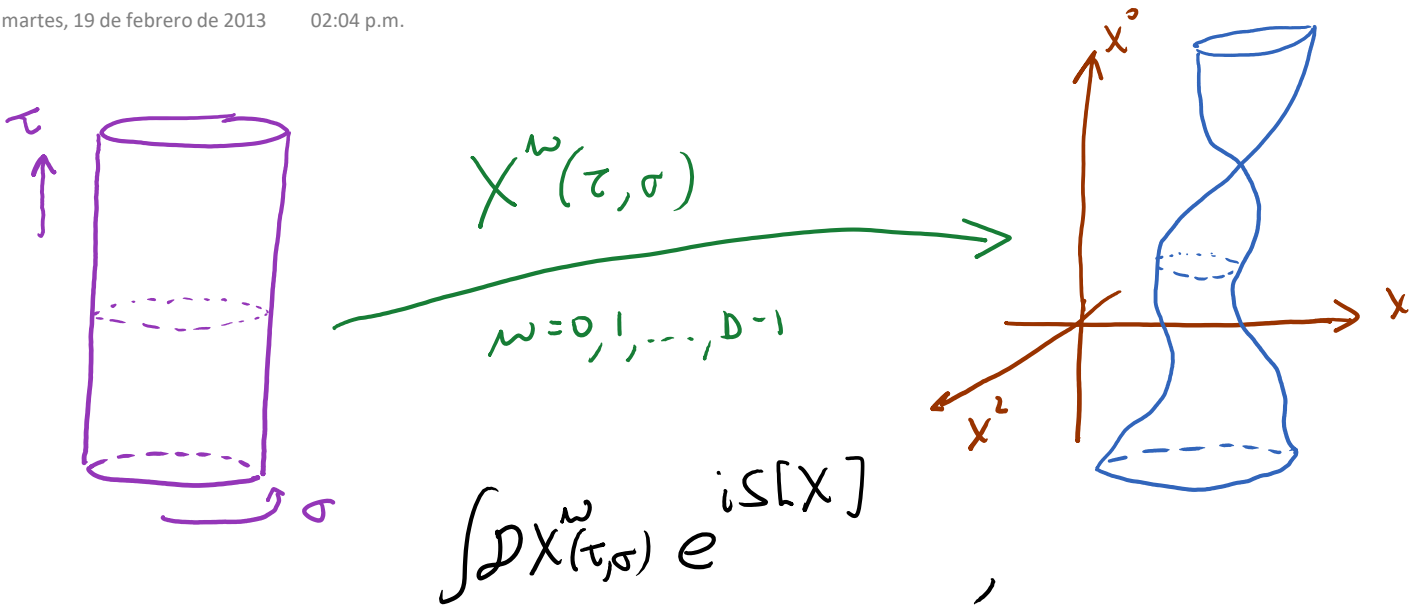
los mismos resultados que la teoría del campo de cuerdas, con la ventaja de ser más fácil.

Además, como iremos viendo, en cuerdas (a diferencia de partículas) la "primera cuantización" nos permite llegar bastante lejos, y en particular, las interacciones se pueden agregar de manera muy natural.

L3: 14/08/23

Por ahora hablaremos de la cuerda bosónica, donde $X^\mu(\tau,\sigma)$ son los únicos grados de libertad, es decir, el estado de la cuerda está completamente caracterizado por su forma/ubicación en el espaciotiempo. Para obtener física más realista necesitaremos estudiar más adelante a la supercuerda, que tiene grados de libertad adicionales. Pero para iniciar, la cuerda bosónica es un útil modelo de juguete, análogo al campo escalar real.

En todo lo sucesivo, resultará provechoso notar que el sistema que nos interesa, la cuerda encajada en un espaciotiempo D-dimensional, descrita en "primera cuantización",



$$\int \mathcal{D}X^\mu_{(\tau,\sigma)}\, e^{iS[X]} ,$$

puede reinterpretarse como una teoría cuántica de D campos escalares (con nombre X^μ en vez de φ_n) que viven en 1+1 dimensiones (con coordenadas que denotamos τ, σ en vez de t, x). Este sería el punto de vista natural para un observador con domicilio en la hoja de mundo, que para nosotros es un espacio puramente ficticio/auxiliar, pero de gran utilidad.

Para proceder, necesitamos conocer la acción que controla la dinámica de la cuerda. En el caso de la partícula relativista, vimos que la acción natural es

martes, 19 de febrero de 2013 02:10 p.m.

$$S_{\text{partícula}} = -\text{masa} \times \left(\begin{matrix}\text{longitud}\\ \text{propia}\end{matrix}\right),$$

↑ energía en reposo

así que la generalización obvia para una cuerda relativista es

$$S_{\text{cuerda}} = -\text{tensión} \times \left(\begin{matrix}\text{área}\\ \text{propia}\end{matrix}\right),$$

↑ ≡ energía por unidad de longitud para cuerda en reposo

es decir, la acción de (Dirac-) Nambu-Goto

$$\boxed{S_{NG}[X] = -T\int d\tau\, d\sigma \sqrt{-\det \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)}}$$

$a,b = 0,1$; $\sigma^0 \equiv \tau$, $\sigma^1 \equiv \sigma$

↑ métrica en el espaciotiempo

$T \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'}$ "pendiente de Regge"

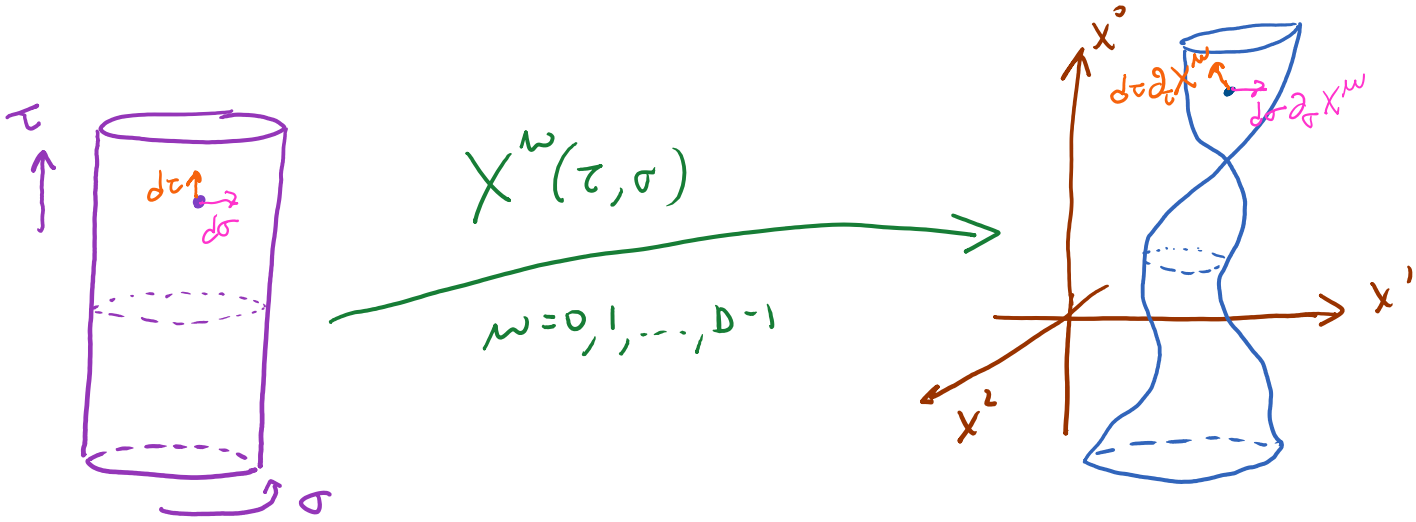
$\equiv h_{ab}(\tau,\sigma)$

Métrica inducida en la hoja de mundo (retracción de la del espaciotiempo)

define (con $\hbar = c = 1$)

$\ell_c \equiv \sqrt{\alpha'}$ longitud de cuerdas

$m_c \equiv \ell_c^{-1}$ escala de cuerdas



Métrica inducida en la hoja de mundo:

$$h_{ab}(\tau,\sigma) \equiv \partial_a X^\mu(\tau,\sigma)\,\partial_b X^\nu(\tau,\sigma)\,g_{\mu\nu}(X(\tau,\sigma))$$

$\{ \begin{pmatrix} h_{\tau\tau} & h_{\tau\sigma} \\ h_{\sigma\tau} & h_{\sigma\sigma} \end{pmatrix}$

¿métrica en el espacio-tiempo

Notar que

$$-\det h_{ab} = -\det \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X}\cdot X' \\ X'\cdot\dot{X} & X'^2 \end{pmatrix} = (\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2,$$

donde $\dot{} \equiv \partial_\tau \equiv \partial_0$, $' \equiv \partial_\sigma \equiv \partial_1$ y el producto punto involucra a la métrica en el espaciotiempo, p.ej., $X'\cdot\dot{X} = X'^\mu \dot{X}^\nu g_{\mu\nu}(X)$.

Elegiremos trabajar con coordenadas adimensionales en la hoja de mundo: $[\tau] = [\sigma] = M^0$ (en lugar de M^{-1}).

La acción de Nambu-Goto es invariante bajo:

i) Reparametrizaciones en el espaciotiempo

$$x^\mu \to \bar{x}^\mu(x), \quad g_{\mu\nu}(x) \to \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\lambda\rho}(x)$$

(lo cual implica

$$X^\mu(\tau,\sigma) \to \bar{X}^\mu(\tau,\sigma) = \bar{x}^\mu(X(\tau,\sigma)),$$

$$\partial_a X^\mu(\tau,\sigma) \to \partial_a \bar{X}^\mu(\tau,\sigma) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}\partial_a X^\nu(\tau,\sigma)\Big).$$

En particular, en un espaciotiempo plano,

$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, S_{NG} es invariante bajo transformaciones de Poincaré (= Lorentz + translaciones)

$$X^\mu(\sigma) \longrightarrow \bar{X}^\mu(\sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\sigma) + C^\mu$$

↑ quiero decir $\sigma^a \equiv (\tau, \sigma)$

(bajo las cuales $\eta_{\mu\nu}$ no cambia).

ii) Reparametrizaciones en la hoja de mundo

$$\sigma^a \longrightarrow \bar{\sigma}^a(\sigma), \quad X^\mu(\sigma) \longrightarrow \bar{X}^\mu(\bar{\sigma}) = X^\mu(\sigma)$$

↑ τ, σ

X^μ son campos escalares

Estas últimas son 2 "simetrías" locales o de norma en la hoja de mundo, que se manifiestan a través de 2 constricciones ("de primera clase"):

el momento canónico conjugado a $X^\mu(\sigma)$,

$$\Pi_\mu(\sigma) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial \dot{X}^\mu(\sigma)} = T \frac{X'^2 \dot{X}_\mu - \dot{X}\cdot X' X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}},$$

$\leftarrow -T\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}$

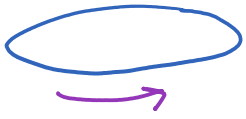
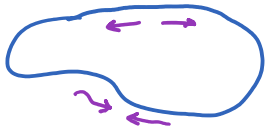
satisface

$$\Pi_\mu X'^\mu = 0 \quad \text{y} \quad \Pi^2 = T^2 \frac{X'^4 \dot{X}^2 - (\dot{X}\cdot X')^2 X'^2}{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} = -T^2 X'^2.$$

(Análogamente, para la partícula teníamos

1 simetría local, $\tau \to \bar{\tau}(\tau)$, asociada a 1 constricción $p^2 + m^2 = 0$.)

Esto expresa la redundancia existente en nuestra descripción covariante: tenemos D variables $X^\mu(\sigma)$, pero solo $D-2$ grados de libertad físicos. Tal como en el caso de la partícula, $X^0(\sigma)$ NO es un grado de libertad verdadero, pero aquí tampoco lo es la dirección longitudinal sobre la cuerda, $\frac{X'_\mu(\sigma)}{\sqrt{X'^2(\sigma)}} X^\mu(\sigma)$, es decir, aquella a lo largo del cuerpo de la cuerda.

P.ej., la rotación rígida  , o la compresión/expansión con forma constante  NO son movimientos físicos, puesto que nuestra cuerda pretende ser fundamental/elemental: a diferencia de un mecate, NO está hecha de partículas a las cuales les pudiéramos seguir la pista individualmente.

Cada pequeño trozo de la cuerda es igual a todos los demás, y está caracterizada únicamente por su

tensión = energía/longitud. Notar que, mientras que para una cuerda no relativista la tensión = fuerza y la densidad de masa μ = masa/longitud son 2 conceptos independientes, y la velocidad de propagación de los ondas es $v=\sqrt{T/\mu}$, en el caso de una cuerda relativista $\mu = T$, y por tanto, $v = 1$.

Otra manifestación de la invariancia bajo difeos en la hoja de mundo es el hecho de que la densidad Hamiltoniana es

$$\Pi_\mu = T\,\frac{X'^2\dot{X}_\mu - \dot{X}\cdot X' X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

$$\mathcal{H} \equiv \Pi_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L}$$

$$= -T\,\frac{(\dot{X}\cdot X')^2 - X'^2\dot{X}^2}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - X'^2\dot{X}^2}} - \left(-T\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - X'^2\dot{X}^2}\right) = 0,$$

y más en general, el tensor de energía-momento en la hoja de mundo (≡ corriente de Noether asociada a la invariancia bajo traslaciones $\sigma^a \to \sigma^a + \delta\sigma^a$; recordar que a estas alturas no hay métrica g_{ab}) se anula:

lunes, 25 de febrero de 2013 07:13 p.m.

$$T^a_{\ b} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a X)} \cdot \partial_b X - \mathcal{L}\,\delta^a_b$$ por teorema de Noether

$$T^0_{\ 0} = \Pi_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L} = \mathcal{H} = 0 \ ,$$

$$T^0_{\ 1} = \Pi_\mu X'^\mu = 0 \ ,$$

$$T^1_{\ 0} = -T \frac{(\dot{X}\cdot X')\dot{X}_\mu - \dot{X}^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \dot{X}^\mu = 0 \ ,$$

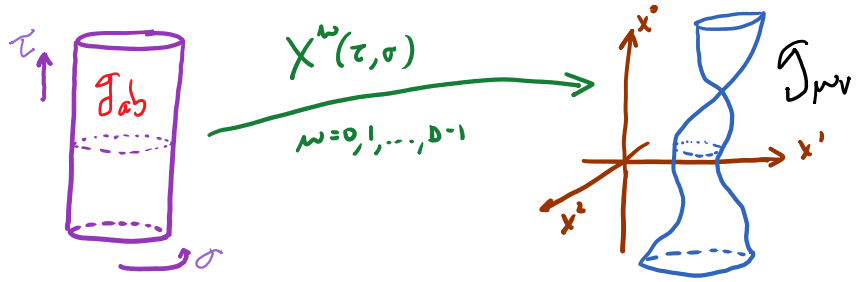
$$T^1_{\ 1} = -T \frac{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

$$-\left(-T\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}\right) = 0 \ .$$

4:21/08/23 4:23/08/21

$S_{NG}[X]$ es no polinomial; pero podemos quitarle la raíz de manera análoga al caso de la partícula: nos inventamos como variable auxiliar a la métrica intrínseca en la hoja de mundo $g_{ab}(\tau,\sigma)$, y reescribimos la acción en la forma

2×2, simétrica



$$S_p[X, g_{ab}] = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \sqrt{-g}\, g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)$$

Acción de Polyakov (Brink-Di Vecchia-Howe — Deser-Zumino)

Bajo $g^{ab} \to g^{ab} + \delta g^{ab}$ se tiene $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ab}\delta g^{ab}$, de modo que la ecuación de movimiento de la métrica g^{ab} es

$$-\frac{2}{T}\frac{\delta S_p}{\delta g^{ab}} = \sqrt{-g}\,\underbrace{\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}}_{h_{ab}\ \text{métrica inducida}} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{ab} g^{cd}\underbrace{\partial_c X^\lambda \partial_d X^\rho g_{\lambda\rho}}_{h_{cd}}$$

(no confundir con g_{ab})

$$= \sqrt{-g}\left(h_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} h_{cd}\right) = 0.$$

Esto no determina g_{ab} por completo; pero sí

lunes, 25 de febrero de 2013 07:41 p.m.

implica que ($\equiv \sigma^a = (\tau, \sigma)$)

$$g_{ab}(\sigma) = \lambda(\sigma)\, h_{ab}(\sigma) = \lambda(\sigma)\, \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu\, g_{\mu\nu}(X) :$$

(λ función arbitraria (positiva), $\lambda > 0$)

$$h_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} h_{cd} = h_{ab} - \frac{1}{2} \lambda h_{ab} \lambda^{-1} \underbrace{h^{cd} h_{cd}}_{\delta^c_c = 2} = 0 .$$

es decir, la métrica intrínseca y la inducida están relacionadas por un reescalamiento local ($\equiv$ transformación 'de Weyl' o 'conforme' - ver más adelante).

Y podemos verificar que

$$S_p[X, g_{ab} = \lambda h_{ab}] =$$

$$-\frac{T}{2}\int d^2\sigma \sqrt{-g}\, g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu\, g_{\mu\nu}(X)$$

$$= -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \underbrace{\sqrt{-\det(\lambda h_{ab})}}_{\lambda^2 \det h_{ab}} \underbrace{(\lambda^{-1} h^{ab})}_{\delta^a_a = 2} h_{ab}$$

$$\lambda \sqrt{-\det h_{ab}}$$

$$= -T\int d^2\sigma \sqrt{-h} = S_{NG}[X] . \checkmark$$

lunes, 25 de febrero de 2013 07:49 p.m.

Ahora que ya tenemos una métrica intrínseca en la hoja de mundo, la definición estándar del tensor de energía-momento correspondiente (con una convención útil para la constante de normalización) es

$$T_{ab} \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_p}{\delta g^{ab}}$$

(contracción con $g_{\mu\nu}$)

$$= -\frac{1}{\alpha'}\left(\partial_a X \cdot \partial_b X - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c X \cdot \partial_d X\right)$$

$$l_c^2 \to \alpha'$$

(lo cual coincide con la definición como corriente de Noether asociada a traslaciones $\sigma^a \to \sigma^a + \delta\sigma^a$), así que la ecuación de movimiento para g_{ab}, que debemos imponer para garantizar que $S_p = S_{NG}$, dice simplemente que

$$T_{ab} = 0 \,,$$

lo cual justo coincide con lo que encontramos (como identidad) a partir de la acción de Nambu-Goto.

S_p tiene las mismas simetrías que S_{NG}, y una adicional:

1) Reparametrizaciones en el espaciotiempo (y en particular el grupo de Poincaré cuando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$).

2) Reparametrizaciones en la hoja de mundo (con $\bar{g}_{ab}(\bar{\sigma}) = \frac{\partial \sigma^c}{\partial \bar{\sigma}^a} \frac{\partial \sigma^d}{\partial \bar{\sigma}^b} g_{cd}(\sigma)$).

3) Transformaciones de Weyl (=conformes, para relativistas)

$$\sigma^a \longrightarrow \bar{\sigma}^a = \sigma^a \,, \qquad X^\mu(\sigma) \to \bar{X}^\mu(\sigma) = X^\mu(\sigma) \,,$$

$$g_{ab}(\sigma) \longrightarrow \bar{g}_{ab}(\sigma) = \Omega(\sigma)\, g_{ab}(\sigma)$$

↑ función arbitraria (positiva)

$$\left(\Rightarrow \bar{g}^{ab} = \Omega^{-1} g^{ab} \,, \quad \det \bar{g}_{ab} = \Omega^2 \det g_{ab} \,, \right.$$

$$\left. \sqrt{-g}\, g^{ab} \to \sqrt{-\bar{g}}\, \bar{g}^{ab} = \Omega \sqrt{-g}\, \Omega^{-1} g^{ab} = \sqrt{-g}\, g^{ab} \right).$$

$\sqrt{-g}\, g^{ab}$: factor en S_p

Esta nueva simetría local es una propiedad especial de S_p en 2 dimensiones, y su existencia explica

lunes, 25 de febrero de 2013 08:27 p.m.

por qué la ecuación de movimiento de g_{ab} solo determinó a g_{ab} módulo un factor arbitrario $\lambda(\sigma)$.

Las invariancias locales nuevamente están asociadas a ser las constricciones hamiltonianas ("de primera clase" ≡ conmutan bajo paréntesis de Poisson).

$$\Pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{X}^\mu} = -T\sqrt{-g}\, g^{0a}\partial_a X_\mu$$

$-\frac{T}{2}\int d^2\sigma \sqrt{-g}\, g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)$

implica, a través de la ecuación de movimiento $T_{ab}=0$, o equivalentemente, $g_{ab}=\lambda h_{ab}$, las constricciones que antes teníamos (como identidades) a partir de S_{NG}:

$$\Pi^2 + T^2 X'^2$$

← no confundir con T_{ab}

$$= T^2\left(-g g^{0a}\underbrace{\partial_a X\cdot\partial_b X}_{h_{ab}} g^{0b} + \underbrace{\partial_1 X\cdot\partial_1 X}_{h_{11}}\right)$$

$T_{ab}=0$ →

$$\underbrace{-\lambda^2 h \quad \lambda^{-1}\delta^0_b \quad \lambda^{-1}h^{0b}}_{-h\,h^{00}=-h_{11}}$$

$\leftarrow h^{ab} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} h_{11} & -h_{01} \\ -h_{10} & h_{00}\end{pmatrix}$

$$= 0\,,$$

$$\Pi_\mu X'^\mu = \overbrace{-T\sqrt{-g}\, g^{0a}\, \partial_a X \cdot \partial_1 X}^{\Pi_\mu} = -T\sqrt{-h}\,\delta^0_1 = 0 ,$$

$T_{ab}=0$

$$\underbrace{\lambda\sqrt{-h}}\ \underbrace{\lambda^{-1} h^{0a}}\ \underbrace{h_{a1}}$$

es decir,

$$\boxed{\begin{aligned} \Pi^2 + T^2 X'^2 &= 0 \\ \Pi_\mu X'^\mu &= 0 \end{aligned}} .$$

Y adicionalmente, para los momentos conjugados a las 3 nuevas variables g_{ab}, tenemos directamente

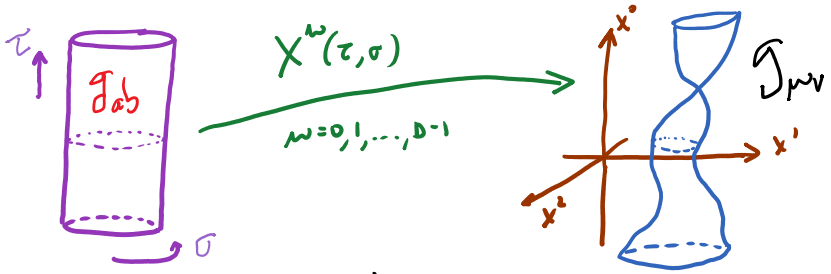
$$\Pi_{ab} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{g}^{ab}} = 0 .$$

Podemos notar que esto da el conteo correcto de grados de libertad físicos:

$$\underset{\text{variables}}{\overset{X^\mu \quad g_{ab}}{(D+3)}} - \underset{\text{constricciones}}{\overset{\Pi_\mu \quad \Pi_{ab}}{(2+3)}} = \underset{\text{grados de libertad}}{D-2} \quad \checkmark .$$

en espacio configuración

cada constricción "de primera clase" cuenta doble en el espacio fase



Podemos notar que, desde el punto de vista de la hoja de mundo,

$$S_p = -\frac{T}{2}\int d^2\sigma \sqrt{-g}\, g^{ab}\, \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)$$

es una teoría de campos con D campos escalares en 1+1 dim (D copias de Klein-Gordon si $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$, pero con término cinético no trivial si $g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(X)$), acoplados a una métrica no dinámica: $g_{ab}(\sigma)$ es un campo no dinámico porque aparece sin derivadas en S_p, y entendemos que esto se debe a que cumple exclusivamente la función de campo auxiliar.

Pensaríamos entonces que el contacto descubierto de S_p con la acción natural de la cuerda relativista, S_{NG}, se perdería si agregamos un término cinético para g_{ab}, es decir, la acción de Einstein-Hilbert

$$S_E[g_{ab}] = C\int d^2\sigma \sqrt{-g}\, R$$

C: cte. de normalización

R: escalar de curvatura en 1+1 dim

(que, por otra parte, respeta correctamente la invariancia bajo difeomorfismos y Weyl).

Dado que

$$\frac{\delta S_E}{\delta g^{ab}} = C\sqrt{-g}\underbrace{\left(R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R\right)}_{\text{tensor de Einstein}},$$

si tomamos como acción a $S_p + S_E$ la ecuación de movimiento para g_{ab} será la ec. de Einstein,

$$\underbrace{R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R}_{\text{de } \delta S_E} = \underbrace{\frac{4\pi}{C}T_{ab}}_{\text{de } \delta S_p},$$

lo cual luce muy distinto a $T_{ab} = 0$ $(\Rightarrow g_{ab} = \lambda h_{ab})$, que nos permitía recuperar S_{NG}.

Pero, curiosamente, en 1+1 dimensiones se tiene

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0 \quad \underline{\text{idénticamente}},$$

porque las simetrías del tensor de Riemann determinan de manera única

$$R_{abcd} = \frac{1}{2}\left(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}\right)R .$$

En este caso se tiene entonces $\delta S_E/\delta g^{ab} = 0$ para cualquier g_{ab}, es decir, la acción $S_E = c\int d^2\sigma\sqrt{-g}\,R$ es de hecho independiente de la métrica, y depende solo de la topología de la hoja de mundo. (Como veremos más adelante, este es el contenido del teorema de Gauss-Bonnet.)

En resumen, podemos agregar S_E sin poner en riesgo el contacto entre S_P y S_{NG} — y sin que g_{ab} se vuelva dinámica. Más adelante entenderemos la utilidad de S_E.

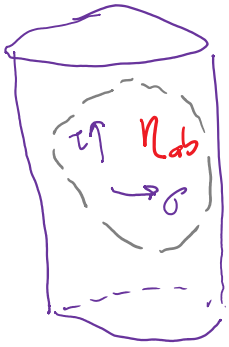
De ahora en adelante (hasta nuevo aviso), tomaremos por simplicidad $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Para cuantizar a la cuerda, de una manera u otra conviene fijar una norma. Justo como en el caso de la partícula, podemos hacerlo de manera covariante

bajo Poincaré imponiendo condiciones sobre $g_{ab}(\sigma)$. Esta tiene 3 componentes independientes, que podemos especificar por completo utilizando nuestras 3 invariancias locales (2 difeos + 1 Weyl).

Elegiremos trabajar en la norma plana

$$g_{ab}(\sigma) = \begin{cases} \eta_{ab} & \text{en signatura lorentziana} \\ \delta_{ab} & \text{en signatura euclideana} \end{cases}.$$



Para ser más precisos: dada cualquier $\bar{g}_{ab}(\sigma)$, siempre es posible transformar a η_{ab} ó δ_{ab} localmente (en un parche de coordenadas a la vez). Globalmente habrá en general restricciones ("módulos" análogos al "tiempo" propio T en el caso de la partícula); pero eso solo será importante más adelante.

Será conveniente para nosotros hacer además una rotación de Wick en la hoja de mundo, renombrando

$$\tau \equiv \sigma^0 = -i\sigma^2,$$

de modo que $g_{ab} = \eta_{ab} \longrightarrow \delta_{ab}$. Al hacer esto, es habitual definir la acción euclídea con el signo invertido con respecto a la lorentziana, de forma que $\exp\left(i\int d\sigma^0 d\sigma^1 \mathcal{L}_{Lor.}\right) = \exp\left(-\int d\sigma^1 d\sigma^2 \mathcal{L}_{Eucl.}\right)$.

$a,b = 0,1$; $a,b = 1,2$

Nuestro sistema es entonces

$$S_p[X] = +\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\, \partial_a X^\mu \partial_a X^\nu \eta_{\mu\nu} \,,$$

$\alpha' = T/2$; suma implícita (contraído con δ^{ab})

que describe simplemente 1 a D campos escalares libres (Klein-Gordon) no masivos en 1+1 dimensiones!

Pero no puede ser esta la historia completa, porque tenemos aquí todavía D variables.

El punto es que, antes de fijar $g_{ab} = \delta_{ab}$, la acción $S_p[X, g]$ contenía la información sobre la ecuación de g_{ab}, $T_{ab} = 0$, que como vimos, resulta clave para reproducir S_{NG}. Al fijar g_{ab} perderíamos

esta información, así que para recuperar la física correcta debemos imponerla a mano (ver p. 129),

$$T_{22} = \mathcal{H} = \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\partial_2 X\cdot\partial_2 X - \frac{1}{2}\partial_1 X\cdot\partial_1 X\right) = 0,$$

$$T_{11} = \frac{1}{\alpha'}\left(\frac{1}{2}\partial_1 X\cdot\partial_1 X - \frac{1}{2}\partial_2 X\cdot\partial_2 X\right) = 0,$$

$$T_{12} = \frac{1}{\alpha'}\,\partial_1 X\cdot\partial_2 X = 0 .$$

Nuestro sistema de interés es entonces un subsector de KG $|t\rangle$.

L5: 23/08/23

Sabemos que estas condiciones equivalen a decir que $h_{ab}(\sigma) = \lambda^{-1}(\sigma)\, g_{ab}(\sigma) = \lambda^{-1}(\sigma)\,\delta_{ab}$, es decir, que la métrica inducida es conformemente plana (plana salvo Weyl). Y de hecho, si en S_{NG} elegimos σ^1, σ^2 tales que $h_{12} = \dot{X}\cdot X' = 0$ y ($\dot{} \equiv \partial_2$ aquí)

$$h_{11} = X'^2 = \lambda = \dot{X}^2 = h_{22},$$ obtenemos

$$S_{NG}[X] = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2\sigma \underbrace{\sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X}\cdot X')^2}}_{\dot{X}^2 = \frac{1}{2}(\dot{X}^2 + X'^2)} = S_P[X].$$

L5: 25/08/21

Podemos notar que las 3 ecuaciones de movimiento $T_{ab}=0$ en realidad nos dan solo 2 constricciones independientes, puesto que $T_{11}+T_{22}=\delta^{ab}T_{ab}=0$, o en versión lorentziana, $T_{11}-T_{00}=\eta^{ab}T_{ab}=0$.

El hecho de que la traza de T_{ab} sea en automático cero es consecuencia directa de la invariancia de Weyl: bajo $g_{ab}\to g_{ab}+\delta g_{ab}$ se tiene por definición $\delta S_p \propto \int d^2\sigma \sqrt{-g}\,\delta g^{ab}T_{ab}$, y para una transformación de Weyl, $\omega(\sigma)g^{ab}$ $(g^{ab}\to(1+\omega(\sigma))g^{ab})$, así que $\delta S_p=0$ para cualquier $\omega(\sigma)$ implica que $\boxed{g^{ab}T_{ab}=0}$.

Esto es importante porque nos da el conteo correcto:
D variables − 2 constricciones = D−2 grados de libertad. ✓

Las 2 constricciones expresan el hecho de que, aún después de haber fijado $g_{ab}=\delta_{ab}$, tenemos todavía un lenguaje redundante, que se manifiesta también en la existencia de 2 simetrías locales remanentes.

Es decir, hemos fijado la norma (eliminado la redundancia) casi por completo; pero (localmente) existen unas cuantas transformaciones en el grupo Dif x Weyl que **No** cambian la métrica $g_{ab} = \delta_{ab}$, y por tanto siguen vivas.

Para entender esto, conviene usar las coordenadas del cono de luz en la hoja de mundo

$$\left.\begin{aligned} \sigma^+ \equiv \tau + \sigma &= -i\sigma^2 + \sigma^1 \\ \sigma^- \equiv \tau - \sigma &= -i\sigma^2 - \sigma^1 \end{aligned}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} \tau &= \tfrac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^-) \\ \sigma &= \tfrac{1}{2}(\sigma^+ - \sigma^-) \end{aligned}\right.$$

de modo que la métrica plana $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se reescribe en la forma $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$:

$$g_{++} = \underbrace{\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^+}}_{(\frac{1}{2})^2} \underbrace{g_{\tau\tau}}_{\eta_{\tau\tau}=-1} + \underbrace{\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^+}}_{(\frac{1}{2})^2} \underbrace{g_{\sigma\sigma}}_{\eta_{\sigma\sigma}=+1} = 0,$$

$$g_{--} = \underbrace{\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^-}\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^-}}_{(\frac{1}{2})^2} \underbrace{g_{\tau\tau}}_{\eta_{\tau\tau}=-1} + \underbrace{\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^-}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^-}}_{(-\frac{1}{2})^2} \underbrace{g_{\sigma\sigma}}_{\eta_{\sigma\sigma}=+1} = 0,$$

$$g_{+-} = \underbrace{\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\tau}{\partial\sigma^-}}_{(\frac{1}{2})^2}\underbrace{g_{\tau\tau}}_{\eta_{\tau\tau}=-1} + \underbrace{\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^+}\frac{\partial\sigma}{\partial\sigma^-}}_{-(\frac{1}{2})^2}\underbrace{g_{\sigma\sigma}}_{\eta_{\sigma\sigma}=+1} = -\frac{1}{2},$$

es decir, $ds^2 \equiv g_{ab}\,d\sigma^a d\sigma^b = -d\tau^2 + d\sigma^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-$.

$\left(-\tau^2 + \sigma^2 = -\sigma^+\sigma^-\right)$

Definiendo a las reparametrizaciones conformes

$$\begin{cases}\sigma^+ \\ \sigma^-\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\underline{\sigma}^+(\sigma^+) \\ \underline{\sigma}^-(\sigma^-)\end{cases}$$ ← en lugar de $\underline{\sigma}^{\pm}(\sigma^+,\sigma^-)$,

vemos que su efecto sobre la métrica es

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \underline{g}_{ab} = \frac{\partial\sigma^c}{\partial\underline{\sigma}^a}\frac{\partial\sigma^d}{\partial\underline{\sigma}^b}\,g_{cd} = \begin{cases} 0 & \text{si } a=b \\ \dfrac{\partial\sigma^+}{\partial\underline{\sigma}^+}\dfrac{\partial\sigma^-}{\partial\underline{\sigma}^-}\left(-\frac{1}{2}\right) & \text{si } a\neq b \end{cases}$$

es decir, $g_{ab} \to \left(\dfrac{\partial\sigma^+}{\partial\underline{\sigma}^+}\dfrac{\partial\sigma^-}{\partial\underline{\sigma}^-}\right) g_{ab}$,

efecto que podemos eliminar con una transformación de Weyl con $\Omega^{-1} = (\partial\sigma^+/\partial\underline{\sigma}^+)(\partial\sigma^-/\partial\underline{\sigma}^-)$.

Llamamos transformación conforme a la combinación

$$\begin{pmatrix} \text{Weyl con} \\ \Omega^{-1} = \dfrac{\partial\sigma^+}{\partial\underline{\sigma}^+}\dfrac{\partial\sigma^-}{\partial\underline{\sigma}^-} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{reparametrización} \\ \text{conforme} \\ \underline{\sigma}^+(\sigma^+),\ \underline{\sigma}^-(\sigma^-) \end{pmatrix}$$

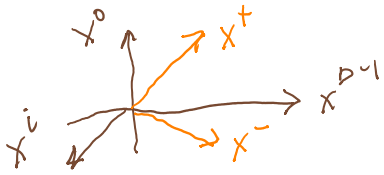
(un subgrupo de medida cero en Dif × Weyl),

y vemos entonces que las transformaciones conformes preservan la norma plana $g_{ab} = \delta_{ab}$, y son por tanto las simetrías remanentes aún después de fijar esta norma.

15:26/02/13

Para seguir adelante, tenemos entonces 2 opciones:

i) Eliminar la redundancia por completo antes de cuantizar. La elección obvia $X^0 = \tau$ (que habría que complementar con una condición adicional) no



es muy manejable para la cuerda. El método más conveniente y tradicional es definir las coordenadas del cono de luz en el espaciotiempo

$$x^{\pm} \equiv \pm x^0 + x^{D-1} \Longrightarrow X^{\pm}(\sigma) \equiv \pm X^0(\sigma) + X^{D-1}(\sigma),$$

y fijar la norma del cono de luz

$$X^+(\tau,\sigma) = \underbrace{x^+}_{\text{cte.}} + \overbrace{\alpha' p^+}^{=\ell_c^2} \tau \,.$$

cte.

Básicamente, $X^+ = \tau$ en lugar de $X^0 = \tau$

A partir de las constricciones se puede entonces despejar X^- en términos de X^+ y las coordenadas transversales X^i $i = 1, \ldots, D-2$, de tal modo que quedamos solo con las $D-2$ $X^i(\tau,\sigma)$ como grados de libertad físicos (ya sin constricciones), que uno procede a cuantizar.

Este método constituye un atajo útil para deducir el espectro de la cuerda y el valor requerido para D (la llamada dimensión crítica); pero no tiene invariancia de Poincaré manifiesta.

[Ver p.ej. Green-Schwarz-Witten cap. 2, Polchinski cap. 1, Brink-Henneaux cap. 12, Becher-Becker-Schwarz cap. 2.]

ii) Cuantizar los D campos X^μ, y eliminar la redundancia después, imponiendo las constricciones a nivel cuántico, como condiciones para identificar a los estados físicos, análogamente a lo que hicimos para la partícula. Este es el método que usaremos en el resto del curso, y se le conoce como cuantización covariante "antigua" (para contrastar con la cuantización covariante "moderna", o BRST, que mencionaremos brevemente más adelante).

Por ahora nos olvidemos entonces de las 2 constricciones, y el sistema que debemos cuantizar es simplemente

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \, \partial_a X^\mu \partial_a X_\mu \,, \qquad a=1,2$$

que como ya dijimos no es otra cosa que D

campos escalares libres (Klein-Gordon) reales y no masivos. La ecuación de movimiento para cada campo es la ec. de Klein-Gordon sin masa,

$$\partial^2 X^\mu = 0$$

↑ Laplaciano / D'Alembertiano $\partial_1^2+\partial_2^2 = \partial_1^2-\partial_0^2$

mejor conocida como la ecuación de ondas.

Esperemos entonces poder desarrollar a los X^μ en modos de Fourier, en analogía directa con la expresión familiar

$$\varphi(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}\left(a_{\vec{p}}\, e^{\overbrace{ip\cdot x}^{-p^0t+\vec{p}\cdot\vec{x}}} + a^*_{\vec{p}}\, e^{-ip\cdot x}\right)\Big|_{p^0=E_{\vec{p}}},$$

$$\updownarrow$$

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \int \frac{dp}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}}\left(a^\mu_p\, e^{\overbrace{ip\cdot\sigma}^{-p^0\tau+p\sigma}} + a^{*\mu}_p\, e^{-ip\cdot\sigma}\right)\Big|_{p^0=\varepsilon_p},$$

$p\equiv p'$ momento espacial en la hoja de mundo

$\equiv |p'|$

donde, al cuantizar, los coeficientes a_p^μ y $a_p^{\mu *}$ se convertirán en operadores de aniquilación y creación $\hat{a}_p^\mu$ y $\hat{a}_p^{\mu\dagger}$.

Esto es esencialmente correcto; pero habrá diferencias en 2 aspectos: las condiciones de frontera para X^μ, y la notación que es tradicional en cuerdas.

Las condiciones de frontera se deducen, justo como la ecuación de movimiento, a partir del principio variacional: comenzando con

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \, \partial_a X^\mu \partial_a X_\mu \quad ,$$

$M \leftarrow$ hoja de mundo

al variar $X^\mu \to X^\mu + \delta X^\mu$ obtenemos

$$\delta S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \, \partial_a X^\mu \partial_a (\delta X_\mu)$$

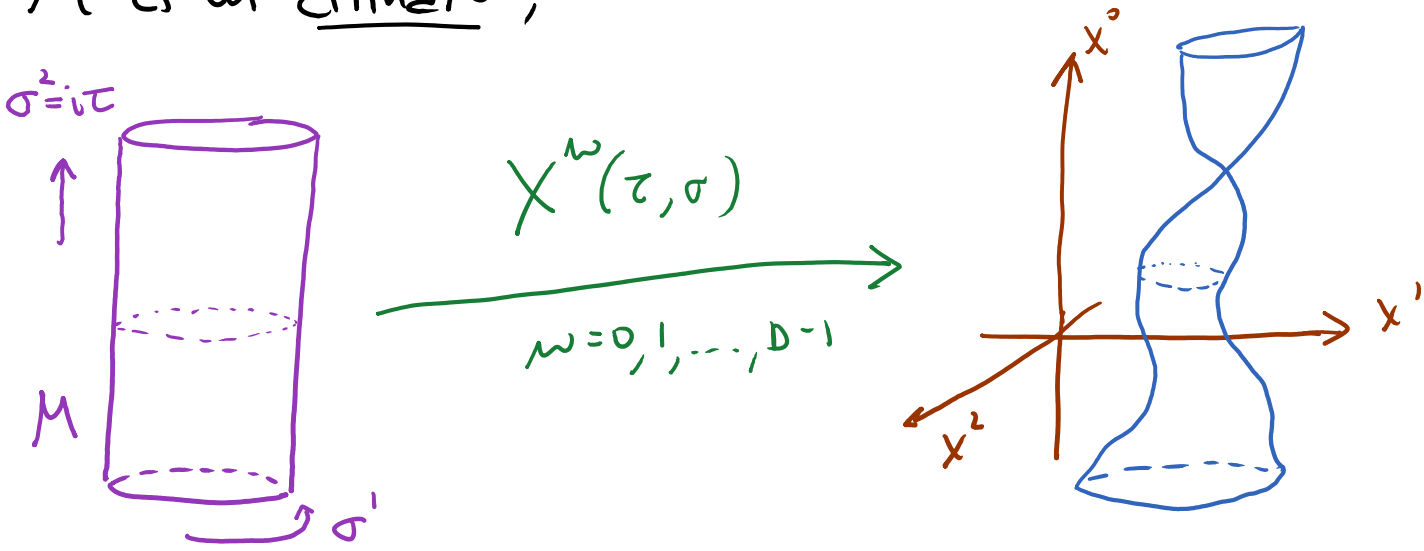
$$\overset{\text{partes}}{=} \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \, (-\partial^2 X^\mu) \delta X_\mu + \frac{1}{2\pi\alpha'} \underbrace{\int_M d^2\sigma \, \partial_a (\partial_a X^\mu \delta X_\mu)}$$

$$\int ds\, \partial_n X^\mu \delta X_\mu$$

(posible) frontera de hoja de mundo $\rightarrow \partial M$ $\quad \tau \equiv n^a \partial_a$ ← vector normal a ∂M

Llegados a este punto, el análisis es distinto dependiendo de si estamos hablando de una cuerda cerrada o abierta.

Analicemos primero la propagación libre de una cuerda cerrada. En este caso, la hoja de mundo M es un cilindro,



que elegiremos parametrizar con $-\infty < \sigma^2 < \infty$, $0 \leq \sigma^1 \leq 2\pi$, $\sigma^1 \simeq \sigma^1 + 2\pi$. Nuestra hoja de

conjunto vacío

mundo no tiene entonces frontera, $\partial M = \emptyset$. (Si acaso pensáramos en algún momento en trabajar en un intervalo finito de la coordenada "temporal" $\sigma^2 \in [\sigma^2_i, \sigma^2_f]$, de cualquier manera no habría contribución de los bordes $\sigma^2 = \sigma^2_{i,f}$, porque en el principio variacional fijamos las condiciones inicial y final para $X^\mu(\sigma^1, \sigma^2)$, de modo que $\delta X^\mu \big|_{\sigma^2 = \sigma^2_{i,f}} = 0$.)

No tenemos entonces condiciones de frontera en sentido literal, pero sí debemos tomar en cuenta que nuestros campos X^μ están definidos sobre un círculo S^1 $(\sigma^1 \simeq \sigma^1 + 2\pi)$, y obedecen condiciones de periodicidad

$$X^\mu(\sigma^1, \sigma^2) = X^\mu(\sigma^1 + 2\pi, \sigma^2)$$ (cuerda cerrada).

lunes, 04 de marzo de 2013 05:17 p.m.

Así que, en lugar de desarrollar nuestros campos con una transformada de Fourier,

$$X^\mu(\tau,\sigma) \sim \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left(a_p^\mu e^{\overbrace{ip\cdot\sigma}^{-p^0\tau+p\sigma}} + a_p^{*\mu} e^{-ip\cdot\sigma} \right) \Big|_{p^0=\varepsilon_p \equiv |p'|},$$

$p \equiv p'$ momento espacial en la hoja de mundo

tenemos una serie de Fourier: el momento p' se discretiza a la Kaluza-Klein (p. 36),

$$p' = \frac{n}{R} = n \in \mathbb{Z}, \quad \text{de tal modo que}$$

R ← radio del círculo $= 1$ $\quad (\sigma' \simeq \sigma' + 2\pi)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp' \to \frac{1}{R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \quad \left(y\ \delta(p-p') \to \delta_{n,n'}\right),$$

y quedamos entonces con

$$X^\mu(\tau,\sigma) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{2|n|}} \left(a_n^\mu e^{\overbrace{-i|n|\tau+in\sigma}^{p^0 \to\ \ \leftarrow p'}} + a_n^{*\mu} e^{i|n|\tau-in\sigma} \right),$$

$p^0 = \varepsilon_p = |p'|$

que claramente respeta la condición de periodicidad.

Como siempre, el modo con $p' = n = 0$ representa una excitación constante del campo. Pero podemos notar

que la expresión anterior no es de hecho la solución más general a la ecuación de movimiento $(-\partial_\tau^2+\partial_\sigma^2)X^\mu=0$: es posible agregar además un término lineal en σ o τ. (Esto no sería posible si estuviéramos tratando con la ecuación de Klein-Gordon con masa. El caso sin masa lo usamos p.ej. para el campo electromagnético A_μ. En ese contexto, términos lineales en x^0 ó x^i representan una intensidad de campo constante $F_{oi}=E_i$ ó $F_{ij}=\epsilon_{ijk}B_k$, posibilidad que normalmente descartamos por condiciones de frontera en $|\vec{x}|\to\infty$.) La condición de periodicidad prohibe un término lineal en σ, pero no en τ.

Tomando en cuenta además que X^μ tiene unidades de longitud, mientras que un campo escalar φ en $1+1$ dimensiones $\left(\frac{1}{2}\int d^2x\,\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi\right)$ tendría dimensión 0, reescalemos nuestra expresión anterior por $\sqrt{2\pi\alpha'}$ $\left(\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\,\partial_a X\cdot\partial^a X\right)$, quedando entonces con

lunes, 04 de marzo de 2013 08:05 p.m.

$x^\mu, p^\mu, a_n^\mu, a_n^{\mu *}$ des.

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + \alpha' p^\mu \tau + \sum_{n\neq 0} \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{4\pi|n|}} \left(a_n^\mu e^{-i|n|\tau + in\sigma} + a_n^{\mu *} e^{i|n|\tau - in\sigma} \right).$$

16:28/08/23

El coeficiente del término lineal en τ merece ese nombre porque es la carga conservada asociada a la invariancia bajo translaciones $X^\mu \to X^\mu + c^\mu$, es decir, el momento espaciotemporal. Para ver esto, recordemos que para deducir la corriente de Noether asociada a una simetría podemos razonar como sigue. Al considerar

$$X^\mu(\tau,\sigma) \longrightarrow X^\mu(\tau,\sigma) + \underbrace{\delta X^\mu(\tau,\sigma)}_{\equiv \epsilon^\nu(\tau,\sigma)\delta^\mu_\nu},$$

teremos $\delta S_p = 0$ si ϵ^ν es constante, porque en ese caso δX^μ es una translación, que constituye una simetría de S_p. Cuando ϵ^ν no es constante,

$$\delta S_p = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \; 2\,\partial_a X^\mu \partial^a \underbrace{\delta X_\mu}_{\epsilon_\mu(\tau,\sigma)} \neq 0$$

en general. Pero si ahora pedimos que X^μ satisfaga su ecuación de movimiento, entonces tenemos $\delta S_p = 0$ bajo variaciones δX^μ arbitrarias. Denotando

$$J_a^\mu \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_a X^\mu ,$$

← notar que este es un vector en el espaciotiempo, cuya retracción a la hoja de mundo, $J_a^b \equiv \partial^b X_\mu J_a^\mu$, está relacionado con T_{ab}: $T_{12} = 2\pi \mathcal{J}_{12}$, $T_{11} = 2\pi(\mathcal{J}_{11} - \mathcal{J}_{22}) = -T_{22}$

tenemos entonces

$$\delta S_p = -\int d^2\sigma \; J_a^\mu \partial^a \epsilon_\mu$$

$$\overset{\text{partes}}{=} \int d^2\sigma \; \partial^a J_a^\mu \epsilon_\mu = 0 \quad \forall \; \epsilon_\mu(\tau,\sigma) .$$

Deducimos de aquí que $\partial^a J_a^\mu = 0$, es decir, J_a^μ es la corriente de Noether asociada a translaciones a lo largo de x^μ. En este caso, es de hecho obvio que $\partial^a J_a^\mu \propto \partial^a \partial_a X^\mu = 0$ como consecuencia de la ec. de movimiento; pero el mismo procedimiento es útil también en otros casos.

La carga total asociada a esta simetría es entonces

$$\int_0^{2\pi} d\sigma \; J_\tau^\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma \; \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau X^\mu = p^\mu . \quad ✓$$

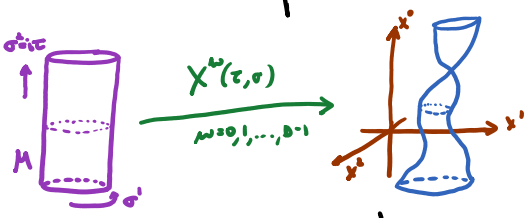
↑ L6: 30/08/21

$\alpha' p^\mu$ + términos periódicos en σ

lunes, 04 de marzo de 2013 08:43 p.m.

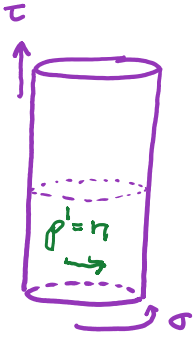
Otra manera de decir lo mismo es notar que

$$\Pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}_\mu \quad (\dot{X} \leftarrow \partial_\tau)$$



es la densidad de momento canónico conjugado al campo X^μ. Para un campo arbitrario φ, el Π correspondiente no guardaría relación con el momento espaciotemporal; pero en este caso X^μ es la posición en el espaciotiempo, así que Π_μ es directamente la densidad de momento espaciotemporal sobre la cuerda. Y el momento total que porta la cuerda es entonces, efectivamente,

$$\int_0^{2\pi} d\sigma\, \Pi_\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau X_\mu}_{J_{\tau\mu}} = P_\mu \,. \quad \checkmark$$



La expansión en modos de Fourier de la p. 151,

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + \alpha' p^\mu \tau + \sum_{n\neq 0} \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{4\pi|n|}} \left(a_n^\mu e^{-i|n|\tau + in\sigma} + a_n^{\mu\,*} e^{i|n|\tau - in\sigma} \right),$$

(ε_β, $\beta' \equiv \beta$)

que como hemos visto es exactamente la esperada

lunes, 04 de marzo de 2013 08:55 p.m.

para campos escalares no masivos en 1+1 dim, nos servirá de punto de partida al cuantizar los campos X^μ (si cuantizamos canónicamente, tendremos entonces a $\hat{X}^\mu$, $\hat{p}^\mu$, $\hat{a}_n^\mu$ y $\hat{a}_n^{\mu\dagger}$ como operadores). Pero, por razones históricas y prácticas, es habitual reescribirla en otra notación.

Recordando que la solución general a la ecuación de onda $\frac{\partial}{\partial\sigma^+}\frac{\partial}{\partial\sigma^-}X^\mu = 0$ debe poderse expresar como una suma de términos independientes que describen ondas viajeras hacia la izquierda y hacia la derecha, separamos

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \underbrace{\frac{x^\mu}{2} + \frac{\alpha'}{2}p^\mu(\tau-\sigma) + \sum_{n>0}\sqrt{\frac{\alpha'}{4\pi n}}\left(a_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} + \text{c.c.}\right)}_{\text{Modos Derechos } \equiv X_D^\mu(\tau-\sigma)\equiv \tilde{X}^\mu(\sigma^-)}$$

$$+ \underbrace{\frac{x^\mu}{2} + \frac{\alpha'}{2}p^\mu(\tau+\sigma) + \sum_{n<0}\sqrt{\frac{\alpha'}{4\pi(-n)}}\left(a_n^\mu e^{in(\tau+\sigma)} + \text{c.c.}\right)}_{\text{Modos Izquierdos } \equiv X_I^\mu(\tau+\sigma)\equiv X^\mu(\sigma^+)}.$$

lunes, 04 de marzo de 2013 09:17 p.m.

Y a continuación definimos

$$\alpha_0^\mu \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\, p^\mu , \qquad \tilde{\alpha}_0^\mu \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\, p^\mu ,$$

y, para todo $n>0$,

$$\alpha_n^\mu \equiv -i\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, a_{-n}^\mu , \qquad \alpha_{-n}^\mu \equiv i\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, a_{-n}^{\mu *} ,$$

operadores de aniquilación ↑ ↓ operadores de creación ↑ ↓

$$\tilde{\alpha}_n^\mu \equiv -i\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, a_n^\mu , \qquad \tilde{\alpha}_{-n} \equiv i\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, a_n^{\mu *} .$$

Notar que esto implica que $(\alpha_n^\mu)^* = \alpha_{-n}^\mu$ y $(\tilde{\alpha}_n^\mu)^* = \tilde{\alpha}_{-n}^\mu$.

Con esto, nuestros campos quedan reescritos como

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \underbrace{\frac{x^\mu}{2} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\,\tilde{\alpha}_0^\mu \sigma^- + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\,\tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^-}}_{X_D^\mu(\sigma^-) = \tilde{X}^\mu(\sigma^-)}$$

$$+ \underbrace{\frac{x^\mu}{2} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\,\alpha_0^\mu \sigma^+ + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\,\alpha_n^\mu e^{-in\sigma^+}}_{X_I^\mu(\sigma^+) = X^\mu(\sigma^+)} .$$

lunes, 04 de marzo de 2013 09:34 p.m.

Podemos ver que la notación para α_0^μ y $\tilde{\alpha}_0^\mu$ se ha elegido de forma tal que

$$\partial_{\sigma^-} X^\mu(\tau,\sigma) = \partial_{\sigma^-} \tilde{X}^\mu(\sigma^-) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^-},$$

($\partial_{\sigma^-} X^\mu(\tau,\sigma) \to X_0^\mu$; la suma incluye $n=0$)

$$\partial_{\sigma^+} X^\mu(\tau,\sigma) = \partial_{\sigma^+} X^\mu(\sigma^+) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^+}.$$

($\partial_{\sigma^+} X^\mu(\tau,\sigma) \to X_I^\mu$)

La interpretación física de los coeficientes en esta expansión es clara (y era clara ya antes del cambio de notación):

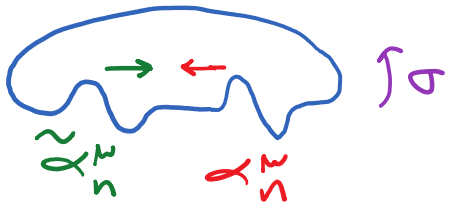
$$X^\mu(\tau,\sigma) = x^\mu + \alpha' p^\mu \tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n}\left(\alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}\right)$$

- x^μ: posición del centro de masa (en $\tau=0$)
- p^μ: momento del centro de masa
- α_n^μ: ondas hacia la "izquierda"
- $\tilde{\alpha}_n^\mu$: ondas hacia la "derecha"

Grados de libertad de partícula: $(X^\mu(\tau),\ \dot{X}^\mu(\tau)=0)$

$x^\mu \bullet \to p^\mu$

Oscilatores: ondas sobre la cuerda



martes, 05 de marzo de 2013 04:10 a.m.

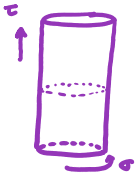
Al cuantizar canónicamente, tendremos operadores $\hat{x}^\mu$, $\hat{p}^\mu$, $\hat{\alpha}_n^\mu$, $\tilde{\hat{\alpha}}_n^\mu$, asociados a un espacio de estados que puede construirse actuando sobre

$|0,0;p\rangle$ con los operadores de creación

estado base para α's — estado base para $\tilde{\alpha}$'s

$\hat{\alpha}_{-n}^\mu$ $(\propto \hat{a}_{-n}^{\mu\dagger})$ y $\tilde{\hat{\alpha}}_{-n}^\mu$ $(\propto \hat{a}_n^{\mu\dagger})$.

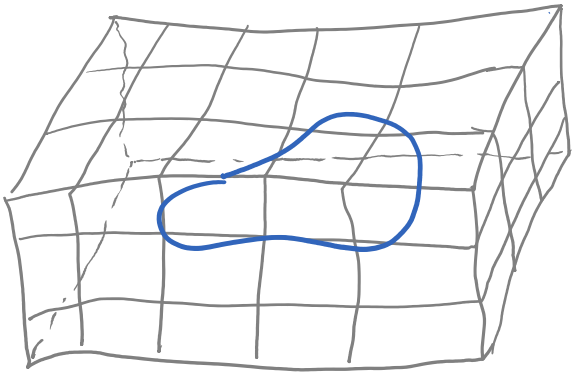
$n>0$ $n>0$



Desde la perspectiva de la hoja de mundo (donde estamos haciendo 2da. cuantización de los campos X^μ), esto nos daría estados con distinto número de partículas; pero desde el punto de vista del espaciotiempo (donde estamos haciendo 1a. cuantización de la trayectoria X^μ de la cuerda), todos los estados representan a una sola cuerda cerrada, con mayor o menor grado de excitación.

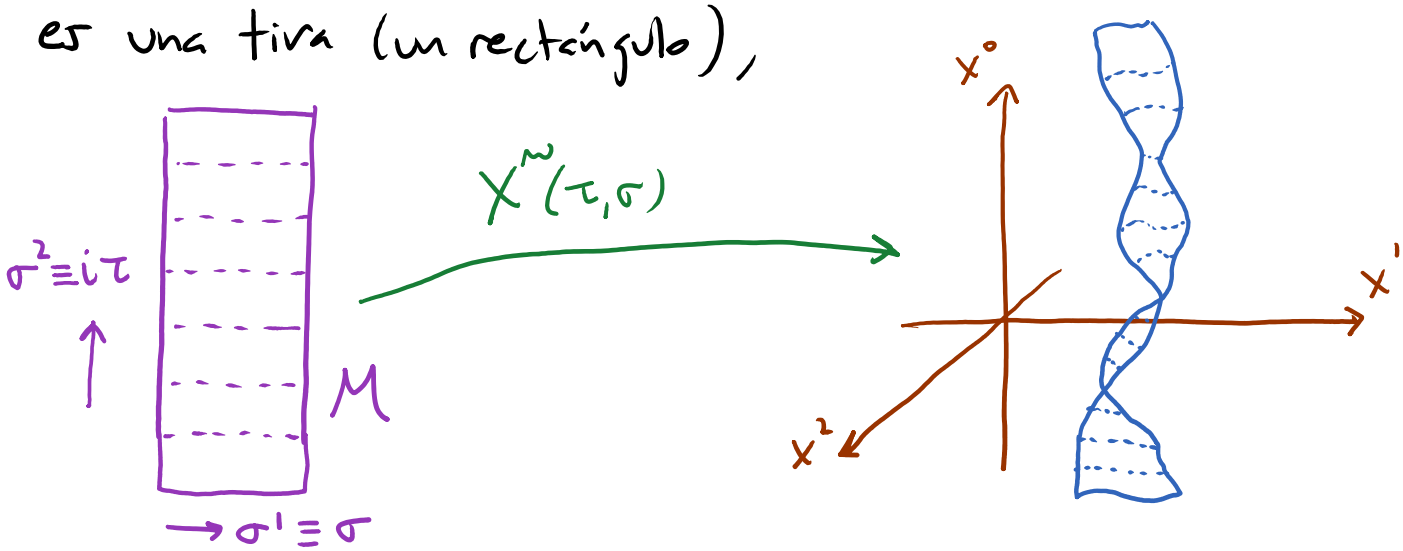
Como hemos dicho, esta cuerda representa a su vez la excitación más pequeña posible del campo de cuerdas cerradas. Para obtener el espectro físico de estados de

vibración de la cuerda (y por tanto, del campo de cuerdas), tendríamos todavía que imponer a nivel cuántico las constricciones $\dot{X}\cdot X' = 0$, $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$.



Veremos eventualmente que en el caso de la cuerda cerrada, uno de los estados físicos es un gravitón, con lo cual quedará claro que el campo de cuerdas cerradas es la generalización cuántica del propio espaciotiempo.

Analicemos ahora el caso de la cuerda abierta. En este caso, la hoja de mundo M para propagación libre es una tira (un rectángulo),



de modo que ahora $\mathcal{M}$ tiene una frontera ($\partial\mathcal{M} \neq \emptyset$), que está dada por las líneas de mundo de los 2 extremos de la cuerda.

Elegiremos trabajar con $0 \leq \sigma^1 \leq \pi$, $-\infty < \sigma^2 < \infty$, de tal modo que la frontera esté en $\sigma^1 = 0, \pi$. El término de frontera en δS_p que obtuvimos en la p. 147,

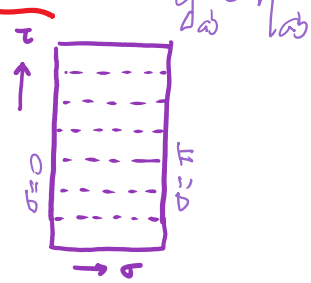
$$\int_{\mathcal{M}} d^2\sigma\, \partial^a (\partial_a X^\mu \delta X_\mu) = \int_{\partial\mathcal{M}} ds\, \underbrace{n^a \partial_a}_{\equiv \partial_n,\ \text{con } n^a \perp \partial\mathcal{M}}\, \partial_n X^\mu \delta X_\mu,$$

usa $ds \equiv d\tau$ y $\partial_n \equiv \partial_\sigma$, y se reescribe entonces como

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^\pi d\sigma\, \partial_\sigma (\partial_\sigma X^\mu \delta X_\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\partial_\sigma X^\mu \delta X_\mu\right]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}.$$

Para que esta contribución de borde a δS_p se anule, debemos imponer entonces **condiciones de frontera** tales que

$$\partial_\sigma X^\mu \delta X_\mu = 0 \quad \text{en } \sigma = 0, \pi.$$



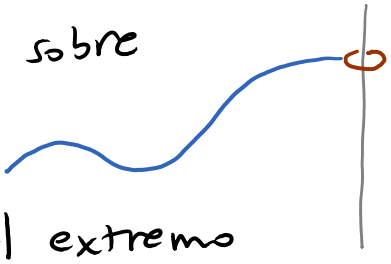
La única opción covariante bajo Poincaré es pedir

$$\partial_\sigma X^\mu \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad \forall \tau \quad \left(\partial_n X^\mu \Big|_{\partial M} = 0 \right) \quad \forall \mu ,$$

es decir, condiciones de Neumann, o de extremo libre. Físicamente, estas condiciones significan que no hay momento espaciotemporal p^μ fluyendo por los extremos de la cuerda, de modo que p^μ se conserva, lo cual va de la mano de la invariancia bajo traslaciones.

$J^\mu_\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\sigma X^\mu = 0$ p. 152

(Al estudiar en la licenciatura las ondas sobre una cuerda, la condición de Neumann se nos presenta como asociada a que el extremo de la cuerda esté atado a un anillo que se desliza sin fricción sobre una varilla.)



Una segunda posibilidad es pedir que

$$X^\mu \Big|_{\sigma=0,\pi} = c^\mu \quad \forall \tau \qquad \left(X^\mu \Big|_{\partial M} = c^\mu \right),$$

↖ cte.

o lo que es lo mismo,

$$\partial_\tau X^\mu\big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad \forall\, \tau \qquad \left(\partial_t X^\mu\big|_{\partial M} = 0\right),$$

↑ $\partial_t \equiv t^a \partial_a$ con $t^a \parallel \partial M$

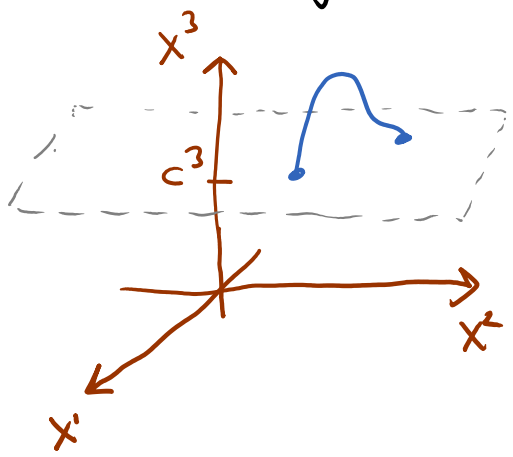
para al menos algunos valores de μ. Estas son condiciones de Dirichlet, o de extremo fijo, y tienen como consecuencia $\delta X^\mu\big|_{\sigma=0,\pi} = 0$, con lo cual también se logra $\delta S_p = 0$. Esta condición de frontera nos resulta muy familiar, pues es la que satisfacen las cuerdas de guitarra, violín, etc. Pero en el contexto de la cuerda relativista, tienen la peculiaridad de que violan la invariancia bajo Lorentz si no todos los X^μ son Dirichlet, y además, violan la invariancia bajo traslaciones.

Efectivamente, si pedimos que

$$\begin{cases} \partial_\sigma X^\alpha\big|_{\sigma=0,\pi} = 0 & \text{para } \alpha = 0, 1, \ldots, p \\ X^i\big|_{\sigma=0,\pi} = c^i & \text{para } i = p+1, \ldots, D-1 \end{cases} \qquad (\text{con } p = -1, \ldots, D-2),$$

martes, 05 de marzo de 2013 08:02 a.m.

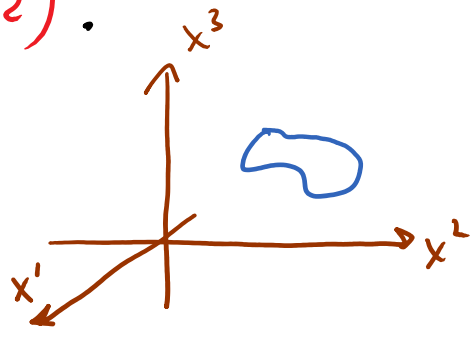
estamos estipulando que $X^i = c^i$ es un lugar especial, y las cuerdas abiertas deben tener sus extremos justo ahí. P.ej., el caso $p=2$ sería como en la figura de la derecha: los extremos de la cuerda solo podrían deslizarse libremente a lo largo de x^1 y x^2,



pero en las direcciones restantes están restringidos a no salirse nunca del plano 2-dimensional definido por $X^3 = c^3, \ldots, X^{D-1} = c^{D-1}$. (El caso $p=-1$, donde todos los X^μ serían Dirichlet, es todavía más peculiar, pues ambos extremos estarían atorados en un solo evento $x^\mu = c^\mu$ en el espaciotiempo.) Vale la pena enfatizar que esta restricción aplica solo para los extremos: los puntos en el cuerpo de la cuerda abierta son indistinguibles de los puntos en una cuerda cerrada, y pueden por tanto moverse en todo el espacio. Aunque, por supuesto, incurrirán en un costo energético grande si se alejan mucho de

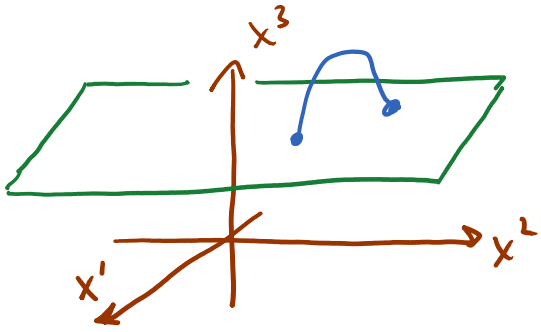
$x^i = c^i$, porque la cuerda tendrá que estirarse/crecer.

Durante muchos años, la opción Dirichlet pareció demasiado extraña como para tomarse en cuenta. Pero en 1989, Dai, Leigh y Polchinski, y por separado Hořava, entendieron la verdadera naturaleza de estas condiciones: mostraron (utilizando la llamada "dualidad T") que el plano p-dimensional en $x^i = c^i$ es un objeto físico que debe considerarse parte del espectro no perturbativo, un solitón, de la teoría de cuerdas. Dai, Leigh y Polchinski ← Dirichlet lo bautizaron D-brana (o más específicamente, Dp-brana, si se quiere indicar su dimensionalidad).



La idea es entonces que, así como una cuerda cerrada es una pequeña excitación de (la generalización cuerdera de) el propio espaciotiempo, una cuerda abierta es una pequeña excitación de un objeto físico extendido en p dimensiones espaciales ($-1 \leq p \leq D-1$),

que llamamos una D-brana. Esto explica por qué los extremos de la cuerda abierta solo pueden deslizarse libremente a lo largo de algunas direcciones x^α $(\alpha = 0, \ldots, p)$: la D-brana está localizada en $x^i = c^i$ $(i = p+1, \ldots, D-1)$, y la cuerda abierta es una excitación de ella —podemos pensarla como un hilito (filamento) de la propia D-brana.

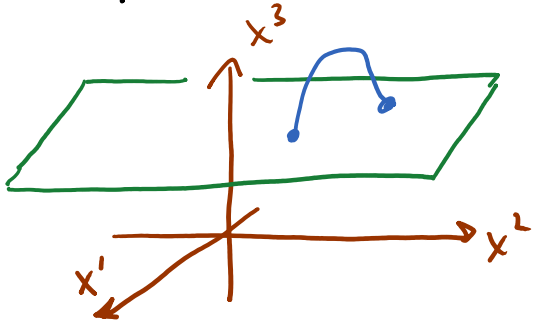


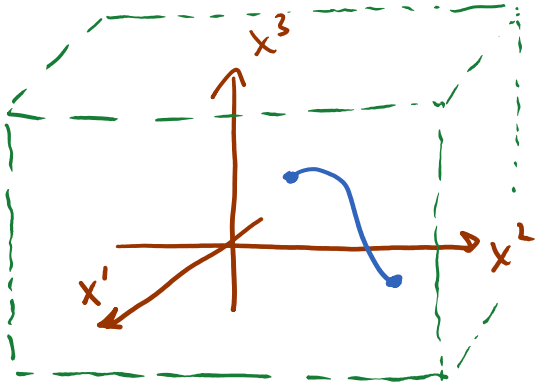
17:30/09/23

Dicho a la inversa, así como el espaciotiempo es un objeto cuyas pequeñas excitaciones son cuerdas cerradas (que pueden, naturalmente, moverse por todo el espacio), y siempre que hablamos de cuerdas cerradas estamos en última instancia hablando del espaciotiempo cuerdero, una D-brana es un objeto cuyas pequeñas excitaciones son cuerdas abiertas (que, naturalmente, solo pueden moverse sobre la D-brana), y siempre que hablamos de cuerdas abiertas estamos en última instancia hablando de una (o varias) D-brana(s).

martes, 05 de marzo de 2013 09:18 a.m.

Quede claro entonces que el hecho de que las condiciones de Dirichlet violen la invariancia bajo Poincaré no es un crimen, sino una consecuencia natural de la presencia de la D-brana. Y entendemos también que incluso en el caso $p=D-1$, donde todas las X^μ son Neumann y sí se tiene invariancia de Poincaré, las cuerdas abiertas deben interpretarse de cualquier manera como excitaciones de una D-brana que llena todo el espacio, una $D(D-1)$-brana.





L7: 01/04/21

letra: Dirichlet ↑ ↑ número: dimensión del espaciotiempo (eventualmente 26)

En ausencia de D-branas, no puede haber cuerdas abiertas, solo cerradas.

El grueso de la comunidad cuerdera no aceptó a las D-branas como objetos intrínsecos de la teoría de cuerdas sino hasta 1995, cuando Polchinski publicó un trabajo clave [hep-th/9510017] donde demostró contundentemente

su relevancia. Desde entonces, las D-branes han sido pieza crucial en muchos avances dentro de la teoría.

Procedamos ahora a implementar explícitamente las condiciones de frontera de Dp-brana,

$$\partial_\sigma X^\alpha \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad (\alpha=0,\dots,p), \qquad X^i \Big|_{\sigma=0,\pi} = c^i \quad (i=p+1,\dots).$$

Ahora nuestros campos viven no sobre un círculo, sino sobre un intervalo; pero de cualquier manera, el hecho de que σ tenga un rango finito vuelve a hacer que el momento en la hoja de mundo sea discreto, $p' = n$.

La diferencia importante con respecto a la cuerda cerrada es que ahora los modos izquierdos y derechos NO son independientes, porque las condiciones de borde hacen que las ondas derechas se conviertan en izquierdas (y viceversa) al rebotar en los extremos de la cuerda ($\Rightarrow$ ondas estacionarias).

Concretamente, para satisfacer las condiciones de

martes, 05 de marzo de 2013 10:13 a.m.

Neumann ($\partial_\sigma X^\alpha = 0$) y Dirichlet ($X^i = c^i$) necesitamos tener, respectivamente,

$$\tilde{\alpha}_n^\alpha = \alpha_n^\alpha \quad \forall\, n, \qquad \tilde{\alpha}_n^i = -\alpha_n^i \quad \forall\, n,$$

(no confundir)

así que la expansión toma la forma

$$X^\alpha(\tau,\sigma) = x^\alpha + 2\alpha' p^\alpha \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\alpha e^{-in\tau} \cos(n\sigma)$$

↑ porque ahora $p_\mu = \int_0^\pi d\sigma\, \Pi_\mu = \int_0^\pi d\sigma \frac{\dot{X}_\mu}{2\pi\alpha'}$

$$X^i(\tau,\sigma) = c^i + 0 + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^i e^{-in\tau} \operatorname{sen}(n\sigma).$$

(no confundir)

↑ no se permite término lineal en τ ($\alpha_0^i + \tilde{\alpha}_0^i = 0$), así que $p^i = 0$:

la cuerda <u>no</u> puede portar un momento neto en las direcciones <u>transversales</u> a la Dp-brana.

Es claro entonces que, al cuantizar, el espacio de Hilbert resultante para la cuerda abierta será más pequeño que

el de la cuerda cerrada (y en particular, veremos que NO incluye a un gravitón).

Hemos entendido ya las condiciones de frontera para la cuerda cerrada y abierta, así como el cambio de notación de as y $a^\dagger$s a αs y $\tilde{\alpha}$s.

Vimos en las pp. 141-2 que, incluso después de fijar la norma plana $g_{ab} = \eta_{ab}$ ó δ_{ab}, S_p tiene todavía a las transformaciones conformes como simetría local remanente. En efecto,

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma^1 d\sigma^2 \, \partial_a X \cdot \partial_a X$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma^+ d\sigma^- \partial_{\sigma^+} X \cdot \partial_{\sigma^-} X \quad ,$$

con $\sigma^+ \equiv \tau + \sigma \equiv -i\sigma^2 + \sigma^1$, $\sigma^- \equiv \tau - \sigma \equiv -i\sigma^2 - \sigma^1$, es invariante bajo

$$\sigma^+ \to \underline{\sigma}^+(\sigma^+) \, , \quad \sigma^- \to \underline{\sigma}^-(\sigma^-) \, :$$

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\underline{\sigma}^+ d\underline{\sigma}^- \partial_{\underline{\sigma}^+} X \cdot \partial_{\underline{\sigma}^-} X$$

$$= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma^+ d\sigma^- \underbrace{\left| \frac{\partial(\underline{\sigma}^+, \underline{\sigma}^-)}{\partial(\sigma^+, \sigma^-)} \right|}_{\frac{\partial \underline{\sigma}^+}{\partial \sigma^+} \frac{\partial \underline{\sigma}^-}{\partial \sigma^-}} \frac{\partial \sigma^+}{\partial \underline{\sigma}^+} \partial_{\sigma^+} X \cdot \partial_{\sigma^-} X \frac{\partial \sigma^-}{\partial \underline{\sigma}^-}$$

$$= S_p .$$

Esta No es una reparametrización: la métrica no cambia (sigue siendo $g_{11} = 1 = g_{22}$, $g_{12} = 0$, o lo que es lo mismo, $g_{++} = 0 = g_{--}$, $g_{+-} = -1/2$), así que las distancias propias sí cambian. Como vimos,

$$\begin{pmatrix} \text{Transformación} \\ \text{Conforme} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \text{Transformación} \\ \text{de Weyl} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \text{Reparametrización} \\ \text{conforme} \end{pmatrix}$$

$$g_{ab} \to \Omega\, g_{ab} \qquad g_{ab} \to \underbrace{\frac{\partial \sigma^+}{\partial \underline{\sigma}^+} \frac{\partial \sigma^-}{\partial \underline{\sigma}^-}}_{\equiv \Omega^{-1}} g_{ab}$$

Reescala localmente distancias propias, pero preserva ángulos.

A pesar de que las reparametrizaciones conformes son

un subconjunto de medida cero del grupo de difeos, en 2 dimensiones las transformaciones conformes (definidas a nivel local) forman un grupo de dimensión infinita: infinitesimalmente, $\sigma^+(\sigma^+) = \sigma^+ + \sum_n \varepsilon_n (\sigma^+)^n$.

S_p es un ejemplo de lo que llamamos una teoría de campos conforme (TCC ≡ CFT) en 2 dimensiones. Las teorías conformes son también importantes en $d>2$ dimensiones (p.ej., las teorías de campos bien definidas se reducen a una CFT a ultra-altas energías, y frecuentemente se reducen a CFT a ultra-bajas energías). Pero en $d>2$, la dimensión del grupo conforme es solo $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$. [6:05/03/13]

El caso $d=2$ es especial, y la simetría conforme se vuelve entonces una herramienta muy poderosa.

Para hacerla manifiesta y aprovecharla más fácilmente, conviene hacer un nuevo cambio de

notación, para pasar a coordenadas complejas en la hoja de mundo:

convenciones difieren de Polchinski

$$w \equiv \sigma^2 + i\sigma^1 \quad (= i(\tau+\sigma) = i\sigma^+)$$
$$\bar{w} \equiv \sigma^2 - i\sigma^1 \quad (= i(\tau-\sigma) = i\sigma^-) \qquad \bar{w} = w^*$$

$$\longleftrightarrow \begin{cases} \sigma^2 = \frac{1}{2}(w+\bar{w}) \\ \sigma^1 = \frac{i}{2}(\bar{w}-w) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial_w = \frac{1}{2}(\partial_2 - i\partial_1) \quad , \quad \partial_{\bar{w}} = \frac{1}{2}(\partial_2 + i\partial_1) \, ,$$

$$g_{w\bar{w}} = \frac{\partial\sigma^1}{\partial w}\frac{\partial\sigma^1}{\partial\bar{w}}(1) + \frac{\partial\sigma^2}{\partial w}\frac{\partial\sigma^2}{\partial\bar{w}}(1) = \frac{1}{2} \, ,$$

$$g_{ww} = \frac{\partial\sigma^1}{\partial w}\frac{\partial\sigma^1}{\partial w}(1) + \frac{\partial\sigma^2}{\partial w}\frac{\partial\sigma^2}{\partial w}(1) = 0 \, ,$$

$$g_{\bar{w}\bar{w}} = \frac{\partial\sigma^1}{\partial\bar{w}}\frac{\partial\sigma^1}{\partial\bar{w}}(1) + \frac{\partial\sigma^2}{\partial\bar{w}}\frac{\partial\sigma^2}{\partial\bar{w}}(1) = 0 \, ,$$

fuera de la diagonal, justo como g_{+-}

$$d^2w \equiv dw\,d\bar{w} = \left|\frac{\partial(w,\bar{w})}{\partial(\sigma^1,\sigma^2)}\right| d\sigma^1 d\sigma^2 = 2\, \underbrace{d\sigma^1 d\sigma^2}_{d^2\sigma} \, .$$

La acción de Polyakov se reescribe entonces como

contracción con $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2w \, \partial_w X \cdot \partial_{\bar{w}} X \, .$$

Adoptaremos la notación $f(w,\bar{w})$ para una función

genérica, $f(w)$ para una función analítica / holomorfa y $f(\bar{w})$ para una función antianalítica / antiholomorfa.

Por ejemplo, la separación que teníamos antes en modos izquierdos y derechos adopta la forma

$$X^{\mu}(w,\bar{w}) = X^{\mu}(w) + \tilde{X}^{\mu}(\bar{w}) .$$

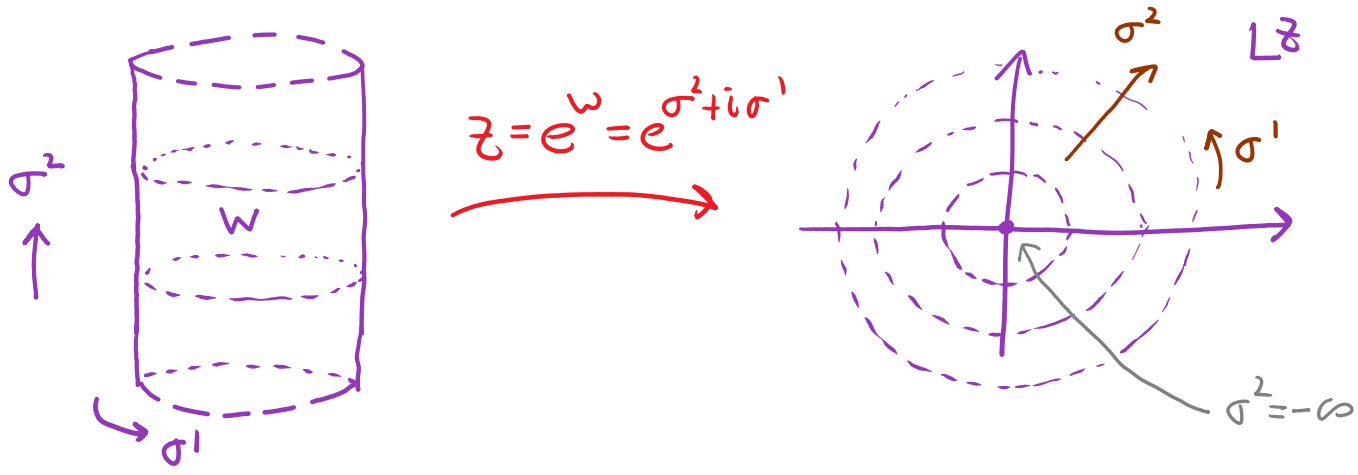
En este lenguaje, una transformación conforme corresponde a un mapeo analítico / holomorfo

$$w \to w' = w'(w) \quad , \quad \bar{w} \to \bar{w}'(\bar{w}) ,$$

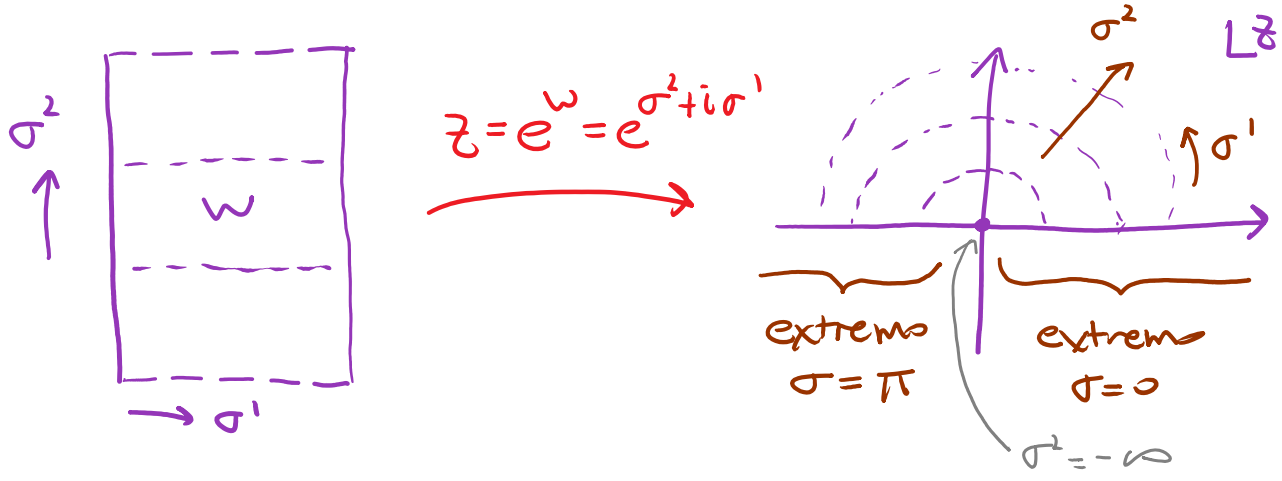
con $X^{\mu}(w,\bar{w}) \to X'^{\mu}(w',\bar{w}') = X^{\mu}(w,\bar{w})$ (escalar)

(y $S_p' = S_p$, por el mismo argumento de antes).

Nos convendrá, de hecho, cambiar de hoja de mundo por medio de una transformación conforme específica $z = e^{w}$, que para la cuerda cerrada tiene el efecto de mapear el cilindro (infinito) al plano complejo $\mathbb{C}$,



y para la cuerda abierta, mapea la tira (infinita) a la mitad superior del plano complejo,



Notar que las traslaciones en el tiempo σ^2 en la hoja de mundo original se convierten en reescalamientos en el plano complejo, así que lo que desde el punto de vista de w es el Hamiltoniano H, el generador de la evolución temporal, se reinterpreta en

z como el generador $\mathbb{D}$ de dilataciones $(z \to \lambda z)$. ($\lambda \in \mathbb{R}^+$)

Por esta razón, al cuantizar la teoría en el plano complejo coordinatizado con z, elegiremos imponer las relaciones de conmutación a $|z|$ constante (es decir, a σ^2 constante). Este procedimiento se conoce como **cuantización radial**.

La acción tiene por supuesto la misma forma que antes, que abreviaremos en lo sucesivo como

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \, \partial X \cdot \bar{\partial} X \quad ,$$

donde $\partial \equiv \partial_z$, $\bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}}$.

Al extremizarla, $\delta S_p / \delta X_\mu = 0$, obtenemos la ecuación de movimiento

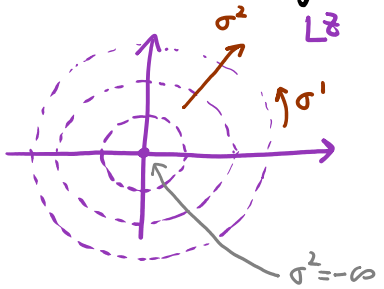
$$\partial \bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z}) = 0 \qquad \text{Laplace/ondas},$$

que nos informa de inmediato que $\partial X^\mu(z)$ es analítica, y $\bar{\partial} X^\mu(\bar{z})$ antianalítica.

Esto nos permite desarrollar a estos funciones en una expansión de Laurent (no puramente de Taylor, por el carácter singular que tiene el origen $z=0$):

$$\partial X^\mu(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}},$$

$$\bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^{n+1}}.$$



Términos con $n>0$, $n<0$ corresponden a frecuencias positivas/negativas en el lenguaje original, $e^{\mp i\omega t}$

Integrando, obtenemos entonces

$$X^\mu(z,\bar{z}) = X^\mu(z) + \tilde{X}^\mu(\bar{z}), \quad \text{con}$$

$$X^\mu(z) = \frac{1}{2}x^\mu + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(-\alpha_0^\mu \ln z + \sum_{n\neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n z^n}\right),$$

$$\tilde{X}^\mu(\bar{z}) = \frac{1}{2}x^\mu + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(-\tilde{\alpha}_0^\mu \ln \bar{z} + \sum_{n\neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{n \bar{z}^n}\right).$$

Es fácil verificar que esta expansión de Laurent coincide perfectamente con la expansión de Fourier que dedujimos para la cuerda cerrada en la p. 155.

Igual que antes, para la cuerda cerrada la condición de periodicidad

$$X^\mu(e^{2\pi i} z, e^{-2\pi i}\bar{z}) = X^\mu(z,\bar{z})$$

nos obliga a tener $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu$.

LP: 04/04/23

Para adquirir algo de práctica con estas variables complejas, repetiremos ahora la deducción de la carga de Noether asociada a traslaciones espaciotemporales (pp. 151-2).

Bajo $X^\mu(z,\bar{z}) \longrightarrow X^\mu(z,\bar{z}) + \epsilon^\mu(z,\bar{z})$ tenemos

$$\delta S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z \left(\partial X^\mu \bar{\partial}\epsilon_\mu + \partial\epsilon_\mu \bar{\partial} X^\mu\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int d^2z \left[\underbrace{\left(\frac{i}{\alpha'}\partial X^\mu\right)}_{\equiv J_z^\mu}\bar{\partial}\epsilon_\mu + \partial\epsilon_\mu \underbrace{\left(\frac{i}{\alpha'}\bar{\partial}X^\mu\right)}_{\equiv J_{\bar{z}}^\mu}\right]$$

$\uparrow$ dejando fuera, por convención

$$\overset{\text{partes}}{=} -\frac{1}{2\pi i}\int d^2z \left(\bar{\partial} J_z^\mu + \partial J_{\bar{z}}^\mu\right)\epsilon_\mu(z,\bar{z}) = 0$$

$\uparrow$ si usamos la ec. de movimiento para $X^\mu(z,\bar{z})$

$\Rightarrow$ $(J_z^\mu, J_{\bar z}^\mu)$ son D corrientes conservadas en la hoja de mundo,

$$\underbrace{\bar\partial J_z^\mu}_{\propto \partial X^\mu} + \underbrace{\partial J_{\bar z}^\mu}_{\propto \bar\partial X^\mu} = 0 \,.$$

← Así se ve el enunciado $\partial_a J^{\mu a} = g^{ab}\partial_a J_b^\mu = 0$ en estas coordenadas

LB: 06/09/21

Podemos notar que, en este caso, es posible de hecho definir 2 (x D) corrientes respectivamente analítica/antianalítica que se conservan por separado:

$$j^\mu \equiv (J_z^\mu, 0) = \frac{i}{\alpha'}\partial X^\mu \,, \quad \tilde j^\mu \equiv (0, J_{\bar z}^\mu) = \frac{i}{\alpha'}\bar\partial X^\mu$$

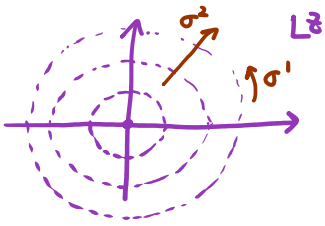
satisfacen

$$\bar\partial j^\mu = 0 \,, \quad \partial \tilde j^\mu = 0 \,.$$

Sabemos que la carga conservada es el momento espaciotemporal. Usando ← p. 171

$$J_\tau^\mu = i J_{\sigma^2}^\mu = i(J_w^\mu + J_{\bar w}^\mu)$$

$$\overset{z=e^w}{=} i(z J_z^\mu + \bar z J_{\bar z}^\mu) \,, \quad \text{esto es}$$



$$P^\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma \, \frac{J_\tau^\mu}{2\pi i} = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma'}{2\pi} \left(z J_z^\mu + \bar{z} J_{\bar{z}}^\mu \right) ,$$

↑ por normalización elegida (p.176)

y dado que $z = e^{\sigma^2 + i\sigma'} \Rightarrow dz = iz\, d\sigma'$,

$\bar{z} = e^{\sigma^2 - i\sigma'} \Rightarrow d\bar{z} = -i\bar{z}\, d\sigma'$,

$$P^\mu = \frac{1}{2\pi i} \oint \left(dz\, J_z^\mu - d\bar{z}\, J_{\bar{z}}^\mu \right)$$

↑ indica sentido de z (opuesto a $\bar{z}$)

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint \left(dz\, j^\mu - d\bar{z}\, \tilde{j}^\mu \right) .$$

Recordando ahora que $\partial X^\mu(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}}$

$$j^\mu \equiv J_z^\mu = \frac{i}{\alpha'} \partial X^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}} ,$$

$$\tilde{j}^\mu \equiv J^\mu = \frac{i}{\alpha'} \bar{\partial} X^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^{n+1}} ,$$

tenemos entonces

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \left(\oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}} - \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \frac{\tilde{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^{n+1}} \right) .$$

↳ quiere decir que contorno $\bar{z}$ es ⏱

Y usando el teorema de Cauchy, nos quedamos por último con el residuo de los polos simples ($n=0$),

$$p^\mu = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \left(\alpha_0^\mu + \tilde{\alpha}_0^\mu \right) = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\, \alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\, \tilde{\alpha}_0^\mu ,$$

↑

en acuerdo con el resultado de la p.152 y 155.

Para una cuerda abierta asociada a una Dp-brana extendida a lo largo de $x^1, \dots, x^p$, las condiciones de borde son

$$\begin{cases} \partial_\sigma X^\alpha \big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \iff \partial X^\alpha(z)\big|_{z=\bar{z}} = \bar{\partial} X^\alpha(\bar{z})\big|_{z=\bar{z}} \\ \quad \leftarrow i(\partial_w - \partial_{\bar{w}}) = i(\partial z - \bar{\partial}\bar{z}) \\ \partial_\tau X^i \big|_{\sigma=0,\pi} = 0 \iff \partial X^i(z)\big|_{z=\bar{z}} = -\bar{\partial} X^i(\bar{z})\big|_{z=\bar{z}} \\ \quad \leftarrow i(\partial_w + \partial_{\bar{w}}) = i(\partial z + \bar{\partial}\bar{z}) \end{cases}$$

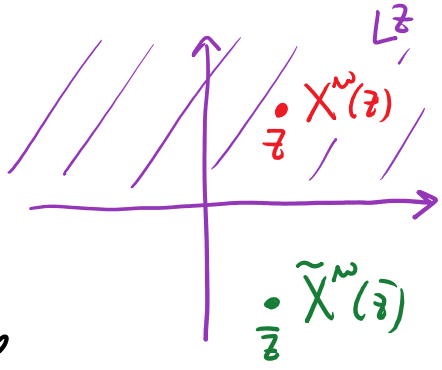
($\alpha = 0, \dots, p$; $i = p+1, \dots, D-1$)

Usando las expansiones de Laurent de la p.175, esto implica igual que antes

$$\alpha_n^\alpha = \tilde{\alpha}_n^\alpha \,, \quad \alpha_n^i = -\tilde{\alpha}_n^i \quad \forall\, n \,,$$

de modo que en lugar de ondas viajeras tenemos ondas estacionarias.

Una manera conveniente de reexpresar esta conexión es implementar las condiciones de frontera a través de lo que en electro llamamos el método de imágenes, y en cuerdas se llama usualmente el truco de duplicación ("doubling trick"). Comenzando con $X^\mu(z)$ definido en la mitad superior del plano, y $\tilde{X}^\mu(\bar{z})$ en la mitad inferior, extendemos $X^\mu(z)$ al plano entero definiendo

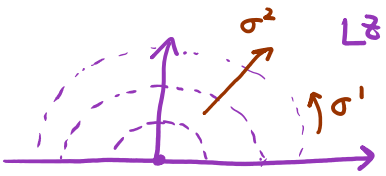


$$X^\alpha(\bar{z}) \equiv +\tilde{X}^\alpha(\bar{z}) \,, \quad X^i(\bar{z}) \equiv -\tilde{X}^i(\bar{z}) \,.$$

Esto es justo equivalente a $\alpha_n = \pm\tilde{\alpha}_n$

Las condiciones de borde $\partial X^\alpha(z)\big|_{z=\bar{z}} = \bar{\partial}\tilde{X}^\alpha(\bar{z})\big|_{z=\bar{z}}$,

$\partial X^i(z)\big|_{z=\bar z} = -\bar\partial \tilde X^i(\bar z)\big|_{z=\bar z}$ se traducen entonces simplemente en el enunciado de que $\partial X^\mu(z)$ sea una función Continua ($X^\mu(z)$ diferenciable) al cruzar el eje real $z=\bar z$.



Podemos notar que en este caso

$$p^\alpha = \int_0^\pi d\sigma\, \frac{J_\tau^\alpha}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint dz\, J_z^\alpha - \oint d\bar z\, J_{\bar z}^\alpha\right)$$

$\frac{i}{\alpha'}\partial X^\alpha(z)$ $\qquad$ $\frac{i}{\alpha'}\bar\partial \tilde X^\alpha(\bar z)$

y dado que

$$-\oint d\bar z\, \bar\partial \tilde X^\alpha(\bar z) \overset{\bar z = e^{\sigma^2 - i\sigma'}}{=} +i\int_0^\pi d\sigma'\, e^{\sigma^2 - i\sigma'}\, \partial X^\alpha\left(e^{\sigma^2 - i\sigma'}\right)$$

$\partial X^\alpha(\bar z)$ por truco de duplicación

$$\overset{\sigma'' \equiv 2\pi - \sigma'}{=} i\int_\pi^{2\pi} d\sigma''\, e^{\sigma^2 + i\sigma''}\, \partial X^\alpha\left(e^{\sigma^2 + i\sigma''}\right),$$

$\oint dz'$ $\qquad$ $\partial X^\alpha(z')$

podemos reescribir

$$p^\alpha = \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, \frac{i}{\alpha'}\partial X^\alpha(z) = \frac{\alpha_0^\alpha}{\sqrt{2\alpha'}}.$$

$\partial X^\alpha(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}\sum_n \frac{\alpha_n^\alpha}{z^{n+1}}$

Concluimos entonces que para la cuerda abierta

$$X^\alpha(z,\bar z) = x^\alpha - i\alpha' p^\alpha \ln|z|^2 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^\alpha}{n}\left(z^{-n}+\bar z^{-n}\right)$$

$$X^i(z,\bar z) = c^i + 0 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{n\neq 0}\frac{\alpha_n^i}{n}\left(z^{-n}-\bar z^{-n}\right),$$

expresión que naturalmente coincide con la que teníamos en la p. 167.

—

Avancemos ahora hacia la cuantización de la cuerda.

Para cuantizar canónicamente, promovemos

$$X^\mu(\tau,\sigma),\ \Pi_\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'}\partial_\tau X_\mu(\tau,\sigma) \longrightarrow \hat X^\mu(\tau,\sigma),\ \hat\Pi_\mu(\tau,\sigma),$$

e imponemos las relaciones de conmutación a τ constante

$$\left[\hat X^\mu(\tau,\sigma), \hat\Pi_\nu(\tau,\sigma')\right] = i\,\delta^\mu_\nu\,\delta(\sigma-\sigma'),$$

o lo que es lo mismo,

$$\left[\hat{X}^\mu(\tau,\sigma),\, \partial_\tau \hat{X}^\nu(\tau,\sigma')\right] = i\,2\pi\alpha'\,\eta^{\mu\nu}\,\delta(\sigma-\sigma').$$

Como es de esperarse, esto implica que los coeficientes

$$x^\mu,\ p^\mu,\ \alpha_n^\mu,\ \tilde{\alpha}_n^\mu \longrightarrow \hat{x}^\mu,\ \hat{p}^\mu,\ \hat{\alpha}_n^\mu,\ \hat{\tilde{\alpha}}_n^\mu$$

satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{x}^\mu,\ \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \quad \leftarrow \text{grados de libertad de partícula}$$

$$[\hat{\alpha}_m^\mu,\ \hat{\alpha}_n^\nu] = m\,\delta_{m,-n}\,\eta^{\mu\nu}$$

$$[\hat{\tilde{\alpha}}_m^\mu,\ \hat{\tilde{\alpha}}_n^\nu] = m\,\delta_{m,-n}\,\eta^{\mu\nu}$$

$$\Big\} \quad [\hat{a}_m^\mu,\ \hat{a}_n^{\dagger\nu}] = 2\pi\,\delta_{m,n}\,\eta^{\mu\nu}$$

(ver p. 155)

Verificaremos esto explícitamente en la Tarea 2.

Como ya habíamos mencionado, en las coordenadas $z, \bar{z}$ lo anterior equivale a hacer cuantización radial, donde las relaciones de conmutación se imponen a $|z|$ constante.

Con estos operadores podemos construir el espacio de Hilbert completo, comenzando con

← eigenestado de $\hat{p}^\mu$ (para tener energía definida)

$|0,p\rangle$

↑ estado base de los infinitos osciladores $\hat{\alpha}^\mu_n$, $\tilde{\hat{\alpha}}^\mu_n$ $\forall \mu, n$

(aniquilado por $\hat{\alpha}^\mu_{n>0}$, $\tilde{\hat{\alpha}}^\mu_{n>0}$)

y actuando con los operadores de creación $\hat{\alpha}^\mu_{-n}$, $\tilde{\hat{\alpha}}^\mu_{-n}$. ($n>0$)

Recordemos por supuesto que, entre todos estos estados, solo serán físicos aquellos que satisfagan las constricciones a nivel cuántico, que básicamente tomarán la forma

$$\sim \hat{T}_{ab}(\tau,\sigma)\,|\text{físico}\rangle = 0 \qquad \forall \tau,\sigma .$$

(Pero, ver más adelante.)

↑ 2 componentes independientes ↑ número infinito de condiciones

Podemos además calcular correladores

$$\langle 0|\mathcal{T}\{\hat{X}^{\mu_1}(\tau_1,\sigma_1)\cdots\hat{X}^{\mu_N}(\tau_N,\sigma_N)\}|0\rangle ,$$

($p^\mu = 0$)

↑ orden temporal

que, en virtud de que la teoría en la hoja de mundo es libre, quedan determinados por completo una vez que obtengamos el propagador (≡ función de correlación de 2 puntos)

$$\langle 0 | T\{ \hat{X}^\mu(\tau,\sigma)\, \hat{X}^\nu(\tau',\sigma') \} | 0 \rangle ,$$

o, en coordenadas complejas,

$$\langle 0 | R\{ \hat{X}^\mu(z,\bar{z})\, \hat{X}^\nu(z',\bar{z}') \} | 0 \rangle .$$

↑ orden radial (campos valuados en puntos más lejanos del origen aparecen más a la izquierda)

Pero nosotros, en el resto del curso, preferiremos aprender a llevar a cabo este tipo de cálculos en cuantización por integral de trayectoria.

En ese contexto, las $X^\mu(z,\bar{z})$ son funciones ordinarias, no operadores, y sumamos sobre todas ellas en la integral $\int \mathcal{D} X^\mu(z,\bar{z})$, sin restringirnos a aquéllas que satisfacen la ecuación de movimiento. Esto pone en riesgo la definición de los coeficientes x^μ, p^μ, α_n^μ, $\tilde{\alpha}_n^\mu$, que en la descripción canónica figuraban en la expansión de la solución más general a la ecuación de movimiento.

Pero una propiedad importante es que, dentro de

lunes, 11 de marzo de 2013 08:44 p.m.

la integral funcional, la ecuación de movimiento sí se satisface "en promedio", lo cual es de hecho indispensable para que exista el contacto que ya encontramos con el formalismo canónico (p. 84):

$$\langle 0|\, R\{\hat{O}_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\hat{O}_N(z_N,\bar{z}_N)\}\,|0\rangle$$

(|z| aumenta hacia la izquierda; ec. de mov. es relevante aquí)

$$= \frac{\int \mathcal{D}X\; O_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots O_N(z_N,\bar{z}_N)\, e^{-S[X]}}{\int \mathcal{D}X\; e^{-S[X]}}$$

(funcionales locales construidas con X^μ y/o sus derivadas)

$$\equiv \frac{\langle O_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots O_N(z_N,\bar{z}_N)\rangle}{\langle 1\rangle}$$

ec. de mov. debe ser relevante aquí también

Concretamente, tenemos

$$0 = \int \mathcal{D}X\; \frac{\delta}{\delta X^\mu(z,\bar{z})}\left(e^{-S[X]}\, O_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots O_N(z_N,\bar{z}_N)\right)$$

$$0 = \int \mathcal{D}X \left(- \underbrace{\frac{\delta S}{\delta X^\mu(z,\bar z)}}_{\frac{1}{2\pi\alpha'}\partial\bar\partial X^\mu(z,\bar z)} \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_N + \underbrace{\frac{\delta \mathcal{O}_1(z_1,\bar z_1)}{\delta X^\mu(z,\bar z)}}_{\propto \delta^{(2)}(z-z_1)} \mathcal{O}_2 \cdots \mathcal{O}_N + \ldots \right) e^{-S[X]},$$

p.ej. $\dfrac{\delta X^\nu(z_1,\bar z_1)}{\delta X^\mu(z,\bar z)} = \delta^\nu_\mu \delta^{(2)}(z-z_1)$

es decir, se cumplen las ecuaciones de Schwinger-Dyson

$$\partial\bar\partial \langle X^\mu(z,\bar z)\mathcal{O}_1(z_1,\bar z_1)\cdots\mathcal{O}_N(z_N,\bar z_N)\rangle = \underbrace{\sum_{r=1}^{N} \underbrace{\langle \mathcal{O}_1 \cdots \frac{\delta \mathcal{O}_r}{\delta X_\mu} \cdots \mathcal{O}_N\rangle}_{\propto \delta^{(2)}(z-z_r)}}_{\text{"términos de contacto"}}$$

de modo que

$$\partial\bar\partial \langle X^\mu(z,\bar z)\mathcal{O}_1(z_1,\bar z_1)\cdots\mathcal{O}_N(z_N,\bar z_N)\rangle = 0 \quad \text{si } z \neq z_r \ \forall r.$$

Este es el sentido en el cual la ecuación de movimiento se cumple dentro de la integral de trayectoria.

19:11/04/22

Usando esta propiedad, podemos desarrollar

$$\partial X^\mu(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}}, \quad \bar\partial X^\mu(\bar z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde\alpha_n^\mu}{\bar z^{n+1}},$$

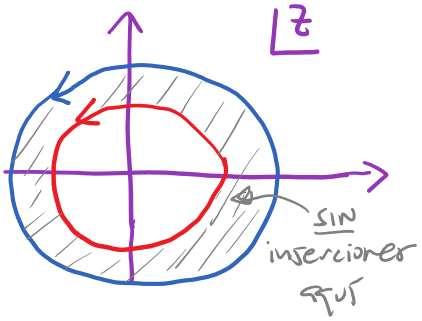
dentro de $\langle\ \rangle$. Equivalentemente, podemos definir

$$\alpha_n^\mu \equiv i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\oint \frac{dz}{2\pi i} z^n \partial X^\mu(z) \,,$$

$$\tilde{\alpha}_n^\mu \equiv -i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^n \bar{\partial} X^\mu(\bar{z})$$

dentro de la integral funcional sobre todas las X^μ.

Por Cauchy, estas integrales dan el mismo resultado para cualquier contorno que incluya al origen, y en particular, para 2 círculos $|z| = e^{\sigma^2}$ y $|z'| = e^{\sigma'^2}$ con $\sigma^2 \neq \sigma'^2$.



Es decir, α_n^μ y $\tilde{\alpha}_n^\mu$ son independientes del tiempo $\sigma^2 = i\tau$, o lo que es lo mismo, son cargas conservadas.

Esto en realidad es obvio: los α's y $\tilde{\alpha}$'s son los coeficientes de Laurent/Fourier de los campos X^μ, y son independientes del tiempo $\tau \leftrightarrow |z|$ como consecuencia de la ecuación de movimiento. (Lo mismo aplica para los coeficientes a, a^* en la expansión del campo de KG.)

Ahora, ¿cómo determinaríamos aquí las relaciones de conmutación entre las α's, $\tilde{\alpha}$'s, que son simples

números?

Nos conviene primero calcular el propagador

$$\langle X^\mu(z_1,\bar z_1)\, X^\nu(z_2,\bar z_2)\rangle \equiv \int \mathcal{D}X \; X^\mu(1) X^\nu(2)\, e^{-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\, \partial X\cdot\bar\partial X}$$

$$\overset{\text{partes}}{=} -\frac{1}{2}\int d^2z\, X\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{\pi\alpha'}\partial\bar\partial\right)}_{\equiv \Delta_z} X$$

LQ: 08/04/21

Esta integral es análoga (idéntica) a la integral múltiple

$$\int dx_1\, dx_2 \cdots dx_N \; x_n\, x_{n'}\, \exp\left[-\sum_{m,m'} x_m \Delta_{mm'} x_{m'}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial J_n}\frac{\partial}{\partial J_{n'}}\left[\underbrace{\int dx_1\cdots dx_N\; e^{-\sum_{m,m'} x_m \Delta_{mm'} x_{m'} + \sum_m x_m J_m}}_{\text{Integral gaussiana (que sabemos hacer completando el cuadrado)}}\right]_{J_m = 0\ \forall m}$$

De igual forma, podemos agregar aquí un término fuente $\int d^2z\, J_\mu(z,\bar z) X^\mu(z,\bar z)$, para reescribir

↑ una fuente lineal para cada campo

$$\langle X^\mu(1) X^\nu(2) \rangle = \int \mathcal{D}X \; X^\mu(1) X^\nu(2) \, e^{-\frac{1}{2}\int d^2z \, X\cdot\Delta_z X}$$

$$= \frac{\delta}{\delta J_\mu(1)} \frac{\delta}{\delta J_\nu(2)} \Big[\underbrace{\int \mathcal{D}X \, e^{-\frac{1}{2}\int d^2z \, X\cdot\Delta_z X + \int d^2z \, J\cdot X}}_{\equiv Z[J]} \Big]_{J=0}$$

$z_1, \bar{z}_1$ $\quad$ $z_2, \bar{z}_2$ $\quad$ funcional generatriz

Para completar el cuadrado, definimos

$$X^\mu(z,\bar{z}) = Y^\mu(z,\bar{z}) + \int d^2z' \, \Delta^{-1}(z,\bar{z};z',\bar{z}') \, J^\mu(z',\bar{z}'),$$

con Δ^{-1} la función de Green que satisface

$$\Delta_z \Delta^{-1}(z,\bar{z};z',\bar{z}') = \delta^{(2)}(z-z') .$$

$\Longrightarrow \Delta_z \left(\int d^2z' \Delta^{-1}(z,\bar{z};z',\bar{z}') J^\mu(z',\bar{z}') \right) = J^\mu(z,\bar{z})$

solución a la ec. de mov. con fuente

Tenemos entonces

$$-\frac{1}{2}\int d^2z \, X\cdot\Delta_z X = -\frac{1}{2}\int d^2z \, Y\cdot\Delta_z Y$$

$$-\frac{1}{2}\int d^2z \, Y\cdot \underbrace{\Delta_z \int d^2z' \, \Delta^{-1}_{z'} J_{z'}}_{J(z,\bar{z})} - \frac{1}{2}\int d^2z \underbrace{\int d^2z' \, \Delta^{-1}_{z'} J_{z'} \cdot \Delta_z Y}_{J(z,\bar{z})}$$

partes

$$-\frac{1}{2}\int d^2z \int d^2z' \, \Delta^{-1}_{z'} J_{z'} \cdot \underbrace{\Delta_z \int d^2z'' \, \Delta^{-1}_{z''} J_{z''}}_{J(z,\bar{z})}$$

es decir, $X^w = Y^w + \int d^2z' \Delta^{-1} J$

$$-\frac{1}{2}\int d^2z\, X\cdot\Delta_g X = -\frac{1}{2}\int d^2z\, Y\cdot\Delta_g Y - \int d^2z\, Y\cdot J - \frac{1}{2}\int d^2z\, d^2z'\, \underset{z}{J}\cdot\Delta^{-1}\underset{z'}{J}$$

y además (se cancelan; se suman)

$$\int d^2z\, J\cdot X = \int d^2z\, J\cdot Y + \int d^2z\, J\cdot\int d^2z'\,\Delta^{-1}\underset{z'}{J},$$

de modo que

$$\int d^2z\left(-\frac{1}{2}X\cdot\Delta_g X + J\cdot X\right) = -\frac{1}{2}\int d^2z\, Y\cdot\Delta_g Y \quad \leftarrow \text{no hay ya término lineal en } Y$$

$$+\frac{1}{2}\int d^2z\, d^2z'\, J(z,\bar z)\cdot\Delta^{-1}(z,\bar z;z',\bar z')J(z',\bar z').$$

Con esto concluimos que

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}X\, e^{-\frac{1}{2}\int X\cdot\Delta_g X + \int J\cdot X}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\iint J\cdot\Delta^{-1}J}\underbrace{\int \mathcal{D}Y\, e^{-\frac{1}{2}\int Y\cdot\Delta_g Y}}_{\text{Ya hemos usado } \mathcal{D}X^w = \mathcal{D}Y^w}$$

$$\equiv \langle 1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\,\Delta_g}}\right)^D \quad (p.108)$$

y por tanto

$$\langle X^\mu(1) X^\nu(2) \rangle = \frac{\delta}{\delta J_\mu(1)} \frac{\delta}{\delta J_\nu(2)} Z[J] \Big|_{J=0}$$

$$= \frac{\delta}{\delta J_\mu(1)} \frac{\delta}{\delta J_\nu(2)} \left[\underbrace{\exp\left(\tfrac{1}{2} \int d^2z\, d^2z'\, J(z) \cdot \Delta^{-1}(z,z') J(z') \right)}_{1 + \frac{1}{2} \int d^2z\, d^2z'\, J(z) \cdot \Delta^{-1}(z,z') J(z') + \dots} \right]_{J=0} \langle 1 \rangle$$

$$\frac{\delta J_\lambda(z)}{\delta J_\nu(z_2)} = \delta^\nu_\lambda \, \delta^{(2)}(z - z_2) \quad \text{(análogo a } \frac{\partial J_n}{\partial J_m} = \delta_{n,m} \text{)}$$

$$= \eta^{\mu\nu} \Delta^{-1}(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2) \langle 1 \rangle \, .$$

↑ ignorar por ahora (constante)

Este es un resultado muy conocido en teoría cuántica de campos: el propagador libre es la función de Green asociada al operador diferencial en la parte cuadrática de la acción.

Podríamos haber llegado a la misma conclusión mucho más rápido observando que

$$0 = \int \mathcal{D}X \, \frac{\delta}{\delta X_\mu(z_1, \bar{z}_1)} \left[e^{-S[X]} X^\nu(z_2, \bar{z}_2) \cdots \right]$$

↑ posibles inserciones en $z_\nu \neq z_1$

$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z\, \partial X \cdot \bar{\partial} X$

$$0 = \int \mathcal{D}X \left(\frac{1}{\pi\alpha'} \partial\bar{\partial} X^\mu(z_1,\bar{z}_1)\, X^\nu(z_2,\bar{z}_2) + \eta^{\mu\nu}\, \delta^{(2)}(z_1 - z_2) \right) e^{-S} \cdots ,$$

es decir, podemos sacar las derivadas de $\int \mathcal{D}X$

$$\underbrace{-\frac{1}{\pi\alpha'}\partial_1\bar{\partial}_1}_{\equiv \Delta_{z_1}} \langle X^\mu(1) X^\nu(2) \cdots \rangle = \eta^{\mu\nu}\, \delta^{(2)}(z_1 - z_2) \langle \cdots \rangle .$$

nuevamente, ec. de Schwinger-Dyson, p. 187

En el caso sin más inserciones, $\cdots = 1$, esto coincide con lo que obtuvimos arriba: el propagador es la función de Green.

De la discusión usual del campo de Klein-Gordon, calculemos explícitamente el propagador en espacio de momentos (p. 16):

$$-\underbrace{(\partial_{\sigma^1}^2 + \partial_{\sigma^2}^2)}_{4|z|^2\partial\bar{\partial}} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{e^{\overbrace{ip\cdot(\sigma-\sigma')}^{p^1(\sigma^1-\sigma'^1)+p^2(\sigma^2-\sigma'^2)}}}{\underbrace{p^2}_{(p^1)^2+(p^2)^2} - i\epsilon} = \underbrace{\delta^{(2)}(\sigma-\sigma')}_{2|z|^2\delta^{(2)}(z-z')} .$$

A nosotros nos será directamente útil la expresión en espacio de posiciones,

$$\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{e^{ip\cdot(\sigma-\sigma')}}{p^2} \sim \ln|\sigma-\sigma'|^2 .$$

por análisis dimensional

Podemos mostrar directamente que

$$\partial\bar{\partial}\ln|z|^2 = \partial\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \bar{\partial}\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi\,\delta^{(2)}(z)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{=0 \text{ para } z\neq 0}$$

usando el teorema de Gauss / Stokes / Green

$$\int_R dx\,dy\,(\underbrace{\partial_x v^x + \partial_y v^y}_{\partial_a v^a}) = \oint_{\partial R}(\underbrace{v^x dy - v^y dx}_{ds\, n_a v^a}),$$

que en coordenadas complejas $z \equiv x+iy$, $\bar{z}\equiv x-iy$ dice que

$$\int_R d^2z\,(\partial_z v^z + \partial_{\bar{z}} v^{\bar{z}}) = i\oint_{\partial R}(v^z d\bar{z} - v^{\bar{z}} dz).$$

← indica dirección de contorno en z (opuesto a la dirección en $\bar{z}$)

Tenemos entonces

$$\int d^2z\,\partial\underbrace{\bar{\partial}\ln|z|^2}_{\frac{1}{\bar{z}}\equiv v^z\ (v^{\bar{z}}=0)} \overset{\text{Gauss}}{=} i\oint d\bar{z}\,\frac{1}{\bar{z}} = i(-2\pi i) = 2\pi,$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\overset{?}{=} 2\pi\,\delta^{(2)}(z)}$$ ✓

lo cual confirma el resultado prometido.

$\frac{1}{2\pi}\partial\bar{\partial}\ln|z|^2 = \delta^{(2)}(z)$ $\qquad \Delta_z = -\frac{1}{\pi\alpha'}\partial\bar{\partial}$

Sabemos pues que $\Delta^{-1}(z;z') = -\frac{\alpha'}{2}\ln|z-z'|^2$,

y por tanto

17:12/03/13

$$\boxed{\langle X^\mu(z,\bar{z})\, X^\nu(z',\bar{z}')\rangle = -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z-z'|^2 < 1 > .}$$

Para todo lo sucesivo, nos será muy conveniente definir el orden normal conforme (en orden temporal/radial, dentro de $\int \mathcal{D}X$)

$$:X^\mu(z,\bar{z})\,X^\nu(z',\bar{z}'): \equiv X^\mu(z,\bar{z})\,X^\nu(z',\bar{z}') + \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z-z'|^2$$

↑ restamos el propagador

(que como veremos después, está relacionado con el orden normal usual — de operadores de creación/aniquilación — en el formalismo canónico).

Con esta definición tenemos en automático

$$\langle :X^\mu(z,\bar{z})\,X^\nu(z',\bar{z}'): \rangle = 0 .$$

Por otro lado,

$$\langle :X^\mu(z,\bar{z})\,X^\nu(z',\bar{z}'):\cdots\rangle \neq 0 \quad \text{en general, pero}$$

$$\partial\bar{\partial}\langle : X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(z',\bar{z}') : \cdots \rangle$$

↑ inserciones en $z_r \neq z$

$$\equiv \underbrace{\partial\bar{\partial}\langle X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(z',\bar{z}') \cdots \rangle}_{\text{p. 193}} + \underbrace{\partial\bar{\partial}\left\langle \frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu} \ln|z-z'| \cdots \right\rangle}_{}$$

$$\overset{\text{p. 193}}{=} -\pi\alpha'\eta^{\mu\nu}\delta^{(2)}(z-z')\langle\cdots\rangle \qquad \pi\alpha'\eta^{\mu\nu}\delta^{(2)}(z-z')\langle\cdots\rangle$$

$$= 0 .$$

El hecho de que $\langle : X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(z',\bar{z}') : \cdots \rangle$ es una función que satisface la ecuación de Laplace con respecto a z (y también z') implica que (la diferencia de la función $\langle X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(z',\bar{z}') \cdots \rangle$) es la suma de una parte analítica y una antianalítica, y podemos desarrollarla alrededor de $z = z'$:

$$\langle : X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(z',\bar{z}') : \cdots \rangle = \langle : \underbrace{X^\mu(z',\bar{z}') X^\nu(z',\bar{z}')}_{\equiv X^\mu X^\nu(z',\bar{z}')} : \cdots \rangle$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z')^n}{n!} \langle : \partial^n X^\mu X^\nu(z',\bar{z}') : \cdots \rangle$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\bar{z}-\bar{z}')^n}{n!} \langle : \bar{\partial}^n X^\mu X^\nu(z',\bar{z}') : \cdots \rangle .$$

Nótese que esta es una expansión de Taylor, no de Laurent, pues de otro modo no sería solución a Laplace en $z = z'$.

Con esto vemos en particular que

$$\lim_{z \to z'} \langle : X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(z',\bar{z}') : \cdots \rangle = \langle : X^\mu X^\nu(z',\bar{z}') : \cdots \rangle$$

es No singular, a diferencia de $\lim_{z \to z'} \langle X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(z',\bar{z}') \cdots \rangle$.

En conjunto, tenemos entonces la expansión (válida dentro de funciones de correlación)

$$X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(z',\bar{z}') = -\frac{\alpha'}{2} \ln|z-z'| + :X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(z',\bar{z}'):$$

$$= -\frac{\alpha'}{2} \ln|z-z'| + :X^\mu X^\nu(z',\bar{z}'):$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ (z-z')^n :\partial^n X^\mu X^\nu(z',\bar{z}'): + (\bar{z}-\bar{z}')^n :\bar{\partial}^n X^\mu X^\nu(z',\bar{z}'): \right\}.$$

Este es un ejemplo particular de un concepto más general en teoría de campo: la expansión del producto de operadores (Epo ≡ OPE),

$$\mathcal{O}_i(z,\bar{z}) \mathcal{O}_j(z',\bar{z}') \xrightarrow[z \to z']{} \sum_k f_{ij}^k(z-z', \bar{z}-\bar{z}') \mathcal{O}_k(z',\bar{z}').$$

En el caso general, se trata solo de una expansión asintótica

(se vuelve mejor y mejor conforme $|z-z'|\to 0$, aunque no converge cuando $z\neq z'$); pero en teoría de campos conformes de hecho converge (con un radio de convergencia dado por la distancia a la inserción más cercana).

Para tener estas mismas propiedades en el producto de 3 o más operadores (funciones) locales, el orden normal se debe definir por analogía con el teorema de Wick, que relaciona los productos en orden temporal (el cual es automático implementado por la integral funcional) y normal (en el sentido usual, de $\hat{a}$'s y $\hat{a}^\dagger$'s):

$$X^{\omega_1}(1)\cdots X^{\omega_n}(n) = :X^{\omega_1}(1)\cdots X^{\omega_n}(n):$$

$$+ :\overbrace{X^{\omega_1}(1)X^{\omega_2}(2)}X^{\omega_3}(3)\cdots X^{\omega_n}(n): + \text{otros términos con 1 contracción}$$

$$\text{Contracción} \equiv -\frac{\alpha'}{2}\eta^{\omega_1\omega_2}\ln|z_1-z_2|^2 \quad \text{(propagador)}$$

$$+ :\overbrace{X^{\omega_1}(1)X^{\omega_2}(2)}\overbrace{X^{\omega_3}(3)X^{\omega_4}(4)}X^{\omega_5}(5)\cdots : + \text{términos con 2 contracciones}$$

10.13/05/21

$$+ \text{términos con } \geq 3 \text{ contracciones}.$$

(Más formalmente, para cualquier funcional $F[X]$, podemos escribir

$$F[X]\ \exp\left(-\frac{\alpha'}{4}\int d^2z\, d^2z'\, \ln|z-z'|^2\, \frac{\delta}{\delta X^\mu(z,\bar z)}\,\frac{\delta}{\delta X_\mu(z',\bar z')}\right) :F[X]: .)$$

Con esto podemos calcular cualquier Fpo. P.ej.,

$$:\partial X\cdot\partial X(z): \partial' X^\mu(z') = :\partial X\cdot\partial X(z)\,\partial' X^\mu(z'):$$

$:\partial X\cdot\partial X(z):$: operador compuesto local

$$+ :\partial X^\nu \partial X_\nu(z)\partial' X^\mu(z'): + :\partial X_\nu \partial X^\nu(z)\partial' X^\mu(z'):$$

Ídem

$$\partial\partial'\left(-\tfrac{\alpha'}{2}\eta^{\nu\mu}\ln|z-z'|^2\right):\partial X_\nu(z):$$

$$-\tfrac{\alpha'}{2}\eta^{\nu\mu}\,\partial\left(-\frac{1}{z-z'}\right)$$

$$\frac{1}{(z-z')^2}$$

Notar que el término $:\partial X\cdot\partial X(z)\,\partial' X^\mu(z'):$ No se agrega, porque ya está incluido en $:\partial X\cdot\partial X:$

$$= -\alpha'\frac{1}{(z-z')^2}\,:\partial X^\mu(z): + :\partial X\cdot\partial X(z)\,\partial' X^\mu(z'):$$

↑ desarrollar en Taylor alrededor de $z=z'$

$$= -\frac{\alpha'}{(z-z')^2}\partial X^\mu(z') - \frac{\alpha'}{(z-z')}\partial^2 X^\mu(z') + \begin{matrix}\text{términos finitos}\\ \text{cuando } z\to z'\end{matrix}.$$

Como veremos en la Tarea 2, se puede mostrar similarmente que

$$:e^{ik\cdot X(z,\bar z)}::e^{ik'\cdot X(z',\bar z')}:$$

$$= :e^{ik\cdot X(z,\bar z)}\, e^{ik'\cdot X(z',\bar z')}: \underbrace{\exp\left[i^2 k\cdot k'\left(-\frac{\alpha'}{2}\ln|z-z'|^2\right)\right]}_{|z-z'|^{-\alpha' k\cdot k'}}.$$

Ir a 13/09/23

En la formulación canónica podemos definir de la manera usual el orden normal de creación/aniquilación, que en este curso denotaremos

$:\ :$ ≡ colocar los operadores de creación $\hat\alpha^\mu_{-m}$ a la izquierda de los de aniquilación $\hat\alpha^\nu_n$ $(\forall m,n>0)$ y $\hat x^\mu$ a la izquierda de $\hat p^\mu$.

En la Tarea 2 confirmaremos también que las 2 definiciones de orden normal coinciden (es decir, $::=:\ :$) para nuestra teoría $S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\,\partial X\cdot\bar\partial X$ (no necesariamente

para otras teorías), en las coordenadas $z, \bar{z}$ (pero no, p.ej., en $w, \bar{w}$).

Podemos regresar ahora a la pregunta de la p. 188: ¿cómo calcular las relaciones de conmutación en el formalismo de la integral de camino?

Usando la conexión con el orden temporal/radial (p. 186) y la definición $\alpha_m^\mu = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \partial X^\mu(z)$ (p. 188), tenemos

$$[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = \langle 0 | [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] | 0 \rangle$$

$$= \int \mathcal{D}X \, e^{-S[X]} \left(\alpha_m^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_m^\mu \alpha_n^\nu \right) / \langle 1 \rangle$$

(α_m^μ: calculado en $|z|$ con $|z| > |z'|$; α_n^ν: en $|z'|$; α_m^μ: en $|z|$ con $|z| < |z'|$; α_n^ν: en $|z'|$)

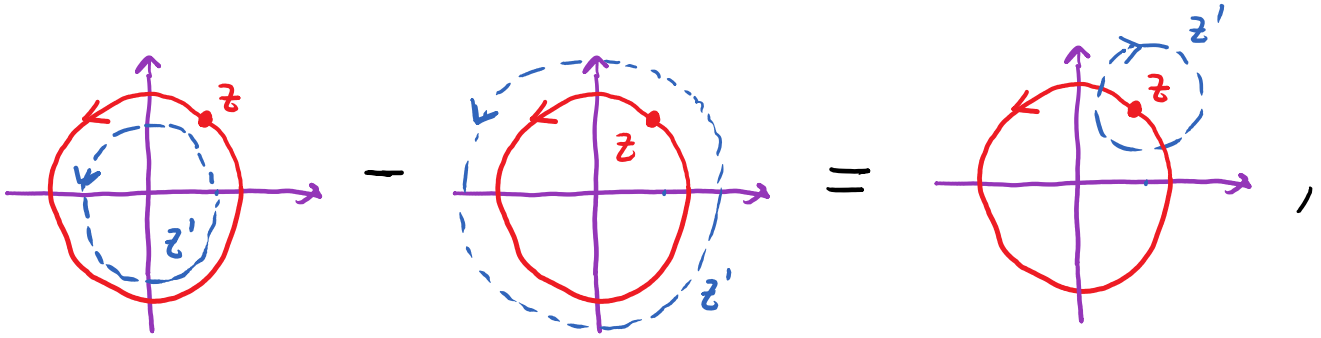
$$= -\frac{2}{\alpha'} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \left\{ \oint_{|z'|=|z|-\varepsilon} \frac{dz'}{2\pi i} - \oint_{|z'|=|z|+\varepsilon} \frac{dz'}{2\pi i} \right\} z'^n \underbrace{\langle \partial X^\mu(z) \partial' X^\nu(z') \rangle}_{= \partial\partial' \langle X^\mu(z,\bar{z}) X^\nu(z',\bar{z}') \rangle}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu} \ln|z-z'|^2}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\frac{1}{(z-z')^2}}$$

p. 197

Dado que



lo anterior equivale a

$$[\hat{\alpha}^{\mu}_{m}, \hat{\alpha}^{\nu}_{n}] = -\frac{2}{\alpha'}\oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m} \left\{ -\oint_{|z'-z|=\epsilon} \frac{dz'}{2\pi i}\, z'^{n} \left(-\frac{\alpha'}{2}\, \frac{\eta^{\mu\nu}}{(z-z')^2} \right) \right\}$$

$$z'^{n} = z^{n} + n z^{n-1}(z'-z) + \cdots$$

$$\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu} \oint \frac{dz}{2\pi i} \underbrace{\oint_{|z'-z|=\epsilon} \frac{dz'}{2\pi i} \left(\frac{z^{n}}{(z-z')^2} + \frac{n z^{n-1}}{z-z'} + \cdots \right)}_{n z^{n-1}}$$

$$= -n\,\eta^{\mu\nu} \underbrace{\oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{m+n-1}}_{\delta_{m,-n}} ,$$

es decir,

$$[\hat{\alpha}^{\mu}_{m}, \hat{\alpha}^{\nu}_{n}] = m\,\eta^{\mu\nu}\,\delta_{m,-n}\,, \qquad \leftrightarrow\ [\hat{a}^{\mu}_{m}, \hat{a}^{\dagger\nu}_{n}] = 2\pi\,\delta_{m,n}\,\eta^{\mu\nu}$$

tal como afirmamos en la p. 183. ✓

Este resultado se puede resumir en términos más generales: si $Q_i \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} J_i(z)$ $i=1,2,\ldots$ son cargas conservadas (como lo eran las α's – ver p. 188), al repetir el argumento anterior se encuentra que

$$[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] = \oint \frac{dz_j}{2\pi i} \operatorname*{Res}_{z_i \to z_j} J_i(z_i)\, J_j(z_j)\,.$$

$\equiv$ coeficiente del término $\frac{1}{z_i - z_j}$ en la EPO

Lo que vimos para las α's es un caso particular de esta fórmula, con $\alpha^{\mu}_{m} \leftrightarrow J^{\mu}_{m} = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\, z^m \partial X^{\mu}(z)$.

Podemos por cierto deducir la simetría que generan

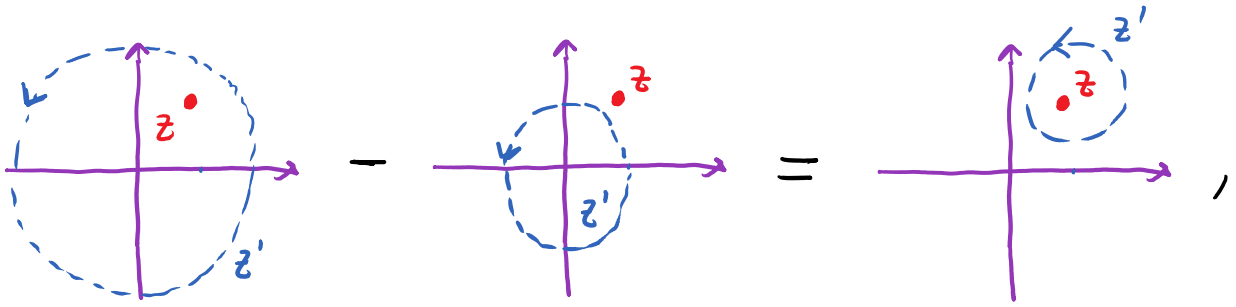
martes, 12 de marzo de 2013 11:51 a.m.

estas cargas conservadas (cargas de Noether): se trata de $X^\mu \to X^\mu + \delta X^\mu$, con

$$\delta X^\mu(z,\bar z) = i\epsilon_\nu \left[\alpha_m^\mu , X^\nu(z,\bar z)\right] ,$$

parámetro ↗ forma de variación

que usando nuevamente



se reescribe como

$$\delta X^\mu(z,\bar z) = i\epsilon_\nu \oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i} J_m^\mu(z') X^\nu(z,\bar z)$$

$$i\sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}}\, z'^m \partial' X^\mu(z')$$

$$= -\sqrt{\tfrac{2}{\alpha'}}\,\epsilon_\nu \oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i}\, z'^m \underbrace{\partial' X^\mu(z') X^\nu(z,\bar z)}_{\text{si estamos dentro de } \langle\ \rangle}$$

$$\partial'\left(-\tfrac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z'-z|^2\right)+\ldots$$

$$= z^m + \ldots \qquad -\frac{\alpha'}{2}\frac{\eta^{\mu\nu}}{z'-z}$$

$S_b \propto \int d^2z\, \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu \eta_{\mu\nu}$

$$= \sqrt{\frac{\pi'}{2}}\, \epsilon^\mu z^m \quad ,$$

que efectivamente es una simetría (conocíamos ya el caso particular $m=0$, generado por $\alpha_0^\mu \leftrightarrow p^\mu$).

Podemos ahora regresar a examinar en más detalle el espacio de Hilbert de nuestra teoría. Definimos el estado base $|0,k\rangle$ tal que

$$\alpha_n^\mu |0,k\rangle = 0 \quad \forall\ n>0 \ \text{y}\ \forall\ \mu$$

← omitimos gorros en operadores

(junto con la condición $\tilde{\alpha}_n^\mu |0,k\rangle = 0$, si estamos hablando de una cuerda cerrada), y

$$p^\mu |0,k\rangle = k^\mu |0,k\rangle .$$

Para estos estados, tomamos el producto interno usual

$$\langle 0,k|0,k'\rangle \equiv (2\pi)^D \delta^{(D)}(k-k') .$$

El espacio de Hilbert (espacio de Fock) completo se genera actuando repetidamente con los operadores de

creación α_{-n}^{μ} (y $\tilde{\alpha}_{-n}^{\mu}$) con $n>0$.

Recordando que $(\alpha_n^{\mu})^{\dagger} = \alpha_{-n}^{\mu}$ (p. 155), podemos notar de inmediato que existen estados con norma negativa, como p.ej. $\alpha_{-n}^{0}|0,k\rangle$ $(n>0)$:

$$|\alpha_{-n}^{0}|0,k\rangle|^2 = \langle 0,k|\underbrace{\alpha_n^0 \alpha_{-n}^0}|0,k\rangle = -n(2\pi)^D\delta^{(D)}(0).$$

$$[\alpha_n^0, \alpha_{-n}^0] = n\eta^{00}$$

Los estados de este tipo se conocen como fantasmas (en una de las 2 acepciones de este término dentro de la física teórica), y claramente son patológicos: ¡están asociados a probabilidades negativas!

El problema evidentemente se origina de tener a $X^0(z,\bar{z})$ en la descripción, lo cual fue necesario para preservar la covariancia bajo Lorentz. Sabemos que el precio que pagamos es tener una descripción redundante, donde la mayoría de los estados NO son físicos.

Para identificar a los estados que sí son físicos, nos

falta promover a nivel cuántico a las constricciones clásicas $T_{ab}=0$. Dado que $T^a{}_a=0$ por invariancia de Weyl (p. 139), éstas son solo 2 (x cc) constricciones, que en la norma plana $g_{ab}=\delta_{ab}$ toman la forma (p. 138)

$$T_{11} \propto \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \quad \text{y} \quad T_{01} \propto \dot{X}\cdot X' = 0 \quad \forall\, \sigma, \tau.$$

Dado que T_{ab} es la corriente de Noether asociada a la invariancia bajo traslaciones en la hoja de mundo, sabemos que se conserva, $\partial^a T_{ab}=0$. (Más en general, con una métrica arbitraria g_{ab}, la invariancia bajo difeos implica que T_{ab} se conserva covariantemente, $\nabla^a T_{ab}=0$.)

En coordenadas complejas $z, \bar{z}$ (tales que $g_{z\bar{z}}=\tfrac{1}{2}$), la nulidad de la traza equivale a $T_{z\bar{z}}=0$, y la conservación de T_{ab} se traduce entonces en

$$\bar{\partial} T_{zz} + \partial \cancel{T_{\bar{z}\bar{z}}}^{\,0} = 0 \quad \text{y} \quad \partial T_{\bar{z}\bar{z}} + \bar{\partial} \cancel{T_{z\bar{z}}}^{\,0} = 0.$$

Es decir,

$T(z) \equiv T_{zz}(z)$ es analítica, y $\tilde{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$ antianalítica.

Podemos entonces desarrollar estas funciones en series

$\partial X^\mu(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}}$

de Laurent (tal como hicimos antes para ∂X y $\bar{\partial} X$):

$$T(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad \longleftrightarrow \quad L_m \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} T(z)$$

$$\tilde{T}(\bar{z}) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{L}_n}{\bar{z}^{n+2}} \quad \longleftrightarrow \quad \tilde{L}_m \equiv -\oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^{m+1} \tilde{T}(\bar{z}) \,.$$

Hemos adoptado aquí una convención con $+2$ en el denominador, para cancelar el factor de z^2 ($\bar{z}^2$) que aparece al transformar $T_{zz} \to T_{ww}$ ($T_{\bar{z}\bar{z}} \to T_{\bar{w}\bar{w}}$). En las coordenadas originales, estas son simplemente expansiones de Fourier, tomando en cuenta que T_{++} (T_{--}) contiene solo modos izquierdos (derechos).

LU: 18/09/23

Los coeficientes/operadores L_n se conocen como **modos de Virasoro**, y nos dan una manera conveniente de listar nuestras construcciones: pedir que $T(z) = 0 \ \forall z$ equivale a pedir que $L_n = 0 \ \forall n$ (y similarmente para $\tilde{T}(\bar{z})$, $\tilde{L}_n$).

En el caso concreto de la teoría definida por S_p en la norma plana, se tiene (p. 138)

martes, 12 de marzo de 2013 01:45 p.m.

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} :\partial X \cdot \partial X(z): \quad , \quad \tilde{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'} :\bar{\partial} X \cdot \bar{\partial} X(\bar{z}):$$

↑ orden normal utilizado para definir el producto de 2 operadores en un mismo punto.

L11: 20/09/21

Justo como las α's y $\tilde{\alpha}$'s, las L_n y $\tilde{L}_n$ constituyen un número infinito de cargas conservadas (por Cauchy).

Resultan de integrar las corrientes de Noether (p.208)

$$J_n(z) \equiv z^{n+1} T(z) \qquad y \qquad \tilde{J}_n(\bar{z}) \equiv \bar{z}^{n+1} \tilde{T}(\bar{z})$$

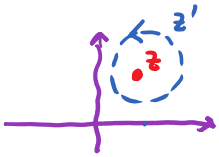
(que evidentemente se conservan por separado, $\bar{\partial} J_n = 0$, $\partial \tilde{J}_n = 0$, tanto como T y $\tilde{T}$ ($n=-1$) lo hacen).

Las transformaciones que generan son

$$X^\mu(z,\bar{z}) \to X^\mu(z,\bar{z}) + \delta X^\mu(z,\bar{z}) \,,$$

con

$$\frac{1}{\epsilon} \delta X^\mu(z,\bar{z}) = \left[L_n , X^\mu(z,\bar{z}) \right]$$



$$\frac{1}{\epsilon}\delta X^\mu(z,\bar z) = \underbrace{\left\{ \oint_{|z'|>|z|} \frac{dz'}{2\pi i} - \oint_{|z'|<|z|} \frac{dz'}{2\pi i} \right\}}_{\oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i}} \Big(z'^{\,n+1} \underbrace{T(z')\, X^\mu(z,\bar z)}_{-\frac{1}{\alpha'} :\partial' X\cdot\partial' X(z'):} \Big)$$

$$= -\frac{1}{\alpha'} \oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i}\, z'^{\,n+1} \underbrace{:\partial' X\cdot\partial' X(z'):\, X^\mu(z,\bar z)}_{\underbrace{2\partial'\left(-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\mu\nu}\ln|z-z'|^2\right):\partial' X_\nu(z'):}_{-\alpha'\frac{1}{z'-z}\partial X^\mu(z)+\dots} + \dots}$$

$z^{n+1} + \dots$

es decir,

$$\delta X^\mu(z,\bar z) = \epsilon\, z^{n+1}\, \partial X^\mu(z),$$

que (junto con $\delta X^\mu = \bar\epsilon\, \bar z^{n+1}\, \bar\partial X^\mu = \bar\epsilon\, [\tilde L_n, X^\mu]$)

es el cambio derivado de la transformación conforme

$$z \to z' = z + \epsilon\, z^{n+1}.$$

p.172: transformaciones conformes son los mapeos analíticos

(Más en general, $J_f(z) = f(z)\,T(z)$ es la corriente de

martes, 12 de marzo de 2013 02:13 p.m.

Noether asociada a la transformación conforme

$z \to z' = z + \epsilon f(z)$.)

L_n genera $z' = z + \epsilon z^{n+1}$

Vemos en particular que:

L_{-1} genera traslaciones $z' = z + b$ (lo cual concuerda con el hecho de que $J_{-1} = T(z)$), $\quad J_n(z) \equiv z^{n+1} T(z)$

L_0 genera dilataciones/rotaciones $z' = a z$,

o, para ser más precisos,

$L_0 + \tilde{L}_0$ genera dilataciones $z' = \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{R}_+$) (traslaciones en σ^2),

$L_0 - \tilde{L}_0$ genera rotaciones $z' = e^{i\theta} z$ ($\theta \in \mathbb{R}$) (traslaciones en σ'),

y L_1 genera las llamadas transformaciones conformes especiales $z' = \frac{z}{cz+1}$.

La composición de estas 3 transformaciones da lugar a la transformación más general

$$z \to z' = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

que es invertible solo si $ad-bc \neq 0$, y podemos por tanto ajustar $ad-bc=1$. La regla de composición de estas transformaciones corresponde justamente a la multiplicación de las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, así que L_{-1}, L_0 y L_1 (junto con $\tilde{L}_{-1}, \tilde{L}_0$ y $\tilde{L}_1$) generan un grupo isomorfo a $SL(2,\mathbb{C})$.

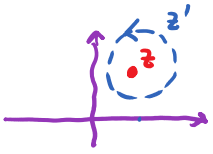
Este es de hecho el único subgrupo propio del grupo conforme en 2 dimensiones (la única colección de L_n's cuyos conmutadores cierran entre sí).

Dado que los L_n (y $\tilde{L}_n$) son los generadores de las transformaciones conformes, tiene mucho sentido que las constricciones $T_{ab}=0$ equivalgan a pedir que los modos de Virasoro aniquilen a los estados físicos ($L_n|fís\rangle = 0 = \tilde{L}_n|fís\rangle$), puesto que ello tiene como consecuencia que la física NO dependerá de nuestra elección del marco conforme (dado que $z \to z'(z)$ $\Longrightarrow |fís\rangle' \equiv \exp\left(\sum_n c_n L_n\right)|fís\rangle = |fís\rangle$).

Pero en este procedimiento, encontraremos una pequeña obstrucción: $[L_m, L_n]$ incluye un término constante, así que no sería consistente pedir que $L_n|fís\rangle = 0 \quad \forall n$.

Para entender mejor la interpretación de esta constante, nos conviene desarrollar un poco más de tecnología.

Notemos primero que, de forma similar a lo que vimos arriba para $X^\mu(z,\bar z)$, la manera como se comporta un operador (≡"campo") arbitrario $\mathcal{O}(z,\bar z)$ bajo transformaciones conformes está determinada por su EPO con $T(z)$ y $\tilde T(\bar z)$, a través de



$$\delta\mathcal{O}(z,\bar z) = -\epsilon[L_n, \mathcal{O}(z,\bar z)] - \bar\epsilon[\tilde L_n, \mathcal{O}(z,\bar z)]$$

$$= -\epsilon \oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i} z'^{n+1} T(z')\mathcal{O}(z,\bar z) - \bar\epsilon \oint_{|\bar z'-\bar z|=\delta} \frac{d\bar z'}{2\pi i} \bar z'^{n+1} \tilde T(\bar z')\mathcal{O}(z,\bar z)$$

$$= -\epsilon \operatorname*{Res}_{z'\to z} z'^{n+1} \underbrace{T(z')\mathcal{O}(z,\bar z)}_{\text{usar EPO}} - \bar\epsilon \operatorname*{Res}_{\bar z'\to \bar z} \bar z'^{n+1} \underbrace{\tilde T(\bar z')\mathcal{O}(z,\bar z)}_{\text{usar EPO}}.$$

lunes, 18 de marzo de 2013 12:02 p.m.

Nos convendrá tomar una base de operadores tales que

$$T(z')\mathcal{O}(0,0) = \ldots + \frac{h}{z'^2}\mathcal{O}(0,0) + \frac{1}{z'}\partial\mathcal{O}(0,0) + \ldots$$

$$\tilde{T}(\bar{z}')\mathcal{O}(0,0) = \ldots + \frac{\tilde{h}}{\bar{z}'^2}\mathcal{O}(0,0) + \frac{1}{\bar{z}'}\bar{\partial}\mathcal{O}(0,0) + \ldots$$

El término de orden $1/z'$ ($1/\bar{z}'$) implica que $L_n \equiv \oint \frac{dz'}{2\pi i} z'^{n+1} T(z')$

$$[L_{-1}, \mathcal{O}(0,0)] = \partial\mathcal{O}(0,0) \quad , \quad [\tilde{L}_{-1}, \mathcal{O}(0,0)] = \bar{\partial}\mathcal{O}(0,0) \, ,$$

lo cual expresa que bajo una traslación $z \to z' = z + b$ tenemos el resultado esperado $\mathcal{O}(0,0) \to \mathcal{O}'(b,\bar{b}) = \mathcal{O}(0,0)$,

y más en general,

$$\mathcal{O}(z,\bar{z}) \to \mathcal{O}'(z',\bar{z}') = \mathcal{O}(z,\bar{z}) \, .$$

El término de orden $1/z'^2$ ($1/\bar{z}'^2$) implica que

$$\boxed{[L_0, \mathcal{O}(0,0)] = h\,\mathcal{O}(0,0) \quad , \quad [\tilde{L}_0, \mathcal{O}(0,0)] = \tilde{h}\,\mathcal{O}(0,0)}$$

así que bajo dilatación/rotación $z \to z' = \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) tenemos

$$\mathcal{O}(0,0) \to \mathcal{O}'(0,0) = \lambda^{-h}\bar{\lambda}^{-\tilde{h}}\mathcal{O}(0,0) \, ,$$

← Esto es la especificación de nuestra base de $\mathcal{O}$s

y más en general,

$$\mathcal{O}(z,\bar{z}) \to \mathcal{O}'(z',\bar{z}') = \lambda^{-h}\,\bar{\lambda}^{-\tilde{h}}\,\mathcal{O}(z,\bar{z}) \quad .$$

Llamamos a $(h,\tilde{h})$ **los dimensiones (o pesos) conformes** de $\mathcal{O}$. Más específicamente,

$h+\tilde{h}$ es la **dimensión** de $\mathcal{O}$ (controla el comportamiento bajo **reescalamiento** $\leftrightarrow L_0+\tilde{L}_0$),

$h-\tilde{h}$ es el **espín** de $\mathcal{O}$ (controla el comportamiento bajo **rotaciones** $L_0-\tilde{L}_0$).

P.ej., es fácil comprobar que los pesos conformes de

X^μ son $(h=0,\ \tilde{h}=0)$, $\Longrightarrow$ $X^\mu(0,0)$ es invariante bajo dilataciones,

∂X^μ $(1,0)$, $\bar{\partial} X^\mu$ $(0,1)$,

$\partial^n X^\mu$ $(n,0)$, $\bar{\partial}^n X^\mu$ $(0,n)$,

$:e^{ik\cdot X}:$ $\left(\frac{\alpha' k^2}{4}, \frac{\alpha' k^2}{4}\right)$!! (ver Tarea 2).

En cualquier **teoría de campos conforme** (TCC ≡ CFT),

juegan un papel especial los llamados operadores primarios (o tensoriales), que bajo una transformación conforme arbitraria $z \to z'(z)$ transforman de acuerdo con

$$\mathcal{O}(z,\bar{z}) \longrightarrow \mathcal{O}'(z',\bar{z}') = (\partial_z z')^{-h} (\partial_{\bar{z}} \bar{z}')^{-\tilde{h}} \mathcal{O}(z,\bar{z}) \,.$$

Es decir, $\mathcal{O}$ transforma como si fuera un tensor de rango $h+\tilde{h}$, con h subíndices z y $\tilde{h}$ subíndices $\bar{z}$.

La versión infinitesimal de esta regla de transformación es que bajo $z \to z' = z + \epsilon f(z)$ se tiene

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{O}(z,\bar{z}) &\equiv \mathcal{O}'(z,\bar{z}) - \mathcal{O}(z,\bar{z}) \\ &= -\epsilon (h\partial f + f\partial)\mathcal{O}(z,\bar{z}) - \bar{\epsilon}(\tilde{h}\bar{\partial}\bar{f} + \bar{f}\bar{\partial})\mathcal{O}(z,\bar{z}) \,.\end{aligned}$$

Tomando $f(z) = z^{n+1}$, esto implica que

$$[L_n, \mathcal{O}(z,\bar{z})] = \left(h(n+1)z^n + z^{n+1}\partial\right)\mathcal{O}(z,\bar{z}) \,,$$

$$[\tilde{L}_n, \mathcal{O}(z,\bar{z})] = \left(\tilde{h}(n+1)\bar{z}^n + \bar{z}^{n+1}\bar{\partial}\right)\mathcal{O}(z,\bar{z}) \,,$$

y en particular,

lunes, 18 de marzo de 2013 12:57 p.m.

$$[L_n, \mathcal{O}(0,0)] = 0 = [\tilde{L}_n, \mathcal{O}(0,0)] \quad \forall\, n>0 \,.$$

Esto es equivalente a la EPO

$$T(z)\mathcal{O}(0,0) = 0 + \frac{h}{z^2}\mathcal{O}(0,0) + \frac{1}{z}\partial\mathcal{O}(0,0) + \dots$$

↑ No hay términos más singulares que z^{-2}

(y análogamente con $\tilde{T}(\bar{z})$).

Es fácil verificar, p.ej., que ∂X^μ y $:e^{ik\cdot X}:$ son primarios, pero $\partial^2 X^\mu$ no lo es.

Más en general, las derivadas $\partial^n \bar{\partial}^m \mathcal{O}$ de un operador primario $\mathcal{O}$ nunca son operadores primarios, y se conocen como descendientes de $\mathcal{O}$. Todos los operadores en una CFT se pueden expresar como combinaciones de los operadores primarios y sus descendientes.

LK: 20/09/23

Curiosamente, el propio tensor de energía-momento en la hoja de mundo, $T(z) = -\frac{1}{\alpha'}:\partial X\cdot\partial X:$, NO es un operador primario, es decir, NO es un tensor:

lunes, 18 de marzo de 2013 01:16 p.m.

$$\left(-\frac{1}{\alpha'}\right)^2 :\partial X\cdot\partial X(z): :\partial X\cdot\partial X(0):$$

$$T(z)T(0) = \frac{1}{\alpha'^2}\Big(2:\partial X\cdot\partial X(z)\,\partial X(0)\cdot\partial X(0):\; + 4:\partial X\cdot\partial X(z)\,\partial X\cdot\partial X(0):\; + \dots\Big)$$

$$\left(-\frac{\alpha'}{2}\frac{1}{z^2}\right)^2 \underbrace{\eta^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}}_{\delta^\mu_\mu = D}$$

$$-\frac{\alpha'}{2}\frac{1}{z^2}:\partial X(z)\cdot\partial X(0):$$

$$:\partial X\cdot\partial X(0): + z:\partial^2 X\cdot\partial X(0): + \dots$$

$$= \frac{D}{2z^4} + \frac{2}{z^2}\left(-\frac{1}{\alpha'}\right):\partial X\cdot\partial X(0): + \frac{2}{z}\left(-\frac{1}{\alpha'}\right):\partial^2 X\cdot\partial X(0): + \dots$$

$$L_n \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{n+1} T(z)$$

es decir, (operador identidad; tensor bajo dilataciones, con $h=2$ (resultado esperado para $T \equiv T_{zz}$))

$$T(z)T(0) = \frac{D}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0) + \dots$$

$[L_2, T(0)] \neq 0$; tensor bajo traslaciones

$\Rightarrow T$ no es primario

En una teoría conforme arbitraria, se tiene

$$T(z')T(z) = \frac{c}{2(z'-z)^4} + \frac{2}{(z'-z)^2}T(z) + \frac{1}{(z'-z)}\partial T(z) + \dots$$

$\left(\text{y } \tilde{T}(\bar{z}')\tilde{T}(\bar{z}) = \frac{\tilde{c}}{2(\bar{z}'-\bar{z})^4} + \dots\right)$, con c (y $\tilde{c}$) un

Si $c \neq 0$, $T(z)$ NO es primario

número conocido como la carga central de la teoría.

Hemos aprendido entonces que en la teoría que nos ocupa, $S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\, \partial X \cdot \bar{\partial} X$, la carga central es

$$\boxed{c = D = \tilde{c}}\ .$$

En general, el valor de c nos da una indicación del número de campos (~grados de libertad) en la teoría.

La EPO de T con T implica que bajo $z \to z + \epsilon f(z)$ (que corresponde a la corriente de Noether $j(z') = i f(z') T(z')$) se tiene

$$\delta T(z) = -\epsilon\left(\frac{c}{12}\partial^3 f(z) + 2\partial f(z) T(z) + f(z)\partial T(z)\right)$$

(que es la transformación más general que es lineal en f y con 3 subíndices z). La versión finita de esta transformación resulta ser

factor esperado para tensor con peso $h=2$

$$T'(z') = (\partial_z z')^{-2}\left[T(z) - \frac{c}{12}\mathbb{D}_z z'\right],$$

donde

lunes, 18 de marzo de 2013 01:55 p.m.

también denotada $\{z', z\}$

$$\mathbb{D}_z z' \equiv \frac{\partial_z^3 z'}{\partial_z z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial_z^2 z'}{\partial_z z'}\right)^2$$

se conoce como la derivada Schwarziana.

La regla de composición de $T(z)$ al transformar $z \to z' \to z''$ implica que la derivada Schwarziana satisface

$$\mathbb{D}_z z'' = \mathbb{D}_z z' + (\partial_z z')^2 \mathbb{D}_{z'} z''.$$

Así que (si $c \neq 0$) $T(z)$ NO transforma como tensor bajo transformaciones conformes arbitrarias, sino solo bajo aquellas que satisfacen $\mathbb{D}_z z' = 0$. Estas resultan ser precisamente las transformaciones $SL(2,\mathbb{C})$ que mencionamos en la p. 212,

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con} \quad ad-bc=1.$$

Por esta razón, T es lo que se conoce como un operador cuasi-primario.

(Por supuesto, T_{ab} SÍ es un tensor bajo reparametrizaciones — conformes o no —, porque ahí la métrica SÍ cambia.)

12: 22/09/21

En particular, bajo $w \to z = e^w$, tenemos $\mathbb{D}_w z = -1/2$, así que

$$z^2 T_{zz}(z) = T_{ww}(w) + \frac{c}{24}.$$

De aquí se puede ver que los modos de Fourier originales $T_{ww} \equiv \sum_n T_n e^{-nw}$ ($w = \sigma^2 + i\sigma^1$) y los de Laurent $T_{zz} \equiv \sum_n L_n / z^{n+2}$ se relacionan a través de

$$T_n = L_n - \frac{c}{24}\delta_{n,0} \quad ,$$

así que el Hamiltoniano original (generador de traslaciones en σ^2) en realidad es

$$H \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma^1}{2\pi} T_{22} = T_0 + \tilde{T}_0 = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c+\tilde{c}}{24} \quad .$$

T_{22}: en hoja de mundo; $T_{ww} + T_{\bar{w}\bar{w}}$; $L_0 + \tilde{L}_0$: generador de Dilataciones ⓓ; $\frac{c+\tilde{c}}{24}$: ojo

Notar por cierto que, dado que

$$T_{\tau\tau} = -T_{ww} - T_{\bar{w}\bar{w}} = T_{\sigma\sigma} \quad \text{y} \quad T_{\sigma\tau} = -T_{ww} + T_{\bar{w}\bar{w}} \text{ son}$$

hermíticos, sabemos que $T_{ww} = \sum_n T_n e^{-ni(\tau+\sigma)}$ es hermítico, y por tanto $T_n^\dagger = T_{-n} \leftrightarrow L_n^\dagger = L_{-n}$.

En coordenadas complejas $z = e^{\sigma^2 + i\sigma^1}$, tenemos entonces

$$[T(z)]^\dagger = \sum_n \frac{L_n^\dagger}{\bar{z}^{n+2}} = \sum_n \frac{L_{-n}}{\bar{z}^{n+2}} \overset{n\to -n}{=} \sum_n \frac{L_n}{\bar{z}^{-n+2}} = \bar{z}^{-4} T(1/\bar{z}).$$

primario bajo $SL(2,\mathbb{C})$

Más en general, para un operador cuasiprimario (>primario) $\mathcal{O}(z,\bar{z})$, definimos

$$\left[\mathcal{O}(z,\bar{z})\right]^\dagger = \bar{z}^{-2h}\, z^{-2\tilde{h}}\, \mathcal{O}\left(\frac{1}{\bar{z}},\frac{1}{z}\right) .$$

↑ inversión $z \to 1/z$ necesaria para cambiar el signo enfrente de $\sigma^2 = i\tau$

En términos de la expansión en modos

$$\mathcal{O}(z,\bar{z}) \equiv \sum_{m,n} \frac{\mathcal{O}_{m,n}}{z^{m+h}\,\bar{z}^{n+\tilde{h}}} ,$$

esto equivale a $\mathcal{O}^\dagger_{m,n} = \mathcal{O}_{-m,-n}$. Un operador analítico (antianalítico) $\mathcal{O}$ ($\tilde{\mathcal{O}}$) es un caso particular con solo $n=0$ ($m=0$): $\mathcal{O}(z) = \sum_m \frac{\mathcal{O}_m}{z^{m+h}} \Rightarrow \mathcal{O}^\dagger_m = \mathcal{O}_{-m}$.

↑ usamos entero $h=1$ para $\partial X(z)$, $h=2$ para $T(z)$

A partir de la EPO (p. 218)

$$T(z_1)T(z_2) = \frac{c}{2(z_1-z_2)^4} + \frac{2}{(z_1-z_2)^2}T(z_2) + \frac{1}{z_1-z_2}\partial T(z_2) + \dots$$

podemos deducir de inmediato el conmutador entre los modos de Virasoro,

$$[L_m, L_n] = \overset{p.203}{\oint} \frac{dz_2}{2\pi i} \operatorname{Res}_{z_1 \to z_2} z_1^{m+1} T(z_1)\, z_2^{n+1} T(z_2)$$

polo cuádruple

$$\uparrow z_2^{m+1} + (m+1) z_2^{m} (z_1 - z_2) + \frac{1}{2}(m+1)m\, z_2^{m-1}(z_1-z_2)^2 + \frac{1}{3!}(m+1)m(m-1) z_2^{m-2}(z_1-z_2)^3 + \dots$$

$$T(z_1)T(z_2) = \frac{c}{2(z_1-z_2)^4} + \frac{2}{(z_1-z_2)^2} T(z_2) + \frac{1}{z_1-z_2}\partial T(z_2) + \dots$$

$$\frac{c}{2}\frac{1}{3!}(m+1)m(m-1) z_2^{m+n-1} + 2(m+1) z_2^{m+n+1} \underbrace{T(z_2)}_{\sum_k \frac{L_k}{z_2^{k+2}}} + z_2^{m+n+2} \underbrace{\partial T(z_2)}_{\sum_k \frac{-(k+2)L_k}{z_2^{k+3}}}$$

$$= \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m,-n} + 2(m+1)L_{m+n} - (m+n+2)L_{m+n},$$

es decir, obtenemos la llamada álgebra de Virasoro

$$\boxed{[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12} m(m^2-1)\delta_{m,-n}}$$

Álgebra de Witt — "Extensión central"

(Y análogamente para los $[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n]$, usando $\tilde{c}$.)

lunes, 18 de marzo de 2013 08:11 p.m.

Aquí podemos ver, en particular, que L_{-1}, L_0, L_{+1} efectivamente forman una subálgebra (sin extensión central) es decir, sus conmutadores cierran entre sí.

En la teoría que nos interesa,

$$L_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} \left(-\frac{1}{\alpha'}\right) \underbrace{:\partial X \cdot \partial X(z):}_{\left(-i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\right)^2 \sum_{n,k} \frac{1}{z^{n+k+2}} :\alpha_n \cdot \alpha_k:}$$

al total, $z^{m+1-n-k-2}$ ⇒ pol. simple cuando $k=m-n$

resulta en

$$\boxed{L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha_n \cdot \alpha_{m-n}:}$$.

Hemos dicho ya que, para esta teoría y en el marco conforme z, el orden normal conforme $: \; :$ coincide con el orden normal de creación/aniquilación $\circ \; \circ$.

Podemos notar que, incluso si hubiera habido una diferencia entre $: \; :$ y $\circ \; \circ$ (como la hay, p.ej., en el marco conforme w), tenemos $[\alpha_n, \alpha_{m-n}] = 0 \; \forall n$ si $m \neq 0$, así que reemplazar $: \; :$ con $\circ \; \circ$ u otra convención

de ordenamiento en la definición de L_m no ocasionaría diferencia alguna si $m \neq 0$. Pero para $m=0$, en general, podríamos tener una distinta constante de orden,

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} {}^{\circ}_{\circ} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} {}^{\circ}_{\circ} + A^X$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n>0} \alpha_{-n}\cdot\alpha_n + A^X$$

← resulta ser $=0$ en la convención aquí adoptada, $T\alpha : \partial X \partial X :$

$\frac{\alpha' p^2}{4}$ p.179 $\equiv N$ llamado convencionalmente el operador de número (aunque en realidad es el Hamiltoniano

en el caso de la cuerda cerrada ($\alpha' p^2$ en abierta) p.182

$N = \sum_{n<0} |n| a_n^{\dagger} \cdot a_n$)

$\varepsilon_n = |p'|$

Podemos verificar que $A^X = 0$ usando el conmutador $[L_1, L_{-1}] = 2L_0$ para notar que

$$A^X |0;0\rangle = L_0 |0;0\rangle = \frac{1}{2} L_1 L_{-1} |0;0\rangle - \frac{1}{2} L_{-1} L_1 |0;0\rangle$$

osciladores p^N

$\frac{1}{2}\sum_n {}^{\circ}_{\circ} \alpha_n \cdot \alpha_{1-n} {}^{\circ}_{\circ}$ $\quad$ $\frac{1}{2}\sum_n {}^{\circ}_{\circ} \alpha_n \cdot \alpha_{1-n} {}^{\circ}_{\circ}$

L8: 19/03/13

$= 0 - 0$. ✓

Podemos por fin regresar a la pregunta de cómo imponer las constricciones a nivel cuántico. Dado que tenemos $c=D\neq 0$, NO podemos identificar a los estados físicos pidiendo simplemente que

$$T(z)\,|fís\rangle = 0 \quad \forall\, z \quad \longleftrightarrow \quad L_n\,|fís\rangle = 0 \quad \forall\, n,$$

porque esto contradiría el álgebra de Virasoro,

$$[L_n, L_{-n}] = 2nL_0 + \frac{c}{12}(n^3-n).$$

L13: 25/04/23

Pero lo que en realidad nos interesa es asegurar que T_{ab} se anule dentro de los elementos de matriz,

$$\langle fís\,|\,\underbrace{T(z)}_{\sum_n L_n/z^{n+2}}\,|\,fís'\rangle = 0 \quad \forall\, z,\ \forall\, |fís\rangle, |fís'\rangle \text{ físicos},$$

← NO solo en valores esperados $|fís'\rangle = |fís\rangle$

y usando $L_n^\dagger = L_{-n}$, vemos que esto se logra si imponemos las condiciones de estado físico

$$L_n\,|fís\rangle = 0 \quad \forall\ n>0 \qquad \Longrightarrow \langle fís|\,L_{-n} = 0$$

$$(L_0 - a)\,|fís\rangle = 0$$

(y similarmente, $\tilde{L}_{n>0}\,|fís\rangle = 0 = (\tilde{L}_0 - \tilde{a})\,|fís\rangle$),

donde a (y $\tilde{a}$) es una posible constante de orden (necesaria por generalidad, después de que hemos elegido trabajar en el marco conforme z y definido $T(z)$ usando el orden normal $: \; :$).

Como consecuencia de esta definición, el conjunto de estados físicos forma un subespacio vectorial del espacio de Hilbert completo, $\mathcal{H}_{fís} \subset \mathcal{H}$.

Podemos notar además que un estado del tipo

$$|\psi\rangle \equiv L_{-n}|\chi\rangle$$

$n>0$ → ← cualquier estado

es en automático ortogonal a todos los estados físicos,

$$\langle fís|\psi\rangle = \langle fís|L_{-n}|\chi\rangle = 0 \quad \forall\, |fís\rangle \in \mathcal{H}_{fís}.$$

Esto es lo que se conoce como un estado espurio.

Si un estado es espurio y físico, entonces es ortogonal a sí mismo, es decir, tiene norma cero:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|L_{-n}|\chi\rangle = 0.$$

Lo llamamos un estado nulo. Si existen en $\mathcal{H}_{fís}$

estados nulos, debemos tener presente que

$|fís\rangle$ y $|fís\rangle + |nulo\rangle$ ← redundancia en nuestra descripción

son físicamente equivalentes, puesto que dan el mismo resultado al tomar su producto interno con cualquier estado físico. ⟹ sumar $|nulo\rangle$ es una invariancia de norma

Para expresar esto, definimos formalmente una

relación de equivalencia

$$|fís\rangle \simeq |fís'\rangle \quad \text{si} \quad |fís\rangle - |fís'\rangle = \sum_i L_{-n_i} |\chi_i\rangle$$

($n_i > 0$; $|nulo\rangle$)

o, usando las relaciones de conmutación,

si $|fís\rangle - |fís'\rangle = L_{-1}|\chi_1\rangle + L_{-2}|\chi_2\rangle$.

El espacio de Hilbert que en realidad nos interesa en este procedimiento de cuantización covariante antigua (CCA) es entonces finalmente el conjunto de clases de equivalencia

$$\mathcal{H}_{CCA} \equiv \frac{\mathcal{H}_{fís}}{\mathcal{H}_{nulo}} = \{ |fís\rangle \text{ sujetos a } \simeq \}.$$

(Se tiene una historia muy similar (Gupta - Bleuler) al cuantizar el campo de Maxwell en la norma de Lorentz.)

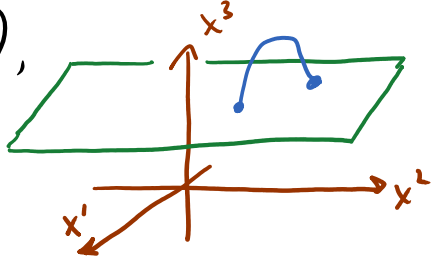
Apliquemos ahora este procedimiento para obtener el espectro de la cuerda. Consideraremos primero el caso de la cuerda abierta (≡ excitación de una D-brana), que es más sencillo porque hay un solo conjunto de modos.

En efecto, sabemos ya (p. 167, 180) que las condiciones de Neumann y Dirichlet asociadas a una Dp-brana,

$$\partial X^\alpha = \bar\partial X^\alpha \quad \forall\, z=\bar z \qquad (\alpha = 0,\dots,p),$$

$$\partial X^i = -\bar\partial X^i \quad \forall\, z=\bar z \qquad (i = p+1,\dots,D-1),$$

(si $p=D-1$, cuerda puede moverse por todo el espacio)



implican que

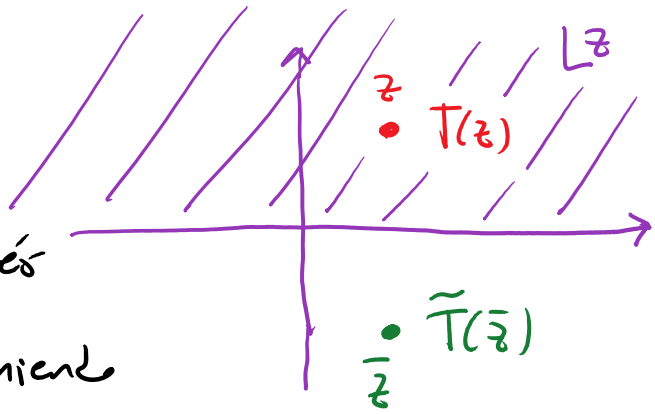
$$\alpha_n^\alpha = \tilde\alpha_n^\alpha, \qquad \alpha_n^i = -\tilde\alpha_n^i \quad \forall\, n.$$

Podemos notar además que estas mismas condiciones tienen como consecuencia que

$$T(z)\Big|_{z=\bar z} = -\frac{1}{\alpha'} :\partial X\cdot\partial X(z): = -\frac{1}{\alpha'} :\bar\partial X\cdot\bar\partial X(\bar z): = \tilde T(\bar z)\Big|_{z=\bar z}$$

es decir,

$$L_n = \tilde{L}_n \quad \forall\, n .$$



Esta conexión se puede implementar nuevamente a través del truco de duplicación, definiendo

$T(\bar{z}) \equiv \tilde{T}(\bar{z})$, de modo que nos quedamos con una sola función $T(z)$ definida sobre todo el plano complejo, que es continua al cruzar el eje real $z = \bar{z}$.

De la mano de esto, tenemos un solo conjunto de modos de Virasoro (análogamente a $\alpha_m^\mu \leftrightarrow z^m \partial X^\mu$),

$$L_n \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint \left(dz\, z^{n+1} T(z) - d\bar{z}\, \bar{z}^{n+1} \tilde{T}(\bar{z}) \right)$$

ver p.181

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint dz\, z^{n+1} T(z)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha_n \cdot \alpha_{m-n}: \quad ,$$

p.224

que usaremos para imponer las condiciones de estado físico.

En particular,

$$L_0 = \underbrace{\frac{1}{2}\alpha_0^2}_{\alpha' p^2} + \underbrace{\sum_{n>0} \alpha_{-n}\cdot\alpha_n}_{\equiv N}$$

p. 182

$\alpha' p^2 \sim p^\alpha p_\alpha$

p^α = energía y momento espacial del centro de masa de la cuerda ($p^i = 0$)

N "operador de número" satisface

$$[N, \alpha_{-m}^\mu] = m\,\alpha_{-m}^\mu$$

(porque $\alpha_{-n}\cdot\alpha_n = n\, a_{-n}^\dagger a_n$),

así que la constricción

$$(L_0 - a)\,|fís\rangle = 0$$

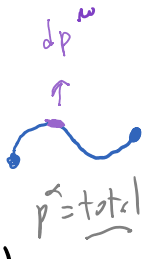
no es otra cosa que la condición de capa de masa

$$m^2 \equiv -p^2 = \frac{N-a}{\alpha'} \qquad N = 0, 1, 2, \ldots$$

válida para los operadores y sus eigenvalores

Esto es análogo a la partícula relativista, donde teníamos una sola constricción, que era justamente $(p^2 + m^2)\,|fís\rangle = 0$.

Así que, dependiendo de la manera en que esté vibrando la cuerda (valor de N), tendrá una cierta masa m (de entre un conjunto infinito pero discreto de posibilidades),



tal como si fuera una partícula relativista. Es decir, su energía será $E_{\vec{p}} \equiv p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ ← $p^{\alpha \neq 0}$. $E_{\vec{p}} = \sqrt{\frac{N-a}{\alpha'} + \vec{p}^2}$

L13: 27/04/21

Para identificar en completo detalle a los estados físicos, nos falta todavía imponer las constricciones restantes, $L_{n>0}|phys\rangle = 0$. Analizaremos por separado los estados con distintos eigenvalores de N.

oscilaciones momento

- $\boxed{N=0 \longleftrightarrow m^2 = -\frac{a}{\alpha'}}$: estados $|0;k\rangle$ con $k^2 = \frac{a}{\alpha'}$.
  ↑ solo k^α

Es fácil ver que en este caso las constricciones se cumplen automáticamente,

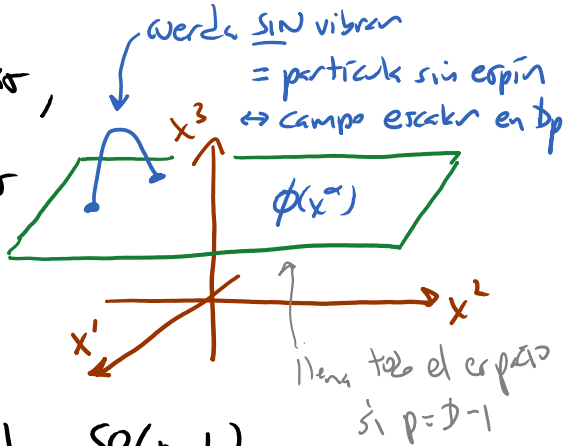
$$L_{n>0}|0;k\rangle = \frac{1}{2}\sum_l :\alpha_l \cdot \alpha_{n-l}: |0;k\rangle = 0,$$

$$\frac{1}{2}(\alpha_0\cdot\alpha_n + \alpha_{n-1}\cdot\alpha_1 + \alpha_{n-2}\cdot\alpha_2 + \dots + \alpha_{-1}\cdot\alpha_{n+1} + \alpha_{-2}\cdot\alpha_{n+2} + \dots)$$

así que todos los estados $|0;k\rangle$ son físicos.
Felizmente, todos tienen norma positiva. ✓
Claramente son idénticos a los estados $|k^\alpha\rangle$ de una partícula sin espín (es decir, sin estados internos) con

sólo X^σ

masa $m^2 = -a/\alpha'$, que se mueve en $p+1$ dimensiones. La cual a su vez reconocemos como una pequeña fluctuación en un campo escalar $\phi(x^\sigma)$ definido sobre la Dp-brana. En otras palabras, $\phi(x^\sigma)$ es uno de los modos en que la Dp-brana puede ser excitada. Es un escalar del grupo de Lorentz longitudinal, $SO(p,1)$.



- $\boxed{N=1 \leftrightarrow m^2 = \frac{1-a}{\alpha'}}$: estados $\alpha_{-1}^\mu |0;k\rangle$ con $k^2 = \frac{a-1}{\alpha'}$.

La combinación más general es $\varepsilon_\mu \alpha_{-1}^\mu |0;k\rangle \equiv |\varepsilon;k\rangle$.

↳ Constantes arbitrarias: vector de polarización

Este estado tiene norma

$$\langle \varepsilon;k | \varepsilon;k\rangle = \varepsilon^*_\mu \varepsilon_\nu \langle 0;k | \underbrace{\alpha_1^\mu \alpha_{-1}^\nu}_{= [\alpha_1^\mu, \alpha_{-1}^\nu] = \eta^{\mu\nu}} |0;k\rangle = \varepsilon^* \cdot \varepsilon\, (2\pi)^D \delta^{(D)}(0),$$

$n=1$

el estado problemático es $\alpha_{-1}^0 |0;k\rangle$

que es negativa si $\varepsilon^* \cdot \varepsilon < 0$. P. ej., para $\varepsilon_\mu = (1,0,0,\cdots)$.

Para tener una teoría sensata, necesitamos asegurarnos que los estados con norma negativa (= fantasmas) NO sean físicos. Podemos verificar que

martes, 19 de marzo de 2013 10:20 a.m.

$L_n \propto \sum_l : \alpha_l \cdot \alpha_{n-l} :$ igual que para $|0;k\rangle$

$L_{n\geq 2}|\varepsilon;k\rangle = 0$ es automático, $\forall\ \varepsilon, k$; pero

$$L_1|\varepsilon;k\rangle = \left(\sqrt{2\alpha'}\, p\cdot\alpha_1 + \dots\right)\varepsilon_\mu \alpha_{-1}^\mu |0;k\rangle$$

↑ términos que se anulan

$$= \sqrt{2\alpha'}\,\varepsilon_\mu k_\nu\, \alpha_1^\nu \alpha_{-1}^\mu |0;k\rangle$$

$$[\alpha_1^\nu, \alpha_{-1}^\mu] = \eta^{\mu\nu}$$

$$= \sqrt{2\alpha'}\,\varepsilon\cdot k\,|0;k\rangle$$

$= 0$ solo si $\varepsilon\cdot k = 0$. polarización transversal

Además,

$$L_{-1}|0;k\rangle = \left(\sqrt{2\alpha'}\, p\cdot\alpha_{-1} + \dots\right)|0;k\rangle = \sqrt{2\alpha'}\, k\cdot\alpha_{-1}|0;k\rangle,$$

así que $|\varepsilon;k\rangle$ con $\varepsilon_\mu = \lambda k_\mu$ es espurio.

Consideremos ahora las 3 distintas posibilidades para el valor de la constante de orden a.

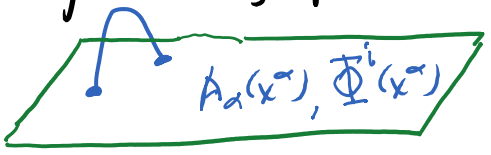
i) Si $a<1$, entonces $m^2 = -k^2 = \frac{1-a}{\alpha'} > 0$.

viola $L_1 = 0$

El estado espurio $|\lambda k;k\rangle$ tiene $\varepsilon\cdot k = \lambda k^2 \neq 0$, y por tanto no es físico (es decir, no existen estados nulos).

Con un empujón adecuado, podemos ir al marco en reposo para la cuerda, donde $k^\mu = (m, 0, 0, \dots)$. La condición de estado físico $\varepsilon \cdot k = \varepsilon_0 = 0$ elimina entonces a los estados con $\varepsilon_0 \neq 0$, de modo que el estado con norma negativa $\alpha_{-1}^0 |0;k\rangle$ No es físico. ✓

Nos quedamos entonces con $D-1$ estados de partícula $\varepsilon_\mu \alpha_{-1}^\mu |0;k\rangle$ en los $p+1$ dimensiones de la Dp-brana, que se dividen en 2 conjuntos con base en sus propiedades de transformación bajo el grupo de Lorentz longitudinal $SO(p,1)$,



$\varepsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0;k\rangle$ ↔ p estados de partícula masiva con espín 1 $(m^2 = \frac{1-a}{\alpha'} > 0)$

(con polarización transversal, $\varepsilon \cdot k = 0$ ↑ como en Proca) ↔ fluctuación de un campo vectorial masivo $A_\alpha(x^\beta)$ sobre Dp

y

$\varepsilon_i \alpha_{-1}^i |0;k\rangle$ ↔ $D-p-1$ partículas masivas sin espín $(m^2 = \frac{1-a}{\alpha'} > 0)$

(↑ $\varepsilon \cdot k = 0$ es automático)

$\longleftrightarrow$ fluctuación de $D-p-1$ campos escalares masivos $\Phi^i(x^\alpha)$ sobre Dp.

14:27/09/23

ii) Si $a=1$, entonces $m^2 = -k^2 = \frac{1-a}{\alpha'} = 0$.

satisface $L_1 = 0$ ✓

El estado espurio $|\lambda k; k\rangle$ tiene ahora $\varepsilon \cdot k = \lambda k^2 = 0$, y por lo tanto es nulo. Como resultado, tenemos la relación de equivalencia

$$|\varepsilon; k\rangle \simeq |\varepsilon'; k\rangle \quad \text{si} \quad \varepsilon'_\mu = \varepsilon_\mu + \lambda k_\mu .$$

Con un empujón podemos ir al marco donde $k^\mu = (k, k, 0, 0, \cdots)$, y la condición de estado físico $\varepsilon \cdot k = 0$ implica entonces $\varepsilon_1 = -\varepsilon_0$.

Dado que el estado con

$$\varepsilon_\mu = (\varepsilon_0, -\varepsilon_0, 0, 0, \cdots) \propto k_\mu = (-k, k, 0, 0, \cdots)$$

es nulo, tenemos

$$(\varepsilon_0, -\varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots) \simeq (0, 0, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots),$$

es decir, cualquier estado físico en este marco ✓ es equivalente a una combinación lineal de estados $\alpha_{-1}^\mu |0; k\rangle$ con $\mu \neq 0, 1$. No hay estados con norma negativa. ✓

Los estados físicos nuevamente son de 2 tipos con respecto a $SO(p,1)$,

$\varepsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0;k\rangle$ $\leftrightarrow$ $p-1$ estados de partícula no masiva con espín 1

↑ con polarización transversal $\varepsilon \cdot k = 0$ y $\varepsilon_\alpha \simeq \varepsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$

¡Fotón en $p+1$ dimensiones!

$\leftrightarrow$ fluctuación de un campo vectorial no masivo $A_\alpha(x^\beta)$, es decir, un campo de norma, con $\varepsilon_\alpha \simeq \varepsilon_\alpha' = \varepsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$ la expresión de la invariancia de norma

$$A_\alpha(x) \to A'_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \partial_\alpha \lambda(x),$$

y $k \cdot \varepsilon = 0$ es la condición de norma de Lorentz $\partial \cdot A = 0$;

$\varepsilon_i \alpha_{-1}^i |0;k\rangle$ $\leftrightarrow$ $D-p-1$ partículas no masivas sin espín

↑ $\varepsilon \cdot k = 0$ es automático

$\leftrightarrow$ fluctuación de $D-p-1$ campos escalares no masivos $\Phi^i(x^\alpha)$ (sin invariancia de norma).

$\varepsilon_i \simeq \varepsilon_i + \lambda k_i^{\nearrow 0}$ no tiene ningún efecto

iii) Si $\alpha > 1$, entonces $m^2 = -k^2 < 0$ (taquión)

El estado espurio $|\lambda k; k\rangle$ tiene $\varepsilon \cdot k = \lambda k^2 \neq 0$, (viola $L_1 = 0$)

y por tanto No es físico.

Yendo al marco donde $k^\mu = (0, m, 0, 0, \dots)$,

la condición de estado físico $\varepsilon \cdot k = 0$ elimina los estados con $\varepsilon_1 \neq 0$.

El estado con norma negativa $\alpha_{-1}^0 |0; k\rangle$ es entonces físico. ✗

Del análisis de este nivel, concluimos entonces que:

* Para que la teoría tenga sentido, debemos tener $\boxed{\alpha \leq 1}$.
* En el caso límite $\alpha = 1$ existen menos estados físicos no nulos ($D-2$ en lugar de $D-1$), lo cual está asociado a una invariancia de norma en el espaciotiempo:

$$A_\alpha \simeq A_\alpha + \partial_\alpha \lambda \leftrightarrow \varepsilon_\alpha \simeq \varepsilon_\alpha + \lambda k_\alpha .$$

- $N \geq 2 \longleftrightarrow m^2 \geq \frac{2-a}{\alpha'} \overset{a\leq 1}{\geq} \frac{1}{\alpha'}$:

N=2 N=2

P.ej. con $N=2$ se tienen $\alpha_{-1}^{\mu}\alpha_{-1}^{\nu}|0;k\rangle$ y $\alpha_{-2}^{\mu}|0;k\rangle$

con $k^2 = \frac{a-2}{\alpha'}$

La combinación lineal más general es entonces

$$(\varepsilon_{\mu\nu}\alpha_{-1}^{\mu}\alpha_{-1}^{\nu} + \varepsilon_{\mu}\alpha_{-2}^{\mu})|0;k\rangle .$$

Los resultados para $N \geq 2$ dependen no sólo del valor de la constante de orden a, sino también de la dimensión espaciotemporal D ($\longleftrightarrow$ número de X^{μ}).

P.ej., tomando $a=1$, se puede verificar (Tarea 3) que

$$|\psi\rangle \equiv \left\{\alpha_{-1}\cdot\alpha_{-1} + \left(\frac{D-4}{5}\right)\alpha'(k\cdot\alpha_{-1})^2 + \left(\frac{D-1}{5}\right)\sqrt{2\alpha'}\, k\cdot\alpha_{-2}\right\}|0;k\rangle$$

(con $k^2 = -1/\alpha'$) es físico, y tiene norma

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{2}{25}(D-1)(26-D)(2\pi)^D \delta^{(D)}(0)$$

$$< 0 \quad \text{si} \quad D > 26 . \quad \times$$

El resultado general ("teorema de no fantasmas") es

que los estados con norma negativa se eliminan $\forall N$ con las condiciones de estado físico si $a \leq 1$ y $D \leq 26$ [ver p.ej. GSW 2.3.3, Polchinski 4.4].

El caso límite $a=1$, $D=26$ es especial, puesto que da lugar a muchos más estados nulos, y contiene por tanto menos estados físicos (no nulos), como expresión de invariancia de norma en el espaciotiempo.

Tomando en cuenta todos los estados nulos, en el caso $a=1$, $D=26$ se encuentra que los estados físicos independientes son generados únicamente por $D-2$ osciladores transversales $\{\alpha_{-n}^{j}\}$ (como vimos explícitamente para el nivel $N=1$), que es justo lo que esperamos desde un principio, dado que solo $D-2$ de los campos X^{μ} representan grados de libertad físicos.

Por esta razón, es solo para $a=1$, $D=26$ que el espectro en CCA (donde primero cuantizamos, y después eliminamos la redundancia) resulta ser idéntico al obtenido por cuantización en el cono de luz (p.14), donde primero

eliminamos la redundancia y después cuantizamos). En sentido inverso, se encuentra que la CCL solo es covariante bajo Lorentz si $D=26$.

Como veremos más adelante, el caso $\boxed{a=1, D=26}$, que es el único donde a nivel de la teoría libre (en el espaciotiempo, es decir, cuando las cuerdas no interactúan) tenemos

$$\mathcal{H}_{CCA} = \mathcal{H}_{CCL} = \mathcal{H}_{CCM\ (BRST)},$$

(covariante antigua; cono de luz; covariante moderna (ver más adelante))

es también el único que tiene sentido al considerar interacciones.

L14: 29/09/21

Usando $a=1$, $D=26$, podemos listar con más precisión los estados de la cuerda bosónica abierta (libre) asociados a una Dp-brana:

- $\boxed{N=0}$ $|0;k\rangle$ con $m^2 = -k^2 = -\frac{1}{\alpha'}$ Taquión
  (solo $k_\alpha \neq 0$)
  $\longleftrightarrow$ campo escalar $\phi(x)$ sobre Dp
- $\boxed{N=1}$ $\varepsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0;k\rangle$ con $m^2 = -k^2 = 0$ Fotón
  ($\varepsilon \cdot k = 0$, $\varepsilon_\alpha \simeq \varepsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$)
  $\longleftrightarrow$ campo de norma $A_\alpha(x)$ sobre Dp

$\varepsilon_i \alpha_{-1}^i |0;k\rangle$ con $m^2 = -k^2 = 0$ Escalares

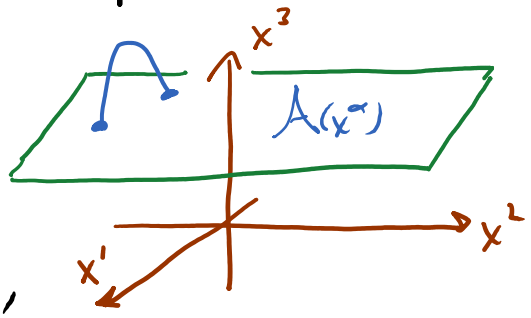
$\longleftrightarrow$ 25-p campos escalares $\Phi^i(x)$ sobre Dp

- $N \geq 2$ estados de partículas con $m^2 = -k^2 = \frac{N-1}{\alpha'}$

y espines $s \leq N$

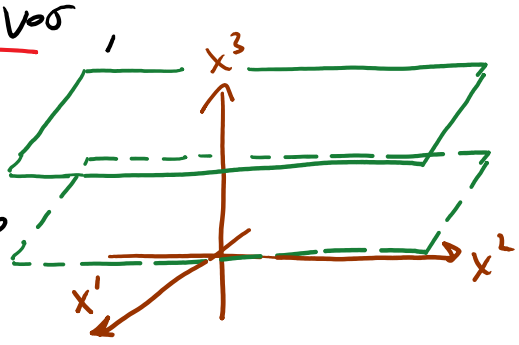
$\longleftrightarrow$ campos tensoriales $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_s}(x^\mu)$ sobre Dp.

Entendemos que estas partículas/campos representan excitaciones / grados de libertad de la Dp-brana. ¿Qué expectativas tenemos para ellas? Si la D-brana en verdad es un objeto dinámico, entonces, como mínimo, esperaríamos que pueda moverse. Pensaríamos entonces en describir su trayectoria covariantemente usando $D=26$ funciones de encaje $X^\mu(\sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^p)$, o, si fijamos la norma estática $\sigma^\alpha = x^\alpha$, con 25-p funciones $X^i(x^\alpha)$ asociadas a las direcciones transversales. Estos son campos escalares bajo el grupo de Lorentz en la Dp.



lunes, 01 de abril de 2013 12:49 p.m.

Y esperamos que sean campos no masivos, puesto que la Dp en cualquier posición en Minkowski (cualquier valor esperado $\langle X^i(x^\alpha)\rangle = c^i$) tiene la misma

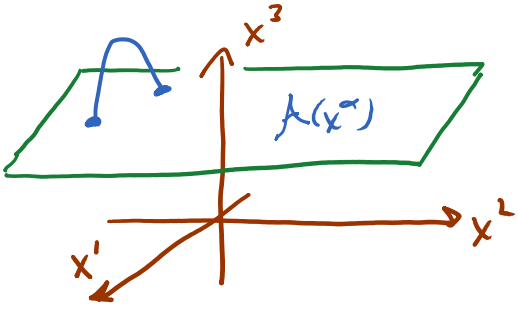


energía, así que las pequeñas fluctuaciones en su posición (es decir, las partículas asociadas a los campos $X^i(x^\alpha)$) deben tener masa cero (su energía mínima posible, correspondiente al modo constante $k^{\alpha\neq 0}\to 0$, es cero). ← esto energético por excitar el campo

Esta es una propiedad genérica de los objetos solitónicos (en ausencia de un potencial): su posición está descrita por campos escalares no masivos, que se conocen como las coordenadas colectivas del solitón.

Y hemos visto que precisamente eso es lo que obtenemos en el espectro de las cuerdas abiertas asociadas a una Dp: un campo escalar no masivo $\Phi^i(x^\alpha)$ por cada dirección transversal a la brana ($i=p+1,\dots,25$). ¡Así que los Φ^i son las coordenadas colectivas esperadas para la D-brana! (Más adelante comprobaremos que $X^i=\frac{\Phi^i}{2\pi\alpha'}$.) Y a las partículas asociadas bien las podríamos llamar entonces "posiciones"...

Al cuantizar la cuerda abierta hemos obtenido entonces este resultado esperado, y mucho más: aprendemos que la D-brana tiene de hecho un número infinito de excitaciones internas descritas por los campos $A_{\alpha_1 \ldots \alpha_j}(x)$, incluyendo en particular al campo de norma vectorial $A_\alpha(x)$.

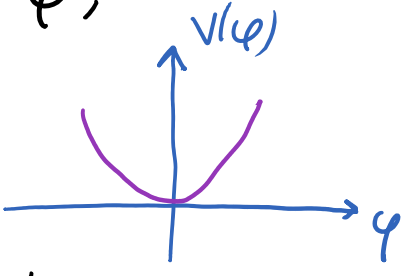


Todos ellos tienen $m^2 \geq 0$, excepto el campo escalar $\phi(x)$ que corresponde a la cuerda sin oscilar: el taquión.

Recordemos que para un campo arbitrario φ,

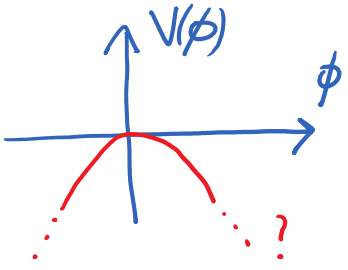
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi)$$

con $V(\varphi) = V(0) + \cancel{V'(0)}\varphi + \frac{1}{2}V''(0)\varphi^2 + \ldots$,



$V''(0) \equiv m^2$ (masa en el caso libre)

así que $m^2 < 0$, como obtuvimos para el modo más bajo ϕ en la cuerda abierta, simplemente quiere decir que $V''(0) < 0$.

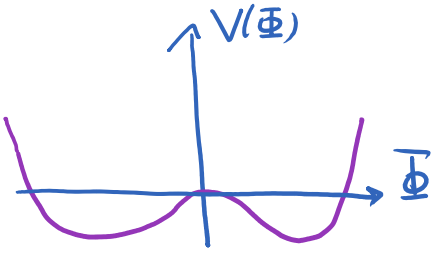


Es decir, estamos perturbando alrededor de un extremo del potencial que es un máximo, en lugar de un mínimo.

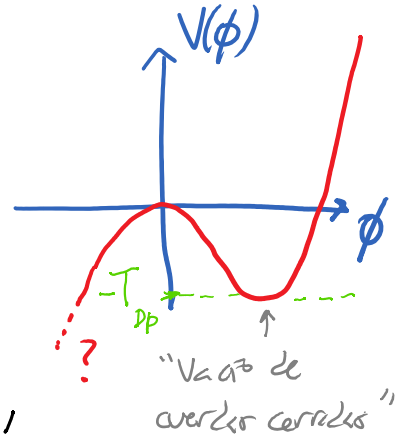
La existencia del taquión nos informa entonces que el

vacío con $\langle\phi\rangle = 0$, alrededor del cual estamos perturbando, es inestable: el sistema tiende a cambiar de estado para adquirir $\langle\phi\rangle \neq 0$ (porque es energéticamente favorable), proceso conocido como condensación del taquión.

La teoría será saludable solo si, al tomar en cuenta las interacciones, $V(\phi)$ tiene un mínimo absoluto, como sucede p.ej. para el campo de Higgs Φ en el Modelo Estándar.



Calculos en la teoría del campo de cuerdas abiertas muestran que el potencial para el taquión ϕ es como se indica a la derecha, y que el mínimo corresponde a la completa desaparición de la D-brana, dejando solo el espaciotiempo cuántico, cuyas excitaciones son solo cuerdas cerradas.



Así que las D-branas en la teoría de cuerdas bosónicas son inestables y tienden a decaer.

[Ver p.ej. hep-th/0311017, 0102085, 0410103.]

L15: 02/10/23

Procedamos ahora a cuantizar la cuerda cerrada.

El procedimiento es virtualmente idéntico, con la salvedad de que ahora los modos izquierdos α_n^μ son independientes de los derechos $\tilde{\alpha}_n^\mu$. El espectro es entonces básicamente el producto tensorial de 2 copias del espectro de la cuerda abierta.

Tenemos también modos de Virasoro independientes L_n y $\tilde{L}_n$, así que las condiciones de estado físico son

$$L_{n>0}|fís\rangle = 0 \quad , \quad \tilde{L}_{n>0}|fís\rangle = 0 \, ,$$
$$(L_0 - a)|fís\rangle = 0 \quad , \quad (\tilde{L}_0 - \tilde{a})|fís\rangle = 0 \, ,$$

donde (para la cuerda bosónica) tenemos por simetría $a = \tilde{a}$. Y, como la cuerda cerrada, a diferencia de la abierta, es además invariante bajo traslaciones $\sigma' \to \sigma' + c$ $\longleftrightarrow$ rotaciones en el plano $z = e^{\sigma^2 + i\sigma^1}$, cuyo generador es $L_0 - a - \tilde{L}_0 + \tilde{a} = L_0 - \tilde{L}_0$ (p. 211), es natural que las condiciones de estado físico implican que

lunes, 01 de abril de 2013 03:14 p.m.

$$(L_0 - \tilde{L}_0)\,|fis\rangle = 0$$

← exige que los estados físicos sean independientes de nuestra elección de origen en $\sigma = \sigma'$

, conocida como la condición de emparejamiento de niveles (o empatamiento) ("level-matching"). Usando (p. 225)

$$L_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + N \quad , \qquad \tilde{L}_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + \tilde{N} \quad ,$$

$\uparrow \frac{1}{2}\alpha_0^2$ p. 179 $\qquad \uparrow \frac{1}{2}\tilde{\alpha}_0^2$

claramente equivale a

$$(N - \tilde{N})\,|fis\rangle = 0 \quad .$$

Esta es la única conexión entre los modos izquierdos y los derechos.

Con un análisis idéntico al de la cuerda abierta, se encuentra nuevamente que los estados con norma negativa se eliminan solo si $a \leq 1$ y $D \leq 26$, y que en el caso límite $\boxed{a = 1, \; D = 26}$ hay muchos más estados nulos, de manera tal que el espectro coincide con el de cuantización en el cono de luz.

Especializando a este caso, tenemos entonces (a partir de $L_0 - 1 = 0 = \tilde{L}_0 - 1$) el espectro

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'}(N-1) = \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N}-1) \quad .$$

Los niveles más bajos son

- $N=\tilde{N}=0 \longleftrightarrow m^2 = -\frac{4}{\alpha'}$: estados $|0,0;k\rangle$ con $k^2 = \frac{4}{\alpha'}$ (k^μ $\mu=0,\dots,25$)

  (todos son físicos)

Partícula sin espín $\leftrightarrow$ Fluctuación de campo escalar $\phi(x)$ (x^μ $\mu=0,\dots,25$)

Taquión de cuerda cerrada

($\neq$ taquión de cuerda abierta $\phi(x)$ con $m^2 = -\frac{1}{\alpha'}$) (x^α $\alpha=0,1,\dots,p$)

- $N=\tilde{N}=1 \longleftrightarrow m^2=0$: $\varepsilon_{\mu\nu}\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle$ con $k^2=0$

$L_{n\geq 2} = 0 = \tilde{L}_{n\geq 2}$ se satisfacen en automático

$L_1 = 0 = \tilde{L}_1$ exigen que $k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0 = k^\nu \varepsilon_{\mu\nu}$

polarización transversa .

Los estados

$$L_{-1}\zeta_\nu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle \quad \text{y} \quad \xi_\mu \alpha_{-1}^\mu \tilde{L}_{-1}|0,0;k\rangle$$

son físicos, y por tanto nulos, si $\zeta\cdot k = 0 = \xi\cdot k$.

Tenemos entonces la relación de equivalencia

lunes, 01 de abril de 2013 03:38 p.m.

$\varepsilon_{\mu\nu} \simeq \varepsilon'_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + k_\mu \Gamma_\nu + \xi_\mu k_\nu$ con $\Gamma \cdot k = 0 = \xi \cdot k$.

En el marco donde $k^\mu = (k, k, 0, 0, \cdots)$, concluimos entonces que cada estado físico es equivalente a una combinación lineal

$$\varepsilon_{ij}\, \alpha_{-1}^{i}\, \tilde{\alpha}_{-1}^{j}\, |0,0;k\rangle \quad \text{con} \quad i,j = 2, \ldots, 25.$$

Estos son $(D-2)^2 = 24^2 = 576$ estados con polarización transversal. Podemos separarlos en 3 conjuntos de estados que no se mezclan entre sí bajo Lorentz:

- la traza $\varepsilon_{ij} \propto \varepsilon \delta_{ij}$ — 1 estado ← invariante bajo rotaciones $SO(24)$
- la parte simétrica sin traza $\varepsilon_{(ij)}$ — $\frac{(D-2)(D-1)}{2} - 1$ estados $= 299$
- la parte antisimétrica $\varepsilon_{[ij]}$ — $\frac{(D-2)(D-3)}{2}$ estados $= 276$

↑ $SO(24)$ nos mantiene en el mismo marco de referencia ("gaupito")

Regresando a un marco arbitrario, esto es

$* \varepsilon \eta^T_{\mu\nu}\, \alpha_{-1}^{\mu}\, \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu}\, |0,0;k\rangle$ partícula no masiva sin espín — Dilatón

$k \cdot \eta^T = 0 = \eta^T \cdot k$ $\longleftrightarrow$ campo escalar $\varphi(x)$

* $\varepsilon_{(\mu\nu)}\alpha_{-1}^{\mu}\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu}|0,p;k\rangle$ partícula no masiva con espín 2 Gravitón

$k\cdot\varepsilon = 0$

$\varepsilon_{\mu\nu} \simeq \varepsilon_{\mu\nu} + \xi_\mu k_\nu + k_\mu \xi_\nu$

(con $k\cdot\xi = 0$)

$\longleftrightarrow$ campo tensorial simétrico $h_{\mu\nu}(x)$

¡Justo lo que esperamos como fluctuación de la Métrica $g_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$!

* $\varepsilon_{[\mu\nu]}\alpha_{-1}^{\mu}\tilde{\alpha}_{-1}^{\nu}|0,p;k\rangle$ partícula en rep. antisimétrica "Antisimetricón"

$k\cdot\varepsilon = 0$

$\varepsilon_{\mu\nu} \simeq \varepsilon_{\mu\nu} + \zeta_\mu k_\nu - k_\mu \zeta_\nu$

$\longleftrightarrow$ campo tensorial antisimétrico $B_{\mu\nu}(x)$

Campo de Kalb-Ramond

(Como veremos más adelante en el curso, estos mismos 3 campos aparecen también entre los estados no masivos de las teorías de supercuerdas.)

Podemos notar que, en el caso del gravitón, la equivalencia

$$\varepsilon_{\mu\nu} \simeq \varepsilon'_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + k_\mu \xi_\nu + \xi_\mu k_\nu$$

corresponde a la invariancia de norma

$$h_{\mu\nu}(x) \simeq h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \xi_\nu(x) + \partial_\nu \xi_\mu(x),$$

que no es otra cosa que la expresión que corresponde

al cambio en la métrica debido a una reparametrización en el espaciotiempo, $x^\mu \to x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x)$ ($|\xi| \ll |x|$)

(caso particular de la fórmula para un fondo arbitrario, $h_{\mu\nu}(x) \to h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \xi_\nu(x) + \partial_\nu \xi_\mu(x)$).

Y en este mismo caso, la condición

$$k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \partial^\mu h_{\mu\nu}(x) = 0$$

es básicamente la definición de la norma de Lorentz (o Lorenz) (= armónica = de de Donder).

Dentro del enfoque que hemos adoptado, donde consideramos solo pequeñas fluctuaciones alrededor del espaciotiempo de Minkowski, veremos entonces que estos estados de vibración de la cuerda, $\varepsilon_{(\mu\nu)} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,p;k\rangle$, en verdad reproducen perfectamente a un gravitón libre.

Más adelante aprenderemos cómo entender un valor de fondo para el campo correspondiente, $\langle h_{\mu\nu}(x) \rangle \neq 0$, y comprobaremos que el efecto es justamente una deformación grande de la métrica, $\eta_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$.

Y al agregar interacciones veremos que estos modos de

la cuerda en realidad interactúan como gravitones.

De manera similar, en el caso del antisimetrización

$$\varepsilon_{\mu\nu} \simeq \varepsilon'_{\mu\nu} + k_\mu \xi_\nu - \xi_\mu k_\nu$$

expresa la invariancia de norma

$$B_{\mu\nu}(x) \simeq B'_{\mu\nu}(x) = B_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu \xi_\nu(x) - \partial_\nu \xi_\mu(x),$$

análoga a la transformación de norma

$$A_\mu(x) \simeq A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x)$$

para el potencial electromagnético.

Así que el campo de Kalb-Ramond es un campo de norma generalizado: un potencial con 2 índices en lugar de 1. Por analogía con $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, podemos definir una intensidad de campo asociada a $B_{\mu\nu}$,

$$H_{\mu\nu\lambda}(x) \equiv \partial_\mu B_{\nu\lambda} - \partial_\nu B_{\mu\lambda} - \partial_\lambda B_{\nu\mu},$$

tensor (0,3) totalmente antisimétrico que es invariante de norma.

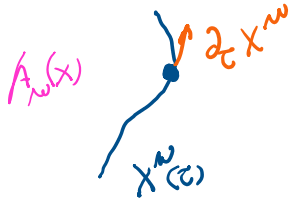
L15: 04/10/21

Este campo juega un papel muy especial en la teoría

de cuerdas: veremos más adelante que, justo como el campo de norma vectorial se acopla de manera natural a una partícula (objeto cero-dimensional) a través de

$$S_{int} = q \int d\tau \, \underbrace{A_\mu(X(\tau))\, \partial_\tau X^\mu(\tau)}_{A_\tau \text{ 1-forma}},$$

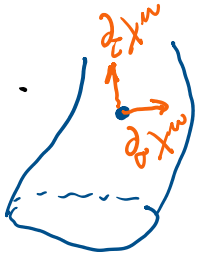
(q: carga)



el campo de norma tensorial $B_{\mu\nu}(x)$ se acopla de manera natural a la cuerda (objeto uno-dimensional) a través de

$$S_{int} = \rho \int d\tau d\sigma \, \underbrace{B_{\mu\nu}(X(\tau,\sigma))\, \partial_\tau X^\mu(\tau,\sigma)\, \partial_\sigma X^\nu(\tau,\sigma)}_{\equiv B_{\tau\sigma} \text{ 2-forma}}.$$

(ρ: densidad de carga)



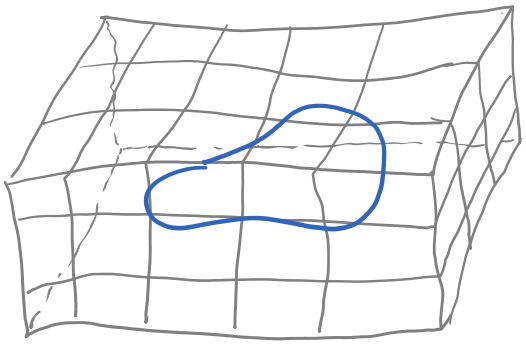
Es decir, nuestras cuerdas (cerradas o abiertas) están cargadas "eléctricamente" bajo $B_{\mu\nu}(x)$.

Pero, de nuevo, esto tendrá que esperar hasta que aprendamos cómo encender valores de fondo no triviales para los campos que hasta ahora sólo hemos encontrado como fluctuaciones infinitesimales.

Lo que ya hemos podido empezar a confirmar es que en verdad las cuerdas cerradas son pequeñas fluctuaciones de

lunes, 01 de abril de 2013 06:48 p.m.

una estructura (el campo de cuerdas cerradas) que incluye el propio espaciotiempo 26-dimensional, junto con un número infinito de otros campos.



El hecho de que entre estos campos se cuente el taquión $\phi(x)$ indica que el fondo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (todos los otros campos $= 0$) alrededor del cual estamos perturbando es también inestable a decaer en algo más (tal vez a un espaciotiempo con $D=2$ y un fondo dilatónico lineal $\varphi(t,x) \propto x$, o quizás, a la nada $\equiv$ ausencia de espaciotiempo).

[Ver p.ej. hep-th/0607037, 0611003, 0405064, 0506077.]

16: 04/10/23

9: 03/04/13

En resumen, comenzando con ingredientes muy sencillos,

$$\begin{matrix}\text{Cuerdas campo}\\ \text{excitaciones}\\ \text{básicas}\end{matrix} \;+\; \begin{matrix}\text{Mecánica}\\ \text{Cuántica}\end{matrix} \;+\; \begin{matrix}\text{Relatividad}\\ \text{Especial}\end{matrix},$$

hemos llegado a predecir la existencia de, en particular,

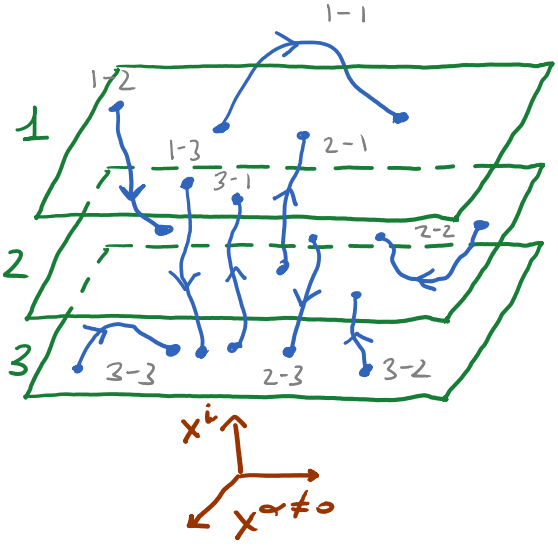
el campo de Maxwell $A_\alpha(x^\beta)$ ($\beta = 0, \dots, p \leq D-1$) $\longleftrightarrow$ fotones $\longleftrightarrow$ cuerdas abiertas

el campo gravitacional $h_{\mu\nu}(x^\lambda)$ ($\lambda = 0, \dots, D-1$) $\longleftrightarrow$ gravitones $\longleftrightarrow$ cuerdas cerradas

al menos (hasta ahora) como campos libres (bajo la elección de $a=1$, necesaria para que $CCA = CCL$).

Esto por supuesto resulta atractivo como un primer paso en la dirección de reproducir propiedades de nuestro universo, aunque es claro que distamos todavía mucho de un modelo realista: tenemos $D=26$ y taquiones de 2 tipos, y nos falta incorporar interacciones y fermiones.

En la misma dirección, hay otro rasgo importante de nuestro mundo que ya estamos en posibilidad de reproducir. Para ver esto, consideremos el espectro de excitaciones en presencia de más de una D-brana en la misma dimensionalidad p y la misma orientación. En este caso (como vimos en la Tarea 1) hay más de un tipo de cuerda abierta, porque el extremo inicial ($\sigma=0$) y final ($\sigma=\pi$) de la cuerda puede estar sobre cualquiera de las D-branas.



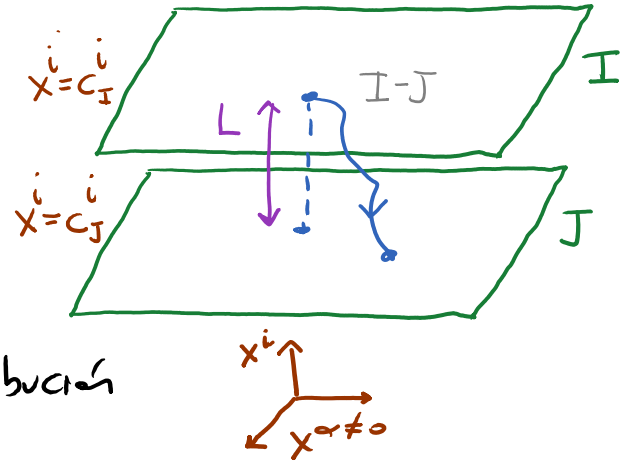
En el dibujo, hemos agregado flechas a las cuerdas para indicar su orientación, es decir, el sentido en el cual aumenta la coordenada espacial en la hoja de mundo, σ. Por supuesto, cuál extremo llamamos $\sigma=0$ es solo una convención; pero lo importante es que existen 2 opciones que pueden ser físicamente distintas: la transformación de paridad $\sigma \to \pi-\sigma$ es discreta (no tiene generador), y no necesariamente redundante (esto quedará claro más adelante).

Veamos entonces que, en presencia de N Dp-branas paralelas, existen N^2 tipos distintos de cuerdas abiertas. Podemos etiquetarlas I-J, con $I, J = 1, 2, \cdots, N$, donde (guión) I denota la D-brana del extremo inicial y J la final. Al cuantizarlas, obtendremos naturalmente N^2 copias de cada uno de los mismos estados que teníamos antes,

$$\xi_{\mu_1 \cdots} \alpha^{\mu_1}_{-n_1} \cdots |0; k; I, J\rangle,$$

(nuevas etiquetas)

con la única novedad de que sus masas^2 reciben una contribución



↓ costo energético por estirar cuerda distancia L

adicional $\Delta m^2 = \left(\frac{L}{2\pi\alpha'}\right)^2$, donde $L \equiv \sqrt{(c_I^i - c_J^i)^2}$ es la longitud mínima posible de la cuerda en cuestión.

(Verificaremos este resultado para m^2 en la Tarea 3.)

Los campos asociados se pueden pensar entonces como matrices $N \times N$ $A^{\mu_1 \cdots \mu_s}_{IJ}(x^\alpha)$. En particular, en el nivel de excitación $N=1$ obtenemos

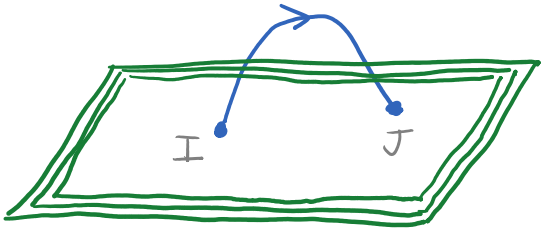
$$A^{\alpha}_{IJ}(x^\beta), \quad \Phi^{i}_{IJ}(x^\beta),$$

donde, en general, solo las componentes diagonales ($I=J$, asociadas a cuerdas que empiezan y terminan en la misma D-brana) son no masivas.

Pero notemos que si colocamos todas las D-branas en el mismo sitio, $c_I^i = c^i$, entonces $L=0 \ \forall \ I,J$, así que las N^2 componentes de A^α y Φ^i se vuelven no masivas.

Los estados correspondientes,

$$\varepsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0;k;I,J\rangle$$



parecen ser entonces N^2 (en vez de N) fotones.

En este caso, tenemos una simetría adicional: dado que las

N Dp-branes son enteramente indistinguibles, podemos hacer un cambio arbitrario de base con respecto a los índices I, J 'rotando' entre sí a las D-branes a través de una transformación unitaria $U \in U(N)$:

$$|I\rangle \longrightarrow |I'\rangle \equiv U_{I'I} |I\rangle$$ ← representación fundamental de $U(N)$ para el extremo inicial

$$|J\rangle \longrightarrow |J'\rangle \equiv U^*_{J'J} |J\rangle$$ ← representación conjugada de $U(N)$ para el extremo final

(con U^* en lugar de U en la segunda expresión, para que esta siga siendo una simetría en el caso interactuante, como veremos más adelante). Es decir, en la nueva base, la D-brane que identificamos como, p.ej., $2'$, es una combinación lineal de las N D-branes originales, con coeficientes U_{2I}.

El efecto de esta transformación $U(N)$ es

$$\varepsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0,k;I,J\rangle \longrightarrow U_{I'I} U^*_{J'J} \varepsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0,k;I,J\rangle$$

sobre los estados, o lo que es lo mismo,

$$A^\alpha(x) \longrightarrow A'^\alpha(x) = U A^\alpha(x) U^{-1}$$ ← rep conjunta de $U(N)$

$= (U^*)^T = U^\dagger$

índices: $I'J'$ $I'I$ IJ JJ'

sobre el campo matricial (y similarmente para Φ^i, etc.)

Al combinar esta simetría global con la redundancia ya conocida $\varepsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0;k;I,J\rangle \simeq (\varepsilon_\alpha + \lambda k_\alpha)\alpha_{-1}^\alpha |0;k;I,J\rangle$, tenemos entonces la invariancia local bajo

$$A_\alpha(x) \longrightarrow U(x)\left[A_\alpha(x) + i\partial_\alpha\right]U^{-1}(x),$$

$U \leftarrow \exp(i\lambda(x))$, con $\lambda(x) = \lambda^A(x)\,T^A$ una matriz hermitiana $N \times N$ (generadores)

$$\Phi^i(x) \longrightarrow U(x)\,\Phi^i(x)\,U^{-1}(x),$$

$$A^{\mu_1\cdots\mu_s}(x) \longrightarrow U(x)\,A^{\mu_1\cdots\mu_s}(x)\,U^{-1}(x)$$

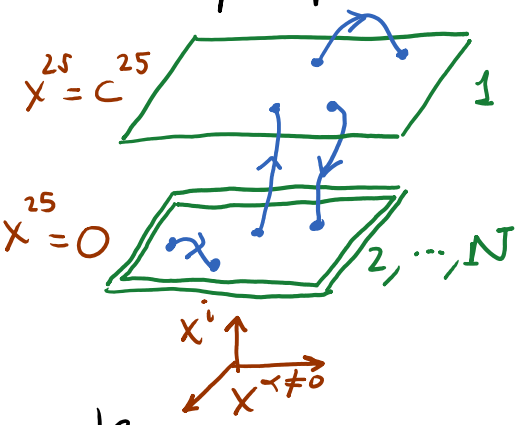
$s = 0, 2, 3, \ldots$

Es decir, la física de una pila de N Dp-branas es descrita por una teoría de norma no abeliana (con infinitos campos), con grupo de norma $U(N)$. Los $\alpha_{-1}^\mu |0;k;I,J\rangle$ son "gluones" (libres).

Hemos verificado esto en el caso donde las D-branas son todas coincidentes; pero ahora podemos entender ya por qué al separarlas se tiene menos simetría. Si empezamos con las N D-branas en (p.ej.) $x^i = 0$, para separar a,

digamos, la número 1, a lo largo de, p.ej., la dirección X^{25}, debemos encender un valor esperado al campo que describe su correspondiente coordenada colectiva (p.243),

$$\langle \Phi^{25}_{11}(x) \rangle = \frac{c^{25}}{2\pi\alpha'} .$$



Del dibujo vemos que esto hace que aumente la masa de las componentes $I1$ y $1J$ de todos los campos. En particular, dichas componentes del campo de norma dejan de ser no masivas y adquieren una masa

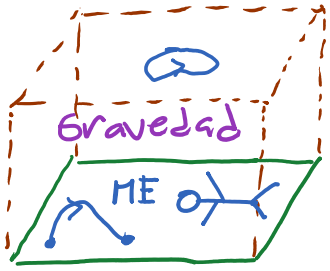
$$m = \frac{|c^{25}|}{2\pi\alpha'} = |\langle \Phi^{25} \rangle| .$$

¡Esto es ni más ni menos que una implementación geométrica del mecanismo de Higgs! Estos bosones de norma adquieren masa porque es justamente bajo A^{ν}_{I1} y A^{ν}_{1J} que está cargado el campo escalar Φ^{25}_{11} cuyo valor esperado encendimos (cosa que, de nuevo, quedará clara al estudiar las interacciones). Y como consecuencia de estas masas, la simetría disminuye (se rompe espontáneamente)

$$U(N) \longrightarrow U(N-1) \times U(1).$$

Separando más D-branas podemos reducir aún más la simetría local, a $U(n_1) \times U(n_2) \times \ldots$ si dejamos pilas con $n_1, n_2, \ldots$ branas coincidentes (donde $n_1 + n_2 + \ldots = N$), y a solo $U(1)^N$ en el caso más genérico.

Con esto vislumbramos ya cómo es que en la teoría de cuerdas podríamos aspirar a obtener todas las interacciones del Modelo Estándar + Gravedad. Y entendemos también la motivación de la propuesta de mundo brana (p.42), donde los campos del Modelo Estándar viven solo dentro de una brana (o varias).



16: 06/10/21

Hasta ahora hemos visto que la eliminación de los estados con norma negativa en la cuantización covariante antigua requiere que $D \leq 26$, y el acuerdo con la cuantización en el cono de luz exige que $D = 26$ (que es a su vez la condición para que la CCL resulte en un espectro covariante bajo Lorentz).

En última instancia, la restricción a $D=26$ se debe a una sutileza: para $D \neq 26$ las transformaciones de Weyl NO son una simetría del sistema a nivel cuántico — existe una anomalía. Esto hace que $S_p[X,g]$ tenga $D-1$ en lugar de $D-2$ grados de libertad, y no empate por tanto con la acción original para la cuerda, $S_{NG}[X]$.

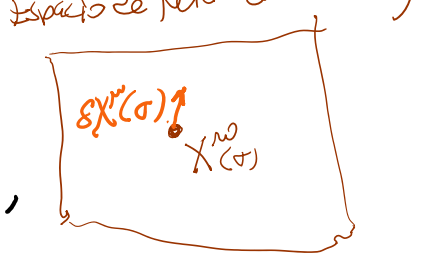
En más detalle, ¿cómo puede ser que $\int \mathcal{D}g_{ab}\, \mathcal{D}X^\mu \exp(-S_p)$ NO sea invariante de Weyl? El punto es que, si bien la acción

$$S_p[X,g] = \frac{1}{4\pi \ell_c^2} \int d^2\sigma \sqrt{g}\, g^{ab}\, \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

es invariante bajo $g_{ab}(\sigma) \longrightarrow \Omega(\sigma) g_{ab}(\sigma)$, las medidas de integración $\mathcal{D}_g X^\mu(\sigma) \propto \prod_\sigma dX^\mu_\sigma$ y $\mathcal{D}_g g_{ab}(\sigma) \propto \prod_\sigma dg_{ab,\sigma}$, que para respetar invariancia bajo difeos en la hoja de mundo (y Poincaré en el espaciotiempo) se definen a partir de las normas (como en pp. 98–100)

$$\|\delta X\|^2 \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g}\, \delta X^\mu \delta X^\nu \eta_{\mu\nu},$$

$$\|\delta g\|^2 \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g}\, g^{ab} g^{cd}\, \delta g_{ac}\, \delta g_{bd},$$



(que identifican la MÉTRICA relevante) NO son invariantes de Weyl.

En otras palabras: un parámetro de corte UV invariante bajo difeor necesariamente viola Weyl.

L17: 09/10/23

Para entender mejor este punto, analizaremos ahora la integral funcional en más detalle.

El punto de partida es que (de manera similar a lo que ocurre en el caso de la partícula, p.101)

$$\int \mathcal{D}_g g_{ab}(\sigma)\, \mathcal{D}_g X^\mu(\sigma)\, e^{-S_p[X,g]}$$

incluye cada trayectoria física un número infinito de veces,

$$\left(X^\mu(\sigma), g_{ab}(\sigma)\right) \overset{\text{Dif} \times \text{Weyl}}{\longleftrightarrow} \left(\underline{X}^\mu(\sigma), \underline{g}_{ab}(\sigma)\right),$$

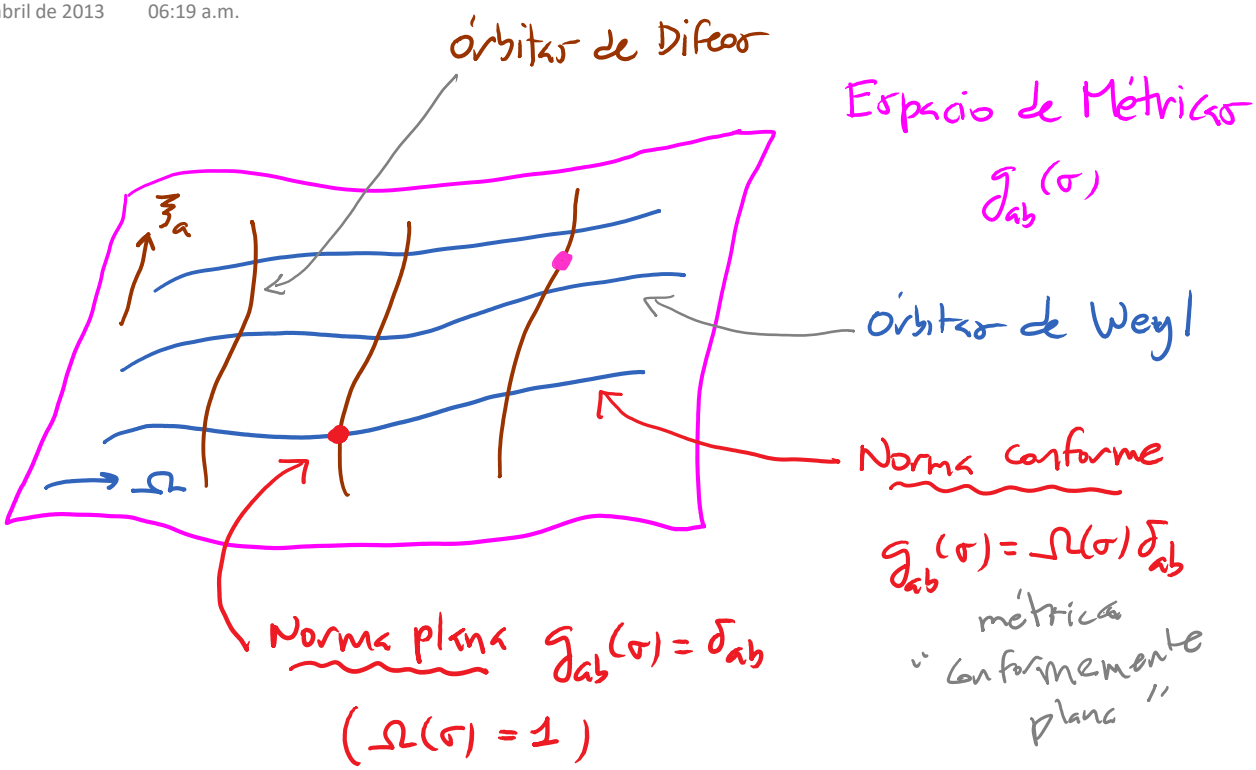
y no está por tanto bien definida.

Debemos eliminar la redundancia — fijar la norma. Nos interesa en realidad

$$Z \equiv \int \frac{\mathcal{D}_g g_{ab}(\sigma)\, \mathcal{D}_g X^\mu(\sigma)}{\text{Dif} \times \text{Weyl}}\, e^{-S_p[X,g]},$$

donde pretendemos fijar (localmente, en un solo parche de coordenadas) la norma plana $g_{ab}(\sigma) = \delta_{ab}$. Esquemáticamente:

martes, 02 de abril de 2013 06:19 a.m.



Hemos resaltado que $g_{ab} \to \Omega g_{ab}$ pudiera no ser en verdad una simetría dentro de la integral funcional, así que primero eliminaremos la redundancia por difeos, fijando la norma conforme ("conformemente plana")

$$g_{ab}(\sigma) = \Omega(\sigma)\,\delta_{ab} \equiv \check{g}_{ab}(\sigma) \quad \longleftrightarrow \quad \check{g}_{zz} = 0 = \check{g}_{\bar{z}\bar{z}} \,, \quad \check{g}_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}\Omega(z,\bar{z})$$

y después nos preguntaremos si el resultado es invariante de Weyl.

El primer paso es entonces reescribir $\mathcal{D}g_{ab} \to \mathcal{D}\check{g}_{ab}\mathcal{D}\xi_a$: (difeos)

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}\overset{\vee}{g}_{ab}(\sigma)\,\mathcal{D}\xi_a(\sigma)\,\mathcal{D}\tilde{X}(\sigma)}{\text{Weyl} \times \text{Dif}} \times (\,?\,) \times e^{-S_p[X,\overset{\vee}{g}]}$$

(?) ← Jacobiano que debemos determinar

Para esto, utilizamos el método de Faddeev-Popov:

empleamos la generalización ∞-dimensional de la identidad

$$1 = \int \underbrace{\prod_{i=1}^{n} d\xi_i \, \det\left(\frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi_i}\right)}_{\prod_{j=1}^{n} dg_j} \delta^{(n)}(g_j(\xi) - \overset{\vee}{g}_j)$$

con $i \longrightarrow (z, \bar{z})$,

$g^{\xi}_{zz} \equiv g_{zz} + 2\nabla_z \xi_z$; $g^{\xi}_{\bar{z}\bar{z}} \equiv g_{\bar{z}\bar{z}} + 2\nabla_{\bar{z}} \xi_{\bar{z}}$

$$1 = \int \mathcal{D}\xi_z(z,\bar{z})\,\mathcal{D}\xi_{\bar{z}}(z,\bar{z}) \; \det\left(\frac{\delta g^{\xi}_{zz}}{\delta \xi_z}\right) \det\left(\frac{\delta g^{\xi}_{\bar{z}\bar{z}}}{\delta \xi_{\bar{z}}}\right)$$

$$\times \delta^{(\infty)}(g^{\xi}_{zz}(z,\bar{z}) - \overset{\vee}{g}_{zz}(z,\bar{z}))\;\delta^{(\infty)}(g^{\xi}_{\bar{z}\bar{z}}(z,\bar{z}) - \overset{\vee}{g}_{\bar{z}\bar{z}}(z,\bar{z})).$$

($\overset{\vee}{g}_{zz}$, $\overset{\vee}{g}_{\bar{z}\bar{z}} \to 0$)

condiciones de norma conforme ($g^{\xi}_{z\bar{z}} = \frac{\Omega}{2}$ queda libre)

Usando $\det\left(\frac{\delta g^{\xi}_{zz}}{\delta \xi_{\bar{z}}}\right)\Big|_{g=\mathring{g}} = \det\left(\frac{\delta}{\delta \xi_z}\left(g_{zz}+2\nabla_z \xi_z\right)\right)\Big|_{g=\mathring{g}}$

$= \det(2\nabla_z)\Big|_{g=\mathring{g}} = \det(2\mathring{\nabla}_z)$

y $\det\left(\frac{\delta g^{\xi}_{\bar{z}\bar{z}}}{\delta \xi_{\bar{z}}}\right)\Big|_{g=\mathring{g}} = \det(2\mathring{\nabla}_{\bar{z}})$, esto es

$$1 = \int \mathcal{D}\xi_z \mathcal{D}\xi_{\bar{z}} \det(2\mathring{\nabla}_z)\det(2\mathring{\nabla}_{\bar{z}})\,\delta(g^{\xi}_{zz})\,\delta(g^{\xi}_{\bar{z}\bar{z}}).$$

podemos ignorar el 2: cte. de normalización

Insertando esta expresión en

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}g^{\xi}_{ab}(\sigma)\,\mathcal{D}X^{\mu}_{\xi}(\sigma)}{\text{Weyl} \times \text{Dif}}\; e^{-S_p[X_\xi, g^\xi]}$$

(que hemos reescrito usando la invariancia bajo $(X, g) \to (X_\xi, g^\xi)$), tenemos

$$Z = \int \frac{D\xi_z D\xi_{\bar z}}{Dif \times Weyl} \overbrace{Dg^{\xi}_{ab}}\; Dg^{\xi}_{zz}\, Dg^{\xi}_{\bar z\bar z}\, Dg^{\xi}_{z\bar z}\, DX^{\mu}_{\xi}$$

$$\times \delta(g^{\xi}_{zz})\, \delta(g^{\xi}_{\bar z\bar z})\, Det\, \nabla_z\, Det\, \nabla_{\bar z}\, e^{-S_p[X_\xi, g_\xi]}.$$

Si ahora renombramos las variables de integración mudas

$$(X_\xi, g^{\xi}) \longrightarrow (X, g),$$

vemos que

$$Z = \int \frac{D\xi_z D\xi_{\bar z}}{Dif \times Weyl} \overbrace{Dg_{zz}\, Dg_{\bar z\bar z}\, Dg_{z\bar z}}^{D\Omega}\, DX^{\mu}$$

$\leftarrow g_{z\bar z} = \frac{1}{2}\Omega$, así que este jacobiano es 1

$$\times \delta(g_{zz})\, \delta(g_{\bar z\bar z})\, Det\, \nabla_z\, Det\, \nabla_{\bar z}\, e^{-S_p[X,g]}$$

$$= \int \frac{D\xi_z D\xi_{\bar z}}{Dif \times Weyl} \underbrace{D\Omega\, DX^{\mu}\, Det\, \nabla_z\, Det\, \nabla_{\bar z}\, e^{-S_p[X,\xi]}}_{\text{Nada aquí depende ya de } \xi_a},$$

es decir,

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}\Omega}{\text{Weyl}} \underbrace{\text{Det}\,\check{\nabla}_z \,\text{Det}\,\check{\nabla}_{\bar{z}}}_{\equiv \Delta_{FP}(\check{g})} \mathcal{D}X^m \; e^{-S_p[X,\check{g}]} \; .$$

determinante de Faddeev-Popov

(Jacobiano que buscábamos)

Habiendo deducido esto, la pregunta clave ahora es si

$$Z[\check{g}_{ab} = \Omega \delta_{ab}] \equiv \int \mathcal{D}_{\check{g}} X^m \, \Delta_{FP}(\check{g}) \, e^{-S_p[X,\check{g}]}$$

es o no independiente de Ω, porque si lo es, tendríamos finalmente

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}\Omega}{\text{Weyl}} \underbrace{Z[\Omega \delta_{ab}]}_{Z[\delta_{ab}]} = Z[\delta_{ab}] \; .$$

Z Norma plana

Para responder esta pregunta, conviene reexpresar a $\Delta_{FP}(\check{g})$ en términos de campos auxiliares b_{ab} y c^a conocidos como fantasmas de Faddeev-Popov:

martes, 02 de abril de 2013 07:34 a.m.

$$\text{Det}\,\overset{\vee}{\nabla}_z = \int \mathcal{D}b_{\bar{z}\bar{z}}\,\mathcal{D}c^{\bar{z}}\,\exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\; b_{\bar{z}\bar{z}}\overset{\vee}{\nabla}_z c^{\bar{z}}\right],$$

$$\text{Det}\,\overset{\vee}{\nabla}_{\bar{z}} = \int \mathcal{D}b_{zz}\,\mathcal{D}c^{z}\,\exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\; b_{zz}\overset{\vee}{\nabla}_{\bar{z}} c^{z}\right],$$

donde

- el fantasma $c^a(\sigma)$ es un campo vectorial (vector, como ξ^a) anticonmutativo (como Dirac $\psi(x)$)
- el antifantasma $b_{ab}(\sigma)$ es un campo tensorial simétrico sin traza ($b_{z\bar{z}}=0$) anticonmutativo.

(dado todos los índices que se necesitan para armar una acción escalar)

Notar que esta es una acepción de "fantasma" muy distinta a la que habíamos usado antes: estos son fantasmas auxiliares, que ayudan en lugar de ajustar. Se los utiliza también al cuantizar Yang-Mills covariantemente.

En el material suplementario (pp. 269-272) puede encontrarse un recordatorio del hecho de que una integral funcional gaussiana sobre variables ANTIconmutativas ("variables de Grassmann") en verdad produce una determinante en el NUMERADOR (en lugar de en el denominador, que es lo que familiarmente se obtiene cuando las variables son conmutativas).

Regresando a nuestro cálculo, hemos aprendido que el efecto neto de fijar la norma con respecto a difeos dentro de la integral funcional es agregar a nuestro sistema los 2 campos auxiliares c^a y b_{ab}, con acción

$$S_f[b,c,g] \equiv \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma \sqrt{g}\, g^{ab} b_{ca} \nabla_b c^c ,$$

de tal forma que ahora tenemos

$$Z[\mathring{g}] = \int \mathcal{D}_{\mathring{g}} X^\omega \mathcal{D}_{\mathring{g}} b_{ab} \mathcal{D}_{\mathring{g}} c^a \, e^{-S_p[X,\mathring{g}] - S_f[b,c,\mathring{g}]} .$$

Usando $\mathring{g}_{ab} = \Omega \delta_{ab}$, la acción de los fantasmas toma la forma que anunciamos en la p. 262,

$$S_f[b,c,\mathring{g}] = \frac{1}{2\pi}\int d^2z \left(b_{zz} \overset{\circ}{\nabla}_{\bar z} c^z + b_{\bar z \bar z} \overset{\circ}{\nabla}_z c^{\bar z} \right).$$

En esta norma conforme, los únicos símbolos de Christoffel que no se anulan son

$$\Gamma^z_{zz} = \frac{\partial_z \Omega}{\Omega} \quad y \quad \Gamma^{\bar z}_{\bar z \bar z} = \frac{\partial_{\bar z} \Omega}{\Omega} ,$$

así que

martes, 02 de abril de 2013 10:44 a.m.

$$\nabla_z c^{\bar z} = \partial_z c^z \quad y \quad \nabla_{\bar z} c^z = \partial_{\bar z} c^z \,.$$

← para esto es que elegimos colocar el índice arriba

Usando la notación abreviada

$$c \equiv c^z \,, \quad b \equiv b_{zz} \,, \quad \tilde c \equiv c^{\bar z} \,, \quad \tilde b \equiv b_{\bar z \bar z} \,,$$

↑ no confundir con carga central ↑

podemos escribir entonces

$$\boxed{S_f[b,c,\tilde b,\tilde c,g] = \frac{1}{2\pi}\int d^2z \left(b\,\bar\partial c + \tilde b\,\partial \tilde c\right).}$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\bar\partial c = 0 = \bar\partial b \,, \quad \partial \tilde c = 0 = \partial \tilde b \,,$$

notación parecida a $X, \tilde X$

así que c, b son analíticos y $\tilde c, \tilde b$ antianalíticos. $\frac{1}{2\pi}\int d^2z\, b\,\bar\partial c$ y $\frac{1}{2\pi}\int d^2z\, \tilde b\,\partial \tilde c$ son 2 nuevas teorías conformes, invariantes bajo $z \to z'(z)$ con

$b(z) \to b'(z') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{-2} b(z)$ operador primario (p. 216) con $h_b = 2$ $(\tilde h_b = 0)$,

$c(z) \to c'(z') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{+1} c(z)$ primario con $h_c = -1$ $(\tilde h_c = 0)$,

$\tilde b(\bar z) \to \tilde b'(\bar z') = \left(\frac{\partial \bar z'}{\partial \bar z}\right)^{-2} \tilde b(\bar z)$ primario con $\tilde h_{\tilde b} = 2$ $(h_{\tilde b} = 0)$,

$\tilde c(\bar z) \to \tilde c'(\bar z') = \left(\frac{\partial \bar z'}{\partial \bar z}\right)^{+1} \tilde c(\bar z)$ primario con $\tilde h_{\tilde c} = -1$ $(h_{\tilde c} = 0)$.

(Esto equivale a decir que b_{ab}, c^a son neutros bajo transformaciones de Weyl, pero debemos notar que entonces $b^a{}_b, b^{ab}, c_a$ no lo son.)

Estos campos claramente son libres. Dado que el término "cuadrático" en la acción conecta a b únicamente con c, y a $\tilde{b}$ únicamente con $\tilde{c}$, esperamos que las únicas funciones de 2 puntos distintas de cero sean $\langle b(z)\, c(z')\rangle$ y $\langle \tilde{b}(\bar{z})\, \tilde{c}(\bar{z}')\rangle$ (esto es análogo al campo de Dirac, donde $S = \int d^D x\, \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$ y por tanto $\langle \bar{\psi}(x)\psi(x')\rangle \neq 0$).

Para calcular estos propagadores, podemos proceder en analogía con lo que hicimos para X^μ en las pp. 192-3, notando que

derivada fermiónica

$$0 = \int \mathcal{D}b(z)\,\mathcal{D}c(z)\, \frac{\delta}{\delta b(z_1)} \left[e^{-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\, b\bar{\partial}c}\, b(z_2) \right]$$

$$= \int \mathcal{D}b\,\mathcal{D}c \left[-\frac{1}{2\pi}\bar{\partial}c(z_1)\, b(z_2) + \delta^{(2)}(z_1 - z_2) \right] e^{-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\, b\bar{\partial}c},$$

es decir,

≡ integral funcional apropiada

$$\bar{\partial}_1 \langle c(z_1) b(z_2) \rangle = 2\pi\, \delta^{(2)}(z_1 - z_2) \quad .$$

$\langle 1 \rangle$ implícito

Como de costumbre, el propagador es la función de Green del operador diferencial correspondiente.

Sabiendo ya (p.194) que

$$\partial\bar{\partial} \ln|z|^2 = \partial\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \bar{\partial}\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi\, \delta^{(2)}(z) \quad ,$$

conocemos la solución a la anterior ecuación diferencial:

$$\boxed{\langle c(z_1) b(z_2) \rangle = \frac{1}{z_1 - z_2} \quad \longleftrightarrow \quad \langle b(z_1) c(z_2) \rangle = \frac{1}{z_1 - z_2}} \quad .$$

¡Recordar que estos campos son anticonmutativos!

De manera similar, podemos mostrar que

$$\langle c(z_1) c(z_2) \rangle = 0 \quad , \quad \langle b(z_1) b(z_2) \rangle = 0 \quad ,$$

y las 3 expresiones análogas para $\tilde{c}, \tilde{b}$.

Usando este propagador, definimos el orden normal conforme como hicimos para X^μ en la p.195:

$$:b(z_1) c(z_2): \equiv b(z_1) c(z_2) - \frac{1}{z_1 - z_2} \quad ,$$

teniendo cuidado con los signos por anticonmutatividad al hacer contracciones en productos de 3 o más campos. Este producto es analítico ($\bar\partial : \cdots : = 0$) dentro de correladores, y permite por tanto expansiones de Taylor para obtener EPOs.

Desarrollamos los campos en modos de Laurent con la convención usual (p. 222)

$$b(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+2}} \quad (h_b) \qquad \longleftrightarrow \qquad b_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} b(z) = b_{-n}^{\dagger}$$

$$c(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n-1}} \quad (h_c) \qquad \longleftrightarrow \qquad c_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n-2} c(z) = c_{-n}^{\dagger}$$

(y análogamente para $\tilde b(\bar z)$, $\tilde c(\bar z)$).

En el caso de campos anticonmutativos, la definición natural de orden temporal/radial incluye un -1 adicional (como en el campo de Dirac):

$$\mathcal{R}\left(\hat b(z_1)\hat c(z_2)\right) = \begin{cases} \hat b(z_1)\hat c(z_2) & \text{si } |z_1| > |z_2| \\ -\hat c(z_2)\hat b(z_1) & \text{si } |z_1| < |z_2| \end{cases},$$

y se puede mostrar que es justamente esto lo que calcula la integral de trayectoria fermiónica con inserciones.

Este signo menos hace que la fórmula que obtuvimos en la p.203 resulte en el anticonmutador en lugar del conmutador de cargas conservadas,

$$\{\hat{Q}_i, \hat{Q}_j\} = \oint \frac{dz_j}{2\pi i} \operatorname*{Res}_{z_i \to z_j} J_i(z_i) J_j(z_j) .$$

Con esta fórmula podemos calcular

$$\{b_m, c_n\} = \oint \frac{dz_2}{2\pi i} \operatorname*{Res}_{z_1 \to z_2} \underbrace{z_1^{m+1} b(z_1) z_2^{n-2} c(z_2)}$$

$$z_1^{m+1} z_2^{n-2} \frac{1}{z_1 - z_2} + \dots$$

$$\hookrightarrow z_2^{m+1} + \dots$$

$$= \oint \frac{dz_2}{2\pi i} z_2^{m+n-1} ,$$

es decir,

$$\boxed{\{b_m, c_n\} = \delta_{m,-n}} .$$

$\Rightarrow \{b_n, c_{-n}\} = 1$ y $\{c_n, b_{-n}\} = 1$, análogo a $\{a, a^\dagger\} = 1$, aunque podemos notar que $b_n \neq c_{-n}^\dagger = c_n$

17: 11/10/21

Podemos mostrar similarmente que

$$\{b_m, b_n\} = 0 = \{c_m, c_n\} \quad \left(\Rightarrow \text{en particular, } b_n^2 = 0 = c_n^2\right)$$

y los 3 anticonmutadores análogos para $\tilde{b}_m, \tilde{c}_n$.

Así que, como era de esperarse, nuestros campos anticonmutativos libres equivalen a una colección infinita de osciladores armónicos fermiónicos.

Considerando a b_{-n}, c_{-n} $(n>0)$ como operadores de creación, es natural definir el estado base del sistema como aquel que satisface

$$b_n|vac\rangle = 0, \quad c_n|vac\rangle = 0 \qquad \forall\, n>0.$$

Pero, por la existencia de los modos cero b_0 y c_0, existen de hecho 2 estados así:

$|\downarrow\rangle$ tal que $b_0|\downarrow\rangle = 0$, $b_{n>0}|\downarrow\rangle = 0 = c_{n>0}|\downarrow\rangle$

y

$|\uparrow\rangle$ tal que $c_0|\uparrow\rangle = 0$, $b_{n>0}|\uparrow\rangle = 0 = c_{n>0}|\uparrow\rangle$.

(NO se refiere a espín)

(El enunciado análogo en el caso bosónico era que para los campos X^μ teníamos infinitos estados base $|0;k\rangle$.)

Usando $b_0^2 = 0$, $c_0^2 = 0$, nos queda claro que estos 2 estados están conectados por

$$|\uparrow\rangle = c_0|\downarrow\rangle \quad , \quad |\downarrow\rangle = b_0|\uparrow\rangle .$$

($|\uparrow\rangle$: aniquilado por c_0; $|\downarrow\rangle$: aniquilado por b_0)

Será conveniente para nosotros considerar a b_0 como el operador de aniquilación (y c_0 de creación). Nuestro espacio de Hilbert se construye entonces actuando sobre $|\downarrow\rangle$ con los operadores de creación c_0, c_{-n}, b_{-n} (máximo 1 vez con cada uno).

LB: 11/10/23

El tensor de energía-momento para los fantasmas se puede determinar a partir de la definición usual

$$T^f_{ab} \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_f}{\delta g^{ab}} ,$$

o como la corriente de Noether asociada a las traslaciones $\sigma^a \to \sigma^a + \epsilon^a$. En coordenadas complejas se encuentra que

(usamos la misma convención que en $T^X(z)$ para definir al operador compuesto)

$$T^f(z) \equiv T^f_{zz}(z) = -2 :b\partial c: + :c\partial b: ,$$

con lo cual podemos calcular la EPO

lunes, 08 de abril de 2013 06:33 p.m.

$$(-2:b\partial c: + :c\partial b:)\big|_z \, (-2:b\partial c: + :c\partial b:)\big|_{z'}$$

$$T^f(z)T^f(z') = 4:b\partial c(z)::b\partial c(z'): - 4:b\partial c(z)::c\partial b(z'): + :c\partial b(z)::c\partial b(z'):$$

buscamos nuevamente el término más singular

$$= 4\, b\partial c\, b\partial' c - 4\, b\partial c\, c\partial' b + c\partial b\, c\partial' b + \text{términos con 1 o 0 contracciones}$$

$b(z)c(z') = \frac{1}{z-z'}$

cruce

$$\partial\left(\frac{1}{z-z'}\right)\partial'\left(\frac{1}{z-z'}\right) \quad -\left(\frac{1}{z-z'}\right)\partial\partial'\left(\frac{1}{z-z'}\right) \quad \partial\left(\frac{1}{z-z'}\right)\partial'\left(\frac{1}{z-z'}\right)$$

$$-\frac{1}{(z-z')^2} \quad +\frac{1}{(z-z')^2} \quad -\frac{2}{(z-z')^3}$$

$$= \frac{-4}{(z-z')^4} + \frac{-8}{(z-z')^4} + \frac{-1}{(z-z')^4} + O\left(\frac{1}{(z-z')^2}\right)$$

$$= \frac{-13}{(z-z')^4} + O\left(\frac{1}{(z-z')^2}\right).$$

Recordemos la expresión general para cualquier teoría de campos conforme (p. 218)

carga central — h para T — transformación bajo traslaciones (L_{-1})

$$T(z)T(z') = \frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{2}{(z-z')^2}T(z') + \frac{1}{(z-z')}\partial T(z') + \dots,$$

aprendemos entonces que b, c tienen carga central

$$\boxed{c^{b,c} = -26} \quad (\text{y } \tilde{c}^{b,c} = 0).$$

Similarmente, $\tilde{b}, \tilde{c}$ tienen $\tilde{c}^{\tilde{b},\tilde{c}} = -26$ (y $c^{\tilde{b},\tilde{c}} = 0$).

Considerando a ambas teorías a la vez, escribiremos

$$\boxed{c^f = -26, \quad \tilde{c}^f = -26}$$.

[10:09/04/13

Se puede mostrar que en teorías de campos conformes donde no existen estados con norma negativa (es decir, fantasmas malos) se tiene necesariamente $c > 0$ (de hecho, $c \geq 1$ y $h \geq 0$, salvo por las opciones discretas $c = 1 - 6/r(r+1)$ con $r = 3, 4, \ldots$ y ciertos valores específicos de h). [Ver p.ej. hep-th/9108028 sección 4.3, Polchinski 2.9 y 15.1, o Di Francesco et al. 7.2.]

Usando $b_n^\dagger = b_{-n}$ y $c_n^\dagger = c_{-n}$, que, como se puede verificar, implican $|\downarrow\rangle^\dagger = \langle\uparrow|$ (es decir, $\langle\uparrow|\downarrow\rangle = 1$, $\langle\downarrow|\downarrow\rangle = 0$), es fácil ver que la teoría S_f tiene en efecto estados con norma negativa, como p.ej. $b_{-n} c_{-n} |\downarrow\rangle$ (ver Tarea 3).

El que b, c (y $\tilde{b}, \tilde{c}$) tengan $c < 0$ ($\tilde{c} < 0$) y por tanto

constituyen "un número negativo de grados de libertad" va de la mano con su papel como campos auxiliares, que cancelan grados de libertad no físicos en X^μ —p.ej. X^0, X^1. (Se tiene una situación análoga al cuantizar Yang-Mills.)

En términos de la expansión en modos $\begin{cases} b(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+2}} \\ c(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k-1}} \end{cases}$,

$$T^f(z) = -2 :b\partial c(z): + :c\partial b(z):$$

$$= -2 : \sum_{n,k} \frac{b_n}{z^{n+2}} \frac{(1-k)c_k}{z^k} : + : \sum_{n,k} \frac{c_k}{z^{k-1}} \frac{(-n-2)b_n}{z^{n+3}} :$$

$$- : \sum_{n,k} \frac{(-n-2)b_n}{z^{n+3}} \frac{c_k}{z^{k-1}} :$$

$$= \sum_{n,k} \frac{(2k+n)}{z^{n+k+2}} :b_n c_k: ,$$

así que los modos de Virasoro son

$$L_m^f \overset{\text{p.208}}{\equiv} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} T^f(z) = \sum_{n,k} (2k+n) :b_n c_k: \underbrace{\oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{m+1}}{z^{n+k+2}}}_{\delta_{m,n+k}} ,$$

es decir,

martes, 09 de abril de 2013 09:18 a.m.

$$L_m^f = \sum_n (2m-n) : b_n c_{m-n} :$$.

Nor conviene reescribir esto usando el orden normal de creación aniquilación,

$:\ :$ ≡ poner b_{-n}, c_{-n}, c_0 a la izquierda de c_n, b_n, b_0 (con factores de -1 por anticonmutación).

En este caso $:\ :$ y $:\ :$ No coinciden; pero por la forma de L_m^f vemos que esto solo afecta el modo $m=0$, así que

constante de orden

$$L_m^f = \sum_n (2m-n) :b_n c_{m-n}: + A^f \delta_{m,0}$$

Como hicimos para X^μ, podemos determinar A^f estableciendo directamente la relación entre $:bc:$ y $:bc:$, o utilizando el álgebra de Virasoro (p. 223)

$$[L_m^f, L_n^f] = (m-n) L_{m+n}^f + \frac{c^f}{12}(m^3-m)\delta_{m,-n}$$

para notar que

$$A^f|\downarrow\rangle = L_0^f|\downarrow\rangle = \frac{1}{2}(L_1^f L_{-1}^f - L_{-1}^f \overbrace{L_1^f}^{0})|\downarrow\rangle$$

$$L_m^f = \sum_n (2m-n) : b_n c_{m-n} :$$

$$= \frac{1}{2}(2b_0c_1 + \dots)(-b_{-1}c_0 + \dots)|\downarrow\rangle$$

$$-c_1 b_{-1} b_0 c_0$$

$$\{b_0, c_0\} = 1$$

$$-\{c_1, b_{-1}\} = -1$$

$$= -|\downarrow\rangle,$$

es decir, $\boxed{A^f = -1}$. ← Será importante más adelante

Regresamos ahora al tema de la anomalía de Weyl: deseamos saber si

$$Z[\check{g}_{ab}] \equiv \int_{\check{g}} (\mathcal{D}b\mathcal{D}c\mathcal{D}\tilde{b}\mathcal{D}\tilde{c}\mathcal{D}X^m)\, e^{-S_p[X,\check{g}] - S_f[b,c,\tilde{b},\tilde{c},\check{g}]}$$

$$\equiv \langle 1 \rangle_{\check{g}}$$ es o no invariante de Weyl.

Por definición, bajo $\check{g}_{ab} \to \check{g}_{ab} + \delta g_{ab}$ tenemos

$$\delta Z = -\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \sqrt{\overset{\vee}{g}} \langle T^{ab}\rangle_{\overset{\vee}{g}} \delta g_{ab} + O(\delta g^2) .$$

↑ tensor de energía-momento cuántico: incluye posible contribución de la medida en integral funcional

Como siempre, la invariancia bajo difeos $\delta g_{ab} = \overset{\vee}{\nabla}_a \xi_b + \overset{\vee}{\nabla}_b \xi_a$ implica la conservación de este tensor,

$$\langle \overset{\vee}{\nabla}_a T^{ab}\rangle_{\overset{\vee}{g}} = 0 .$$

Consideremos ahora una transformación de Weyl infinitesimal $\overset{\vee}{g}_{ab} \longrightarrow e^{\delta\omega(\sigma)} \overset{\vee}{g}_{ab}$, es decir, $\delta g_{ab} = \delta\omega \overset{\vee}{g}_{ab}$.

En este caso, $\langle T^{ab}\rangle_{\overset{\vee}{g}} \delta g_{ab} = \langle T^a{}_a\rangle_{\overset{\vee}{g}} \delta\omega$, así que preguntarnos acerca de la invariancia de Weyl básicamente equivale a verificar si $\langle T^a{}_a\rangle_{\overset{\vee}{g}} = 0$, y condiciones similares a orden más alto en $\delta\omega$.

Examinaremos ahora esto en más detalle partiendo de la norma plana $\overset{\vee}{g}_{ab} = \delta_{ab}$:

$\langle T_{z\bar z}\rangle_\delta = 0$

$$\delta Z = -\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\, \delta\omega(\sigma)\, \cancel{\langle T^a{}_a(\sigma)\rangle_\delta} \to 0$$

porque en norma plana sí teníamos invariancia conforme $\leftrightarrow$ Weyl (No sucede para $g_{ab} \neq \delta_{ab}$)

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4\pi}\right)^2\int d^2\sigma\, d^2\sigma'\, \delta\omega(\sigma)\,\delta\omega(\sigma')\langle T^a{}_a(\sigma)\, T^b{}_b(\sigma')\rangle_\delta + \dots$$

o, en coordenadas complejas,

$d^2\sigma = \frac{1}{2} d^2 z$ p.171

$T^a{}_a = 4 T_{z\bar z}$

$$\delta Z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi}\right)^2\left(\frac{1}{2}4\right)^2\int d^2z\, d^2z'\, \delta\omega(z,\bar z)\,\delta\omega(z',\bar z')\underbrace{\langle T_{z\bar z}\, T_{z'\bar z'}\rangle_\delta}$$

$$(\partial_z\partial_{z'})^{-1}\underbrace{\langle \partial_z T_{z\bar z}\, \partial_{z'} T_{z'\bar z'}\rangle_\delta}$$

Usando $\overset{\vee}{\nabla}{}^a T_{ab} = 0$

$\overset{\vee}{g} = \delta \quad \partial_z T_{\bar z z} + \partial_{\bar z} T_{zz} = 0$

p. 207

$$\underbrace{\langle \partial_{\bar z} T_{zz}\, \partial_{\bar z'} T_{z'z'}\rangle_\delta}$$

$$\partial_{\bar z}\partial_{\bar z'}\underbrace{\langle T_{zz}\, T_{z'z'}\rangle_\delta}$$

p.218 $\rightarrow$ $= \underbrace{\frac{c}{2(z-z')^4}}_{\partial_z^2\partial_{z'}\left[\frac{c}{12(z-z')}\right]}$

$$\underbrace{\partial_z\partial_{\bar z'}\left[\frac{c}{12}\,\partial_{\bar z}\left(\frac{1}{z-z'}\right)\right]}$$

partes

$2\pi\,\delta^{(2)}(z-z')$,

así que

$$\delta Z = \frac{c}{48\pi}\int d^2z\, \partial_z \delta w\, \partial_{\bar z}\delta w \ .$$

LLS: 13/10/21

Se puede mostrar que la contraparte de este resultado cuando se hace una transformación de Weyl finita a partir de una métrica inicial $\hat g_{ab}$ arbitraria es

$$Z[e^{w}\hat g_{ab}] = e^{-c\,S_L[w,\hat g]}\, Z[\hat g_{ab}] \ ,$$

con S_L la llamada **acción de Liouville**

$$S_L[w,\hat g] \equiv -\frac{1}{96\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\hat g}\left(2\hat R w + \hat g^{ab}\partial_a w \partial_b w + \mu^2 e^{w}\right).$$

- $\hat R$: escalar de Ricci, $=0$ cuando $\hat g_{ab}=\delta_{ab}$
- $\hat g^{ab}\partial_a w\partial_b w$: término que reprodujimos
- $\mu^2 e^w$: presente si agregamos $\mu^2\int d^2\sigma\sqrt{g}$ en acción original

[ver p.ej. Polyakov 9.6, 9.7].

Concluimos entonces que **la integral funcional Z es invariante de Weyl** sólo si $\boxed{c=0}$ (y $\boxed{\tilde c=0}$).

Adicionalmente, fuera de la norma plana tenemos $\hat R\neq 0$, y por tanto δZ tiene una contribución lineal en δw,

de modo que

$$\boxed{\langle T^a{}_a \rangle_{\hat{g}} = -\frac{c}{12}\hat{R}}.$$

Así que p.ej. S_p NO es estrictamente invariante conforme cuando $\hat{g}_{ab} \neq \delta_{ab}$.

En nuestro caso,

$$c = c^{TOT} = c^X + c^f = D - 26,$$

c^X: contribución a anomalía de Weyl que proviene de DX^μ

c^f: contribución de $\frac{Dg_{ab}}{Diff}$ $\left(\leftrightarrow \int Db\,Dc\,D\tilde{b}\,D\tilde{c}\; e^{-S_f}\right)$

así que la teoría es invariante de Weyl, y podemos entonces cancelar (p.268)

$$Z = \int \frac{D\omega(\sigma)}{Weyl} Z[e^{\omega}\hat{g}_{ab}] = \int \frac{D\omega(\sigma)}{Weyl} Z[\hat{g}_{ab}] = Z[\hat{g}_{ab}],$$

solo si $\boxed{D = 26}$.

Llamamos a esta la dimensión crítica para las cuerdas bosónicas en espaciotiempo plano. Como veremos

más adelante, en el caso de la supercuerda en fondo plano, los campos adicionales en la hoja de mundo acaban modificando esta condición a $D=10$. Y, como veremos incluso antes de lo anterior, el valor de la dimensión crítica cambia también si consideramos a la cuerda bosónica en un fondo no trivial — es decir, distinto a Minkowski con todos los otros campos apagados.

Para cubrir todos los casos desde una perspectiva más general, podemos definir una teoría de cuerdas (a nivel perturbativo) como una teoría de campos conforme en 2 dimensiones, con carga central total igual a cero.

Si, en la teoría de cuerdas bosónica en fondo plano, tomamos $D \neq 26$, el campo $\omega(\sigma)$ NO se desacopla. Podríamos entonces olvidar el factor $\frac{1}{\text{Weyl}}$ (no se necesita para eliminar redundancia, porque no hay tal redundancia), y trabajar con

$$Z = \int \mathcal{D}\omega\, Z[e^{\omega} \hat{g}_{ab}] = \int \mathcal{D}\omega\, \mathcal{D}X\, \mathcal{D}b\mathcal{D}c\mathcal{D}\tilde{b}\mathcal{D}\tilde{c}\, e^{-cS_L - S_p - S_f}.$$

Nuestra teoría tiene entonces 1 grado de libertad adicional. Si tomamos p.ej. $\mu^2 = 0$, entonces

$$S_L[\omega, \check{g}_{ab}] = -\frac{1}{96\pi}\int d^2\sigma \sqrt{\check{g}}\left(\check{g}^{ab}\partial_a\omega\partial_b\omega + 2\check{R}\omega\right)$$

cf. $\sqrt{g}\, g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$

muestra que el campo escalar $\omega(\sigma)$ puede considerarse como una X^ω adicional que es tipo espacio o tipo tiempo si $D<26$ o $D>26$; pero sin invariancia bajo traslaciones $\omega \to \omega + c$. Llamamos a esta una teoría de cuerdas no crítica. ← D equivocada Interesantemente, es posible reinterpretarla como una teoría de cuerdas habitual (es decir, crítica), pero con $D+1$ dimensiones y un fondo no trivial (como entenderemos más adelante, se trata de un fondo dilatónico lineal, $\varphi(X,\omega) \propto \omega$). [Ver, p.ej., Polchinski 9.9.]

Con una u otra interpretación, veremos que de hecho sí es posible trabajar con $D \neq 26$; pero el precio que pagamos es que el fondo no parece prometedor

para describir algo parecido a nuestro mundo. El caso $D=1$ $(D+1=2)$ se ha estudiado mucho, porque resulta no tener taquión, y puede ser descrito de manera no perturbativa a través de una discretización de la hoja de mundo que conduce a un modelo matricial. [Ver p.ej. hep-th/9108019, 9304011, 9411028 sección 5, 0310287.]

L19: 16/10/23

Regresando a nuestra discusión principal, ahora que tenemos a $b, c, \tilde{b}, \tilde{c}$ como campos adicionales, los generadores de Virasoro totales $L_m^{TOT} \equiv L_m^X + L_m^F$ satisfacen el álgebra sin extensión central,

$$[L_m^{TOT}, L_n^{TOT}] = (m-n) L_{m+n} + \cancelto{0}{\frac{c^{TOT}}{12}} (m^3-m)\, \delta_{m,-n} ,$$

Para imponer la ecuación de movimiento faltante $T^{ab} \propto \delta S/\delta g_{ab} = 0$ a nivel cuántico, pensaríamos nuevamente pedir

$$\langle f\acute{s}s' | L_m^{TOT} | f\acute{s}s \rangle = 0 \quad \forall\, m .$$

Pero ahora tenemos un nuevo problema, porque claramente el espacio de Hilbert es más grande que antes: se construye con los operadores de creación

$$\{\alpha_{-n}^{\mu}, b_{-n}, c_{-n}, c_0, \tilde{\alpha}_{-n}^{\mu}, \tilde{b}_{-n}, \tilde{c}_{-n}, \tilde{c}_0\}$$

actuando sobre el vacío $|0,0;k\rangle |\downarrow\downarrow\rangle$. Y peor aún, hemos visto que esto da lugar a estados con norma negativa adicionales. ¿Cómo podemos entonces distinguir a los estados físicos? En CCA, ignorábamos a $b_n, c_n, c_0, \tilde{b}_n, \tilde{c}_n, \tilde{c}_0$. La presencia de los fantasmas nos permite recurrir a un formalismo más poderoso que la CCA: la cuantización BRST (Becchi, Rouet, Stora; Tyutin), o cuantización covariante moderna (CCM). Aquí solo esbozaremos rápidamente las ideas principales. [Para más detalle, ver Polchinski 4.2-4.3, o GSW 3.2.]

El punto de partida es que, aún después de fijar la norma plana $g_{ab} = \delta_{ab}$, nuestro sistema

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z\, \partial X \cdot \bar{\partial} X + \frac{1}{2\pi} \int d^2z\, (b\bar{\partial} c + \tilde{b}\partial \tilde{c})$$

tiene una simetría global remanente: la llamada

transformación BRST

$$\delta X^\mu = i\varepsilon(c\partial + \tilde{c}\bar{\partial})X^\mu,$$

← difeo con parámetros $\varepsilon c(z)$, $\varepsilon\tilde{c}(\bar{z})$

$$\delta b = i\varepsilon(T^X + T^f), \quad \delta c = i\varepsilon c\partial c,$$

$$\delta\tilde{b} = i\varepsilon(\tilde{T}^X + \tilde{T}^f), \quad \delta\tilde{c} = i\varepsilon\tilde{c}\bar{\partial}\tilde{c},$$

con ε un parámetro (constante) anticonmutativo.

El teorema de Noether conduce entonces a la corriente conservada

$$j_{BRST}(z) = cT^X + \frac{1}{2}:cT^f: + \frac{3}{2}\partial^2 c \qquad (y\ \tilde{j}_{BRST}(\bar{z}) = \tilde{c}\tilde{T}^X + \dots)$$

y por tanto, a la carga BRST

$$Q_{BRST} = \frac{1}{2\pi i}\oint(dz\, j_{BRST} - d\bar{z}\,\tilde{j}_{BRST})$$

objetos fermiónicos (=anticonmutativos)

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(c_n L^X_{-n} + \tilde{c}_n L^X_{-n})$$

$$+ \sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\frac{m-n}{2}:(c_m c_n b_{-m-n} + \tilde{c}_m\tilde{c}_n\tilde{b}_{-m-n}):_0 - (c_0+\tilde{c}_0)$$

(un objeto fermiónico tal que $Q^{+}_{BRST} = Q_{BRST}$).

Se puede mostrar que los resultados serán invariantes bajo un cambio en la condición de norma

$$N(g, X) = \delta_{ab} - g_{ab} = 0 \quad \rightarrow \quad N + \delta N = 0$$

si los estados físicos son invariantes bajo BRST, es decir,

$$\boxed{Q_{BRST} |fis\rangle = 0} .$$

Además, el requisito de que Q_{BRST} se conserve aún después del cambio en la condición de norma equivale a

$$\boxed{Q^{2}_{BRST} = 0} .$$

Es decir, una propiedad básica de la carga BRST es que debe ser nilpotente. En nuestro caso, esto resulta cumplirse solo si $\boxed{D = 26}$, lo cual constituye por tanto una quinta manera de deducir la dimensión crítica (En $D \neq 26$ decimos que hay una anomalía BRST.)

Una consecuencia de $Q_{BRST}^2 = 0$ es que un estado del tipo $Q_B|\text{arbitrario}\rangle$ es trivialmente físico, y es además ortogonal a todos los estados físicos (incluido él mismo), es decir, es nulo. Tenemos entonces la relación de equivalencia

$$|\psi\rangle \simeq |\psi'\rangle \quad \text{si} \quad |\psi\rangle - |\psi'\rangle = Q_{BRST}|\chi\rangle .$$

En matemáticas, cuando se tiene un operador nilpotente como Q_{BRST}, o la derivada exterior d sobre formas diferenciales $A_{(p)} = \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \cdots \mu_p} dx^1 \wedge dx^2 \cdots \wedge dx^p$ (↑ producto exterior o cuña)

($dA_{(p)}$ tiene componentes $(dA)_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}} = \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \cdots \mu_{p+1}]}$), es habitual utilizar la noción de cohomología para referirse a la construcción recién descrita.

En esta terminología,

los estados físicos, $Q_B|\text{fís}\rangle = 0$, se llaman cerrados,

los nulos, $Q_B|\chi\rangle$, se llaman exactos,

y al conjunto de clases de equivalencia

$$[|\psi\rangle] \equiv \{ |\psi'\rangle \mid |\psi'\rangle - |\psi\rangle = Q_B|\chi\rangle \}$$

de estados cerrados módulo exactos

se le llama la cohomología de Q_{BRST},

$$\mathcal{H}_{BRST} \equiv \frac{\mathcal{H}_{cerrados}}{\mathcal{H}_{exactos}} \simeq \frac{\mathcal{H}_{físicos}}{\mathcal{H}_{nulos}}$$

A cada $[|\psi\rangle]$ se le llama una clase de cohomología.

Podemos clasificar a estos estados con base en su número de fantasma F (y $\tilde{F}$), que es la carga de Noether asociada a la simetría global $S_f = \frac{1}{2\pi}\int dz\, b\bar{\partial}c$

$$c \to e^{+i\theta} c \quad , \quad b \to e^{-i\theta} b \quad (\text{con } \theta \text{ conmutativo}),$$

cuya corriente es $j(z) = -:bc:$, y carga

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n} b_n - b_{-n} c_n) + c_0 b_0 - \frac{1}{2} .$$

Vemos entonces que

$$F|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle \quad , \quad y \quad \begin{matrix} c_{-m}, c_0 \\ b_{-n} \end{matrix} \text{ cambian } F \text{ por } \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix} .$$

Es fácil verificar (ya sea a partir de la Eqn de j_{BRST} con b, o de las expansiones en modos) que

$$\{Q_{BRST}, b_m\} = L_m^x + L_m^f \equiv L_m^{TOT}$$

así que podemos lograr que los estados físicos satisfagan la condición de capa de masa

$$L_0^{TOT}|fís\rangle = (L_0^x + L_0^f)|fís\rangle = 0$$

si exigimos como condición adicional que

$$\boxed{b_0|fís\rangle = 0 \quad (\text{y } \tilde{b}_0|fís\rangle = 0)}$$

$$(\Rightarrow L_0^{TOT}|fís\rangle = \{Q_{BRST}, b_0\}|fís\rangle = 0).$$

La parte de fantasmas será entonces del tipo

$$\underbrace{c_{-n_1}\cdots b_{-m_1}\cdots}|\downarrow\rangle$$

tal que $Q_{BRST}|fís\rangle = 0$

En cada una de las clases de equivalencia que satisfacen esta condición se puede encontrar siempre un estado "sin fantasmas" $|\psi\rangle$ tal que

$$|\psi\rangle = |\psi_x\rangle |\downarrow\downarrow\rangle .$$

Y en este caso,

$$Q_B |\psi_x\rangle|\downarrow\downarrow\rangle$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_{-n}(L_n^X - \delta_{n,0}) + \tilde{c}_{-n}(\tilde{L}_{-n}^X - \delta_{n,0}) \right] |\psi_x\rangle|\downarrow\downarrow\rangle,$$

así que $Q_B|\psi\rangle = 0$ es equivalente a las condiciones

$$L_{n\geq 0}^X |\psi_x\rangle = 0 = \tilde{L}_{n\geq 0}^X |\psi_x\rangle$$
$$(L_0^X - 1)|\psi_x\rangle = 0 = (\tilde{L}_0^X - 1)|\psi_x\rangle$$

que teníamos en cuantización covariante antigua (CCA). Podemos notar en particular que la constante de orden $a=1$ (que fue crucial para obtener al gravitón y los bosones de norma vectoriales) en realidad proviene de

$$L_0^{Tot} |\psi_x\rangle|\downarrow\downarrow\rangle = (L_0^X + L_0^f)|\psi_x\rangle|\downarrow\downarrow\rangle,$$

con

$$L_0^f = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_{-n}c_n + c_{-n}b_n) - 1 .$$

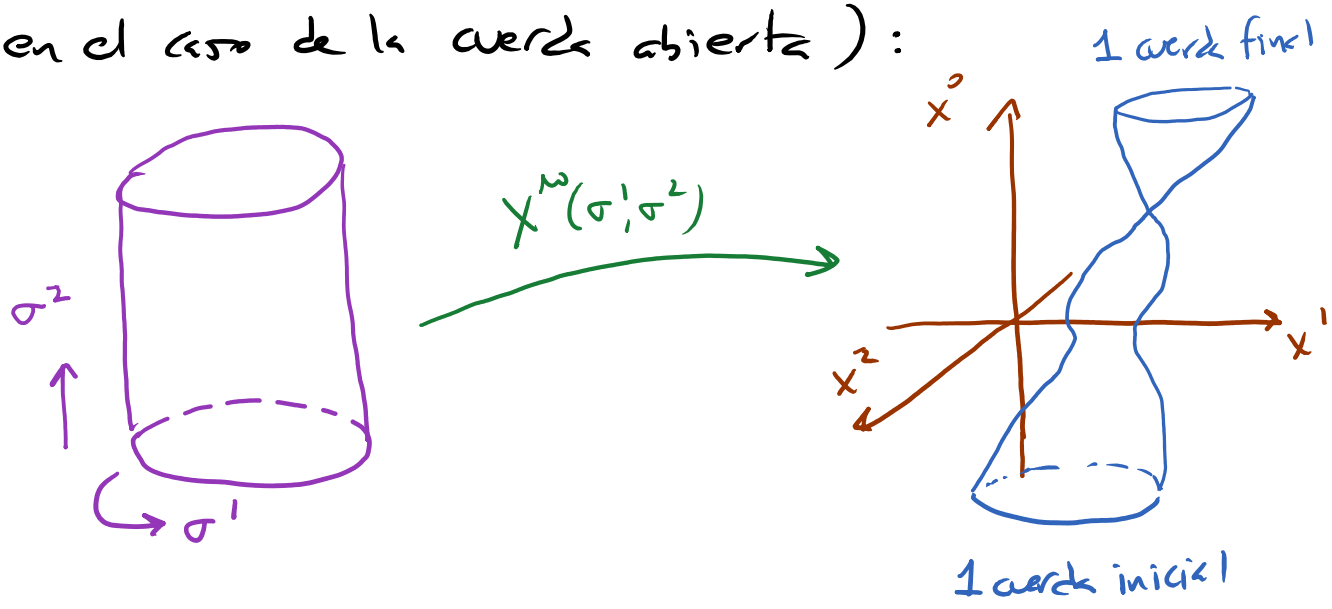
↑ A^f (p. 284-5)

En resumen, en la cuantización BRST los estados físicos son clases de cohomología de Q_{BRST}, con número de fantasma $F=-1/2$ (y $\tilde{F}=-1/2$), y como hemos esbozado, esto conduce a los mismos resultados que CCA y CCL.

---

2. Cuerdas Bosónicas II

Hasta ahora hemos hablado de una cuerda libre, para la cual usamos una hoja de mundo con la topología de un cilindro (en el caso de la cuerda cerrada, y una tira en el caso de la cuerda abierta):



lunes, 15 de abril de 2013 04:37 p.m.

¿Cómo podemos agregar interacciones? Nuestro primer instinto quizás sería añadir términos cúbicos o más altos a la acción de Polyakov $S_P[X]$. Ellos serían interacciones en la teoría de campos en 2 dimensiones (que, como veremos más adelante, es lo que se tiene cuando el fondo en el que se propaga la cuerda es no trivial – p. ej. espaciotiempo curvo); pero en el espaciotiempo seguiríamos teniendo una sola cuerda que se propaga libremente.

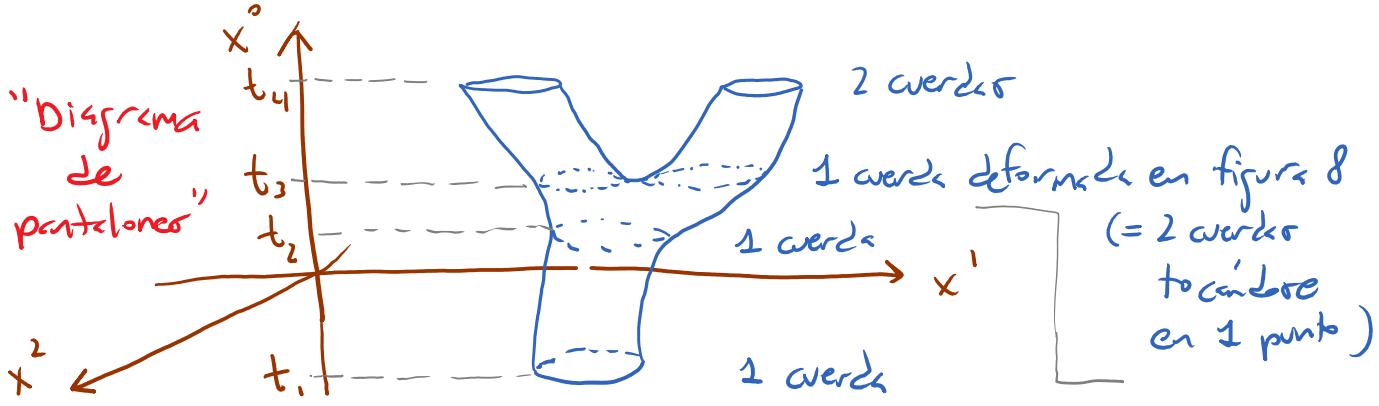
El punto importante aquí es que nuestra descripción es en primera, y no segunda, cuantización. La situación es completamente análoga en la primera cuantización de una partícula. Sabemos que en ese caso podemos incorporar interacciones perturbativamente, agregando a mano vértices de interacción (p. 112) de 3 o más patas, es decir, la posibilidad de que

1 partícula se convierta en 2, ,

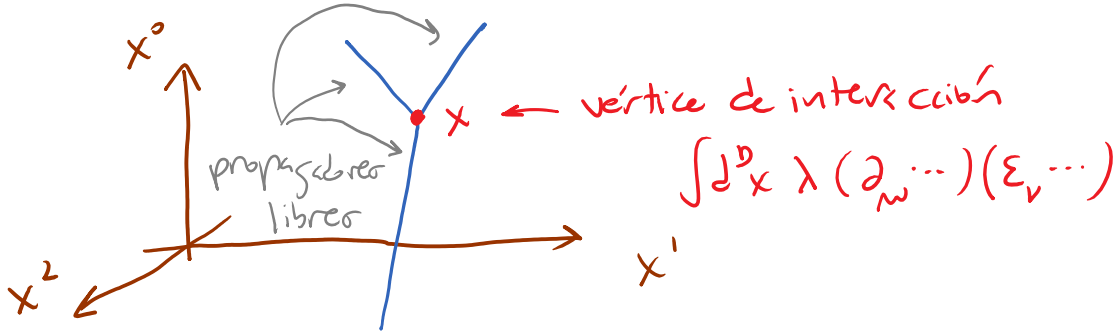
o 1 partícula se convierta en 3, , etc.

La libertad de elegir el tipo de vértices que añadimos, así como los factores que corresponden a cada uno de estos vértices en las reglas de Feynman (constantes de acoplamiento, dependencia del momento y/o polarización de las partículas involucradas, etc.) refleja la gran variedad de teorías de partículas ($\leftrightarrow$ campos) interactuantes que es posible construir (aun que faltaría por supuesto analizar unitariedad, causalidad, renormalizabilidad, etc.).

Para agregar interacciones en cuerdas, seguimos entonces el mismo camino. Permitiremos, p.ej., que 1 cuerda se convierta en 2 (o viceversa):

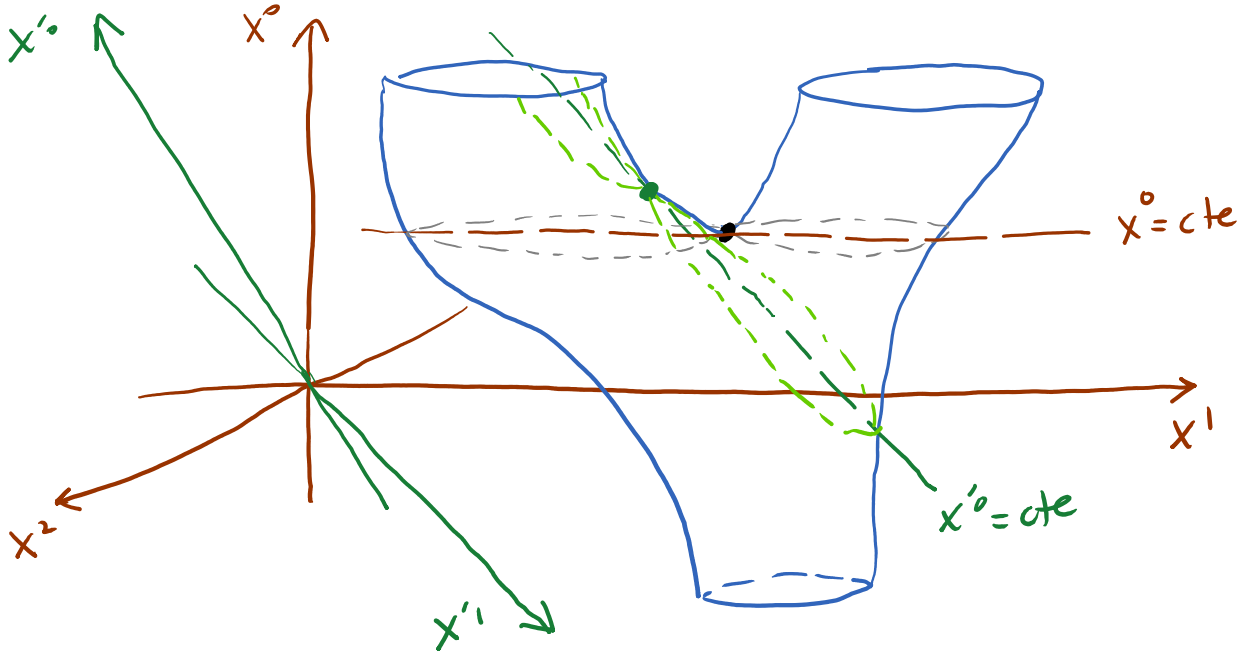


Es importante notar que existe una diferencia esencial entre esto y el vértice cúbico para partículas



En el caso de partículas, existe un punto bien definido en su trayectoria donde ocurre la interacción, y todos los observadores están de acuerdo en cuál es.

Pero en el caso de cuerdas, NO es así: el punto en el espaciotiempo donde la cuerda se separa en 2 depende del marco de Lorentz:



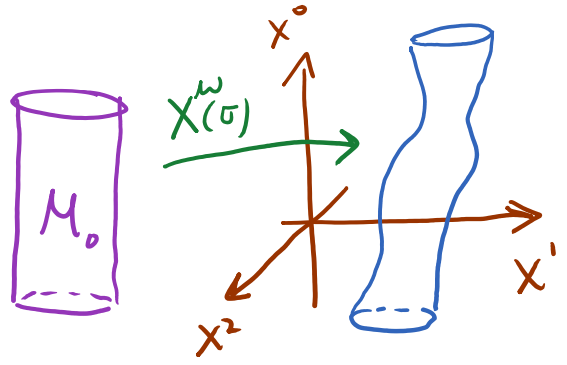
Localmente, cualquier punto en la superficie barrida por la cuerda tiene el mismo aspecto.

lunes, 15 de abril de 2013 07:30 p.m.

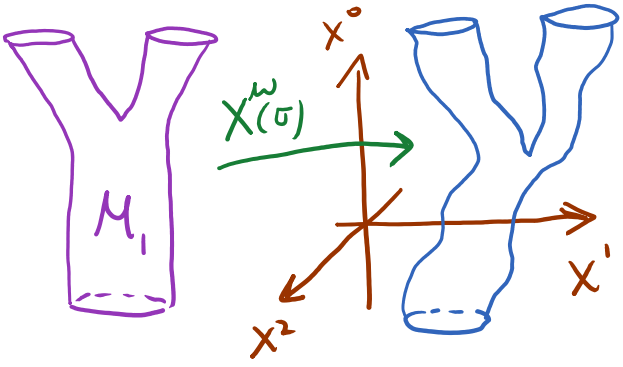
En la descripción de la evolución de la cuerda,

¡¡NO HAY ENTONCES VÉRTICES DE INTERACCIÓN!!

No tenemos opción más que pesar las nuevas trayectorias (donde 1 cuerda se divide en 2) con el mismo factor $e^{-S_p[X]}$ que las trayectorias libres. Lo único que las distingue es su topología, y por tanto, la topología de la hoja de mundo correspondiente:

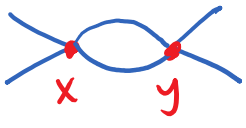


vs.



$$\int_{M_0} \mathcal{D}X^{\mu}(\sigma)\, e^{-S_p[X]} \qquad \int_{M_1} \mathcal{D}X^{\mu}(\sigma)\, e^{-S_p[X]}.$$

Sabemos que las divergencias UV en teorías de partículas ($\leftrightarrow$ campos) están relacionadas con los límites de integración en los diagramas de Feynman donde 2 o más vértices coinciden en el espaciotiempo ($\leftrightarrow$ energías de partículas en lazos divergen). P.ej.

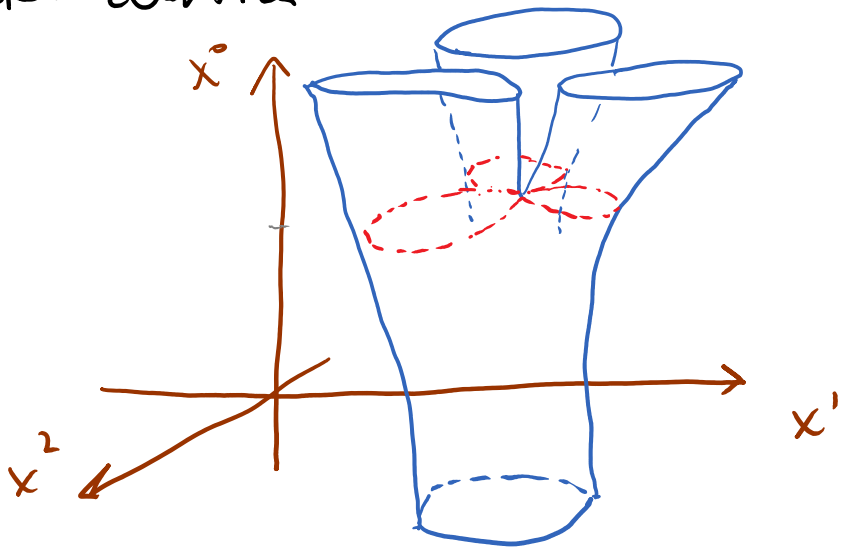


$= \lambda^2 \int d^D x\, d^D y \ldots$

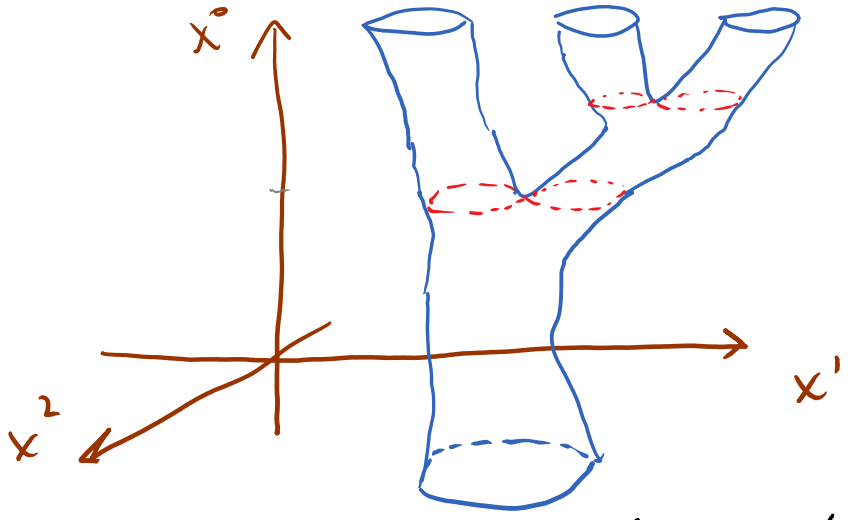
en el límite $x \to y$.

En cuerdas no existe tal posibilidad, y por esta razón el comportamiento UV se mejora drásticamente. (De hecho, ¡encontraremos que no existen ya divergencias UV!)

Ahora, ¿qué hay de la posibilidad de que 1 cuerda se convierta en 3 o más cuerdas? Aquí nos llevamos otra gran sorpresa: notamos que la trayectoria para una "interacción cuártica"



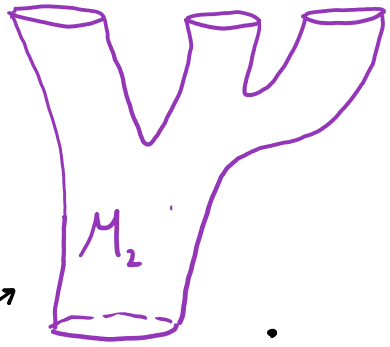
tiene exactamente la misma topología que la trayectoria con 2 "interacciones cúbicas"



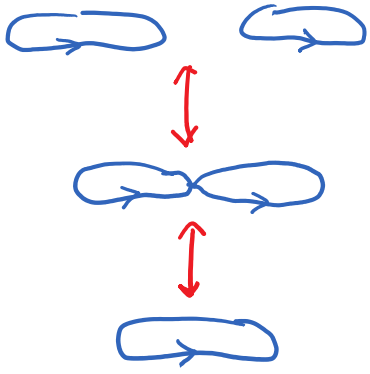
así que ambas posibilidades están automáticamente incluidas en la integral funcional correspondiente,

$$\int DX^{\mu}(\sigma)\Big|_{\mathcal{M}_2} e^{-S_p[X]},$$

en las funciones de encaje $X^{\mu}(\sigma)$ definidas sobre la hoja de mundo $\mathcal{M}_2$.

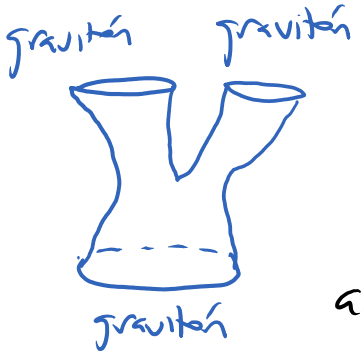


Más en general, la conclusión es que todos los posibles "vértices" se incorporan automática e inevitablemente al postular el proceso de interacción "cúbico" básico:

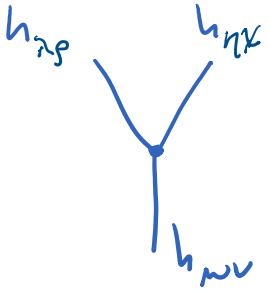


Sorprendentemente, dependiendo de los estados de oscilación

de las cuerdas inicial / final, ¡este único proceso de interacción puede reproducir todas las interacciones en la teoría de campos correspondiente! Veremos, p.ej., que



reproduce el vértice cúbico apropiado en la acción de Einstein-Hilbert



.

Hemos visto entonces que ¡¡ NO HAY LIBERTAD ALGUNA EN EL TIPO DE INTERACCIONES QUE SE PUEDEN AGREGAR !!

La incorporación de interacciones se logra simplemente sumando sobre hojas de mundo con distintas topologías

- no existe la posibilidad de inventar a mano distintos vértices asociados a reglas de Feynman arbitrarias.

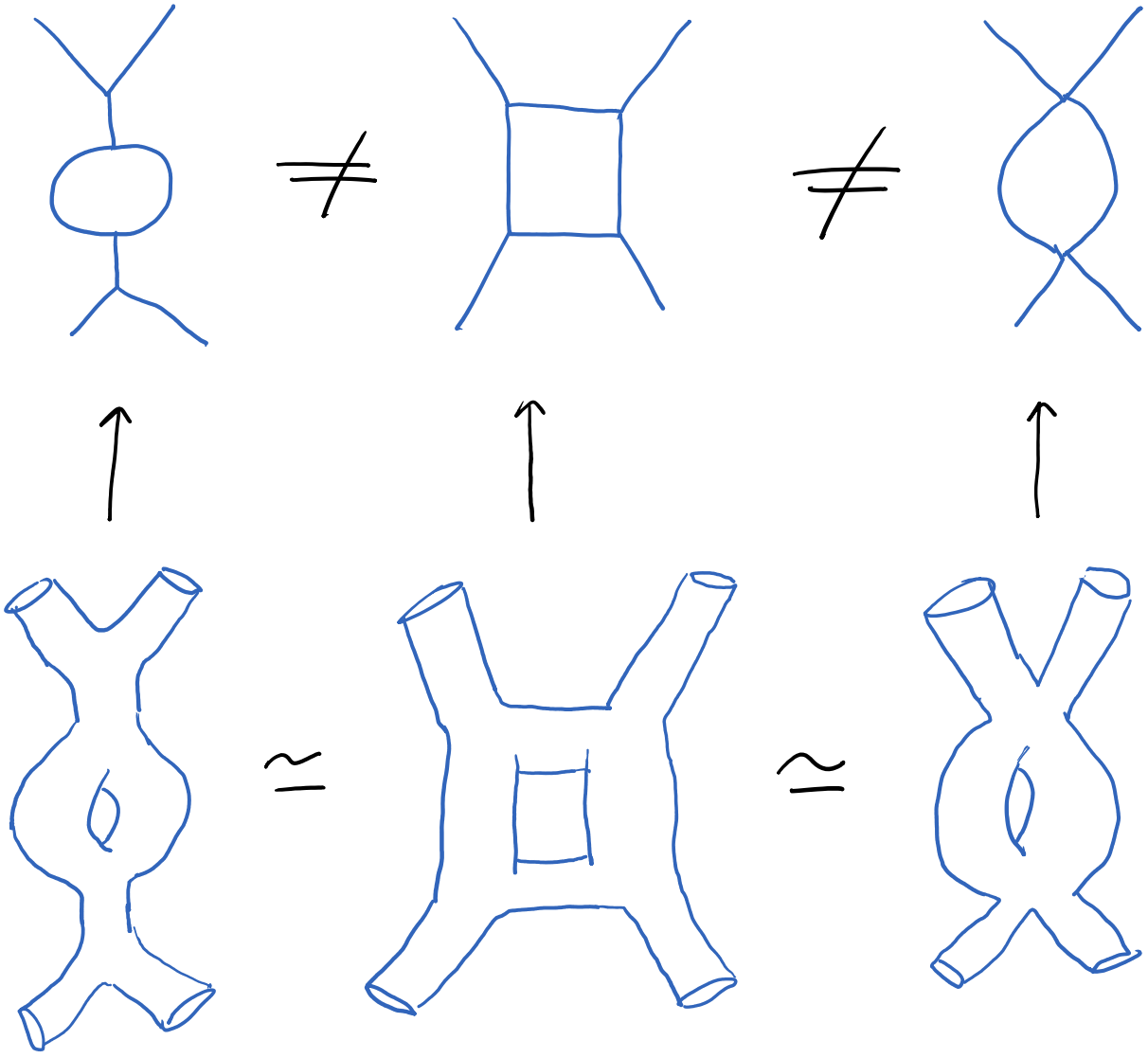
Es por esto que la primera cuantización en cuerdas es mucho más satisfactoria que en el caso de partículas.

L 19:18/10/21

Para definir una teoría de cuerdas, basta con especificar los grados de libertad (p.ej. X^μ) y la regla de propagación libre (p.ej. $S_p[X]$). Esta es la razón por la cual existen pocas

teorías de cuerdas, en comparación con muchísimas teorías de partículas.

Podemos notar además que diagramas de Feynman que serían distintos al nivel de partículas pueden ser equivalentes (por tener idéntica topología) al nivel de cuerdas:

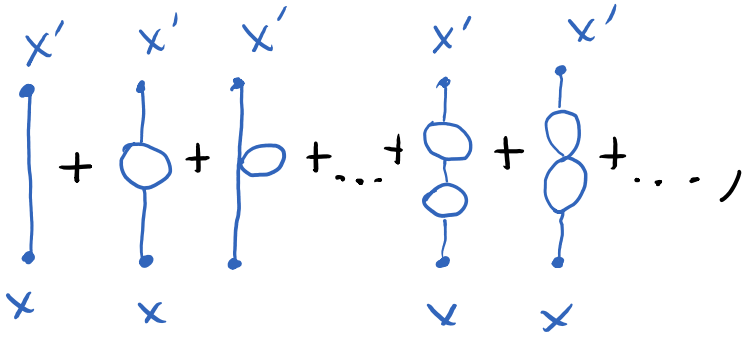


En el caso de cuerdas cerradas (y orientadas), la simplificación resulta ser tan drástica que existe 1 1 solo diagrama de Feynman en cada orden de la expansión perturbativa (vs. ~L! diagramas de partículas a L >> 1 lazos)!

L20: 18/10/23

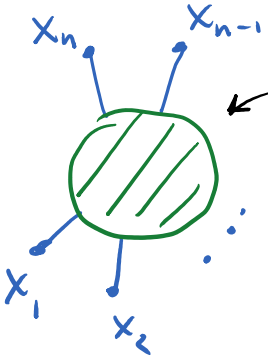
Ahora, para partículas, podemos calcular el propagador

$$\langle 0|T\{\varphi(x)\varphi(x')\}|0\rangle \sim$$



o más en general, funciones de correlación, ya sea en espacio de posiciones,

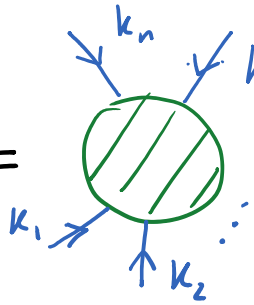
$$\langle 0|T\{\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\}|0\rangle =$$



suma sobre diagramas conexos (= sin "burbujas de vacío")

o en espacio de momentos,

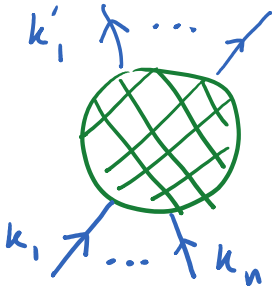
$$\int d^D x_1 e^{ik_1\cdot x_1}\cdots\langle 0|T\{\varphi(x_1)\cdots\}|0\rangle =$$



$$\delta^{(D)}(k_1+\ldots+k_n),$$

para después extraer (a través del procedimiento de "reducción LSZ") las amplitudes de dispersión

$$\mathcal{M}(k_1,\dots k_n \to k_1',\dots,k_{n'}') =$$

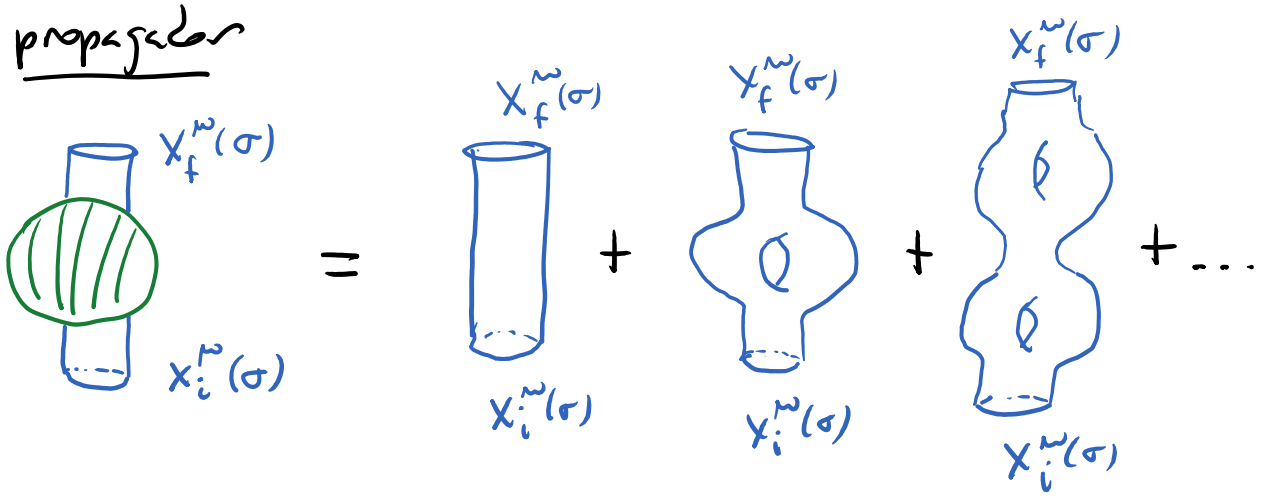


suma sobre diagramas conexos y amputados, con patas externas en la capa de masa

"elemento de matriz invariante"

(dato básico para calcular secciones eficaces o tasas de decaimiento).

En cuerdas, podríamos también intentar calcular correladores fuera de la capa de masa, como p.ej. el propagador



$$= \sum_{\mathcal{M}} \int_{\substack{X^\mu(\sigma',\sigma_f^2)=X_f^\mu(\sigma^2) \\ X^\mu(\sigma',\sigma_i^2)=X_i^\mu(\sigma')}} \mathcal{D}X^\mu(\sigma)\Big|_{\mathcal{M}}\; e^{-S_p[X]} .$$

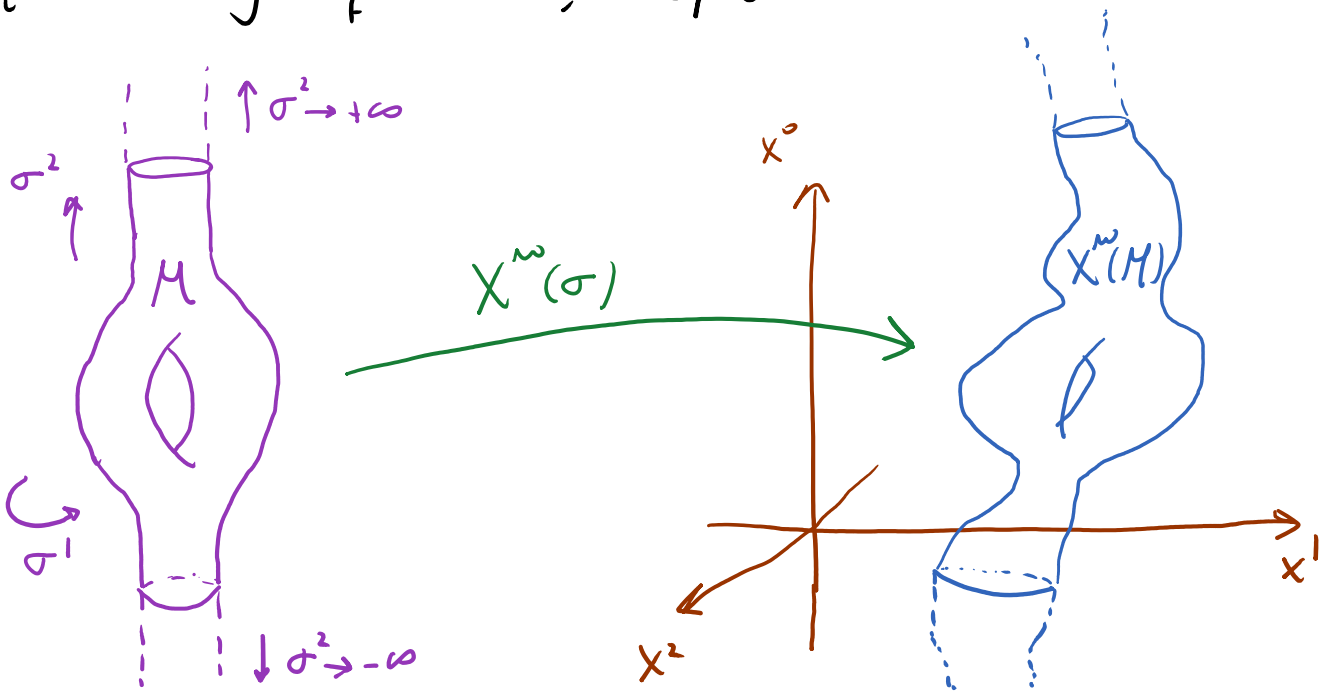
Pero resulta difícil definir estas cantidades locales de manera consistente con las simetrías. [Ver p.ej. artículos de Cohen, Moore, Nelson, Polchinski en '86 y '87.]

Curiosamente, se encuentra que preservar las simetrías en la hoja de mundo está relacionado con preservar las simetrías en el espaciotiempo, y debemos recordar que para las cuerdas (⇒ gravedad) estas últimas incluyen los difeos en el espaciotiempo. No es de extrañar entonces que sea difícil definir amplitudes entre puntos espaciotemporales específicos, porque en presencia de gravedad, las coordenadas con que etiquetamos a estos puntos NO tienen significado intrínseco.

Lo que sí podemos definir con relativa facilidad son cantidades globales de interés físico directo: las amplitudes de dispersión, que corresponden al caso particular donde las cuerdas se propagan desde el pasado remoto hasta el futuro remoto.

Las condiciones iniciales y finales para $\int \mathcal{D}X^{\mu}(\sigma)$ se

especifican entonces en $X_i^0 \to -\infty$ y $X_f^0 \to +\infty$, que podemos hacer corresponder en la hoja de mundo M con $\sigma_i^2 \to -\infty$ y $\sigma_f^2 \to +\infty$, respectivamente:



↑ en general harán falta varios parches de coordenadas para cubrir M

Necesitamos entonces calcular

$$\int DX^\omega(\sigma)\Big|_M e^{-S_p[X]},$$

donde M es una hoja de mundo con 2 o más tubos semi-infinitos.

$X^\omega(\sigma^1, +\infty) = X_f^\omega(\sigma^1)$

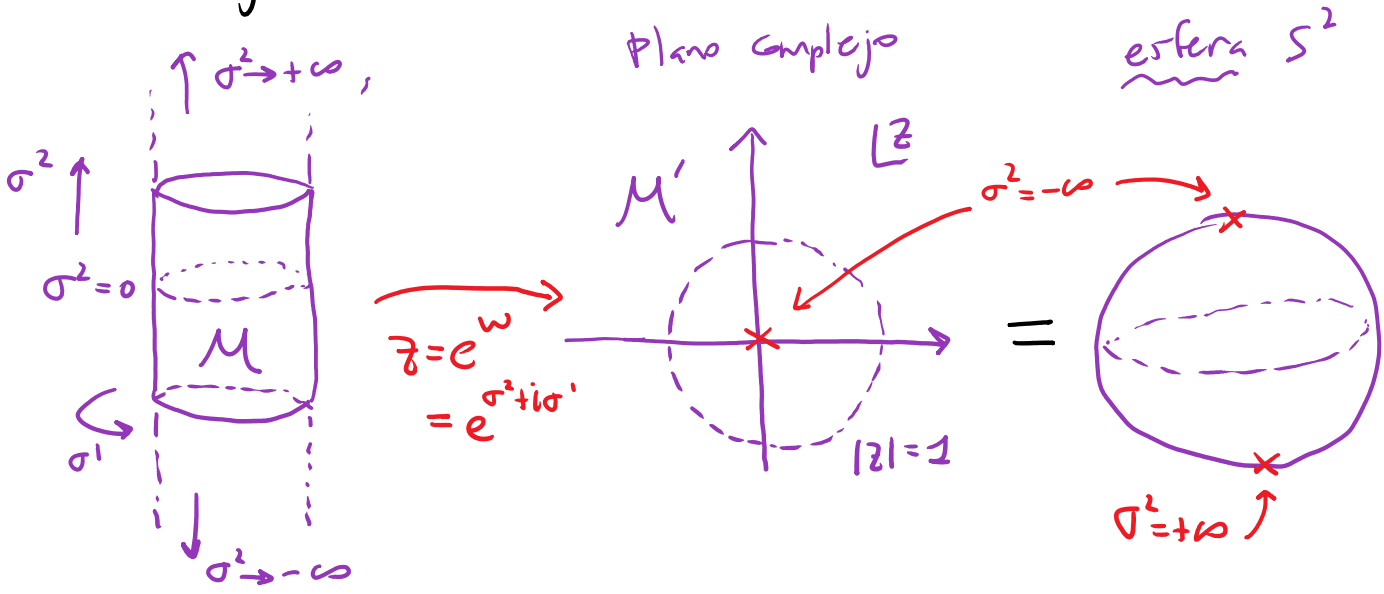
$X^\omega(\sigma^1, -\infty) = X_i^\omega(\sigma^1)$

11:16/04/13

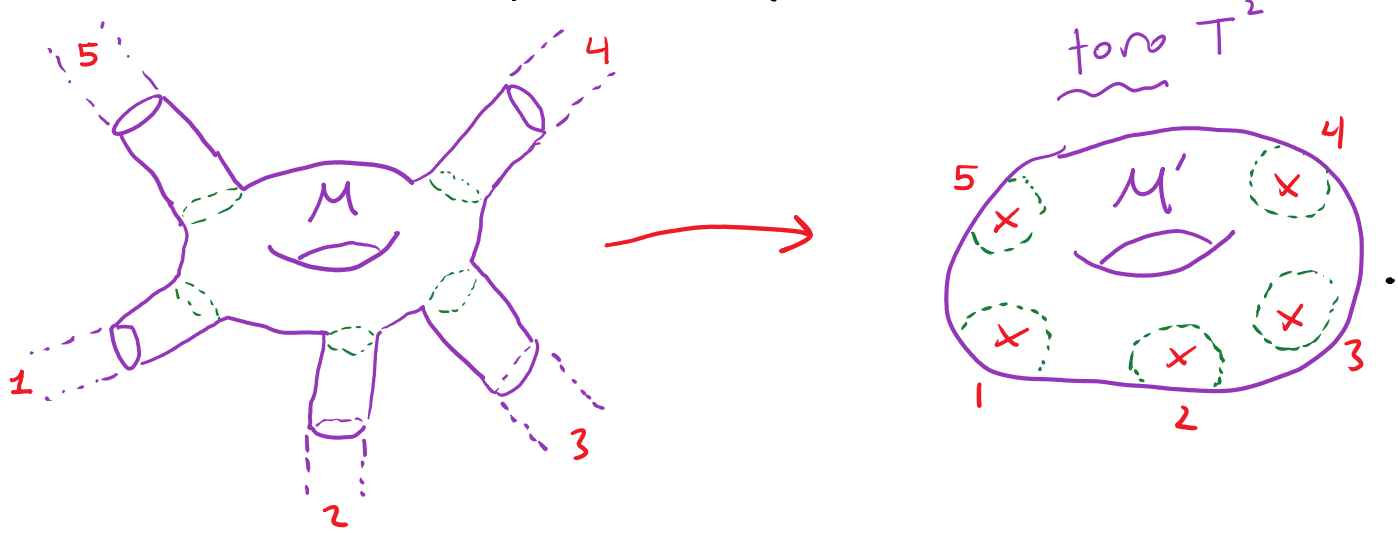
La invariancia conforme nos permite simplificar esta cuenta drásticamente: eligiendo una transformación conforme ($\leftrightarrow$ de Weyl) apropiada, podemos convertir a M en una

nueva hoja de mundo M' que sea compacta, es decir, ¡donde los tubos semi-infinitos sean reemplazados por discos de área finita!

Conocemos ya el ejemplo más sencillo de semejante acto de magia:



De manera similar, podemos lograr que



La forma explícita del mapeo requiere primero adoptar

coordenadas especificar en M, pero es claro que tiene que existir una transformación conforme así, puesto que el convertir un tubo semi-infinito en un disco, como hicimos arriba, es una transformación local en M, así que podemos hacerlo por separado en distintos parches de coordenadas.

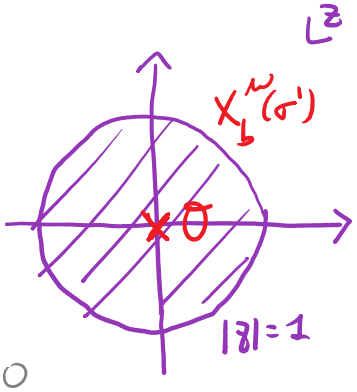
Después de esta transformación, la información sobre los estados iniciales/finales se debe especificar en los puntos marcados (que antes correspondían a $\sigma^2 \to \pm\infty$), a través de la inserción de operadores locales $V_i(\tau_i, \bar{\tau}_i)$ $i=1,\dots,n$, que llamamos operadores de vértice. A pesar de su nombre, representan no vértices de interacción, sino patas externas ← computados ↔ estados asintóticos (adheridas a M en un "vértice").

Debemos entonces ser capaces de construir uno de estos operadores por cada estado de vibración de la cuerda. Esta es de hecho una idea más general, que no aplica solo para la teoría de cuerdas: en cualquier teoría de campos conforme, existe un isomorfismo entre estados y operadores,

que se conoce simplemente como el **mapeo estado-operador**.

Hemos visto ya cómo podemos pasar de un estado a un operador. La relación inversa se puede establecer asociando a un operador $\mathcal{O}(z,\bar{z})$ el funcional

$$\Psi[X_b^\mu(\sigma')] \equiv \int_{X^\mu(|z|=1)=X_b^\mu(\sigma')} \mathcal{D}X^\mu(z,\bar{z}) \Big|_{|z|\le 1} e^{-S_p[X]}\, \mathcal{O}(0,0),$$



implementa evolución temporal de $\sigma^2=-\infty$ a 0

que se puede interpretar como la funcional de onda de un estado $|\Psi\rangle$:

$$\Psi[X_b^\mu(\sigma')] = \langle X_b^\mu(\sigma')|\Psi\rangle$$

caso particular $\mathcal{O}=1$ reproduce la construcción usual para el estado base de la teoría, $|\Omega\rangle$

(análogo a $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$).

Una observación útil es la siguiente: dado un operador $\mathcal{O}(0,0)$ y una carga conservada $Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} j(z)$,

si $|\Psi_\mathcal{O}\rangle \longleftrightarrow \mathcal{O}(0,0)$, (mapeo estado-operador)

entonces $Q|\Psi_\mathcal{O}\rangle \longleftrightarrow [Q,\mathcal{O}(0,0)]$, (*)

$Q|\Psi_\mathcal{O}\rangle$: cambio en el estado; $[Q,\mathcal{O}(0,0)]$: cambio en el operador bajo la transformación generada por Q.

Recordamos de la p.204 que el lado derecho es

$$[Q, \mathcal{O}(0,0)] = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, \underbrace{j(z)\,\mathcal{O}(0,0)}_{\text{usar EPO (OPE)}} ,$$

Notemos en particular que con $Q = L_{-1}$ ($\leftrightarrow$ translación en z), esto sirve para determinar el estado $\exp[i(zL_{-1} + \bar{z}\tilde{L}_{-1})]|\Psi_0\rangle$ que corresponde a $\mathcal{O}(z,\bar{z})$ en lugar de a $\mathcal{O}(0,0)$.

Ahora procederemos a deducir la forma explícita del mapeo estado-operador en el caso de la teoría conforme $S_p[X]$ utilizando la ec. (*) de la p. anterior, con las cargas (p.188)

$$\alpha_m^\mu = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \int \frac{dz}{2\pi i}\, z^m\, \partial X^\mu(z) .$$

Determinemos primero cuál es el estado

¿ $|\Psi_1\rangle$? $\longleftrightarrow$ $\mathcal{O}(0,0) = 1$ ← operador identidad . Tenemos

$$\alpha_{m\geq 0}^\mu |\Psi_1\rangle \longleftrightarrow i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^m \underbrace{\partial X^\mu(z)\cdot 1}_{:\partial X^\mu(z):} = 0$$

↑ no hay polo simple

$$\partial X^\mu(0) + z\,\partial^2 X^\mu(0) + \ldots$$

$$\Rightarrow \alpha_{m\geq 0}^\mu |\Psi_1\rangle = 0 ,$$

y similarmente

$$\tilde{\alpha}^{\mu}_{m\geq 0}|\Psi_1\rangle = 0 \,,$$

así que podemos inferir que

$$\boxed{|\Psi_1\rangle = |\underset{\text{vacío de } \alpha\text{s}}{0},\underset{\text{vacío de } \tilde{\alpha}\text{s}}{0};\underset{\text{eigenvalor de } p^{\mu}=\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\,\alpha_0^{\mu}=\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\,\tilde{\alpha}_0^{\mu}}{0}\rangle \,.}$$

Por otro lado,

$$\underset{m>0}{\alpha^{\mu}_{-m}}|\Psi_1\rangle \longleftrightarrow \left\{ i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{-m}\, \underbrace{\partial X^{\mu}(z)\cdot 1}_{\partial X^{\mu}(0)+z\partial^2 X^{\mu}(0)+\ldots+\frac{z^{m-1}}{(m-1)!}\partial^m X^{\mu}(0)+\ldots} \right. ?$$

es decir,

$$\boxed{\alpha^{\mu}_{-m}|0,0;0\rangle \longleftrightarrow i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\,\frac{1}{(m-1)!}\,\partial^m X^{\mu}(0)} \,.$$

término que da polo simple

Consideremos ahora

$$\alpha^{\nu}_{-n}\left(\alpha^{\mu}_{-m}|\Psi_1\rangle\right) \longleftrightarrow \left\{ \left(i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\right)^2 \frac{1}{(m-1)!} \times \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{-n}\, \underbrace{\partial X^{\nu}(z)\partial^m X^{\mu}(0)}_{:\partial X^{\nu}(z)\partial^m X^{\mu}(0): + \underbrace{\partial\partial'^m\left[-\frac{\alpha'}{2}\eta^{\nu\mu}\ln|z-z'|^2\right]_{z'=0}}_{\propto z^{-m-1}\text{: No da polo simple}}} \right. ?$$

$$\downarrow$$

$$\partial X^{\nu}(0)+\ldots+\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}\partial^n X^{\nu}(0)+\ldots \,,$$

es decir,

$$\alpha_{-n}^{\nu}\alpha_{-m}^{\mu}|0,0;0\rangle \longleftrightarrow \left(i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\right)^2 \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{(m-1)!} :\partial^n X^\nu \partial^m X^\mu(0):$$

Este mismo patrón claramente continúa si actuamos con α's adicionales, así que

$$\alpha_{-m_1}^{\mu_1}\cdots\alpha_{-m_n}^{\mu_n}|0,0;0\rangle \longleftrightarrow \left(i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\right)^n \frac{1}{(m_1-1)!}\cdots\frac{1}{(m_n-1)!} :\partial^{m_1}X^{\mu_1}\cdots\partial^{m_n}X^{\mu_n}(0):$$

De manera similar, actuar con $\tilde{\alpha}_{-m}^{\mu}$ evidentemente corresponde a agregar $i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\frac{1}{(m-1)!}\bar{\partial}^m X^\mu(0)$ dentro del producto en orden normal.

Por último, ← operador de traslación en momento

$$|0,0;k\rangle \equiv e^{ik\cdot\hat{x}}|0,0;0\rangle \longleftrightarrow :e^{ik\cdot X(0,0)}:.$$

Efectivamente, podemos comprobar que

$$k^\mu |0,0;k\rangle = p^\mu |0,0;k\rangle = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\,\alpha_0^\mu |0,0;k\rangle$$

← $: 1 + ik\cdot X + \frac{1}{2!}(ik\cdot X)^2 + \dots :$

$$\overset{?}{\longleftrightarrow} \; i\frac{2}{\alpha'}\oint \frac{dz}{2\pi i}\,\underbrace{\partial X^\mu(z)\,:e^{ik\cdot X(0,0)}:}$$

$$ik^\mu \underbrace{\partial\left[-\frac{\alpha'}{2}\ln|z|^2\right]}_{-\frac{\alpha'}{2}\frac{1}{z}} :e^{ik\cdot X(0,0)}: \; + \; \underbrace{:\partial X^\mu(z)\,e^{ik\cdot X(0,0)}:}_{\text{No da polo}}$$

$$= i^2\frac{2}{\alpha'}\left(-\frac{\alpha'}{2}\right)k^\mu \oint\frac{dz}{2\pi i}\frac{1}{z}\,:e^{ik\cdot X(0,0)}:$$

$$= k^\mu\,:e^{ik\cdot X(0,0)}:\,.$$

$:e^{ik\cdot X(0,0)}:$ es eigenoperador de p^μ con eigenvalor k^μ ✓

Cualquier estado se puede obtener actuando con α_{-m}^μs, $\tilde{\alpha}_{-n}^\nu$s y $e^{ik\cdot\hat{x}}$ sobre $|0,0;0\rangle$. Según hemos visto, el operador correspondiente es simplemente el producto de los operadores individuales, en orden normal conforme. ← queda claro que este orden es útil

[21:23/10/23]

Así que, p.ej., el operador de vértice para el taquión es

$$|0,0;k\rangle \longleftrightarrow V_k(z,\bar{z};k) \equiv :e^{ik\cdot X(z,\bar{z})}:$$

y hereda las propiedades del estado físico, p. 217

$L_{n>0}|0,0;k\rangle = 0 \longleftrightarrow [L_{n>0}, V_\phi(0,0;k)] = 0$ (vacío de osciladores; $z\ \bar{z}$)

$\tilde{L}_{n>0}|0,0;k\rangle = 0 \longleftrightarrow [\tilde{L}_{n>0}, V_\phi(0,0;k)] = 0$ } V_ϕ es primario

$(L_0 - 1)|0,0;k\rangle = 0 \longleftrightarrow [L_0, V_\phi(0,0;k)] = V_\phi(0,0;k)$

$(\tilde{L}_0 - 1)|0,0;k\rangle = 0 \longleftrightarrow [\tilde{L}_0, V_\phi(0,0;k)] = V_\phi(0,0;k)$ } tiene pesos conformes

$a=1$ p. 214 $\longrightarrow$ $h=1, \tilde{h}=1$

Esto último es consistente con lo que aprendimos en la Tarea 2: el operador $:\exp[ik\cdot X(z,\bar{z})]:$ tiene pesos conformes $(h,\tilde{h}) = \frac{\alpha'}{4}(k^2, k^2)$, que en efecto se reducen a $(1,1)$ usando la condición de capa de masa para el taquión, $k^2 = 4/\alpha' \leftrightarrow m^2 = -4/\alpha'$.

Bajo una transformación conforme $z \to z'(z)$, tenemos entonces (p. 216)

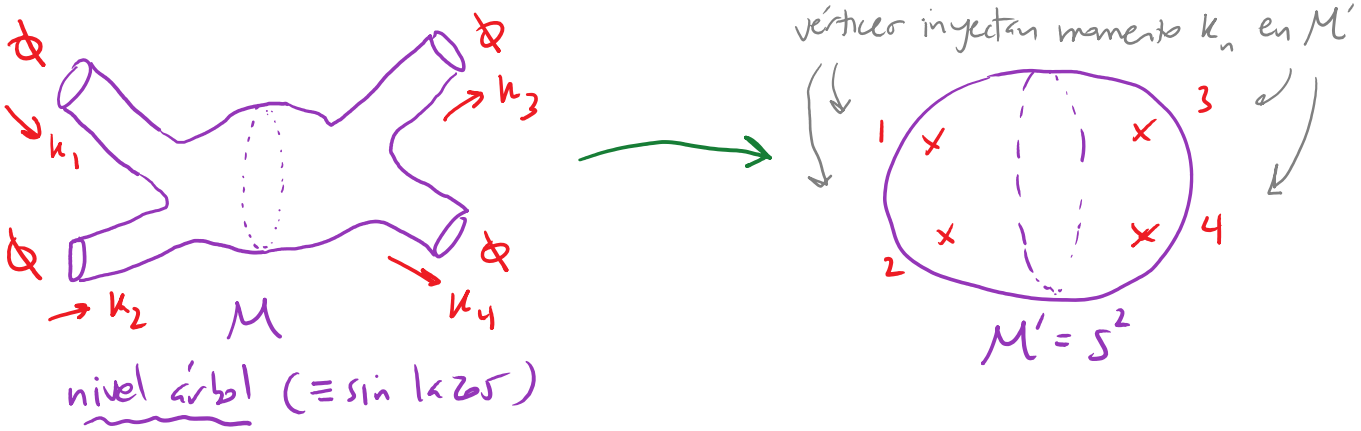
$$V_\phi(z,\bar{z}) \longrightarrow V'_\phi(z',\bar{z}') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}\right)^{-1} V_\phi(z,\bar{z}),$$

y por tanto

$$V_\phi(k) \equiv N_\phi \int d^2z\, V_\phi(z,\bar{z};k) \text{ es invariante conforme.}$$

(N_ϕ: cte. de normalización)

Esta versión integrada del vértice es entonces la que usaremos en el cálculo de amplitudes de dispersión, para respetar las simetrías locales en la hoja de mundo (y tendremos por tanto aquí otra manera de entender por qué $a=1=\tilde{a}$):

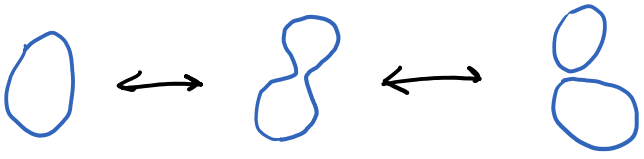


$$\mathcal{M}^{(0)}(k_1,\cdots,k_4) \sim \int \mathcal{D}X^M(z,\bar{z})\Big|_{S^2} e^{-S_\sigma[X]} V_\phi(k_1)\cdots V_\phi(k_4).$$

La integral $\int d^2 z_n$ contenida dentro de cada V_n es parte de la suma sobre todos los procesos posibles (salvo por una sutileza que veremos más adelante).

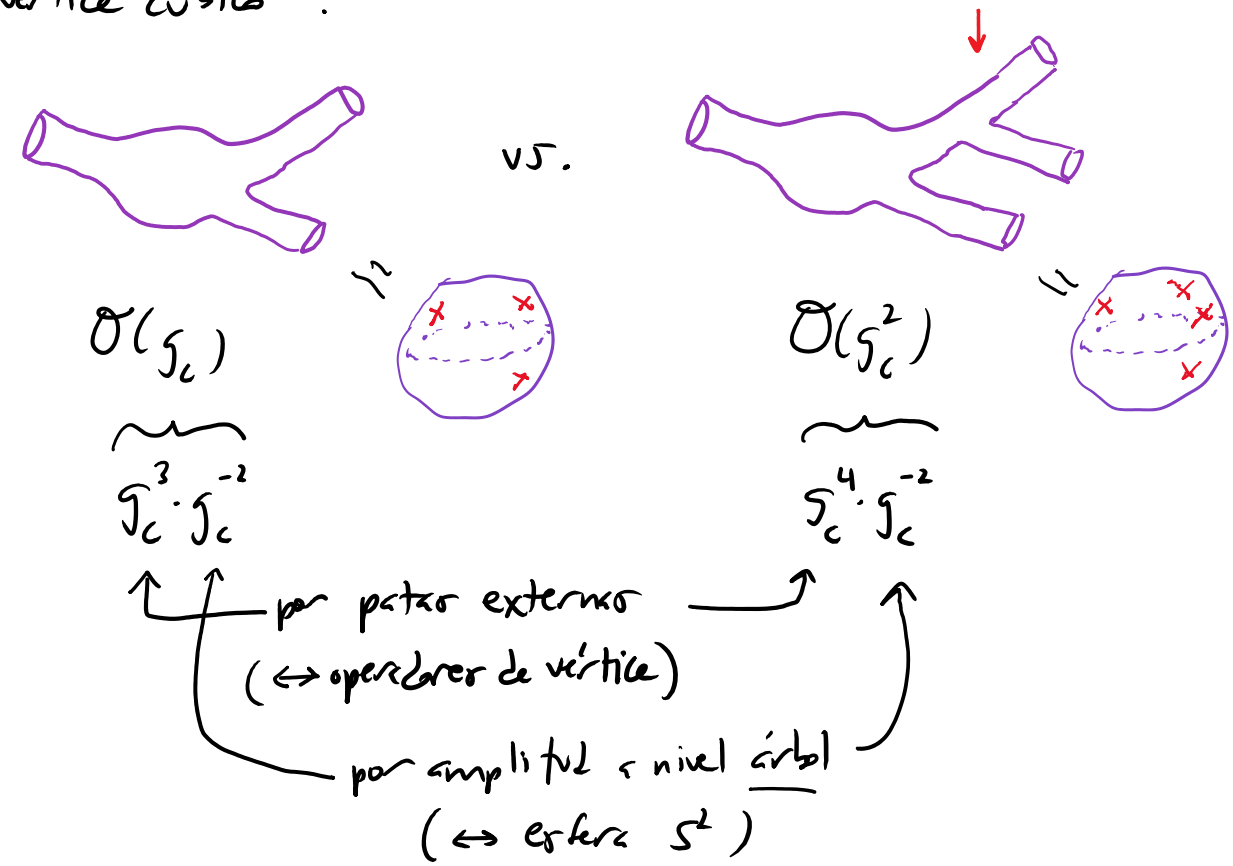
L21: 20/10/21

Notar que, si definimos la constante de acoplamiento de cuerdas g_c (en inglés, g_s) como el número adimensional que determina la amplitud de probabilidad del proceso de interacción básico



y controla por tanto la expansión perturbativa (de

modo que la teoría esté débilmente acoplada si $g_c \ll 1$), entonces debemos tener $N_\phi \propto g_c$, porque cada pata externa adicional en un diagrama requiere la presencia de un nuevo "vértice cúbico":



Fijaremos una convención precisa para N_ϕ y demás constantes de normalización más adelante.

Otro ejemplo sería el operador de vértice para el gravitón

$$\varepsilon_{\mu\nu}\, \alpha_{-1}^{\mu}\, \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu}\, |0,0;k\rangle \overset{\text{p. 318}}{\longleftrightarrow} V_h(z,\bar{z};k,\varepsilon) \equiv :\varepsilon_{\mu\nu}\, \partial X^{\mu}\, \bar{\partial} X^{\nu}\, e^{ik\cdot X(z,\bar{z})}:$$

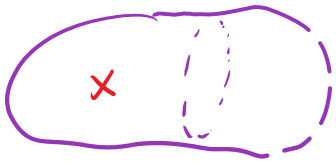
↳ simétrico

↳ dejar $\left(i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\right)^2$ para N_h

$$V_h(k,\varepsilon) \equiv N_h \int d^2z\, V_h(z,\bar z; k,\varepsilon),$$

↑ también $\propto g_c$

que al insertarse en una hoja de mundo, inyecta momento y la vibración apropiada.



De manera similar, podemos escribir el operador de vértice para cualquier estado de la cuerda (en lo que a los X^μ respecta). En todos los casos, las condiciones de estado físico se traducen en que el operador de vértice correspondiente es primario y con pesos conformes $h=1=\tilde h$. P.ej., de la Tarea 2 sabemos que $V_h(z,\bar z; k,\varepsilon)$ efectivamente es primario solo si $k^\mu \varepsilon_{\mu\nu}=0$, y tiene pesos conformes

$$(h,\tilde h) = \left(\frac{\alpha' k^2}{4}+1, \frac{\alpha' k^2}{4}+1\right) = (1,1) \quad \text{solo si } k^2=0.$$

Con un procedimiento análogo podemos determinar el mapeo estado-operador para los fantasmas: Sabemos (p. 277) que

$$b_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} b(z) \qquad \left(\leftrightarrow b(z) = \sum_m \frac{b_m}{z^{m+2}}\right)$$

$$c_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m-2} c(z) \qquad \left(\leftrightarrow c(z) = \sum_m \frac{c_m}{z^{m-1}}\right),$$

así que

$$b_m|\Psi_1\rangle = 0 \quad \forall\ m \geq -1, \qquad c_m|\Psi_1\rangle = 0 \quad \forall\ m \geq 2 .$$

Inferimos entonces que

$$\boxed{|\Psi_1\rangle = b_{-1}|\downarrow\rangle} \qquad \text{(recordar que } \{b_m, c_n\} = \delta_{m,-n}\text{)}.$$

Podemos similarmente deducir que

$$\boxed{b_{-m} \leftrightarrow \frac{1}{(m-2)!}\partial^{m-2} b(0) \quad \forall\ m \geq 2, \qquad c_{-m} \leftrightarrow \frac{1}{(m+1)!}\partial^{m+1} c(0)}$$

y que, nuevamente, aplicaciones sucesivas de los modos de creación se traduce en el producto de los operadores correspondientes en orden normal conforme.

Así que, en particular,

$$|\downarrow\rangle = c_1 b_{-1}|\downarrow\rangle \quad \longleftrightarrow \quad c(0),$$

$b_{-1}|\downarrow\rangle \leftrightarrow 1$; $c_1 \leftrightarrow$ p. 299

y por tanto, los representantes de las clases de equivalencia

$$|\Psi_{V_x}\rangle|\downarrow\downarrow\rangle \quad \longleftrightarrow \quad V_x(0,0)\, c(0)\tilde{c}(0) .$$

Construido solo en X^m

Conviene notar que si $V_x(z,\bar{z})$ corresponde a un estado

físico (primario con pesos conformes $(h,\tilde{h})=(1,1)$), entonces (dado que $c(z)$ tiene pesos $(-1,0)$ y $\tilde{c}(\bar{z})$ tiene pesos $(0,-1)$) la combinación $c(z)\tilde{c}(\bar{z})V_X(z,\bar{z})$ es invariante conforme, justo como $V_X = \int d^2z\, V_X(z,\bar{z})$. Usaremos esto más adelante.

Resumiendo lo dicho hasta aquí, nuestra receta básica para calcular amplitudes de dispersión (más específicamente, el elemento de matriz invariante) es

$$\mathcal{M}(k_1,k_2,\dots,k_N) = \sum_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_{\mathcal{M}}(k_1,k_2,\dots,k_N) \quad ,$$

hojas de mundo

con $$\mathcal{M}_{\mathcal{M}}(k_1,\dots,k_N) \equiv \underbrace{\int \frac{\mathcal{D}g_{ab}(\sigma)\mathcal{D}X^{\mu}(\sigma)}{\text{Difx Weyl}}\Big|_{\mathcal{M}} e^{-S_p[g,X]} V_1(k_1)\cdots V_N(k_N)}_{\equiv \langle V_1(k_1)\cdots V_N(k_N)\rangle_{\mathcal{M}}}$$

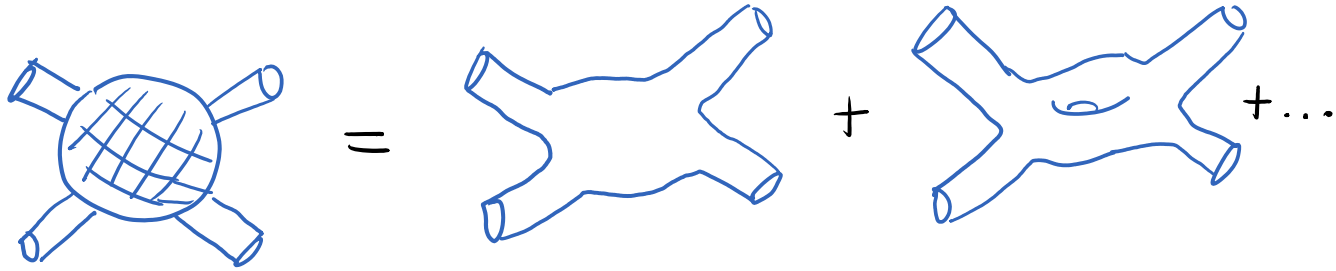
$$V_n(k) = \mathcal{N}_n \underbrace{\int d^2\sigma \sqrt{g}\, V_i(\sigma;k)}_{\text{Invariante bajo Difx Weyl}}$$

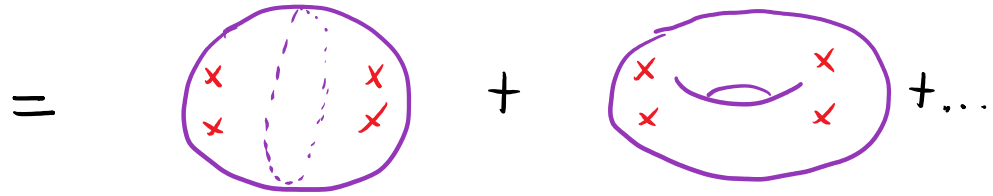
($\Rightarrow$ invariante conforme en norma plana)

No podemos calcular amplitudes fuera de la capa de masa

Hemos visto que esto requiere en particular $\boxed{k^2 = -m^2}$

O, en términos de diagramas,





$$= \langle V_1 \cdots V_N \rangle_{S^2} + \langle V_1 \cdots V_N \rangle_{T^2} + \ldots$$

De esta forma, ¡¡calculando correladores en una teoría de campos libre 2-dimensional podremos determinar amplitudes de dispersión en una teoría interactuante D-dimensional que incluye a la gravedad!!

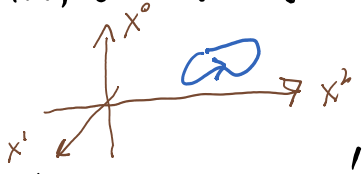
22 : 25/10/23 (con mucha pregunta)

Hagamos aquí una pausa para resaltar una conexión interesante. Hasta ahora hemos identificado al gravitón libre (en $D=26$)

$$\varepsilon_{\mu\nu}\, \alpha_{-1}^{\mu}\, \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu}\, |0,0;k\rangle \qquad \text{incluye } \frac{2}{\alpha'}$$

$$\longleftrightarrow V_h(k,\varepsilon) = N_h \int d^2z\, \varepsilon_{\mu\nu} :\partial X^{\mu} \bar{\partial} X^{\nu} e^{ik\cdot X}(z,\bar{z}):$$

con base en sus propiedades de transformación bajo Poincaré: masa cero, espín 2. Con la receta para amplitudes de dispersión, podremos próximamente verificar que estos 'gravitones' realmente interactúan como Einstein predice (salvo pequeñas correcciones, relevantes solo a altas energías).



Pero, aún así, lo que no queda del todo claro es en qué sentido este estado de oscilación de la cuerda tiene que ver con el gravitón entendido como una pequeña fluctuación de la geometría. Esto se aclara si notamos que cuando la métrica del espaciotiempo es

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x),$$

tenemos

$$S_p^g[X] = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\ \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu g_{\mu\nu}(X)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\ \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu \eta_{\mu\nu}}_{S_p[X]\ \text{en fondo plano}} + \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\ \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu h_{\mu\nu}(X),$$

por lo que la integral funcional relevante es

$$\int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_p^g[X]} = \int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_p[X]} \left(1 - \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\, h_{\mu\nu}(X)\partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu + \dots\right).$$

↑ si $|h_{\mu\nu}| \ll 1$

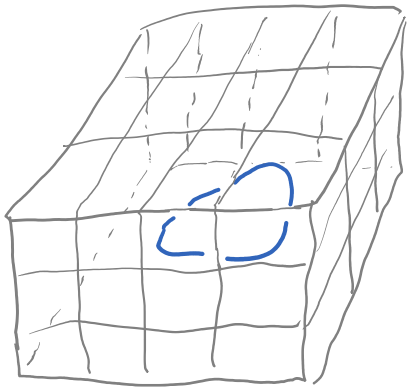
Tomando 1 sólo modo de Fourier, $h_{\mu\nu}(X) = \varepsilon_{\mu\nu} e^{ik\cdot X}$, vemos que lo que aparece en el integrando es precisamente el vértice del gravitón $V_h(k,\varepsilon)$!

Sabemos ya que insertar 1 vértice $V(k,\varepsilon)$ corresponde a agregar 1 gravitón $\varepsilon_{\mu\nu}\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle$, así que insertar $e^{-V_h(k,\varepsilon)}$ corresponde a agregar una especie de estado coherente de gravitones $\sim \exp(-\varepsilon_{\mu\nu}\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle)$ $(\neq \exp(-\varepsilon_{\mu\nu}\alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu)|0,0;k\rangle$, que sería 1 única cuerda excitada en un estado coherente de oscilación, es decir, un estado coherente desde la perspectiva 2-dimensional).

Y, con lo que acabamos de ver, aprendemos entonces que ¡un fondo con métrica $g_{\mu\nu}(x)$ no trivial en verdad puede entenderse como un estado coherente de gravitones !

De manera similar, la receta para describir cuerdas que

se propagan sobre un fondo no trivial de cualquiera de los infinitos campos asociados a estados de vibración de las cuerdas ($\Phi(x)$, $g_{\mu\nu}(x)$, $B_{\mu\nu}(x)$, $\varphi(x)$, ...) es exponencial los operadores de vértice correspondientes. Verificamos entonces la interpretación ya enfatizada en varios puntos a lo largo del curso, donde entendemos a las cuerdas como pequeñas excitaciones de una estructura subyacente que representa una drástica generalización del espaciotiempo.



No debe confundirnos el hecho de que tengamos cuerdas propagándose sobre un fondo que a su vez está, en cierto sentido, "hecho" de cuerdas. Esta situación es exactamente análoga a la de fotones propagándose a través de, p.ej., el campo magnético terrestre. En ambos casos, estamos hablando de pequeñas fluctuaciones por encima de un valor de fondo no trivial para el campo correspondiente.

12!: 25/10/21

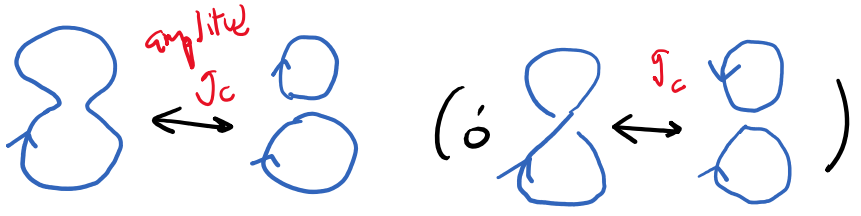
Regresando a las amplitudes de dispersión, hemos visto que debemos sumar sobre superficies M compactas y conexas (para obtener la parte conexa de la amplitud); pero ¿exactamente de qué tipo?

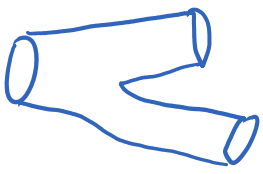
En los viejos tiempos, antes de que se descubrieran las D-branas, la respuesta a esta pregunta habría dependido de y definido a exactamente cuál teoría de cuerdas bosónicas estamos considerando. Más concretamente, pensábamos que existían (al menos) 4 teorías de cuerdas bosónicas distintas:

1) Cuerdas Bosónicas cerradas orientadas

Espectro libre: ϕ ; $\varphi, h_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$; ...

$m^2 = -4/\alpha'$ $\quad m^2 = 0$ $\quad m^2 = 4/\alpha', \ldots$

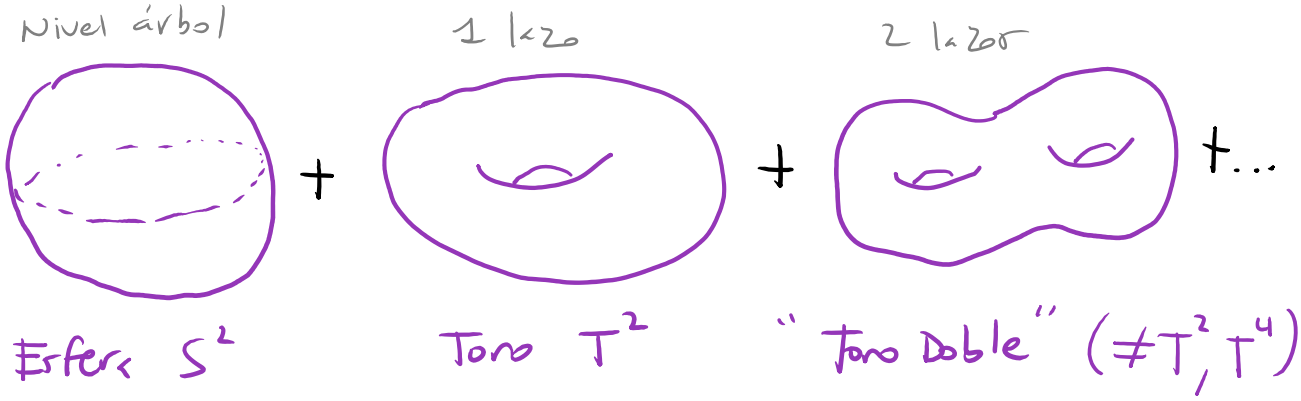
1 sola interacción: 

correspondiente al diagrama 

cuerdas se pueden dividir pero no romper (abrir)

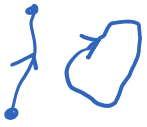
Así que en este caso, la expansión perturbativa consiste

de una suma sobre superficies orientables y sin bordes:



Género $m = 0$ $m = 1$ $m = 2$

↑ ≡ número de 'manijas'

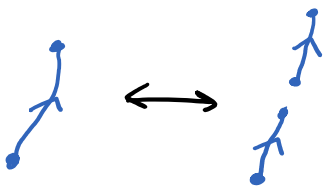
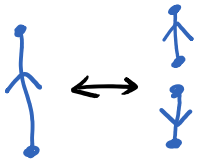
2) Cuerdas Bosónicas Abiertas y Cerradas Orientadas 

(donde en los viejos tiempos se consideraba solo el caso invariante de Poincaré, con las cuerdas abiertas pudiendo moverse en $D = 26 \leftrightarrow$ D25-branas están presentes).

Espectro libre: ϕ, ϕ; A_μ, φ, $h_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$; ...

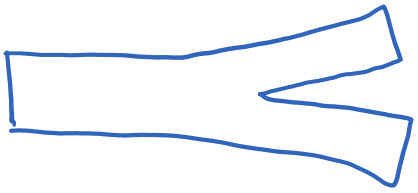
$m^2 = -4/\alpha'$ $-1/\alpha'$ 0 $1/\alpha'$, $2/\alpha'$, etc.

La interacción básica para las cuerdas abiertas es

 (no es posible  ,

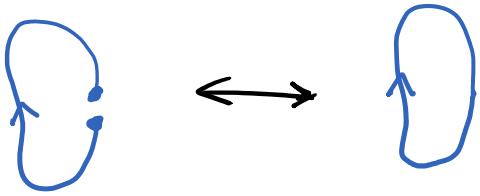
orientada

así que los 2 extremos de la cuerda abierta NO son físicamente equivalentes), correspondiente al diagrama



.

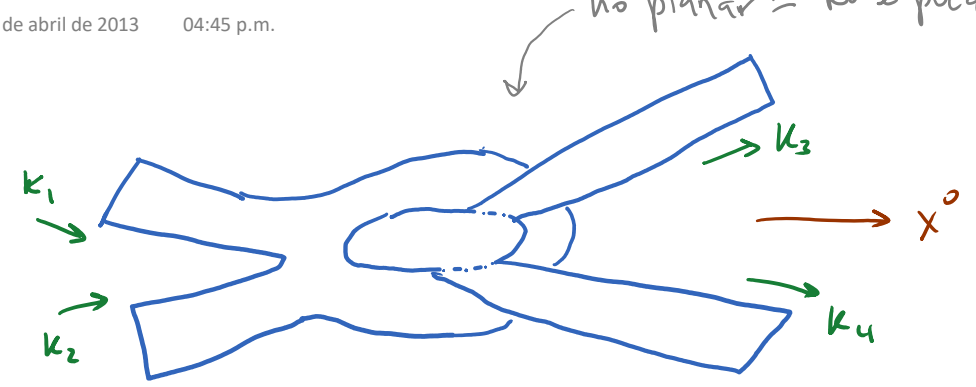
Importantemente, dado que la posibilidad de que 2 extremos se unan es un proceso puramente local, en automático queda incluido también el proceso



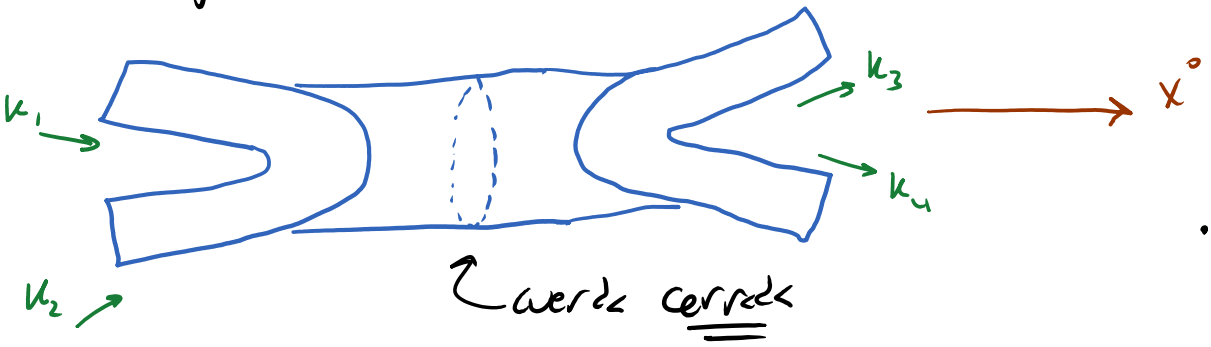
.

Descubrimos entonces que ¡no puede existir una teoría de cuerdas abiertas (interactuantes) sin cerradas! Y esto implica en particular que cualquier teoría de cuerdas inevitablemente incluye a la gravedad.

Otra manera de decir esto mismo es que un proceso "no planar" de dispersión a 1 lazo en cuerdas abiertas en el espaciotiempo, como p.ej.



tiene la misma topología, y por tanto es descrito con la misma hoja de mundo M que



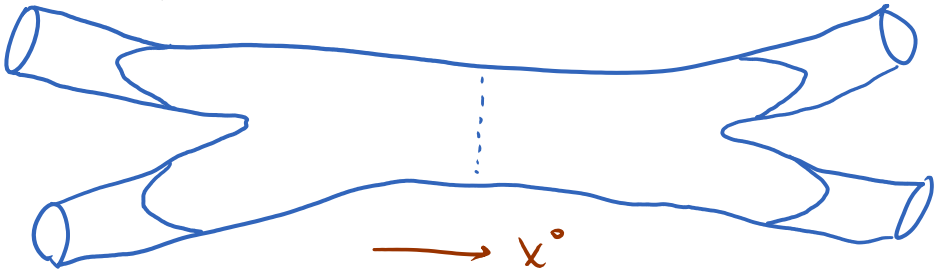
La integral $\int DX\tilde{\omega}(\sigma)|_M e^{-S_p[X]} V_1(k_1)\cdots$ incluye inevitablemente ambos procesos, y por esta razón, al hacer el cálculo se encuentra que dicha amplitud de cuerdas abiertas tiene polos cuando la energía en el marco del centro de masa

$$s \equiv -(k_1+k_2)^2 = -\frac{4}{\alpha'}, 0, \frac{4}{\alpha'}, \ldots,$$

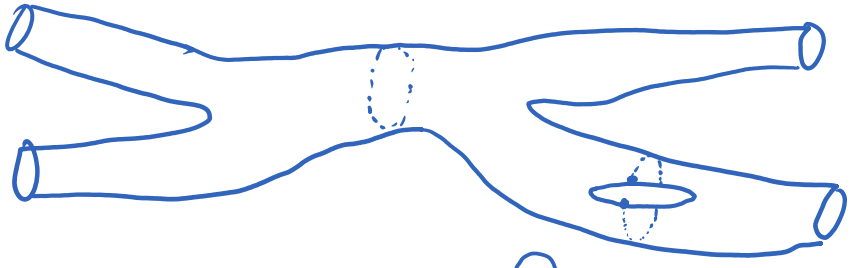
que coinciden justamente con el espectro de cuerda cerrada. Esto establece "experimentalmente" la existencia de las cuerdas cerradas, que deben entonces incluirse en la teoría como estados asintóticos (la conexión entre

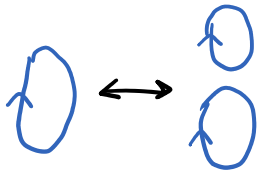
polos y estados asintóticos de 1 partícula es bien conocida en teoría de campos: Källen-Lehmann, LSZ). LL2 · 23/04/13

Podemos notar además que estas cuerdas cerradas NO son libres, porque cuando menos pueden interactuar convirtiéndose primero en cuerdas abiertas:



Y de hecho, la integral $\int \mathcal{D}X^{\mu}(\sigma)|_{M} e^{-S_p[X]} V_1(k_1)\cdots$ que describe este proceso incluye también p.ej.

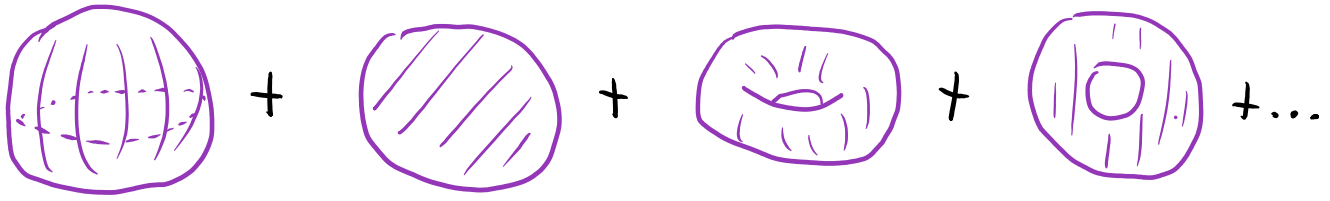


así que la interacción  no es opcional.

En esta teoría, entonces, la expansión perturbativa consiste de la suma sobre superficies orientables, con o sin bordes:

lunes, 22 de abril de 2013 05:15 p.m.

árbol cuerda cerrada | árbol cuerda abierta | 1 lazo cuerda cerrada | 1 lazo cuerda abierta

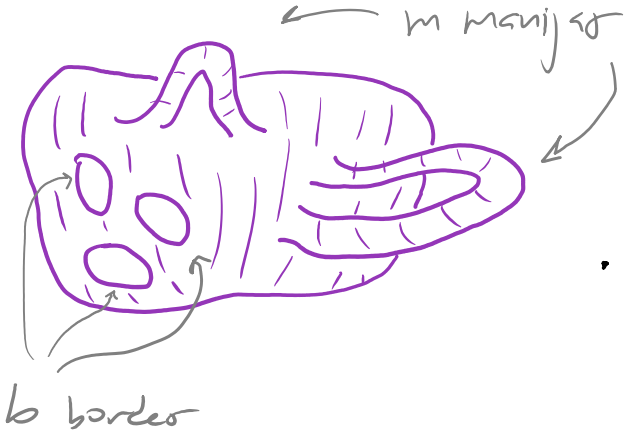


Esfera S^2 | Disco D^2 | Toro T^2 | Anillo/cilindro C^2

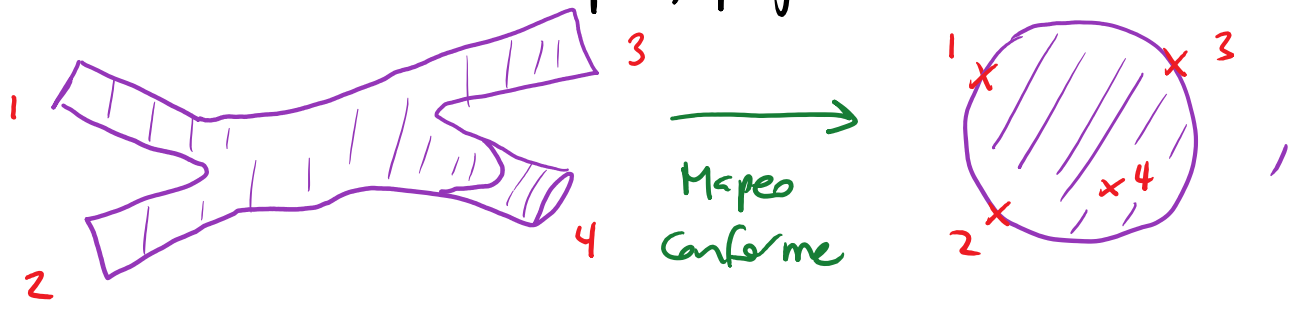
$m=0, b=0$ | $m=0, b=1$ | $m=1, b=0$ | $m=0, b=2$

↑ número de bordes

$$= \sum_{m,b=0}^{\infty}$$



Podemos notar además que, p.ej.



es decir, mientras que los vértices de cuerda cerrada se insertan en el interior de la hoja de mundo M, los de

cuerda abierta se insertan en el borde. En ambos casos, integramos sobre sus posibles ubicaciones en M.

A partir de esto podemos entender por qué los 2 extremos de una cuerda abierta son físicamente distintos. Como verificaremos en la Tarea 4, en el caso de la cuerda abierta el mapeo estado-operador identifica al operador de vértice para el fotón

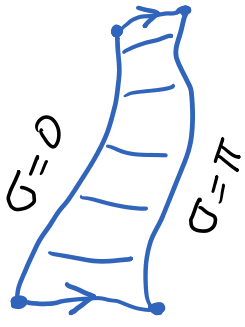
$$\varepsilon_\mu \alpha_{-1}^\mu (0;k) \longleftrightarrow V_A(z,\bar{z}) = \varepsilon_\mu : \tfrac{i}{2}(\partial+\bar{\partial})X^\mu e^{ik\cdot X}(z,\bar{z}) :$$

$$\Longrightarrow V_A(k;\varepsilon) = N_A \int_{\partial M} dz\, \varepsilon_\mu : \tfrac{i}{2}(\partial+\bar{\partial})X^\mu e^{ik\cdot X}(z,\bar{z}) :$$

$$= N_A \int_{\partial M} d\tau\, \varepsilon_\mu : e^{ik\cdot X} \partial_\tau X^\mu(\tau) :$$

Así que la receta para describir a la cuerda en un fondo no trivial del campo electromagnético $A_\mu(x)$ es agregar a la acción el término de borde

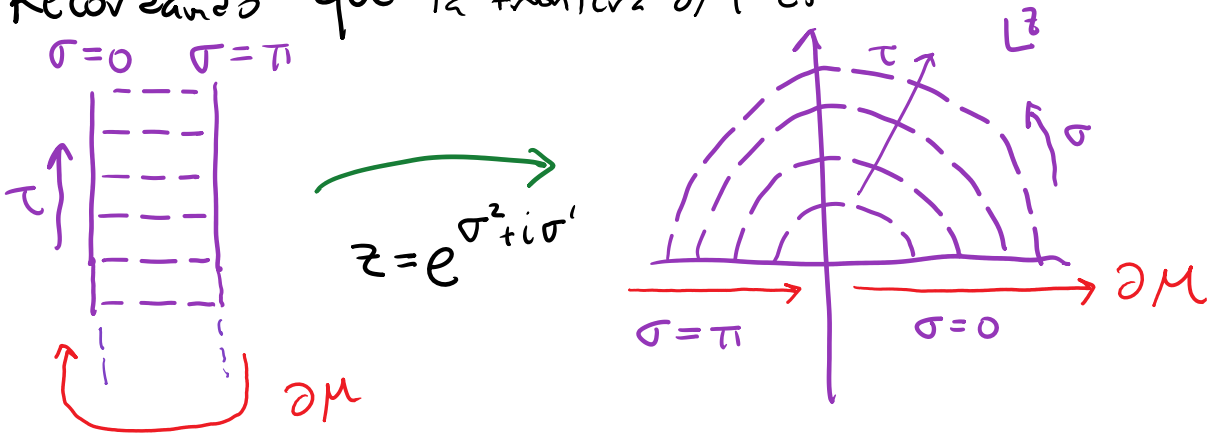
$$S_A = \int_{\partial M} d\tau\, A_\mu(X(\tau))\partial_\tau X^\mu(\tau)$$



Esto nos dice que los extremos de la

cuerdas son cargas puntuales bajo $A_\mu(x)$! ← A_μ llena todo el espacio
si tenemos una D25-brana
(y solo p+1 dim si Dp-brana)

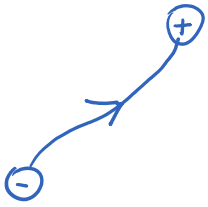
Recordando que la frontera ∂M es



vemos que

$$\int_{\partial M} d\tau\, A_\mu \partial_\tau X^\mu = +\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[A_\mu \partial_\tau X^\mu\right]_{\sigma=0} - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[A_\mu \partial_\tau X^\mu\right]_{\sigma=\pi}$$

así que los extremos tienen cargas eléctricas opuestas (que se neutralizan entonces al juntarse).



Solo hay carga eléctrica de 1 tipo, como corresponde al grupo de norma abeliano $U(1)$.

Desde los años 70 se conocía el modo de generalizar al caso no abeliano: basta con postular (a mano) la existencia de N tipos distintos de extremos finales $\leftrightarrow$ N tipos de cargas; p.ej., con $N=3$ el extremo final sería análogo a un quark $\begin{pmatrix} \text{rojo} \\ \text{verde} \\ \text{azul} \end{pmatrix}$,

y los correspondientes N tipos distintos de extremos iniciales $\longleftrightarrow$ N 'anticargas'; en el ejemplo $N=3$, el extremo inicial sería análogo a un antiquark $\begin{pmatrix} \text{antirrojo} \\ \text{antiverde} \\ \text{antiazul} \end{pmatrix}$.

Con esto agregamos nuevos grados de libertad a la cuerda, localizados en los extremos. Declaramos que estos grados de libertad son internos y no dinámicos, de manera que preservemos automáticamente la invariancia bajo Poincaré y la invariancia conforme.

Para especificar por completo el estado de una cuerda, debemos ahora elegir valores $1 \leq I, J \leq N$ para los extremos inicial y final: $I \to J$

$$\alpha_{-n_1}^{\mu_1} \alpha_{-n_2}^{\mu_2} \cdots |0; k; I, J\rangle$$

La combinación lineal más general es entonces

$$|\cdots; k; \lambda\rangle \equiv \sum_{I,J} \lambda_{IJ} |\cdots; k; I, J\rangle$$

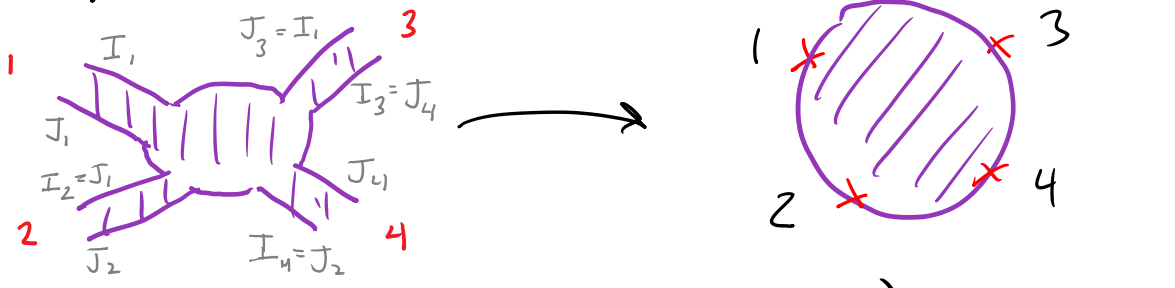
Factor de Chan-Paton

Los campos resultantes son por tanto matrices $N \times N$. P.ej.,

$$\alpha_{-1}^{\mu} |0,k;IJ\rangle \overset{\text{excitación en}}{\longleftrightarrow} \left(A_\mu(x)\right)_{IJ}$$

(o, si preferimos, $A_\mu(x) \equiv \sum_a A_\mu^a(x) T^a$, con las T^a una base para matrices $N \times N$, p.ej., N^2 matrices hermíticas con $Tr(T^a T^b) = \delta^{ab}$).

Las amplitudes



incluirán factores $\sim Tr(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$ Factores de Chan-Paton

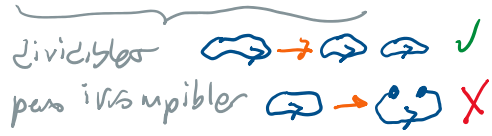
y son entonces invariantes bajo

$$U(N): \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1' \\ 2' \\ \vdots \\ N' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix}. \qquad \lambda \to U \lambda U^{-1}$$

En el espaciotiempo tenemos al campo de norma $A_\mu(x)$ (que transforma en la rep. adjunta), así que $U(N)$ figura en nuestra teoría como una

invariancia local.

Desde la perspectiva antigua, entonces, basada en estos factores de Chan-Paton abstractos, habríamos contabilizado infinitas teorías distintas de cuerdas abiertas y cerradas orientadas, con grupo de norma $U(N)$, $N = 1, 2, 3, \ldots$ Y el caso donde solo hay cuerdas cerradas puede añadirse a la lista como $N = 0$.

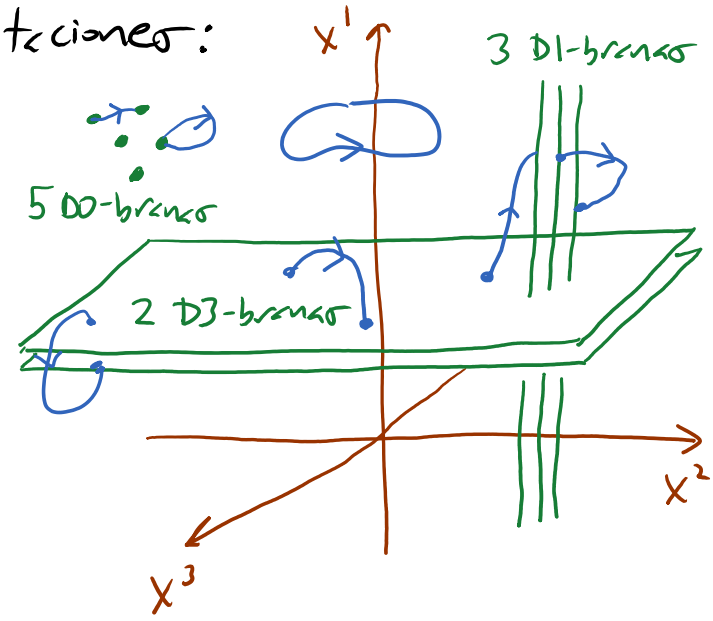


Pero nosotros entendemos bien que estas No son en realidad distintas teorías, sino distintos sectores de una misma teoría, donde tenemos N D25-branas presentes. Los índices de Chan-Paton simplemente nos informan en cuál de las N D-branas inicia/termina la cuerda abierta en cuestión (p. 256).

Y, de la mano de esto, entendemos también que existe un número infinito de sectores adicionales de la misma teoría, donde se tienen Dp-branas en distintas

dimensionalidades y/u orientaciones:

En la visión antigua, estas habrían sido consideradas teorías distintas — aunque no eran de interés por violar Poincaré.



El hecho (p. 332) de que las cuerdas abiertas se puedan convertir en cerradas y viceversa nos indica que las D-branas pueden interactuar con el espaciotiempo cuerdero.

↳ 23: D/p/23

3) Cuerdas Bosónicas Cerradas No Orientadas

$S_p[X]$ y las 2 constricciones ($T_{ab}=0$) son invariantes bajo la transformación de paridad en la hoja de mundo,

$\Omega: \sigma \to 2\pi - \sigma$, es decir, $z \longleftrightarrow \bar{z}$

que es simplemente una reparametrización, pero invierte la orientación de la cuerda. Dado que $\Omega^2 = 1$, Ω tiene eigenvalores ± 1.

Si fijamos $\Omega|0,0;k\rangle = +|0,0;k\rangle$,

entonces usando $\Omega : \alpha_n^\mu \leftrightarrow \tilde{\alpha}_n^\mu$ tenemos, p.ej.,

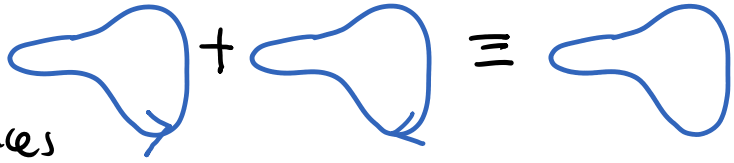
$$\Omega\, \varepsilon_{\mu\nu}\, \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle = \varepsilon_{\nu\mu}\, \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle .$$

Obtenemos la teoría no orientada truncando la teoría original al subespacio de estados con $\Omega = +1$:

$$|\text{fís}\rangle \longrightarrow \tfrac{1}{2}(1+\Omega)\,|\text{fís}\rangle$$

[apropiado si Ω es reductiva

Nos referimos a esta proyección como "orientar" Ω

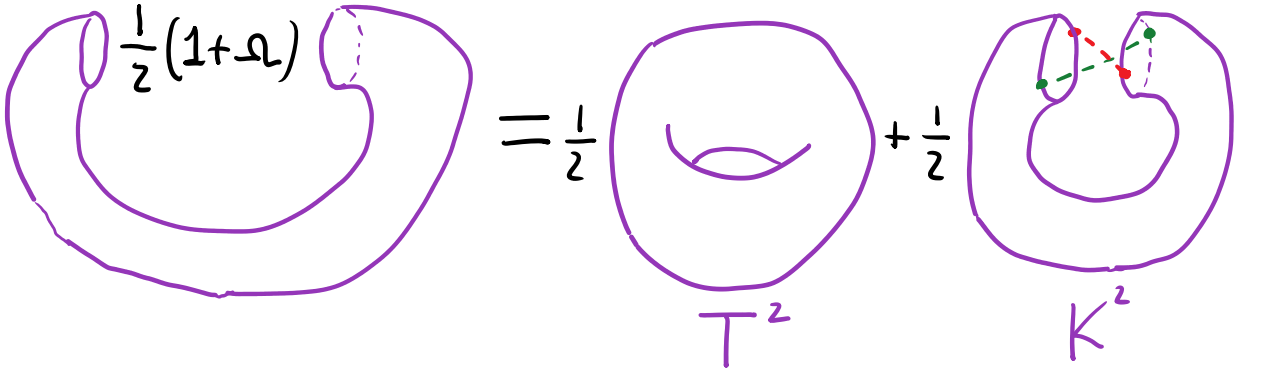


El espectro libre es entonces

$$\underbrace{\phi}_{m^2=-4/\alpha'} \; ; \; \underbrace{h_{\mu\nu}, \cancel{B_{\mu\nu}}, \varphi}_{m^2=0} \; ; \; \ldots$$

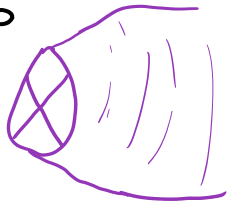
Esta proyección define una teoría consistente, gracias a que las interacciones conservan Ω.

Para eliminar a los estados con $\Omega=-1$ en los lazos, debemos incluir superficies no orientables:

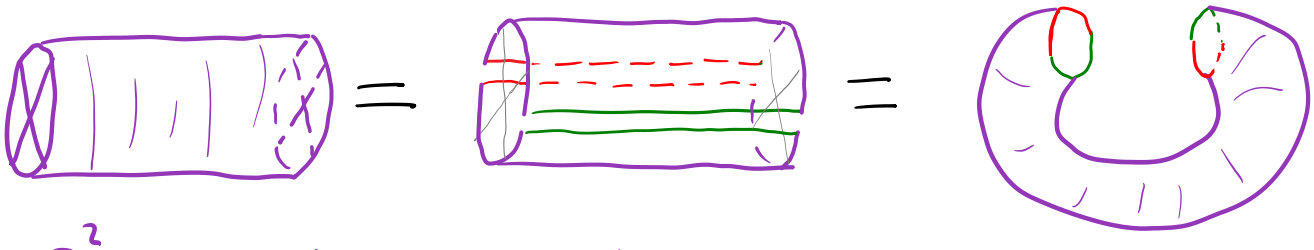


Botella de Klein

Para caracterizar superficies no orientables conviene definir una tapa cruzada ("cross cap") como un círculo en el cual se identifican los puntos diametralmente opuestos.

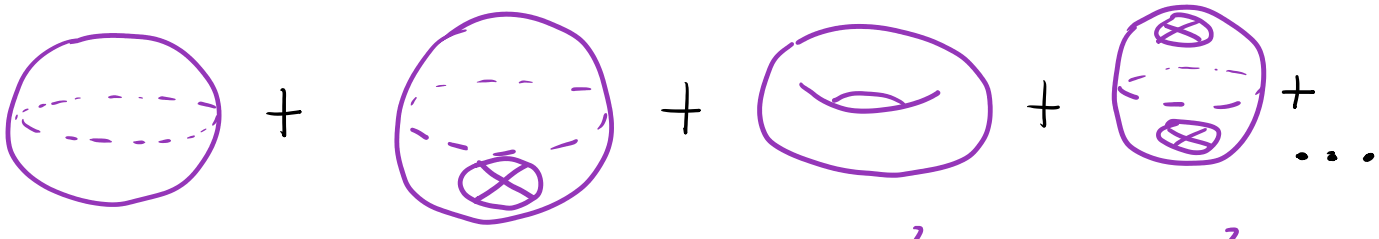


Tenemos p.ej.

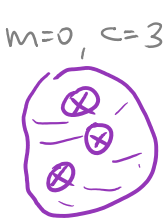


S^2 con 2 tapas cruzadas K^2

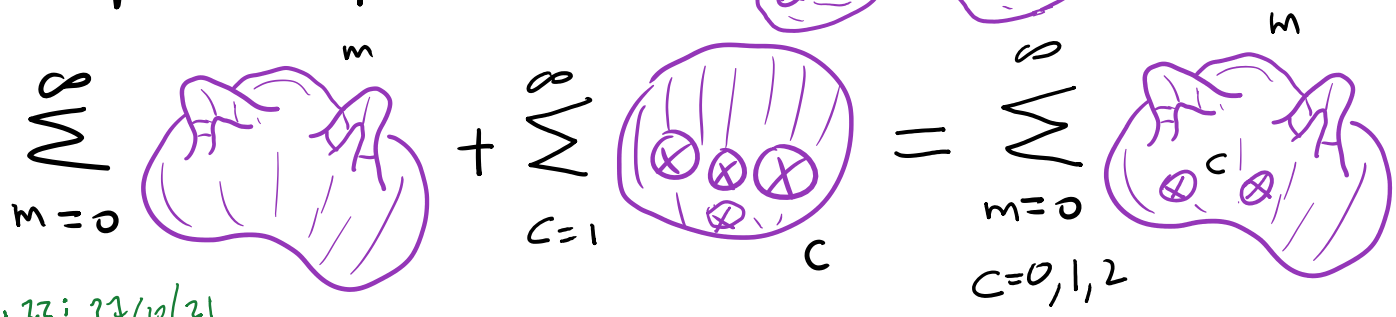
Para la expansión perturbativa de esta teoría, necesitamos sumar sobre superficies sin bordes, orientables o no:



S^2 $RP^2 \equiv P^2(\mathbb{R})$ plano proyectivo T^2 K^2

Se puede expresar (usando 

) como

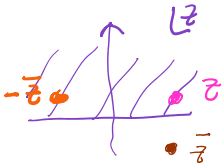


[22: 27/10/21

4) Cuerdas Abiertas y Cerradas No Orientadas

Para la cuerda abierta, $\Omega : \sigma \longrightarrow \pi - \sigma$

$$z \longleftrightarrow -\bar{z}$$



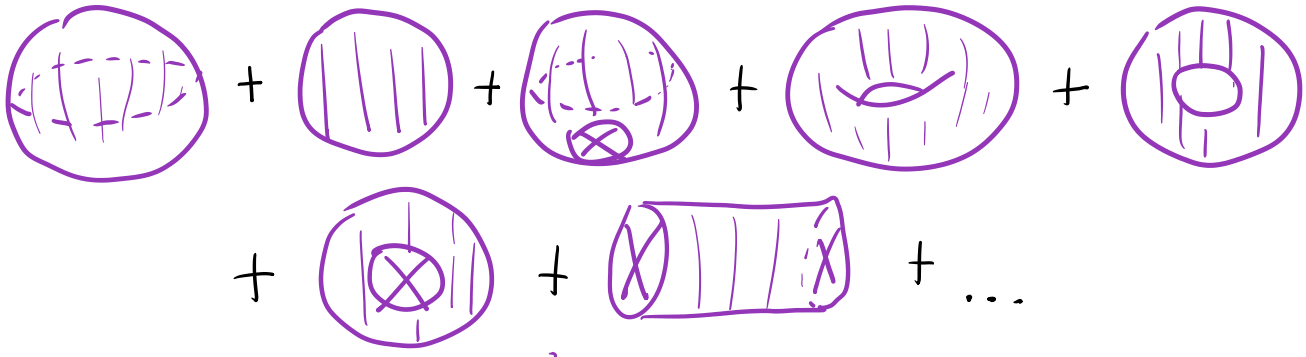
$$X^\mu \sim \sum_n \frac{\alpha_n^\mu}{n}\left(z^{-n} + \bar{z}^{-n}\right) \Longrightarrow \alpha_n^\mu \longleftrightarrow (-1)^n \alpha_n^\mu$$

eliminados por proyección

Espectro: χ ; ϕ ; ~~A_μ~~, $h_{\mu\nu}$, ~~$B_{\mu\nu}$~~, φ ; ...

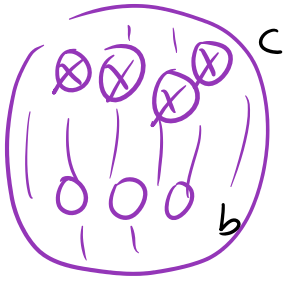
$\frac{1}{2}(1+\Omega)$

La expansión perturbativa involucra una suma sobre todas las superficies (con o sin bordes, orientables o no):



Cinta de Moebius M^2

$$\equiv \sum_{m,b=0}^{\infty} \quad + \sum_{c=1,b=0}^{\infty}$$



Notar que A_N sobrevive si agregamos factores de Chan-Paton, es decir, D-branas: sabemos que

$$\Omega\,|N;k;I,J\rangle = (-1)^N\,|N;k;J,I\rangle$$

eigenvalor del "operador de número" ($=1$ para A_N)

$$\Rightarrow \Omega \sum_{I,J=1}^{N} \lambda_{IJ}\,\alpha_{-1}^{\mu}\,|0;k;I,J\rangle$$

$$= -\sum_{I,J} \lambda_{JI}\,\alpha_{-1}^{\mu}\,|0;k;I,J\rangle ,$$

estado que sobrevive si $\lambda_{IJ} = -\lambda_{JI}$. Así que el grupo de norma asociado a N D-branas en el caso de una teoría no orientada es $SO(N)$ (o generadores antisimétricos) en lugar de $U(N)$.

acción no trivial sobre extremos

(Y proyectando con $\omega \equiv \Omega \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{1}_{N/2} \\ -i\mathbb{1}_{N/2} & 0 \end{pmatrix}$,

se obtiene el grupo de norma $Sp(N/2)$.)

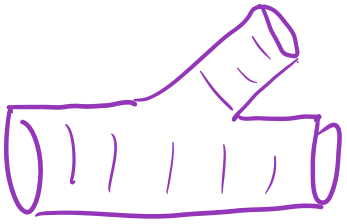
Justo como entendimos que los tipos 1) y 2) de teorías de cuerdas son simplemente distintos sectores de una misma teoría, que difieren por la presencia o ausencia de D25-branas, nos queda claro que los tipos 3) y 4) están igualmente conectados.

A estas alturas podemos hablar entonces de que existen solo 2 tipos de teorías de cuerdas bosónicas: orientadas y no orientadas. Como entenderemos en más detalle capítulos adelante, estas también son en realidad una misma teoría, que difieren por la ausencia o presencia de un objeto adicional (no dinámico) conocido como un 25-plano de orientidad ("orientifold"). Más en general, una orientidad es un espacio con hiperplanos p-dimensionales que funcionan como espejos, implementando Ω (y alguna simetría discreta).

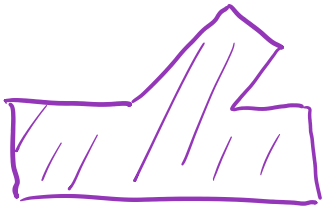
a veces traducido "orientifolio"

martes, 30 de abril de 2013 04:40 a.m.

Ahora que hemos terminado con la enumeración de las hojas de mundo M relevantes para cada una de las "distintas" teorías de cuerdas bosónicas, consideremos de nuevo al parámetro que controla la expansión perturbativa. Parecería que debemos agregar a mano constantes de acoplamiento



g_c para la interacción de cuerdas cerradas, y

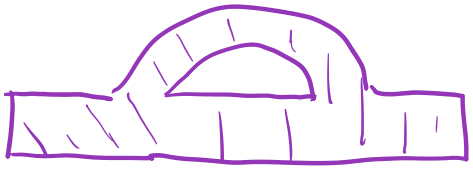


g_a para la interacción de cuerdas abiertas,

lo cual implicaría que agregar una manija

$\propto g_c^2$

y agregar un borde



$\propto g_a^2$.

Pero de hecho, la teoría contiene ya su propia receta. Recordemos de las pp. 133-35 que podemos

agregar a $S_p[g, X]$ la acción gravitacional usual

$$S_k[g] \equiv \Phi_0 \left(\frac{1}{4\pi} \underbrace{\int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g} R}_{\text{Einstein-Hilbert}} + \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{\partial\mathcal{M}} ds\, K}_{\text{Gibbons-Hawking (-York)}} \right)$$

Φ_0: cte. de normalización

necesario en un espacio con frontera, para que el principio variacional esté bien definido

(donde $ds \equiv d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}}$ es la distancia propia sobre $\partial\mathcal{M}$

y $K \equiv -t^a n_b \nabla_a t^b$ la curvatura extrínseca de $\partial\mathcal{M}$

(t^a: tangente unitaria; n_b: normal (hacia el exterior) unitaria),

SIN modifican la dinámica (y la equivalencia con $S_{NG}[X]$)

gracias a que

$$\frac{\delta S_X}{\delta g^{ab}} \propto \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) = 0 \quad \text{idénticamente en 2 dim.}$$

S_χ depende solo de la topología de M:

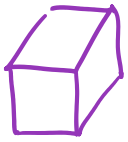
$$S_\chi = \Phi_0 \underbrace{\left(\frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{g} R + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds\, k \right)}_{\text{Teorema de Gauss-Bonnet}} = \chi(M)$$

Número (o característica) de Euler

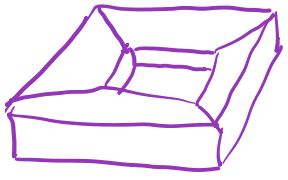
$$\chi(M) \equiv V - A + C$$

V: # de vértices; A: # de aristas; C: # de caras; de poliedro homeomorfo a M

P.ej.,

$\chi(S^2) = \chi($  $) = 8 - 12 + 6 = 2$

($\leftrightarrow$ métrica usual $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = r^2 \operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow R = \frac{2}{r^2}$ ✓)

$\chi(T^2) = \chi($  $) = 16 - 32 + 16 = 0$

($\leftrightarrow$ sobre T^2 es posible definir métrica con $R=0$ ✓)

$\chi(D^2) = \chi(\Delta) = 3 - 3 + 1 = 1$ ($\leftrightarrow R=0, K=1$ ✓)

Resultado general: $\chi = 2 - 2m - b - c$ (manijas, bordes, tapas cruzadas)

Así que incorporando S_χ, las amplitudes de dispersión están pesadas con

$$e^{-\Phi_0 \chi} = e^{-2\Phi_0} \left(e^{\Phi_0}\right)^{2m} \left(e^{\Phi_0}\right)^{b} \left(e^{\Phi_0}\right)^{c}$$

Podemos entonces identificar

$$g_c = e^{\Phi_0} = g_a^2$$

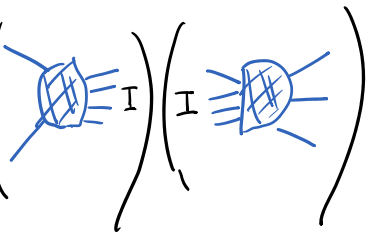
La expansión perturbativa tiene sentido solo si

$$g_c = e^{\Phi_0} << 1$$

Como ya habíamos señalado antes, la constante de acoplamiento correspondiente debe aparecer también en la normalización de los vértices:

$$V_i \equiv N_i \int_{d\sigma}^{d^2\sigma} \sqrt{g}\, V_i \qquad N_i \propto \begin{cases} g_c & i = \phi, h, \varphi, \ldots \\ g_a & i = \phi, A_\mu, \ldots \end{cases}$$

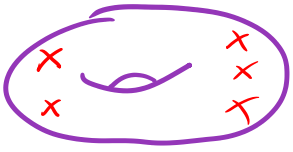
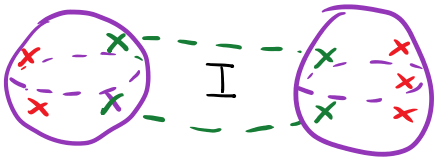
Podemos comprobar que estas reglas son consistentes con la unitariedad. Recordar que

$$\left.\begin{array}{l} S^\dagger S = \mathbb{1} \\ S = \mathbb{1} + iT \end{array}\right\} \Longrightarrow 2\,\mathrm{Im}$$ $$= \sum_I$$ 

↳ cambio base de estados entrantes a salientes

Teorema Óptico: ∃ corte cuando estados intermedios van a la capa de masa

En teoría de cuerdas debemos tener p.ej.

$$2\,\mathrm{Im}$$  $$= \sum_I$$ 

$$\Longrightarrow \left(e^{\Phi_0}\right)^{-2+2} g_c^5 \propto \left(e^{\Phi_0}\right)^{-2} g_c^4 \left(e^{\Phi_0}\right)^{-2} g_c^5$$

$$\text{i.e.,} \quad e^{\Phi_0} \propto g_c \quad \checkmark$$

(Más adelante: Φ_0 resulta NO ser un parámetro libre de la teoría, ¡sino el valor de fondo del dilatón $\varphi(x)$!)

↳24 : 06/11/23

Habiendo exigido que los vértices V_i sean invariantes bajo Dif × Weyl, esperaríamos poder fijar la norma en la integral de trayectoria para obtener

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab}\,\mathcal{D}X^{\mu}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}}\, e^{-S_p[X,g]} \prod_i V_i$$

$$\overset{\text{en } D=26}{=\!=} \int \mathcal{D}_{\check{g}} c^a\, \mathcal{D}_{\check{g}} b_{ab}\, \mathcal{D}_{\check{g}} X^{\mu}\, e^{-S_p[X,\check{g}]-S_f[b,c,\check{g}]} \prod_i V_i$$

$g = \check{g}$

↑ métrica específica, p.ej. $\check{g}_{ab} = \delta_{ab}$

Pero, como ya habíamos anticipado, al considerar la estructura global de la hoja de mundo (en lugar de solo examinar la situación localmente, en un parche de coordenadas a la vez, que es lo que habíamos hecho hasta ahora), nos topamos en este procedimiento con 2 sutilezas:

1) Pueden existir invariancias que no se eliminan con la elección de norma $g = \check{g}$, es decir, transf. conformes

Transformación Conforme = Weyl ∘ (Reparametrización Conforme)

que estén bien definidas globalmente en $\mathcal{M}$,

$\sigma^a \to \sigma'^a = \sigma^a + \delta\sigma^a(\sigma)$ tales que

$$\delta g_{ab} = \check{\nabla}_a \delta\sigma_b + \check{\nabla}_b \delta\sigma_a \propto \check{g}_{ab}$$ Ec. de Killing Conforme

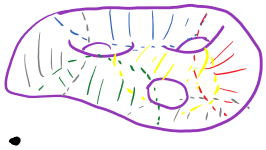
↑ para que el efecto sea Weyl

(ec. de Killing usual $\delta g_{ab} = \check{\nabla}_a \delta\sigma_b + \check{\nabla}_b \delta\sigma_a = 0 \leftrightarrow$ isometrías).

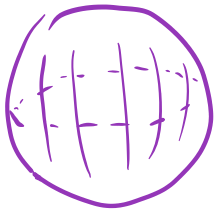
Definimos el grupo de Killing Conforme (GKC) como el grupo de transformaciones generadas por vectores (campos vectoriales) que satisfacen esta ecuación y están definidos globalmente.

El GKC es un subgrupo del "grupo" conforme local que habíamos discutido hasta ahora (y que tiene dim = ∞).

Por la exigencia de una definición global, existen vectores de Killing conformes solo para superficies suficientemente sencillas: aquellas con $\chi \geq 0$.



La lista exhaustiva es como sigue (veremos en detalle los casos orientables más adelante):

$\chi = 2$:  S^2 $\quad GKC = SL(2,\mathbb{C})$

(generado por $L_0, L_{\pm 1}, \tilde{L}_0, \tilde{L}_{\pm 1}$)

$K \equiv \dim GKC = 6$

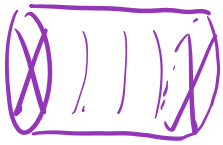
$\chi = 1$: D^2 $\quad GKC = SL(2,\mathbb{R})$, $K = 3$

RP^2 $\quad GKC = SU(2)$, $K = 3$

$\chi = 0$: T^2 $\quad GKC = U(1) \times U(1)$, $K = 2$

C^2 $\quad GKC = U(1)$, $K = 1$

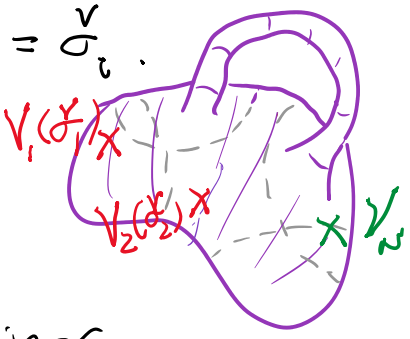
M^2 $\quad GKC = U(1)$, $K = 1$

 K^2 $\quad GKC = U(1)$, $K = 1$

En estos casos (ignorando por ahora la segunda sutileza), tras fijar la norma $g = \overset{\vee}{g}$ tendremos al GKC como redundancia remanente:

$$\int \frac{Dg_{ab}\,DX^{\mu}}{Dif \times Weyl}\, e^{-S_p} \prod_i V_i = \int \frac{Dc^a Db_{ab}\,DX^{\mu}}{GKC}\, e^{-S_p - S_f} \underbrace{\prod_i V_i}_{\prod_i N_i \int d^2\sigma_i \sqrt{\overset{\vee}{g}}\, V_i(\sigma_i)}$$

Dado que las transformaciones en GKC cambian las posiciones de los vértices V_i, $\sigma_i \to \sigma_i'$, es posible reinterpretar a K de las integrales $\int d^2\sigma_1\, d^2\sigma_2 \cdots$ como $\int d(GKC)$, para cancelar al GKC en el denominador. En otras palabras, podemos fijar la norma por completo dejando algunos $V_i(\sigma_i)$ sin integrar, en posiciones fijas $\sigma_i = \overset{\vee}{\sigma}_i$.



Así no habrá ya transformaciones que dejen fija a $\overset{\vee}{g}_{ab}$ Y ADEMÁS a $\overset{\vee}{\sigma}_i$.

Necesitaremos por supuesto determinar el jacobiano correspondiente: Faddeev-Popov.

2) Pueden existir parámetros en la métrica que no se eliminan con las invariancias disponibles.

Esta posibilidad es completamente análoga a lo que sucede en el caso de la partícula (pp. 102-3):

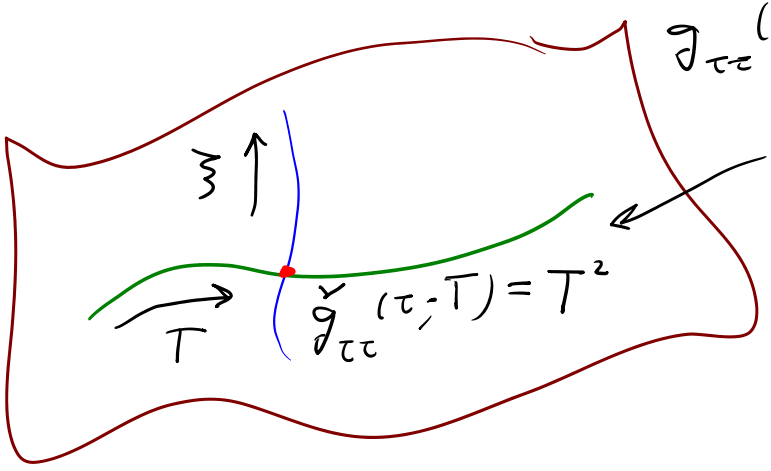
$X^{\mu}(\tau)$ $\quad \tau \in [0,1]$

$g_{\tau\tau}(\tau)$

podemos utilizar la invariancia bajo difeos para fijar la norma $\breve{g}_{\tau\tau}(\tau) = cte.$, pero dado que

$T \equiv \int_0^1 d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}(\tau)}$ es invariante bajo difeos,

tenemos necesariamente $cte. = T^2$



Notar que, de hecho, podríamos transformar

$\tau \to \tau'(\tau) = T\tau$ para obtener $g_{\tau'\tau'}(\tau') = 1$,

pero entonces $\tau' \in [0, T]$, $S[X] = \int_0^T d\tau' \cdots$,

así que de cualquier manera hay que tomar en cuenta la existencia de distintos valores posibles para T:

$$\int \frac{\mathcal{D} g_{\tau\tau}(\tau)}{\text{Dif}} \cdots = \int_0^\infty dT\, \mu(T) \cdots$$

↑ Faddeev-Popov

donde la medida $\mu(T)$ depende de la topología de línea de mundo:

$\mu(T) = 1$ para

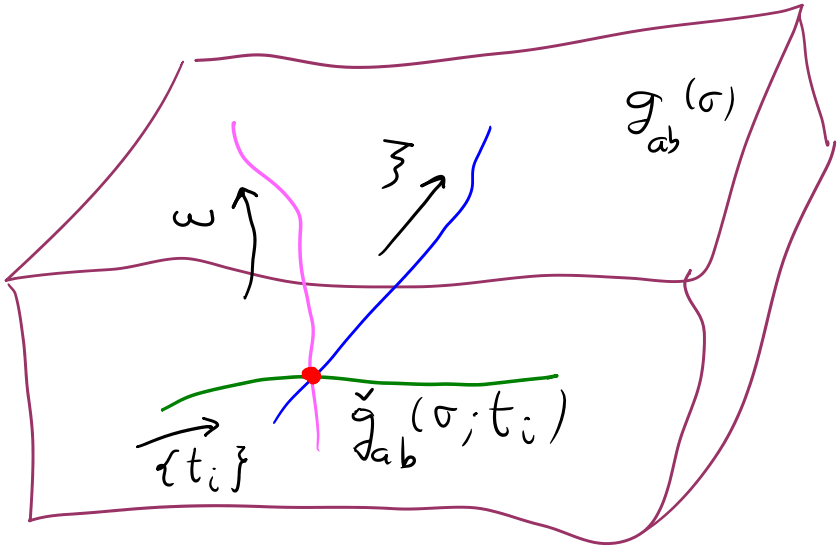
$\mu(T) = \frac{1}{T}$ para .

Con la cuerda sucede lo mismo: para una hoja de mundo dada, podemos escribir

solo disponemos de difeos globalmente bien definidos

$$g_{ab}(\sigma) = e^{\omega(\sigma)}\, \check{g}^{\xi}_{ab}(\sigma; t_i) \qquad i = 1, \dots, M$$

módulos (parámetros)



← En general, existen métricas NO equivalentes bajo Dif × Weyl

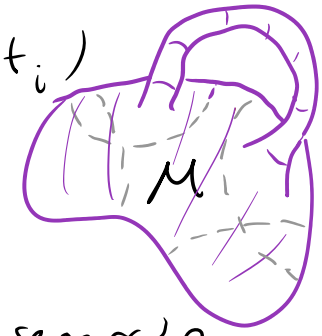
y definir

$$M_{\mathcal{M}} \equiv \frac{\text{Métricas}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}}$$

Espacio de Módulos

(M - dimensional)

Justo como en el caso de la partícula, si preferimos podemos asociar los módulos no a la métrica sino a las coordenadas: en vez de una métrica $\check{g}_{ab}(\sigma;t_i)$ definida globalmente, ← funciones de transición suaves y difeos



podemos usar Dif × Weyl por separado en cada región de coordenadas $\alpha=1,2,\dots$, para llegar a la métrica plana $ds^2_{(\alpha)} = d\bar{z}_{(\alpha)} d\bar{z}_{(\alpha)}$.

Las funciones de transición serán entonces reparametrizaciones conformes $z_{(\alpha)} = f_{(\alpha\beta)}(z_{(\beta)};t_i)$, que combinadas con Weyl pueden ser reinterpretadas como transformaciones conformes (la métrica no cambia).

En otras palabras, en 2 dimensiones

funciones de transición son mapeos analíticos

$$\frac{\text{Variedades Riemannianas}}{\text{Weyl}} \simeq \underbrace{\text{Variedades Complejas}}_{\equiv \text{"Superficies de Riemann"}}.$$

incluye identificación por difeos

Existe un teorema que relaciona el número de módulos M en una superficie dada con el número K de vectores de Killing conformes:

$$\boxed{K - M = 3\chi}$$

Teorema de Riemann-Roch

Tenemos entonces $M = K - 3\chi$, es decir (p. 354),

$\chi = 2$: S^2 $K = 6 \Longrightarrow M = 0$

$\chi = 1$: D^2 $K = 3 \Longrightarrow M = 0$

RP^2 $K = 3 \Longrightarrow M = 0$

Todas las $g_{ab}^{(\sigma)}$ son equivalentes bajo Difx Weyl

$\chi = 0$:

T^2 $\quad K=2 \Rightarrow M=2$

C^2 $\quad K=1 \Rightarrow M=1$

M^2 $\quad K=1 \Rightarrow M=1$

K^2 $\quad K=1 \Rightarrow M=1$

$\chi < 0$: $\quad K=0 \Rightarrow M = 6m+3b+3c-6$

En los casos con $\chi \leq 0$ tendremos entonces

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab}\mathcal{D}X^\mu}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} e^{-S_p[X,g]} \cdots$$

$$= \int_{M_M} dt_1 \cdots dt_M \; \Delta_{FP}(\check{g}(t)) \int_{\check{g}} \mathcal{D}X^\mu e^{-S_p[X,\check{g}]} \cdots$$

Δ_{FP} : Faddeev-Popov

Material suplementario (pp. 362-367): Estas 2 sutilezas se manifiestan de una manera específica en la descripción con fantasmas:

- Cada vector de Killing conforme implica la existencia de un modo cero del fantasma c(z) globalmente bien definido.
- Cada módulo implica la existencia de un modo cero del fantasma b(z) globalmente bien definido.

Pero en integrales fermiónicas, modos cero harían que integral funcional se anule.
Para evitar esto, se necesitan inserciones.
El método de Faddeev-Popov da las inserciones adecuadas.

Modo cero $\bar{\partial} c_0 = 0 \Rightarrow S_f = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\, b\bar{\partial} c_0 = 0$

$\Rightarrow \int \mathcal{D}c\, e^{-S_f} \propto \int dc_0 \underbrace{e^{0}}_{1} = 0$.

Resultado neto tras fijar la norma es insertar factor

$$\Delta_{FP}(\check{g}, \check{\sigma}) = \int_{\check{g}\text{ as}} \mathcal{D}b\, \mathcal{D}_{\check{g}} c\; e^{-S_f[b,c,\check{g}]} \prod_{i=1}^{M} \frac{1}{4\pi}\left(b, \frac{\partial \check{g}}{\partial t_i}\right) \prod_{j,d} c^d(\check{\sigma}_j)$$

L23: 03/11/21

Nosotros deduciremos esto caso por caso en ejemplos sencillos.

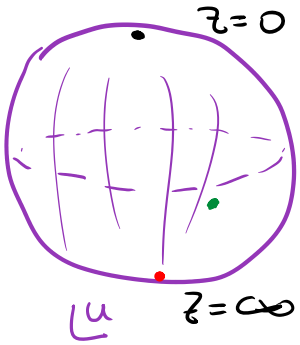
↑ ubicación de operadores de vértice fijos

L25: 08/11/23

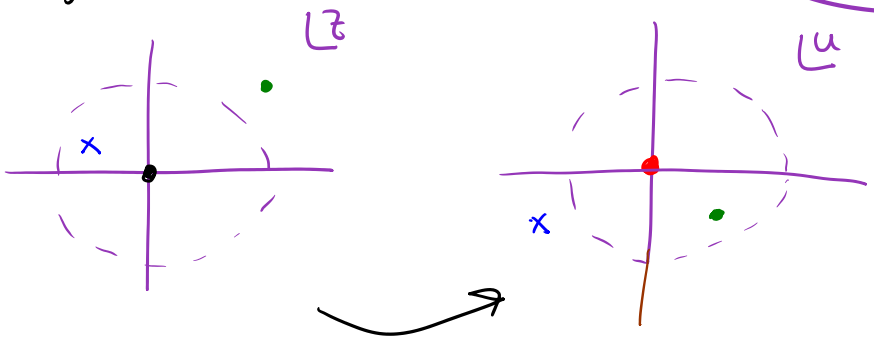
miércoles, 08 de marzo de 2006 05:09 p.m.

Amplitudes de Cuerda Cerrada a Nivel Árbol

Esfera $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



2 regiones de coordenadas:



$u = \frac{1}{z}$ función de transición

- S^2 como variedad Riemanniana: métrica global en norma conforme ← $u=\frac{1}{z}$ es un difeo (conforme)

$$g_{z\bar{z}}(z,\bar{z}) \longleftrightarrow g_{u\bar{u}}(u,\bar{u}) = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{u}} g_{z\bar{z}}(z,\bar{z}) = |z|^4 g_{z\bar{z}}(z,\bar{z})$$

P.ej., métrica usual $g_{z\bar{z}} = \frac{2r^2}{(1+|z|^2)^2} \longleftrightarrow g_{u\bar{u}} = \frac{2r^2}{(1+|u|^2)^2}$ bien definida en $u=0$. ✓

- S^2 como variedad compleja: métrica plana en cada región $g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} = g_{u\bar{u}}$, interpretando a $u=\frac{1}{z}$ como una transformación conforme.

p. 363 (material suplementario)

• ¿Módulos? δg_{zz} tal que $\partial_{\bar{z}} \delta g_{zz} = 0$, definidos globalmente:

$$\delta g_{uu} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \delta g_{zz} = z^4 \delta g_{zz}$$ finito aun cuando $z \to \infty$

$$\lesssim z^{-4} \text{ para } z \to \infty$$

+ analiticidad $\Longrightarrow$ $\delta g_{zz} = 0 \ \forall z$

Así que NO hay módulos (todas las métricas son equivalentes bajo Dif x Weyl) $\boxed{M = 0}$

• ¿Vectores de Killing conformes?

p. 362 (suplemento)

δz tal que $\partial_{\bar{z}} \delta z = 0$, definidos globalmente:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial z} \delta z = -z^{-2} \delta z$$ finito aún cuando $z \to \infty$

$$\Longrightarrow \quad \delta z = \epsilon_0 + \epsilon_1 z + \epsilon_2 z^2 \qquad (\leftrightarrow L_{-1}, L_0, L_1)$$

$\therefore$ $\boxed{K = 6}$ (Riemann-Roch: $K - M = 3\chi^2$ ✓)

Versión finita: $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (P)SL(2,\mathbb{C}) = GKC$

grupo lineal fraccionario o de Mobius

↳ infinitesimal si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\epsilon_1}{2} & \epsilon_0 \\ -\epsilon_2 & 1-\frac{\epsilon_1}{2} \end{pmatrix}$

Consideremos la amplitud de dispersión de N taquiones.

Usando el vértice $V_\phi(k) = N_\phi \int d^2z \, :e^{ik\cdot X(z,\bar z)}:$

con $N_\phi \equiv g_c N$, sabemos que la amplitud involucra

$$e^{-2\Phi_0}(g_c N)^N \frac{1}{GKC}\int d^2z_1 \cdots d^2z_N \left\langle :e^{ik_1\cdot X(z_1,\bar z_1)}: \cdots :e^{ik_N\cdot X(z_N,\bar z_N)}: \right\rangle_{S^2}^X,$$

donde $\langle \cdots \rangle_{S^2}^X \equiv \int \mathcal{D}X^\mu(z,\bar z)_{S^2}\, e^{-\frac{1}{2}\int d^2z\, X\cdot\Delta_z X} \cdots$

con $\Delta_z \equiv -\frac{1}{\pi\alpha'}\partial\bar\partial$

Notar que si separamos $X^\mu(z,\bar z) = x^\mu + \underline{X}^\mu(z,\bar z)$,

$\underline{X}^\mu$ ← modo constante

de manera que $\mathcal{D}X^\mu = d^Dx\, \mathcal{D}\underline{X}^\mu$, encontramos que las amplitudes siempre incluirán

$$\int d^Dx\, e^{i(k_1+k_2+\ldots+k_N)\cdot x} = (2\pi)^D \delta^{(D)}(k_1+k_2+\ldots+k_N),$$

como Dios manda. No escribiremos este factor explícitamente de aquí en adelante ($\notin M$).

← elemento de matriz invariante

Conocemos el propagador (p. 195)

$$\langle X^\mu(z,\bar z)\, X^\nu(z',\bar z')\rangle = \underbrace{-\frac{\alpha'}{2}\ln|z-z'|^2}_{\Delta^{-1}(z,z')}\,\eta^{\mu\nu}\langle 1\rangle ,$$

así que podemos calcular

$$\langle :e^{ik_1\cdot X(z_1,\bar z_1)}:\,:e^{ik_2\cdot X(z_2,\bar z_2)}:\cdots:e^{ik_N\cdot X(z_N,\bar z_N)}:\rangle_{S^2}^{X}$$

$$\overset{\text{Wick}}{=} \prod_{i<j} e^{i^2 k_i\cdot k_j\left[-\frac{\alpha'}{2}\ln|z_i-z_j|^2\right]} \underbrace{\langle :\prod_{j=1}^{N} e^{ik_j\cdot X(z_j,\bar z_j)}:\rangle_{S^2}^{X}}_{\langle 1\rangle_{S^2}^{X}}$$

$$\underbrace{|z_i-z_j|^{\alpha' k_i\cdot k_j}}$$

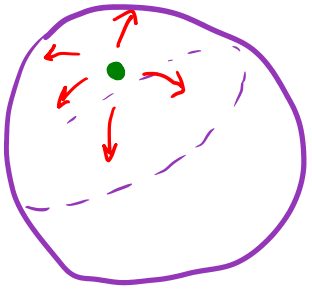
(Alternativamente: sabemos que completando el cuadrado

$$\langle e^{\int d^2z\, J(z)\cdot X(z)}\rangle_{S^2}^{X} = e^{\frac{1}{2}\int d^2z\, d^2z'\, J(z)\cdot\Delta^{-1}(z,z')J(z')}\langle 1\rangle_{S^2}^{X}$$

y nos interesa aquí el caso $J^\mu(z,\bar z)\equiv i\sum_{j=1}^{N} k_j^\mu\,\delta^{(2)}(z-z_j)$

— con autocontracciones eliminadas por el orden normal.)

Material suplementario (pp. 372-373): un sutileza es que , al ser la esfera una variedad COMPACTA, la función de Green consistente con la ley de Gauss NO es solo el logaritmo usual, sino una expresión del tipo



$$\underline{G}(z,z') = -\frac{\alpha'}{2}\ln|z-z'|^2 + F(z,\bar{z}) + F(z',\bar{z}') ,$$

tal que $$\Delta_\sigma \underline{G}(\sigma,\sigma') = \frac{1}{\sqrt{g}}\delta^{(2)}(\sigma-\sigma') - \frac{1}{\int d^2\sigma\sqrt{g}}$$

¿densidad de carga adicional, que asegura que la carga total en S^2 es cero

Felizmente, se puede mostrar que los términos adicionales no contribuyen a las funciones de correlación, por conservación de momento (ver Polchinski pp. 170-172).

Notar que $I \equiv \int d^2z_1 \cdots d^2z_N \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{\alpha' k_i \cdot k_j}$ ← GKC

es, como prometimos, invariante bajo $SL(2,\mathbb{C})$:

$$z \to z' = \frac{az+b}{cz+d} \implies d^2z = \frac{d^2z'}{|a-cz'|^4}, \quad z_i - z_j = \frac{z_i' - z_j'}{(a-cz_i')(a-cz_j')},$$

así que

$$I = \int \frac{d^2z_1' \cdots d^2z_N'}{\prod_i |a-cz_i'|^4} \prod_{i<j} \frac{|z_i' - z_j'|^{\alpha' k_i \cdot k_j}}{|a-cz_i'|^{\alpha' k_i \cdot k_j} |a-cz_j'|^{\alpha' k_i \cdot k_j}}$$

Los factores adicionales que involucran p.ej. a z_1' son

$$|a-cz_1'|^{-4-\alpha' k_1 \cdot \underbrace{(k_2 + \ldots + k_N)}_{= -k_1 \text{ por conservación de momento}}} = |a-cz_1'|^{\underbrace{-4+\alpha' k_1^2}_{=0 \text{ condición de capa de masa para taquión}}} = 1,$$

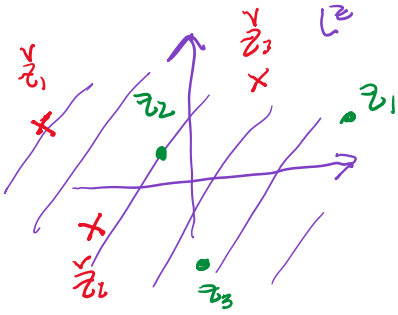
de modo que $I = I'$: como esperábamos, tenemos invariancia bajo el grupo de reparametrización residual, GKC.

(Pero notar, como en la p. 325, que este requisito nos impide calcular amplitudes fuera de la capa de masa.)

Dados 3 puntos específicos $\overset{\vee}{z}_1, \overset{\vee}{z}_2, \overset{\vee}{z}_3$, existe una transformación $SL(2,\mathbb{C})$ única que mapea

$$\overset{\vee}{z}_1, \overset{\vee}{z}_2, \overset{\vee}{z}_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ad-bc=1} z_1, z_2, z_3$$

$$z_i = \frac{a\overset{\vee}{z}_i + b}{c\overset{\vee}{z}_i + d}$$



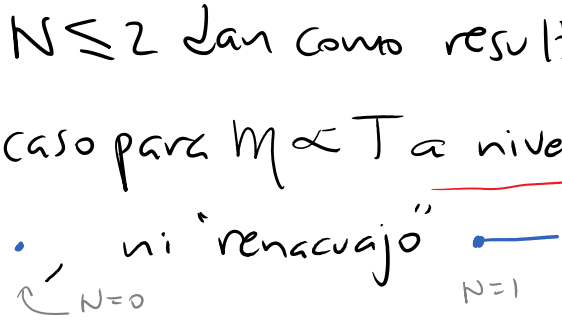
así que (en el caso con $N \geq 3$ taquiones) podemos reinterpretar

$$\int d^2 z_1 \, d^2 z_2 \, d^2 z_3 = \int d(GKC) \underbrace{\mu(\overset{\vee}{z}_1, \overset{\vee}{z}_2, \overset{\vee}{z}_3)}_{\text{"Faddeev-Popov" (Jacobiano)}}$$

Si integramos sobre todas las z_j $(j=1,\ldots,N)$, estaríamos entonces contando cada configuración física un número infinito de veces, obteniendo un resultado $\propto \int d(GKC) = \infty$.

Así que, como ya habíamos visto antes, lo que debemos hacer es fijar $z_1 = \overset{\vee}{z}_1$, $z_2 = \overset{\vee}{z}_2$, $z_3 = \overset{\vee}{z}_3$, para eliminar la redundancia por completo, y poder cancelar $\frac{1}{GKC}$ contra $\int d(GKC)$.

(Notar que esto implica que las amplitudes con $N \leq 2$ dan como resultado cero, como debiera ser el caso para MCT a nivel árbol: no hay energía del vacío, ni "renacuajo", ni corrección al propagador.)



Debemos ahora determinar el jacobiano $\mu(\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_3)$:

dado que para $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\epsilon_1}{2} & \epsilon_0 \\ -\epsilon_2 & 1-\frac{\epsilon_1}{2} \end{pmatrix}$ tenemos

$$\vec{z}_i \to z_i = \vec{z}_i + \delta z_i \quad \text{con} \quad \delta z_i = \epsilon_0 + \epsilon_1 \vec{z}_i + \epsilon_2 \vec{z}_i^{\,2},$$

vemos que

$$d^2(\delta z_1)\, d^2(\delta z_2)\, d^2(\delta z_3) = \underbrace{d^2\epsilon_0\, d^2\epsilon_1\, d^2\epsilon_2}_{d^2(\delta b)\, d^2(\delta a)\, d^2(\delta c)} \underbrace{\left| \det \left(\frac{\partial(\delta z_1, \delta z_2, \delta z_3)}{\partial(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2)} \right) \right|^2}_{\left| \det \begin{pmatrix} 1 & \vec{z}_1 & \vec{z}_1^{\,2} \\ 1 & \vec{z}_2 & \vec{z}_2^{\,2} \\ 1 & \vec{z}_3 & \vec{z}_3^{\,2} \end{pmatrix} \right|^2 = \left| (\vec{z}_1 - \vec{z}_2)(\vec{z}_1 - \vec{z}_3)(\vec{z}_2 - \vec{z}_3) \right|^2},$$

de donde

$$d^2 z_1\, d^2 z_2\, d^2 z_3 = d(\text{GKC})\, |\vec{z}_1 - \vec{z}_2|^2\, |\vec{z}_1 - \vec{z}_3|^2\, |\vec{z}_2 - \vec{z}_3|^2 .$$

jueves, 09 de marzo de 2006 12:37 a.m.

Material suplementario (pp. 377-378): estamos usando aquí el hecho general de que el jacobiano en el espacio tangente a una variedad coincide con el jacobiano en la variedad misma.
Adicionalmente, el jacobiano que hemos calculado explícitamente coincide (p.378) con el resultado que en automático arrojaría la fórmula con inserciones del fantasma c que anotamos arriba en la p. 362 (y se deduce en p. 367 de material suplementario):

$$\langle c(\check z_1)\,c(\check z_2)\,c(\check z_3)\rangle^{b,c}_{S^2} = -(\check z_1-\check z_2)(\check z_1-\check z_3)(\check z_2-\check z_3)\,,$$

$$\langle \tilde c(\check{\bar z}_1)\,\tilde c(\check{\bar z}_2)\,\tilde c(\check{\bar z}_3)\rangle^{\tilde b,\tilde c}_{S^2} = -(\check{\bar z}_1-\check{\bar z}_2)(\check{\bar z}_1-\check{\bar z}_3)(\check{\bar z}_2-\check{\bar z}_3)\,.$$

Hemos mostrado entonces explícitamente que

$$\frac{1}{6KC}I = \int d^2z_4\cdots d^2z_N\,|\check z_1-\check z_2|^2|\check z_1-\check z_3|^2|\check z_2-\check z_3|^2\prod_{i<j}|z_i-z_j|^{\alpha' k_i\cdot k_j}$$

126: 13/11/23

- Amplitud de 3 puntos:

$$\frac{1}{6KC}I = |\check z_1-\check z_2|^{2+\alpha' k_1\cdot k_2}|\check z_1-\check z_3|^{2+\alpha' k_1\cdot k_3}|\check z_2-\check z_3|^{2+\alpha' k_2\cdot k_3}\,,$$

y usando $\alpha' k_1\cdot k_2 = \frac{\alpha'}{2}\underbrace{[(k_1+k_2)^2}_{k_3^2}-k_1^2-k_2^2] = -2$

↖ capa de masa $k_i^2=\frac{4}{\alpha'}$

(y lo mismo para $\alpha' k_1\cdot k_3$ y $\alpha' k_2\cdot k_3$) tenemos

$\frac{1}{6KC}I = 1$ (independiente de $\check z_i$ ✓), así que

$$\mathcal{M}^{\phi\phi\phi}_{S^2}(k_1,k_2,k_3) = \underbrace{(g_c N)^3 e^{-2\Phi_0}}_{\propto g_c}\underbrace{\langle 1\rangle^{x,b,c,\tilde b,\tilde c}_{S^2}}_{\text{determinantes}} \sim g_c\,.$$ ✓

$S = 1 + i(2\pi)^D\delta^{(D)}(k)\underbrace{\mathcal{M}}_{T}$

- Amplitud de 4 puntos:

$$\frac{1}{\text{GKC}} I = |\vec{z}_1 - \vec{z}_2|^{2+\alpha' k_1\cdot k_2} |\vec{z}_1 - \vec{z}_3|^{2+\alpha' k_1\cdot k_3} |\vec{z}_2 - \vec{z}_3|^{2+\alpha' k_2\cdot k_3}$$

$$\int d^2 z_4 \, |\vec{z}_1 - z_4|^{\alpha' k_1\cdot k_4} |\vec{z}_2 - z_4|^{\alpha' k_2\cdot k_4} |\vec{z}_3 - z_4|^{\alpha' k_3\cdot k_4}$$

Por simplicidad, tomaremos $\vec{z}_1 \to \infty$, $\vec{z}_2 = 1$, $\vec{z}_3 = 0$.

Factores con $\vec{z}_1 \longrightarrow |\vec{z}_1|^{4+\alpha' k_1\cdot(k_2+k_3+k_4)} = |\vec{z}_1|^{4-\alpha' k_1^2} = 1$

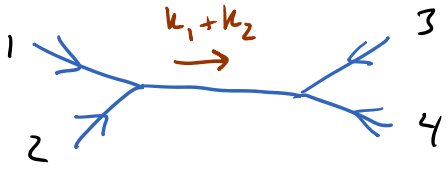
($k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = -k_1$; $k_1^2 = 4$)

$$\Longrightarrow \frac{1}{\text{GKC}} I = \int d^2 z_4 \, |z_4 - 0|^{\alpha' k_3\cdot k_4} |z_4 - 1|^{\alpha' k_2\cdot k_4}$$

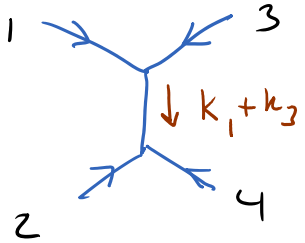
Conviene reescribir en términos de las variables de Mandelstam (invariantes cinemáticas)

(por convención, para hacer a s,t,u adimensionales)

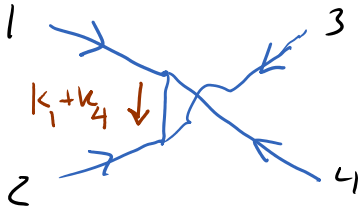
$$s \equiv -\alpha'(k_1+k_2)^2 \qquad t \equiv -\alpha'(k_1+k_3)^2 \qquad u \equiv -\alpha'(k_1+k_4)^2$$



Energía total en el marco del centro de masa



Transferencia de momento



Notar que $s+t+u = 4\alpha' m^2 = -16$, y además

lunes, 13 de marzo de 2006 05:32 p.m.

capa de masa $k_i^2 = \frac{4}{\alpha'} = -m^2$

$$s = -\alpha'(k_3^2 + 2k_3\cdot k_4 + k_4^2) = -2\alpha' k_3\cdot k_4 - 8 ,$$

$$t = -\alpha'(k_2^2 + 2k_2\cdot k_4 + k_4^2) = -2\alpha' k_2\cdot k_4 - 8 ,$$

así que en términos de $z_4 = re^{i\alpha}$ tenemos

$$\frac{1}{GKC} I = \int_0^{2\pi} d\alpha \underbrace{\int_0^\infty 2r\, dr}_{d^2 z_4} \underbrace{r^{-\frac{s}{2}-4}}_{|z_4-0|^{\alpha' k_3\cdot k_4}} \underbrace{(1+r^2-2r\cos\alpha)^{-\frac{t}{4}-2}}_{|z_4-1|^{\alpha' k_2\cdot k_4}}$$

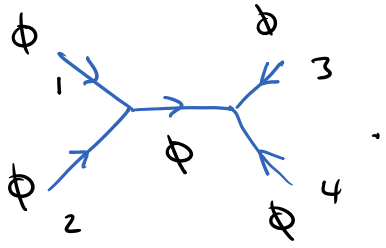
Notar que en la región $r\to 0$ $(z_4 \to z_3)$ tenemos

$$\int_0 dr\, r^{-\frac{s}{2}-3}\left(1+O(r^2)\right) = \left.\frac{r^{-\frac{s}{2}-2}}{-\frac{s}{2}-2}\right|_0 + \dots ,$$

que es convergente solo si $s<-4$. Vemos entonces que

$$\mathcal{M}^{\phi\phi\phi\phi}_{s^2}(s,t) \propto -\frac{2}{s+4} + \text{términos analíticos en } s=-4$$

polo simple en $s=-4$: taquión



La integral diverge $\forall\ s\geq -4$; pero la amplitud física tiene solo un polo simple en $s=-4$, y por tanto se puede definir por continuación analítica en la variable s.

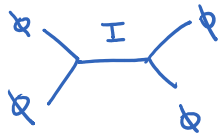
De hecho, $\forall\ s,t,u<-4$ tenemos (ver GSW p. 387)

$$\int d^2z\,|z|^{-\frac{s}{2}-4}\,|1-z|^{-\frac{t}{2}-4} = 2\pi\,\frac{\Gamma(-\frac{s}{4}-1)\,\Gamma(-\frac{t}{4}-1)\,\Gamma(-\frac{u}{4}-1)}{\Gamma(-\frac{s}{4}-\frac{t}{4}-2)\,\Gamma(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2)\,\Gamma(-\frac{u}{4}-\frac{s}{4}-2)}$$

función gamma de Euler →

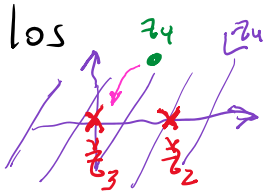
El lado derecho está bien definido fuera de la región $s,t,u<-4$, y contiene solo polos simples en

$$\left.\begin{aligned} s &= -4,0,4,8,\dots \\ t &= -4,0,4,8,\dots \\ u &= -4,0,4,8,\dots \end{aligned}\right\} \hookrightarrow \text{¡espectro de cuerda cerrada libre, tal como esperamos a nivel árbol!}$$



✓

Esta es entonces la amplitud física. El origen de los polos se puede entender usando la EPO:



$$\mathcal{M}^{\phi\phi\phi\phi} \propto \int d^2z_4 \Big\langle :e^{ik_1\cdot X(\infty)}: :e^{ik_2\cdot X(1)}: :e^{ik_3\cdot X(0)}: :e^{ik_4\cdot X(z_4)}: \Big\rangle_{S^2}$$

p. 371 ↓

$$|z_4-0|^{-k_3\cdot k_4} :e^{ik_3\cdot X(0)}\, e^{ik_4\cdot X(z_4)}:$$

$$:e^{i(k_3+k_4)\cdot X(0)}: + \tfrac{1}{2}|z_4|^2(-k_{4\mu}k_{4\nu}) :\partial X^\mu \bar\partial X^\nu e^{i(k_3+k_4)\cdot X}(0): + \dots$$

$|z_4|^2 = r^2$

↓ polo en $s=-4$: taquión (como ya vimos)

↓ polo en $s=0$: gravitón/dilatón

Los polos en t y u se originan de manera similar de la región de integración donde $z_4 \to \check{z}_2 = 1$ y $z_4 \to \check{z}_1 = \infty$, respectivamente.

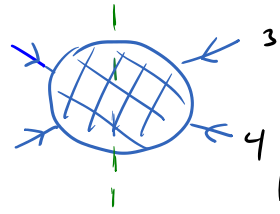
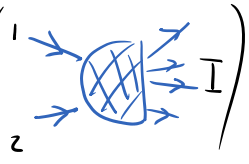
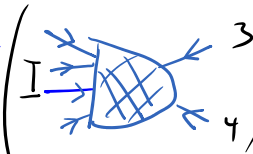
Tenemos entonces

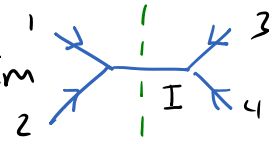
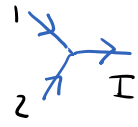
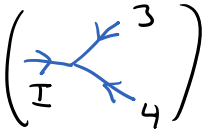
$$\mathcal{M}^{\phi\phi\phi\phi}_{S^2}(s,t) = (g_c N)^4 e^{-2\Phi_0} \langle 1 \rangle \frac{2\pi\, \Gamma(-\frac{s}{4}-1)\Gamma(-\frac{t}{4}-1)\Gamma(-\frac{u}{4}-1)}{\underbrace{\Gamma(-\frac{s}{4}-\frac{t}{4}-2)}_{=\frac{u}{4}+2}\underbrace{\Gamma(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2)}_{\frac{s}{4}+2}\underbrace{\Gamma(-\frac{u}{4}-\frac{s}{4}-2)}_{\frac{t}{4}+2}}$$

$s+t+u=-16$

L24: 08/11/21

Notemos ahora que el teorema óptico ($\longleftrightarrow$ unitariedad)

$2\,\mathrm{Im}\Big($  $\Big) = \sum_I \Big($  $\Big)\Big($  $\Big)$

a nivel árbol, $2\,\mathrm{Im}$  $= \Big($  $\Big)\, 2\pi\delta(k_I^2+m_I^2)\Big($  $\Big)$,

relaciona las amplitudes de 3 y 4 puntos, y requiere en particular

$$\mathcal{M}^{\phi\phi\phi\phi}_{S^2}(k_1,k_2,k_3,k_4) = \frac{\mathcal{M}^{\phi\phi\phi}_{S^2}(k_1,k_2,-k_1-k_2)\,\mathcal{M}^{\phi\phi\phi}_{S^2}(k_1+k_2,k_3,k_4)}{(k_1+k_2)^2 - \frac{4}{\alpha'} - i\epsilon}$$

polo del taquión

+ términos analíticos en $s=-4$

(donde hemos usado $\frac{1}{k^2+m^2-i\epsilon} - \frac{1}{k^2+m^2+i\epsilon} = 2\pi i\,\delta(k^2+m^2)$).

Cuando $s \to -4$ tenemos $t+u = -16-s \to -12$,

$$\frac{2\pi\Gamma(-\frac{s}{4}-1)\Gamma(-\frac{t}{4}-1)\Gamma(-\frac{u}{4}-1)}{\Gamma(-\frac{s}{4}-\frac{t}{4}-2)\Gamma(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2)\Gamma(-\frac{u}{4}-\frac{s}{4}-2)} \qquad s\to -4$$

$$\Gamma(-\tfrac{s}{4}-1) \xrightarrow{\Gamma(0)} \frac{4}{\alpha'}\frac{1}{(k_1+k_2)^2-\frac{4}{\alpha'}} \quad y \quad \underbrace{\Gamma(-\tfrac{t}{4}-\tfrac{u}{4}-2)}_{\frac{12}{4}} \xrightarrow{\Gamma(1)} 1,$$

de modo que el requisito es que

$$(g_c N)^4 e^{-2\Phi_0}\langle 1\rangle \frac{8\pi}{\alpha'} = \left[(g_c N)^3 e^{-2\Phi_0}\langle 1\rangle\right]^2$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{e^{-2\Phi_0}\langle 1\rangle_{S^2}^{X,b,c,\tilde{b},\tilde{c}} = \frac{8\pi}{\alpha'(g_c N)^2}}.$$

Usando esto, concluimos finalmente que

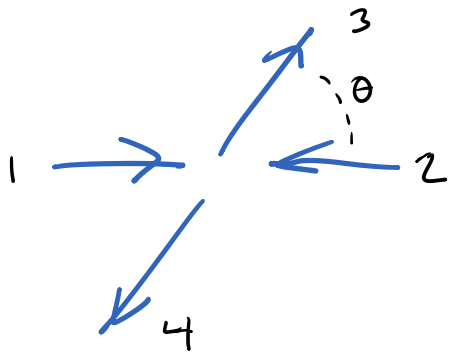
$$\boxed{\mathcal{M}_{S^2}^{\phi\phi\phi}(k_1,k_2,k_3) = \frac{8\pi g_c N}{\alpha'}} \quad y$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{S^2}^{\phi\phi\phi\phi}(k_1,k_2,k_3,k_4) = \frac{16\pi^2(g_c N)^2}{\alpha'}\frac{\Gamma(-\frac{s}{4}-1)\Gamma(-\frac{t}{4}-1)\Gamma(-\frac{u}{4}-1)}{\Gamma(-\frac{s}{4}-\frac{t}{4}-2)\Gamma(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2)\Gamma(-\frac{s}{4}-\frac{u}{4}-2)}}$$

Esta última se conoce como la amplitud de Shapiro-Virasoro

El resultado análogo para cuerdas abiertas es la amplitud de Veneziano $\mathcal{M}_{D^2}^{\phi\phi\phi\phi} \sim \frac{\Gamma(-1-s)\Gamma(-1-t)}{\Gamma(-2-s-t)}$, que históricamente condujo al descubrimiento de la teoría de cuerdas.

En el marco del centro de masa,



$$s = \alpha' E^2 ,$$

$$\frac{t}{s} = \left(\frac{4m^2}{E^2} - 1\right) \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} ,$$

$$\frac{u}{s} = \left(\frac{4m^2}{E^2} - 1\right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \qquad \left(m^2 = -\frac{4}{\alpha'}\right).$$

En un experimento de dispersión dura, $E \to \infty$ con θ fijo, es decir, $s \to \infty$ con $\frac{t}{s}$ $\left(\text{y} \therefore \frac{u}{s}\right)$ fijo, usando la fórmula de Stirling $\Gamma(x) \sim x^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\, e^{-x} = \sqrt{2\pi}\, e^{x \ln x - x - \frac{1}{2}\ln x}$ ↑ ,

encontramos que la amplitud se comporta como

$$\mathcal{M}^{\phi\phi\phi\phi}_{s^2}(s,t) \sim e^{-s f(\theta)} \qquad f(\theta) \simeq -\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \ln \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} \ln \cos^2\frac{\theta}{2} ,$$

muy suprimida con respecto al resultado en teoría de campos ($\leftrightarrow$ objetos puntuales), $\mathcal{M}(s \to \infty, t \propto s) \sim s^{-p}$.

Históricamente, también tiene importancia el límite de Regge

$$\mathcal{M}^{\phi\phi\phi\phi}\underbrace{(s \to \infty, t \text{ fijo})}_{E \to \infty,\ \theta \to 0} \sim s^{2\alpha(t)} \frac{\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(1+\alpha(t))} \qquad \alpha(t) \equiv \frac{t}{4} + 1 .$$

LZT: 15/11/23

Otras amplitudes tienen una estructura similar.

P.ej., usando el vértice del gravitón (/dilatón/antisimetricón)

$$\mathcal{V}_h(\varepsilon;k) = g_c N\left(\frac{2}{\alpha'}\right)\int d^2z\ \varepsilon_{\mu\nu} :\partial X^\mu \bar\partial X^\nu e^{ik\cdot X}: \ ,$$

por mapeo estado $\leftrightarrow$ operador

misma cte. que en $\mathcal{V}_\phi$

podemos calcular

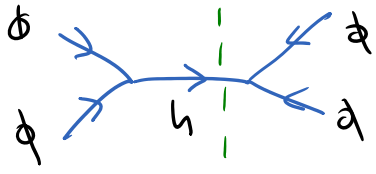
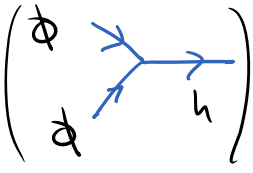
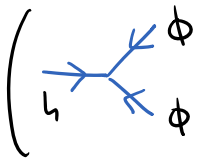
$$\mathcal{M}^{h\phi\phi}_{S^2}(k_1,\varepsilon;k_2,k_3) = \left(g_c N\frac{2}{\alpha'}\right)(g_c N)^2 e^{-2\Phi_0}\, |\check z_1-\check z_2|^2\, |\check z_1-\check z_3|^2\, |\check z_2-\check z_3|^2$$

$$\varepsilon_{\mu\nu}\left\langle :\partial X^\mu \bar\partial X^\nu e^{ik_1\cdot X(\check z_1)}::e^{ik_2\cdot X(\check z_2)}::e^{ik_3\cdot X(\check z_3)}:\right\rangle^X_{S^2} \ ,$$

factores adicionales de momento (y $\frac{1}{\check z_i}$)

$$\boxed{\mathcal{M}^{h\phi\phi}_{S^2}(k_1,\varepsilon;k_2,k_3) = -\pi g_c N\, \varepsilon_{\mu\nu}(k_2-k_3)^\mu (k_2-k_3)^\nu} \ .$$

(Se puede verificar que esto satisface la condición de unitariedad

$2\,\mathrm{Im}$  $=$  $2\pi\,\delta(k_h^2)$  .)

De manera similar (Tarea 5)

$$\boxed{\mathcal{M}^{hhh}_{S^2}(k_1,\varepsilon_1;k_2,\varepsilon_2;k_3,\varepsilon_3) = \pi g_c N\, \varepsilon_{1\mu\mu'}\varepsilon_{2\nu\nu'}\varepsilon_{3\rho\rho'}\, t^{\mu\nu\rho}\, t^{\mu'\nu'\rho'}} \ ,$$

con $t^{\mu\nu\rho} \equiv (k_2-k_3)^\mu \eta^{\nu\rho} + (k_3-k_1)^\nu \eta^{\rho\mu} + (k_1-k_2)^\rho \eta^{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{8}(k_2-k_3)^\mu (k_3-k_1)^\nu (k_1-k_2)^\rho$.

Notar que

$$\mathcal{M}^{hhh} \sim g_c N \left[k^2 + \alpha' k^4 + \alpha'^2 k^6 \right]$$

término de 2 derivadas en acción espaciotemporal para $h_{\mu\nu}(x)$

despreciables a bajas energías, $|k| << m_c \equiv \ell_c^{-1}$.

En más detalle, las amplitudes taquión-gravitón $\phi\phi\phi$, $h\phi\phi$ y hhh que hemos calculado coinciden con las que se obtendrían con las reglas de Feynman habituales a partir de la acción efectiva en el espaciotiempo

$$S_{ef}[\phi, h] = \int d^{26}x \left\{ -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\alpha'}\right)\phi^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu h_{\nu\lambda}\partial^\mu h^{\nu\lambda} \right.$$

← parte libre (capítulo anterior)

$$- \frac{1}{3!}\left(\frac{8\pi}{\alpha'} g_c N\right)\phi^3 + 2\pi g_c N h^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$$

← interacciones (este capítulo)

$$-4\pi g_c N \left[-\frac{1}{2}\partial^\mu h^{\nu\lambda}\partial^\rho h_{\nu\lambda} h_{\mu\rho} \right.$$

$$+ \partial^\mu h^{\nu\lambda}\partial_\nu h_\lambda{}^\rho h_{\mu\rho}$$

términos con 4 derivadas ($\propto k^4$)

$$\left. \left. - \partial^\mu h^{\nu\lambda}\partial_\mu h_\nu{}^\rho h_{\lambda\rho} + \mathcal{O}(\alpha') \right] \right\},$$

que de hecho coincide a su vez con lo que se obtiene al desarrollar a orden cúbico la acción

$$S_{ef}[\phi,g] = \int d^{26}x\,\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{\alpha'}\right)\phi^2 - \frac{2K}{3\alpha'}\phi^3 - \frac{1}{2K^2}R + O(\alpha')\right\},$$

¡¡Einstein-Hilbert!!

correcciones a $|k| \gtrsim 1/\ell_c$

donde $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + 2K\,h_{\mu\nu}(x)$ campo canónicamente normalizado

y estamos trabajando en la norma $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$, $h^\lambda{}_\lambda = 0$.

Además hemos reconocido a $K \equiv 2\pi g_c N$

como la constante gravitacional usual, $2K^2 \equiv 16\pi G_N$.

Notando que $[K^2] = L^{D-2}$ $\left(\overset{D=26}{\Longrightarrow} \ell_p \sim g_c^{1/12}\ell_c\right)$,

definimos N tal que $2K^2 = (2\pi)^{23} g_c^2 \ell_c^{24}$

Para obtener gravedad en 3+1 dim, podemos suponer que las 22 dimensiones adicionales son compactas y pequeñas:

$$\frac{1}{2K_{(26)}^2}\int d^{26}x\,\sqrt{-g}\,R = \frac{V_{22}}{2K_{(26)}^2}\int d^4x\,\underbrace{\sqrt{-g^{(4)}}\,R^{(4)}}_{\text{modo de KK constante}} + \ldots \Longrightarrow K_{(4)}^2 \equiv \frac{K_{(26)}^2}{V_{22}}.$$

Los términos de $\mathcal{O}(\alpha' k^4)$ y $\mathcal{O}(\alpha'^2 k^6)$ en $\eta^{\mu\mu\mu\mu}$ codifican correcciones específicas a la relatividad general, del tipo $\sim \frac{1}{2K^2}\int d^{26}x\sqrt{-g}\,(\alpha' R^2 + \alpha'^2 R^3)$.

(con diversas contracciones de índices)

Al calcular amplitudes con $N \geq 4$ gravitones, se reproducen uno por uno los términos de $\mathcal{O}(k^N)$ en $\frac{1}{2K^2}\int d^{26}x\sqrt{-g}\,R$, más correcciones adicionales del tipo $\frac{1}{2K^2}\int d^{26}x\sqrt{-g}\,\alpha'^{N-1}R^N$

Todas estas correcciones son despreciables a bajas energías y curvaturas. ¡¡Así que en verdad cuerdas $\Rightarrow$ relatividad general!!

De manera similar, es posible calcular los acoplamientos $h\varphi\varphi$, hBB, $\varphi\varphi\varphi$, etc. La acción que resume los interacciones de los campos no masivos entre sí resulta ser

$$S_{ef} = \frac{1}{2K^2}\int d^D x\sqrt{-g_E}\left\{R_E - \frac{4}{D-2}(\partial_\mu\Phi)^2_E - \frac{1}{12}e^{-\Phi/D-2}H_{\mu\nu\rho}H_E^{\mu\nu\rho} + \mathcal{O}(\alpha')\right\}.$$

(lo para la supercuerda)

(con $D=26$), donde $H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\mu B_{\nu\rho} - \partial_\nu B_{\mu\rho} - \partial_\rho B_{\nu\mu}$ y el subíndice E resalta que estamos usando la métrica en el "marco de Einstein" $g^E_{\mu\nu}(x)$, es decir, aquella con acción $\int d^D x\sqrt{-g_E}\,R_E$. La métrica $g_{\mu\nu}(x)$ que la cuerda siente directamente, a

jueves, 16 de marzo de 2006 01:04 a.m.

través de la acción $S_p[X] = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\, g_{\mu\nu}(X)\partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu$, se relaciona con $g^E_{\mu\nu}(x)$ a través de una transformación de Weyl en el espaciotiempo (redefinición de campo, no simetría):

$$g_{\mu\nu}(x) = e^{4\Phi(x)/D-2}\, g^E_{\mu\nu}(x)$$

, y usándola se tiene

$$S^E_{ef} = \frac{1}{2K^2}\int d^Dx\sqrt{-g}\, e^{-2\Phi}\left\{R + 4(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} + O(\alpha')\right\}.$$

Como veremos más adelante, el hecho de que en este "marco de cuerdas" el dilatón aparece a través del factor $e^{-2\Phi}$ en todos los términos está estrechamente relacionado con el factor $e^{-2\Phi_0}$ en las amplitudes a nivel árbol ($\chi = 2$): Φ_0 es el valor de fondo del campo $\Phi(x)$...

Calculando amplitudes de dispersión para la cuerda abierta (con posibles factores de Chan-Paton) se obtiene para el el campo de norma la acción de Maxwell (o Yang-Mills)

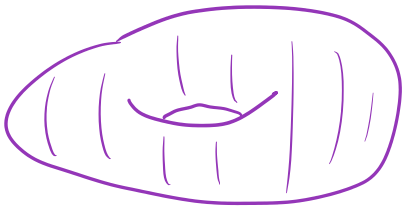
$$S^a_{ef} = -\frac{1}{4g^2_{YM}}\int d^Dx\sqrt{-g}\, e^{-\Phi}\left\{\mathrm{Tr}\left[F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right] + O(\alpha')\right\}$$

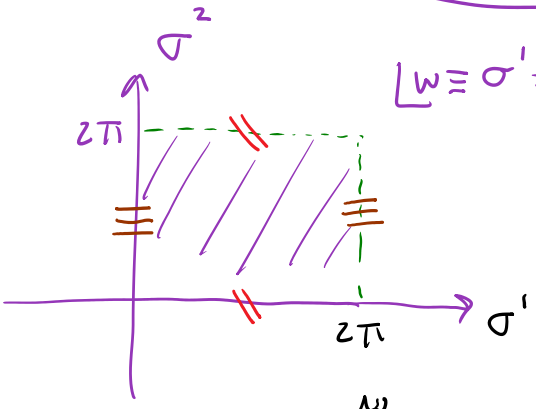
$2\alpha' g_c N^{-1/2}$ ← $\chi = 1$ ↑ $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$.

L25: 10/17/21

jueves, 16 de marzo de 2006 01:36 a.m.

Amplitudes a un lazo

El toro T^2  puede parametrizarse como



con $w \simeq w + 2\pi$, $w \simeq w + 2\pi i$

($\leftrightarrow$ funciones de transición).

Nuestros campos $X^\mu(\sigma)$ y $g_{ab}(\sigma)$ deben ser periódicos.

¿Módulos? δg_{ww} periódica tal que $\partial_{\bar{w}} \delta g_{ww} = 0$

$\Rightarrow \delta g_{ww} = \epsilon$ constante $\therefore$ $\boxed{M = 2}$

De hecho, notando que bajo una transformación de Weyl

$g_{ab}(\sigma)$ arbitraria $\longrightarrow$ $\check{g}_{ab}(\sigma) = e^{\omega(\sigma)} g_{ab}(\sigma)$

tenemos $\sqrt{\check{g}}\,\check{R} = \sqrt{g}\,(R - \nabla^2 \omega)$, vemos que podemos elegir

$\omega(\sigma)$ para obtener globalmente una métrica plana

$$\check{g}_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 + \tau_2^2 \end{pmatrix} \longleftrightarrow ds^2 = |d\sigma^1 + \tau\, d\sigma^2|^2$$

$\tau \equiv \tau_1 + i\tau_2$

$\uparrow$ T^2 como variedad Riemanniana

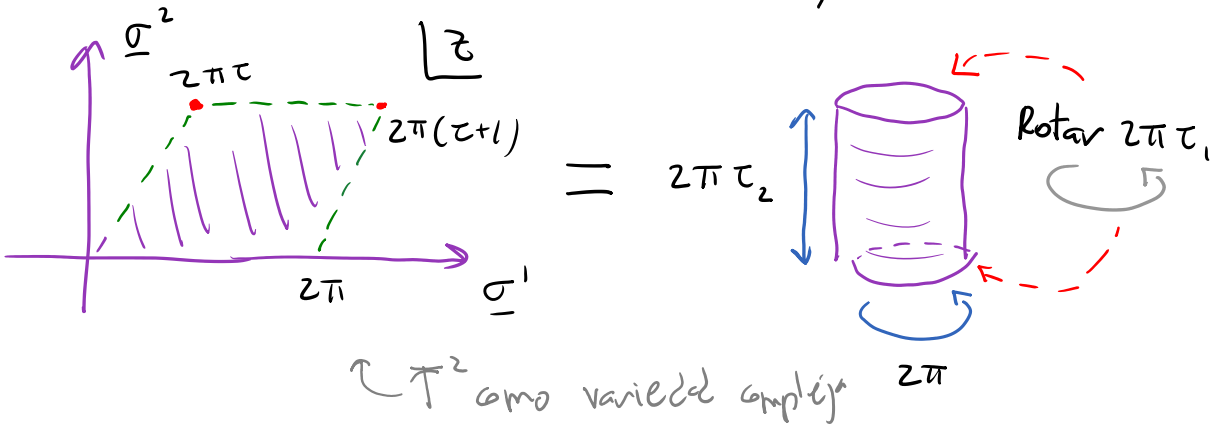
(Notar que $\check{R} = 0$ es consistente con $\chi = \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \sqrt{\check{g}}\,\check{R} = 0$.)

228 : 27/11/23

Con esta métrica, el toro tiene area $\int d^2\sigma \sqrt{\check{g}} = 4\pi^2 \tau_2$.

El caso $\tau = i$ corresponde a $\check{g}_{ab} = \delta_{ab}$ $(\leftrightarrow \check{g}_{w\bar{w}} = \frac{1}{2})$.

Alternativamente, con $z \equiv \sigma^1 + \tau \sigma^2$ (es decir, $z \equiv \underline{\sigma}^1 + i\,\underline{\sigma}^2$, donde $\underline{\sigma}^1 = \sigma^1 + \tau_1 \sigma^2$ y $\underline{\sigma}^2 = \tau_2 \sigma^2$), tenemos la métrica estándar $ds^2 = dz\, d\bar{z}$ $(\leftrightarrow \check{g}_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \hookrightarrow \check{g}_{\underline{ab}} = \delta_{\underline{ab}})$, PERO la periodicidad sería entonces $z \simeq z + 2\pi$, $z \simeq z + 2\pi\tau$:



↑ T^2 como variedad compleja

(Esto es análogo a la partícula: $g_{\tau\tau} = \sqrt{T}$, $\tau \in [0,1]$ vs. $g_{\underline{\tau}\underline{\tau}} = 1$, $\underline{\tau} = \tau T \in [0, T]$.)

Claramente podemos restringir atención a $\tau_2 = \mathrm{Im}\,\tau \geq 0$ ($\tau_2 \to -\tau_2$ es el mismo toro, visto de cabeza).

Además, podemos notar que τ, $\tau+1$ y $-1/\tau$ describen toros equivalentes bajo Dif x Weyl:

$$T:\begin{pmatrix}\sigma^1\\ \sigma^2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\tilde\sigma^1\\ \tilde\sigma^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma^1-\sigma^2\\ \sigma^2\end{pmatrix}\Longrightarrow ds^2=\left|d\tilde\sigma^1+\underbrace{(\tau+1)}_{\equiv\tilde\tau}d\tilde\sigma^2\right|^2$$

transf. discretas

$$S:\begin{pmatrix}\sigma^1\\ \sigma^2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\tilde\sigma^1\\ \tilde\sigma^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma^2\\ -\sigma^1\end{pmatrix}\Longrightarrow ds^2=\frac{1}{|\tau|^2}\left|d\tilde\sigma^1+\underbrace{\left(-\tfrac{1}{\tau}\right)}_{\equiv\tilde\tau}d\tilde\sigma^2\right|^2$$

Estas 2 transformaciones generan el grupo $PSL(2,\mathbb{Z})$:

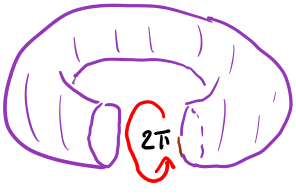
$$\begin{pmatrix}\tilde\sigma^1\\ \tilde\sigma^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b\\ -c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma^1\\ \sigma^2\end{pmatrix}\Longrightarrow ds^2\propto\left|d\tilde\sigma^1+\tilde\tau\,d\tilde\sigma^2\right|^2$$

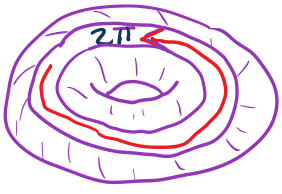
a,b,c,d enteros

con $\tilde\tau=\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$ $\quad ad-bc=1$

Estos son difeos del toro (respetan la periodicidad), de modo que $\tilde\tau\simeq\tau$. Pero notar que se trata de difeomorfismos "grandes", no conectados a la identidad.

$T=\begin{pmatrix}1&-1\\ 0&1\end{pmatrix}$ y $U=\begin{pmatrix}1&0\\ -1&1\end{pmatrix}=TST$ (generador alternativo)

describen 

y 

, respectivamente,

que se conocen como "torceduras (twists) de Dehn".

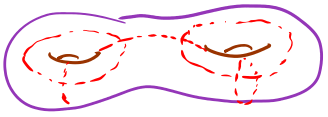
El punto es entonces que, en el caso del toro, el grupo de difeo Dif **no** es conexo. Para S^2 (y D^2) teníamos

$$Dif = Dif_0 \,, \quad \text{pero en general } Dif_0 \subset Dif .$$

(Dif_0: componente que contiene a la identidad)

Definimos el grupo modular o grupo de clase de mapeo ("mapping class group")

$$GM \equiv \frac{Dif}{Dif_0}$$

($= Sp(2m, \mathbb{Z})$ para género m, generado por las torceduras de Dehn ).

$\int Dg_{ab} \propto \int D\xi$ cancela solo Dif_0/GKC, de manera que

$$\int \frac{Dg_{ab}}{Dif \times Weyl} F[g_{ab}] = \frac{1}{GKC} \underbrace{\frac{Dif_0}{Dif}}_{\frac{1}{GM}} \int dt_1 \cdots dt_M \, \mu(t_i) \, F[\bar{g}_{ab}(t_i)]$$

$$T \longleftarrow \equiv \frac{\text{Métricas}}{Dif_0 \times Weyl}$$

Espacio de Teichmüller

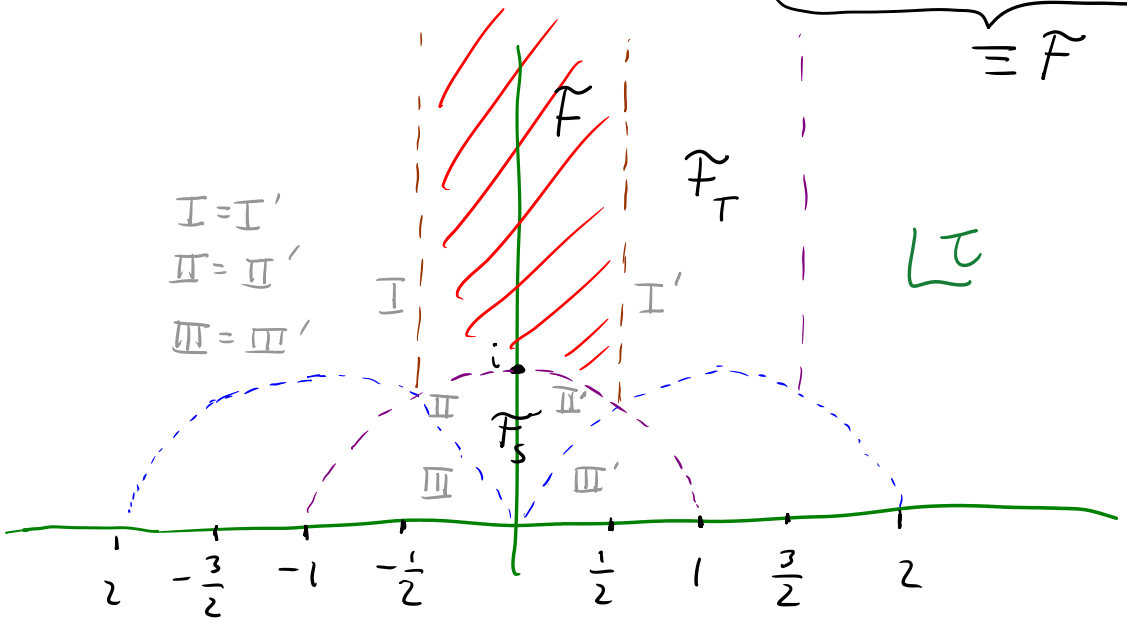
$$\int \frac{dt_1 \cdots dt_M}{M} \longleftarrow \equiv \frac{T}{GM}$$

Espacio de Módulos.

En el caso del toro, $\mathcal{T} = \{\tau \mid \mathrm{Im}\,\tau > 0\}$,

y podemos tomar $M = \{\tau \mid \underbrace{|\tau| \geq 1,\ -\tfrac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\,\tau \leq \tfrac{1}{2}}_{\equiv F}\}$.

región fundamental



Tendremos entonces

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab}}{\mathrm{Dif} \times \mathrm{Weyl}} \ldots = \frac{1}{\mathrm{GKC}} \int_F d^2\tau\, \mu(\tau) \ldots$$

↑ deducir en ingeniería de b

¿Vectores de Killing conformes? δz periódicos tales que $\partial_{\bar{z}} \delta z = 0$

$\Longrightarrow \delta z = \epsilon$ constante $\therefore$ $\boxed{K = 2}$

(Riemann-Roch: $K - M = 3\chi = 0$ ✓)

GKC = $U(1) \times U(1)$ (translaciones en σ^1, σ^2) es compacto.

jueves, 16 de marzo de 2006 09:28 a.m.

Como ahora $\frac{1}{6KC} \neq 0$, incluso la amplitud de cero puntos (↔ energía del vacío) puede ser no nula (↔ corrección cuántica esperada a 1 lazo),

$$M^{(0)}_{T^2} \equiv \frac{e^{-0\cdot\Phi_0}}{6KC} \frac{1}{2} \int_{\tilde{F}} d\tau_1 d\tau_2 \left\langle \prod_{i=1}^{2} \left(\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g}\, g^{ab} \frac{\partial g_{bc}}{\partial \tau_i} g^{cd} b_{da} \right) \right\rangle^{X, b_{ab}, c^a}_{T^2(\tau)}$$

por lifeo grande $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in GM$, que no cambia τ

aquí y en lo sucesivo, tomamos $g_{ab} = \overset{v}{g}_{ab}(\tau)$ (análogo a).

Material suplementario pp. 395-406:
detalles del cálculo explícito

martes, 28 de marzo de 2006 11:15 a.m.

$$\eta(\tau) \equiv q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) \qquad \text{con } q \equiv e^{2\pi i \tau}$$

Al final del cálculo se obtiene

$$\mathcal{M}^2_{T^2} = (4\pi^2\alpha')^{-13} \int_{\tilde{F}} \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4(\mathrm{Im}\,\tau)^2} (\mathrm{Im}\,\tau)^{-12} |\eta(\tau)|^{-48}$$

(notar que $d\tau d\bar{\tau} = 2 d\tau_1 d\tau_2$)

$SL(2,\mathbb{Z})$

La integral debe ser invariante modular (pp. 392-3), pues de otra manera habría una anomalía "gravitacional" global.

Es fácil verificar que bajo $\tau \to \tilde{\tau} = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$

tenemos $d^2\tau \to d^2\tilde{\tau} = \frac{d^2\tau}{|c\tau+d|^4}$ y $\mathrm{Im}\,\tau \to \mathrm{Im}\,\tilde{\tau} = \frac{\mathrm{Im}\,\tau}{|c\tau+d|^2}$

así que $\frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\,\tau)^2}$ es invariante.

Además, $\eta(\tau+1) = e^{i\pi/12}\eta(\tau)$, $\eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau)$,

$\mathrm{Im}(\tau+1) = \mathrm{Im}(\tau)$, $\mathrm{Im}(-1/\tau) = \frac{\mathrm{Im}\,\tau}{|\tau|^2}$,

así que $\mathrm{Im}\,\tau\,|\eta(\tau)|^4$ es invariante modular.

Concluimos entonces que en $D=26$, y solo en $D=26$,

$$\mathcal{M}^2_{T^2} \sim \int_{\tilde{F}} \frac{d^2\tau}{(\mathrm{Im}\,\tau)^2} \left(\mathrm{Im}\,\tau\, |\eta(\tau)|^4\right)^{-12}$$

es invariante modular. ✓

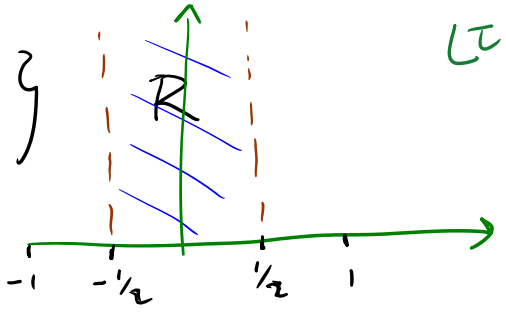
$\Longrightarrow$ inconsistencia a un lazo si $D \neq 26$

Material suplementario pp. 408-410: comparación detallada entre este resultado de un lazo *de cuerda* y el correspondiente resultado para la suma sobre diagramas de 1 lazo correspondientes a la torre infinita *de partículas* que encontramos en el espectro de la cuerda libre.

El resultado neto es que **ambas expresiones coinciden, excepto por la *región de integración* sobre tau**, que en el caso de las partículas es

$$R \equiv \left\{ \tau \;\middle|\; \mathrm{Im}\,\tau > 0,\ -\tfrac{1}{2} \leq \mathrm{Re}\,\tau \leq \tfrac{1}{2} \right\}$$

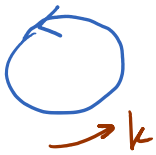
$$\neq \tilde{F} .$$



En particular, la región $\tau_2 = \mathrm{Im}\,\tau \to 0$ $(T \to 0)$,

que en el caso de partículas da lugar a

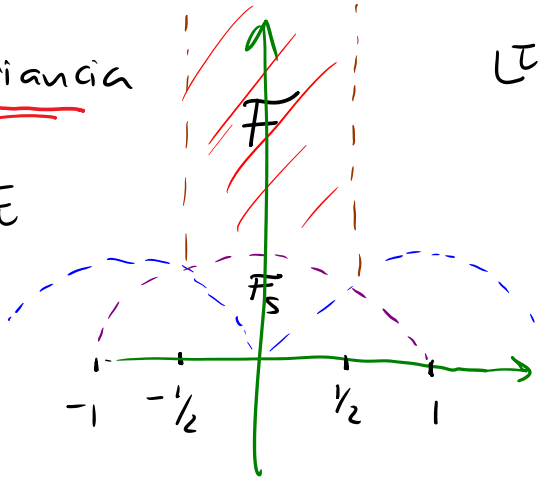
divergencias ultravioleta $(|k^\mu| \to \infty)$,



¡¡está ausente en la amplitud de cuerdas!!

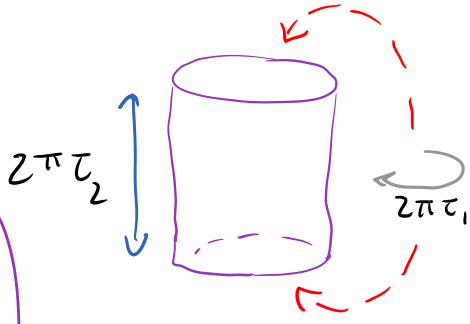
La razón, como vimos, es la invariancia modular. Usando $S: \tau \to \tilde{\tau} = -\frac{1}{\tau}$

(que corresponde al difeo grande $(\sigma_1, \sigma_2) \longleftrightarrow (\sigma_2, -\sigma_1)$) tenemos

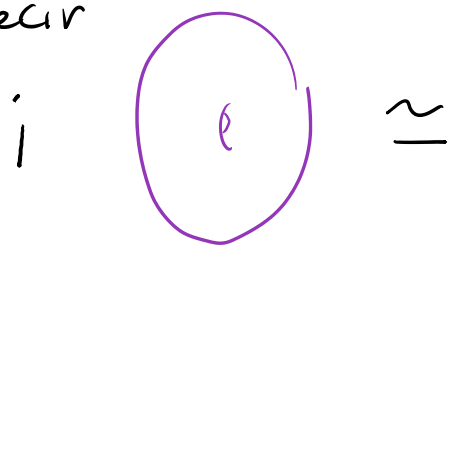


que, p.ej., $\tau = i\tau_2 \to 0$ es equivalente

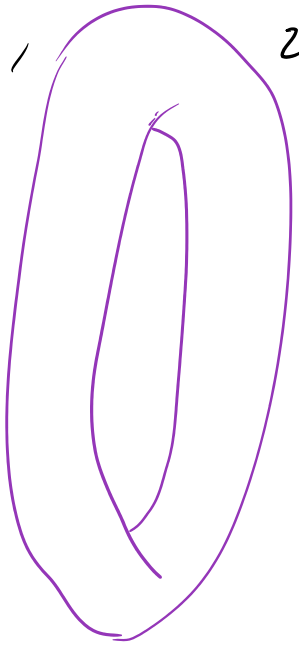
a $\tilde{\tau} = -\frac{1}{i\tau_2} = i\tilde{\tau}_2 \to \infty$,



es decir

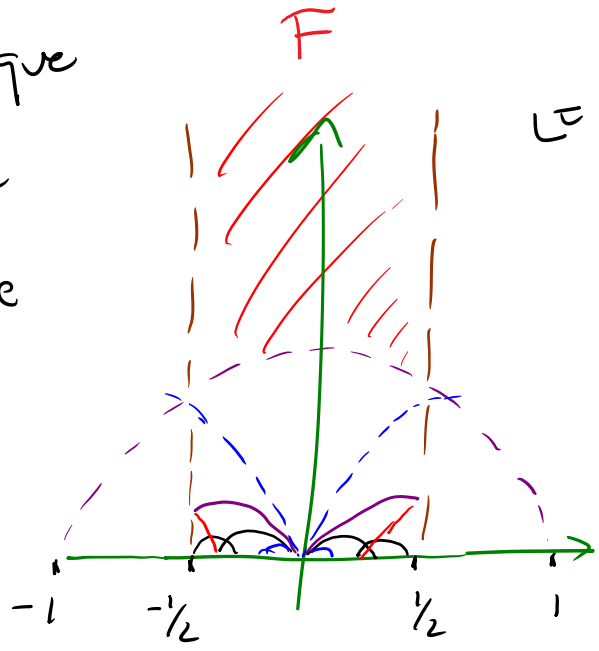


$\simeq$



!

(La región de integración R que es relevante para el caso de partículas de hecho contiene un número infinito de copias de la región $\tilde{F}$ que cuerdas incorpora.)



Vemos entonces que la estructura de la teoría de cuerdas impone automáticamente un corte UV (cota inferior para $\tau_2 \sim$ cota superior para $|k^M|$), invariante de Lorentz, de manera autoconsistente (lo cual no es trivial, dado que existen campos de norma).

El comportamiento en el límite opuesto, IR, $\tau_2 \to \infty$ ($\leftrightarrow T \to \infty \leftrightarrow |k^M| \to 0$), está dominado por los estados con masas más bajas, justamente como en el caso de partículas.

Material suplementario pp. 413-421:

- Análisis del mismo lazo (toro sin inserciones) en el límite IR. Hay una divergencia solo por el taquión (ausente en teoría de supercuerdas).
- Análisis de amplitudes a un lazo con patas externas (toro con inserciones). Igual que en la esfera, hay divergencias cuando chocan los vértices entre sí, y se trata de polos o cortes cuando estados intermedios van a la capa de masa.
- Mención breve de un lazo de cuerda *abierta* (anillo sin inserciones). Nuevamente la divergencia tiene un origen IR, no UV.

En amplitudes con más lazos (ver Polchinski Vol. I Cap. 9 ó D'Hoker y Phong, Rev. Mod. Phys. 60 (1988), 917) se encuentra una situación similar: posibles divergencias provienen solo de la frontera del espacio de módulos, y cuando existen, tienen una interpretación como efectos IR, es decir, de distancias grandes.

En resumen, las amplitudes de la cuerda bosónica ¡¡ NO tienen divergencias UV !! y son unitarias.

La situación en la supercuerda parece ser similar, pero es técnicamente más complicada (por la existencia de 'supermódulos'). NO hay divergencias a 1 lazo (Green, Schwarz '85; Gross, Martinec, Harvey, Rohm '87) ni a 2 lazos (D'Hoker, Phong '01-'05), y se espera que no las haya en general, pero no se han hecho cuentas explícitas.

L16: 21/05/13

L37: 29/11/13

Cuerdas en Fondos no Triviales

Hemos visto antes que el vértice del gravitón representa una fluctuación infinitesimal por encima de la métrica de fondo $\eta_{\mu\nu}$. Dicho vértice es

$$V_h(\varepsilon;k) = -\underbrace{g_c N \frac{2}{\alpha'}}_{\frac{K}{2\pi}} \frac{1}{2}\int d^2\sigma \sqrt{g}\, g^{ab} :\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \underbrace{e^{ik\cdot X}}_{\equiv h_{\mu\nu}(X)} :_g \varepsilon_{\mu\nu} ,$$

($\varepsilon_{\mu\nu}$: simétrico)

donde, para garantizar la invariancia bajo difeos, el orden normal $:\ :_g$ se define restando la contracción

$$\Delta^{-1}(\sigma,\sigma') = -\frac{\alpha'}{2}\ln\left[d^2(\sigma,\sigma')\right]$$

↑ distancia geodésica entre σ y σ'

(que en la norma plana $g_{z\bar z} = \frac{1}{2}$ $g_{zz} = 0 = g_{\bar z\bar z}$ se reduce a $-\frac{\alpha'}{2}\ln|z-z'|^2$), y la invariancia de Weyl requiere que $k^2 = 0$, $k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0$, $\varepsilon^\mu{}_\mu = 0$.

A partir de esto entendimos que el

Espacio Curvo $\longleftrightarrow$ 'Estado Coherente' de Gravitones

es descrito entonces por

$$\int DX^\mu \, e^{-S_p[X]} \, e^{\mathcal{V}_h[X]} \quad \text{, es decir,}$$

$$S_p[X] \longrightarrow S_g[X] = S_p[X] - \mathcal{V}_h[X]$$

$$= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g}\, g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \underbrace{\left(\eta_{\mu\nu} + 2\kappa h_{\mu\nu}(X)\right)}_{\equiv g_{\mu\nu}(X)} .$$

La misma idea aplica para los otros modos de oscilación de la cuerda. En particular, el vértice de la antisimetrización

$$\mathcal{V}_B(\varepsilon; k) = -\frac{K}{2\pi} \frac{1}{\alpha'} \int d^2\sigma \; i\, \epsilon^{ab} : \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \underbrace{e^{ik\cdot X} : \varepsilon_{\mu\nu}}_{\equiv B_{\mu\nu}(X)}$$

antisimétrico

por rotación de Wick

$\epsilon^{12} = +1$ densidad tensorial

$\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\epsilon^{ab} \text{ es tensor}\right)$

$$\left(\text{con } k^2 = 0, \; \varepsilon_{\mu\nu} k^\nu = 0\right),$$

y del dilatón,

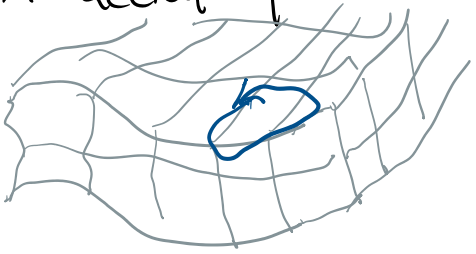
$$V_\varphi(k) = -\frac{K}{2\pi}\frac{1}{\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{g}\,:\Big(g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} + \frac{26}{12}\alpha' R\Big) e^{ik\cdot X}:_g$$

(la $\frac{26}{12}\alpha' R$: por invariancia de Weyl [ver p.ej. Polchinski 3.6])

(la $e^{ik\cdot X}$: $\equiv \varphi(X)$)

(con $k^2 = 0$),

se exponencían para dar lugar a la acción que describe a cuerda en el fondo más general de campos no masivos:



$$S_\sigma[X] = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_M d^2\sigma \Big\{\sqrt{g}\, g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu\, g_{\mu\nu}(X) \quad \leftarrow \text{Campo gravitacional}$$

$$+ i\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu\, B_{\mu\nu}(X) \quad \leftarrow \text{campo de Kalb-Ramond}$$

"Modelo σ no lineal"

$$+ \alpha'\sqrt{g}\, R\, \Phi(X) \Big\} \quad \leftarrow \text{Campo dilatónico}$$

Notar que un fondo dilatónico constante $\Phi(X) = \Phi_0$ contribuye

$$\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}\, R\,\Phi_0 = \Phi_0\,\chi, \text{ es decir } \quad \text{(cf. p. 349)}$$

¡¡ la constante de acoplamiento de cuerdas está determinada por valor de fondo del dilatón, $\boxed{g_c = e^{\Phi_0}}$!!

en general, $X_0^\mu(\sigma)$

Desarrollando $X^\mu(\sigma) = x_0^\mu + \underline{X}^\mu(\sigma)$, tenemos infinitas interacciones:

$$\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X) = \partial_a \underline{X}^\mu \partial_b \underline{X}^\nu \left[g_{\mu\nu}(x_0) + \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x_0) \underline{X}^\lambda + \frac{1}{2} \partial_{\lambda_1}\partial_{\lambda_2} g_{\mu\nu}(x_0) \underline{X}^{\lambda_1} \underline{X}^{\lambda_2} + \dots \right]$$

(1 pata; 2 patas; ... funciones de acoplamiento)

S_σ es, de hecho, la teoría (estrictamente) renormalizable más general para D campos escalares en 2 dimensiones: usando la unidad de longitud en la hoja de mundo $[\sigma] = \ell$, tenemos $[\partial_a] = \ell^{-1}$, $[g_{ab}] = \ell^0 = [X]$, y por tanto los términos con 2 derivadas y un número arbitrario de X's son estrictamente renormalizables o "marginales" ($[\,] = \ell^{-2}$) por conteo de potencias. Es decir, las constantes de acoplamiento correspondientes, como $\partial_{\lambda_1} \cdots \partial_{\lambda_n} g_{\mu\nu}(x_0)$, son adimensionales (tal como e en QED, g_{YM} en QCD, o λ en φ^4 en 4 dim).

Los únicos otros términos renormalizables (dim ≤ 2) serían

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g}\, \phi(X)$$ ← campo taquiónico

$[\phi] = \ell^{-2}$ ∴ súper-renormalizable o "relevante"

y, en teorías con cuerdas abiertas,

$$\int_{\partial\mathcal{M}} ds\, \phi(X) \quad \text{y} \quad i \int_{\partial\mathcal{M}} ds\, t^a \partial_a X^\mu A_\mu(X) \qquad (\text{con } ds \equiv d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}},\ t^a \partial_a = \partial_\tau).$$

$\phi(X)$: taquión — súper-renormalizable

$A_\mu(X)$: fotón — renormalizable

S_σ es invariante bajo

1) Difeos en el espaciotiempo $X^\mu \to X'^\mu(X)$.

2) Transformación de norma de $B_{\mu\nu}$:

$$B_{\mu\nu} \longrightarrow B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$$

$\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X)$

(porque $\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \underbrace{\partial_b X^\nu \partial_\nu \Lambda_\mu}_{\partial_b \Lambda_\mu} = \epsilon^{ab}\partial_b(\partial_a X^\mu \Lambda_\mu)$ es una derivada total),

cuerda abierta $\leftrightarrow$ D-brana

que, en presencia de $\partial M \neq 0$, debe complementarse con

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{2\pi\alpha'}\Lambda_\mu \quad (\Rightarrow F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} - \frac{1}{2\pi\alpha'}(\partial_\mu\Lambda_\nu - \partial_\nu\Lambda_\mu)).$$

¿esta NO es una transf. de norma de A_μ?

3) Transformación de norma usual $A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda$.

4) Difeos en la hoja de mundo $\sigma^a \to \sigma'^a(\sigma)$.

5) ¿Weyl? $g_{ab}(\sigma) \longrightarrow g'_{ab}(\sigma) = e^{\omega(\sigma)} g_{ab}(\sigma)$.

Los términos de $g_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ son invariantes de Weyl a nivel clásico. ¿¿Lo siguen siendo a nivel cuántico?? El término de Φ no es invariante de Weyl ¡ni siquiera a nivel clásico! (Es invariante sólo si Φ es constante.)

Aun en un fondo plano ($\leftrightarrow$ teoría libre en la hoja de mundo) vimos que las medidas $\mathcal{D}_g X^\mu$, $\mathcal{D}_g b_{ab}$, $\mathcal{D}_g c^a$ dependen de $\omega(\sigma)$, de tal manera que la invariancia de Weyl se preserva solo si $c^{TOT}=0$ ($\leftrightarrow D=26$). En un fondo no trivial,

Interacciones en la hoja de mundo $\Longrightarrow$ Renormalización Adicional $\Longrightarrow$ Anomalía de Weyl en general

Material suplementario pp. 428-436: cálculo de anomalía de Weyl en fondo no trivial

Consideremos por simplicidad un fondo puramente gravitacional:

$$S_0[X] = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma \sqrt{g}\, g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)$$

y separemos

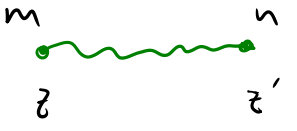
$$X^\mu(\sigma) = X_0^\mu(\sigma) + Y^\mu(\sigma)$$

reemplazo por variable ξ^μ que sí es un vector

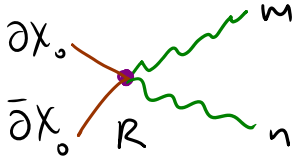
$X_0^\mu(\sigma)$: Valor de fondo que satisface ec. de mov.

$Y^\mu(\sigma)$: fluctuación cuántica: $\int \mathcal{D}X^\mu(\sigma) \to \int \mathcal{D}Y^\mu(\sigma)$

En nuestro ejemplo del fondo puramente gravitacional, desarrollando $S_\sigma[X, g]$ en términos de X_0^μ y ξ^m, se obtienen las reglas de Feynman



$$\equiv -\frac{\alpha'}{2}\eta^{mn}\ln|z-z'|^2 \quad \leftarrow \text{propagador } \langle \xi^m(z,\bar z)\,\xi^n(z',\bar z')\rangle$$



$$\equiv \frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\,\{R_{\mu m\nu n}(X_0)\,\partial X_0^\mu\,\bar\partial X_0^\nu\}(z,\bar z)$$

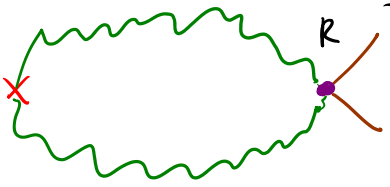
fuente externa

(además de un vértice de 2 patas que involucra a la conexión de espín, pero no será relevante aquí porque a 1 lazo no puede dar lugar a un resultado covariante bajo difeos en el espaciotiempo).

A 1 lazo tenemos entonces

← Términos cúbicos o más altos en ξ^m no figuran a este orden

$$\langle T_{zz}(z)\rangle = T_{zz}^{(cl)}(z)$$



↑ incluye $\frac{1}{\alpha'}\partial\xi^m\partial\xi^n\eta_{mn}$

(y otros términos que no contribuyen)

$$\nabla_a T^{ab}=0 \Rightarrow \langle T_{\bar z z}(q)\rangle = -\frac{1}{4}\{R_{\mu\nu}\,\partial X_0^\mu\,\bar\partial X_0^\nu\}(-q),$$

es decir, existe una anomalía de Weyl a menos que

$$\boxed{R_{\mu\nu}=0} \longleftrightarrow \text{¡ec. de Einstein en el vacío!}$$

La existencia de esta anomalía está estrechamente relacionada con la aparición de una divergencia UV. La renormalización elimina la divergencia de $W[g]$; pero (como en QED o QCD) introduce dependencia de escala de distancia/momento en la hoja de mundo ($\leftrightarrow$ la escala de renormalización), que se puede codificar en la funcional beta

$$\beta^{g}_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial g^{(d)}_{\mu\nu}}{\partial \ln \epsilon} = \alpha' R_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha'^2) .$$

← corte UV ($\epsilon \to 0$)

Si $\beta^{g}_{\mu\nu} \neq 0$ (divergencias $\Longrightarrow$ no hay invariancia bajo reescalamientos rígidos), entonces $W[g_{ab} = e^{\omega(\sigma)} \delta_{ab}]$ depende de $\omega(\sigma)$, y $\therefore \langle T^{a}_{a} \rangle \neq 0$.

El resultado para un fondo $g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi$ general es:

$$\langle T^{a}_{a} \rangle = -\frac{1}{2\alpha'} g^{ab} \partial_a X^{\mu}_{o} \partial_b X^{\nu}_{o} \beta^{g}_{\mu\nu}$$
$$- \frac{i}{2\alpha'} \epsilon^{ab} \partial_a X^{\mu}_{o} \partial_b X^{\nu}_{o} \beta^{B}_{\mu\nu}$$
$$- \frac{1}{2} R \beta^{\Phi} ,$$

↖ cada funcional beta multiplica ↙ al operador de vértice correspondiente

donde (para campos que varían lentamente en x^μ)

$$\beta^g_{\mu\nu} = \alpha' \left[R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{4} H_{\mu\lambda\rho} H_\nu{}^{\lambda\rho} \right] + O(\alpha'^2),$$

derivada covariante en el espaciotiempo

$\partial_\mu B_{\lambda\rho} - \dots$

$$\beta^B_{\mu\nu} = \alpha' \left[-\frac{1}{2} \nabla^\rho H_{\rho\mu\nu} + \nabla^\rho \Phi H_{\rho\mu\nu} \right] + O(\alpha'^2),$$

$$\beta^\Phi = \frac{D-26}{6} + \alpha' \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 \Phi + \nabla_\rho \Phi \nabla^\rho \Phi - \frac{1}{24} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} \right] + O(\alpha'^2).$$

habíamos visto ya (p. 238) en fondo plano (incluye contribución de fantasmas)

contribución clásica (a través de $S_\sigma[X_0]$)

Tenemos entonces invariancia de Weyl sólo si el fondo satisface las restricciones (ecs. de movimiento)

$\beta^g_{\mu\nu} = 0$ ~ ¡Ecuación de Einstein!

$\beta^B_{\mu\nu} = 0$ ~ ¡Ecuación de Maxwell generalizada!

$\beta^\Phi = 0$ ~ ¡Ecuación de Klein-Gordon!

Concluimos entonces que, sorprendentemente,

¡¡ INVARIANCIA CONFORME $\Longrightarrow$ DINÁMICA DE CUERDAS !!
(en hoja de mundo) (en espaciotiempo)

L26: 17/11/21

Entendemos entonces que la invariancia conforme es equivalente a las ecs de mov. de cuerdas a nivel árbol, es decir, clásicas.

Notar que una de estas ecuaciones es

$$\beta^{\Phi} = \frac{D-26}{6} + \text{contribución de fondo no trivial} = 0$$

$\leftarrow O(\alpha')$

Así que fondo plano $\Longrightarrow D=26$; pero

fondo no trivial que varíe rápidamente $\Longrightarrow$ posiblemente $D \neq 26$.

← en escala de ℓ_c

P.ej., el fondo dilatónico lineal

$$g_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu}(X) = 0, \quad \Phi(X) = V_\mu X^\mu$$

(integral funcional gaussiana) (con $V_\mu V^\mu = \frac{26-D}{6\alpha'}$)

resulta ser solución exacta de las condiciones de Weyl,

es decir, de las ecs. de mov. clásicas: este fondo define una teoría de campo conforme en 2 dim, con carga central $c^X = D + 6\alpha' V_\mu V^\mu = 26 \Rightarrow c^{TOT} = 0$. ✓

Eligiendo coords tales que $V_\mu = \sqrt{\frac{26-D}{6\alpha'}}\,\delta_\mu^{D-1}$, tenemos $S_\sigma \supset -\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\sqrt{g}\left(g^{ab}\partial_a X^{D-1}\partial_b X^{D-1} + \sqrt{\frac{26-D}{\alpha'}}R X^{D-1}\right)$, que coincide con la p.291: $S_L[\omega, \check{g}_{ab}] = -\frac{1}{96\pi}\int d^2\sigma\sqrt{\check{g}}\left(\check{g}^{ab}\partial_a\omega\partial_b\omega + 2\check{R}\omega\right)$. ¡Así que $X^{D-1}(\sigma)$ se puede reinterpretar como el modo de Weyl $\omega(\sigma)$ en una teoría de cuerdas no crítica en $D-1$ dim! ← en lugar de D

El caso $D \leq 2$ se ha resuelto usando un modelo matricial —ver p.ej. hep-th/9108019. Se aprendió en particular que que en superficies con género $m >> 1$ las amplitudes $\mathcal{M}_m \sim (2m)!\, g_c^{2m}$, lo cual ← sería en g_c^2 nos hace esperar que los efectos no perturbativos en teoría de cuerdas sean de $\mathcal{O}(e^{-1/g_c})$

— cf. teoría $\lambda\varphi^4$, donde a orden λ^n hay $\sim n!$ diagramas $\Rightarrow$ efectos no perturbativos $\mathcal{O}(e^{-1/\lambda})$!)

Las condiciones $\beta^G_{\mu\nu} = \beta^B_{\mu\nu} = \beta^\Phi = 0$ son equivalentes a las ecs. de movimiento que provienen de la misma acción efectiva que dedujimos en la p. 389:

$$S_{ef} = \frac{1}{2K_0^2}\int d^Dx\sqrt{-g}\, e^{-2\Phi}\left\{-\frac{2}{3\alpha'}(D-26) + R + 4\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi - \frac{1}{12}H_{\mu\nu\lambda}H^{\mu\nu\lambda} + O(\alpha')\right\}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2K^2}\int d^Dx\sqrt{-g}\, e^{-2\tilde{\Phi}}}$$

con $\tilde{\Phi} \equiv \Phi - \Phi_0$

$$2K^2 \equiv \underbrace{2K_0^2 e^{2\Phi_0}}_{(2\pi)^{D-3}\ell_c^{D-2}g_c^2} = 16\pi G_N$$

Esta es la acción en el marco de cuerdas: por definición $g_{\mu\nu}(x)$ es la métrica que la cuerda "siente". Como vimos en las pp. 388-9, es posible pasar al marco de Einstein a través de la redefinición de campos

$$g^E_{\mu\nu}(x) \equiv e^{\frac{4}{D-2}\tilde{\Phi}} g_{\mu\nu}(x),$$ para obtener

$$S_{ef} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^D x \sqrt{-g^E}\left\{-\frac{2(D-26)}{3\alpha'} e^{4\tilde{\Phi}/(D-2)} + R^E - \frac{4}{D-2}\partial_\mu\Phi(\partial^\mu\Phi)^E - \frac{1}{12}e^{-8\tilde{\Phi}/(D-2)} H_{\mu\nu\lambda}(H^{\mu\nu\lambda})^E + O(\alpha')\right\}$$

Esta (con $D=26$) es precisamente la acción que obtuvimos antes a partir de las amplitudes de dispersión.

Notar que la acción efectiva completa incluye 2 tipos distintos de correcciones:

Correcciones de cuerdas (objetos no puntuales) $\longleftrightarrow$ Expansión en α' (correcciones cuánticas en teoría 2-dimensional)

p.ej., $\beta^G_{\mu\nu} = \alpha' R_{\mu\nu} + \frac{\alpha'^2}{2} R_{\mu\lambda\sigma\rho} R_\nu{}^{\lambda\sigma\rho} + \ldots$

Correcciones cuánticas $\longleftrightarrow$ Expansión en $g_c = e^{\Phi_0}$.

(superficies de género más alto)

Ambos tipos de correcciones pueden ser relevantes para determinar cuáles son los fondos válidos ($\leftrightarrow$ 'vacíos' posibles) en la teoría de cuerdas completa.

Material suplementario pp. 445-448: discusión de cómo aparecen correcciones cuánticas al sumar sobre hojas de mundo con distinta topología. Las ecs. de mov. se modifican por divergencias adicionales que provienen de la frontera del espacio de módulos:

$$\beta^{\text{TOTAL}} = \beta^{\text{usual}} + \beta^{\text{módulos}} = 0$$

Mecanismo de Fischler-Susskind

Esto implica que la teoría 2-dimensional es invariante conforme a nivel clásico, pero por correcciones cuánticas es no invariante conforme en cada superficie (con módulos fijos) por separado, aunque sí "conforme" en conjunto.

[17:25/05/13

[30:04/12/23 (repetición)

3. Supercuerdas

$\infty, 4, 2, 1$

Las N teorías de cuerdas bosónicas (donde $X^\mu(\sigma)$ son los únicos grados de libertad) tienen algunos problemas:

- Taquión ϕ (¿Escoger otro vacío? ¿Tal vez fondo dilatónico en $D=2$?)
- $D=26$ (¿Compactificar?)
- $\nexists$ fermiones (¿Mecanismo no perturbativo? Ver p.ej. David, Minwalla, Núñez 0107165 Englert, Houart, Taormina 0106235)

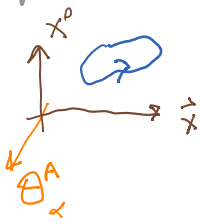
La situación mejora si generalizamos a teorías de supercuerdas, que incorporan Bosones $\longleftrightarrow$ Fermiones

Supersimetría (SUSI)

Es posible describir estas teorías a través de 3 formalismos distintos pero equivalentes:

① Green-Schwarz (Supercuerda) — ver GSW cap. 5

Agregar $\theta^A_\alpha(\sigma)$ — espinor(es) en espaciotiempo
— escalar en hoja de mundo

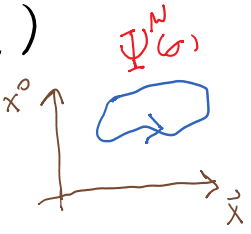


$\Longrightarrow$ SUSI en espaciotiempo manifiesta ✓

Solo puede cuantizarse en norma del cono de luz ✗

viernes, 21 de abril de 2006 03:27 p.m.

② Ramond-Neveu-Schwarz (cuerda con espín)



Agregar $\Psi^\mu(\sigma)$ — vector en espaciotiempo
— espinor en hoja de mundo

Se puede cuantizar de manera covariante bajo Poincaré ✓

SUSY en espaciotiempo no manifiesta ✗

↑ teoremas SUSY en hoja de mundo

③ Berkovits (Espinor puro) — ver hep-th/0209059
0302147
0902.1552
0910.2254

Combina lo mejor de ① y ②

Permite cuantización covariante bajo Súper-Poincaré ✓

Formalismo aún en etapa de desarrollo ✗

Estudiaremos solo RNS (más sencillo).

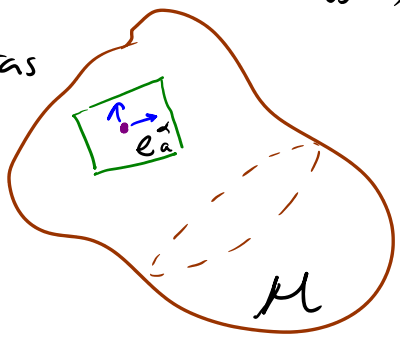
No basta con agregar $\Psi^\mu(\sigma)$: para desacoplar nuevos modos con norma negativa (asociados a $\Psi^0(\sigma)$), necesitamos invariancia local mayor en hoja de mundo — supersimetría.

Como 'superparejas' de $X^\mu(\sigma)$ y $g_{ab}(\sigma)$, agregamos entonces D espinores de Majorana (reales) $\Psi^\mu(\sigma) = \begin{pmatrix} \psi_+(\sigma) \\ \psi_-(\sigma) \end{pmatrix}$

τ ↑ g_{ab}, χ_a + X^μ, Ψ^μ

y 1 gravitino (vector × espinor Majorana) σ $\chi_a = \begin{pmatrix} \chi_a^+ \\ \chi_a^- \end{pmatrix}$

Recordar que para definir espinor en espacio curvo (en este caso, hoja de mundo M con métrica intrínseca $g_{ab}(\sigma)$), es necesario usar polidad/vielbein/muchas-patas (en 2 dim: diada/zweibein/2-patas; 4 dim: tétrada/vierbein/4-patas):



Una elección de base ortonormal para espacio tangente en cada punto de la variedad,

$e_a^\alpha(\sigma)$ ← etiqueta de vectores $\alpha = 0, 1$

← índice vectorial $a = 0, 1$

$$e_a^\alpha(\sigma)\, e_b^\beta(\sigma)\, g^{ab}(\sigma) = \eta^{\alpha\beta} \quad \longleftrightarrow \quad \eta_{\alpha\beta}\, e_a^\alpha(\sigma)\, e_b^\beta(\sigma) = g_{ab}(\sigma)$$

Podemos entonces considerar a e_a^α en vez de g_{ab} como variable básica. La libertad de redefinir base localmente,

$$e_a^\alpha(\sigma) \to e'^\alpha_a(\sigma) = L^\alpha_{\ \beta}(\sigma)\, e_a^\beta(\sigma)$$

($L^\alpha_{\ \beta}$: matriz de Lorentz),

constituye una invariancia local adicional $SO(d-1,1)$ ($d=2$ aquí), que garantiza que no hemos añadido grados de libertad a nuestra descripción.

viernes, 21 de abril de 2006 11:19 p.m.

$\Psi^M(\sigma)$ y $\chi_a(\sigma)$ son espinores precisamente bajo este grupo de Lorentz local: definiendo matrices de Dirac $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = -2\eta^{\alpha\beta}$, bajo transformación infinitesimal $L^\alpha{}_\beta(\sigma) = \delta^\alpha_\beta + \theta^\alpha{}_\beta(\sigma)$ (con $\theta_{\alpha\beta} = -\theta_{\beta\alpha}$, $|\theta_{\alpha\beta}| \ll 1$)

tenemos (↑ matriz 2×2)

$$\delta\Psi(\sigma) = \frac{i}{2}\ \underbrace{\frac{i}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]}_{\text{1 generador de } SO(1,1)\ \equiv S^{\alpha\beta}}\ \underbrace{\theta_{\alpha\beta}(\sigma)}_{\text{parámetro}}\ \bar{\Psi}(\sigma)$$

Para poder escribir término cinético invariante bajo esta invariancia local, necesitamos definir derivada covariante

$$\nabla_a \Psi = \partial_a \Psi + \frac{1}{8}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]\, \omega_a^{\alpha\beta}\, \Psi$$

donde $\omega_a^{\alpha\beta}(\sigma) = \frac{1}{2} e^{b\alpha} \partial_a e^\beta_b + \dots$ es la conexión de espín (campo de norma $SO(d-1,1)$) determinada por el requisito

$$\nabla_a e^\alpha_b = \partial_a e^\alpha_b + \omega_a{}^\alpha{}_\beta\, e^\beta_b - \Gamma^c_{ab}\, e^\alpha_c = 0 .$$

(↑ Christoffel)

Tomando 'base de Majorana' para álgebra de Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Rightarrow iS^{\alpha\beta} \in \mathbb{R})$$

viernes, 21 de abril de 2006 11:57 p.m.

el hecho de que $\Psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi_+^\mu \\ \psi_-^\mu \end{pmatrix}$ y $\chi_a = \begin{pmatrix} \chi_a^+ \\ \chi_a^- \end{pmatrix}$ sean espinores de Majorana significa simplemente que $\psi_\pm^\mu$ y $\chi_a^\pm$ son reales.

Notar que en esta base la matriz de quiralidad ($\sim \gamma^5$) es $\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, así que las componentes individuales ψ_+^μ, ψ_-^μ, χ_a^+, χ_a^- son espinores de Majorana-Weyl (lo cual no es posible en 3+1 dim).

Con estas definiciones podemos escribir finalmente la acción para cuerda RNS en espaciotiempo plano:

$$S[X,\Psi,e,\chi] = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma\,\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2\alpha'} g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} - i\bar\Psi^\mu \gamma^a \nabla_a \Psi^\nu \eta_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\,\bar\chi_a \gamma^b\gamma^a \Psi^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\bar\Psi^\mu \Psi^\nu \eta_{\mu\nu}\,\bar\chi_a \gamma^b\gamma^a \chi_b \right\},$$

[ver GSW1 4.3.5]

con $\gamma^a(\sigma) \equiv e_\alpha^a(\sigma)\gamma^\alpha$ ($\Rightarrow \{\gamma^a,\gamma^b\} = -2g^{ab}$) y $\bar\Psi \equiv \Psi^\dagger\gamma^0$

sábado, 22 de abril de 2006 12:11 a.m.

Notar que no aparecen derivadas de e_a^α ó χ_a (los términos cinéticos correspondientes serían respectivamente $\int d^2\sigma \sqrt{g} R$, invariante topológico, y $i\bar{\chi}_a \gamma^{[a}\gamma^b\gamma^{c]}\nabla_b \chi_c = 0$ por antisimetrización), así que estos campos son no dinámicos.

S es invariante bajo

1) Poincaré en espaciotiempo (simetría global en hoja de mundo)

$$X'^\mu(\sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\sigma) + a^\mu \quad , \quad \Psi'^\mu(\sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu \Psi^\nu(\sigma)$$

2) Difeos en hoja de mundo (invariancia local)

$$\sigma^a \to \sigma'^a(\sigma) \quad , \quad X'^\mu(\sigma') = X^\mu(\sigma) \quad , \quad e'^\alpha_a(\sigma') = \frac{\partial \sigma^b}{\partial \sigma'^a} e^\alpha_b(\sigma) \quad ,$$

$$\Psi'^\mu(\sigma') = \Psi^\mu(\sigma) \quad , \quad \chi'_a(\sigma') = \frac{\partial \sigma^b}{\partial \sigma'^a}\chi_b(\sigma)$$

3) Weyl (invariancia local)

$$\delta e^\alpha_a(\sigma) = \lambda(\sigma) e^\alpha_a(\sigma) \quad , \quad \delta X^\mu(\sigma) = 0 \quad ,$$

$$\delta \Psi^\mu(\sigma) = -\tfrac{1}{2}\lambda(\sigma)\Psi^\mu(\sigma) \quad , \quad \delta \chi_a(\sigma) = \tfrac{1}{2}\lambda(\sigma)\chi_a(\sigma)$$

sábado, 22 de abril de 2006 01:21 p.m.

4) Lorentz en hoja de mundo (invariancia local)

$$\delta e_a^{\alpha}(\sigma) = \underbrace{\ell(\sigma)\,\epsilon^{\alpha}{}_{\beta}}_{\theta^{\alpha}{}_{\beta}(\sigma)}\, e_a^{\beta}(\sigma) \quad , \quad \delta X^{\mu}(\sigma) = 0 \ ,$$

índices α, β se suban/bajan con $\eta_{\alpha\beta}$

$$\delta \Psi^{\mu}(\sigma) = \tfrac{1}{2}\ell(\sigma)\,\gamma^0\gamma^1\,\Psi^{\mu}(\sigma) \ , \quad \delta \chi_a(\sigma) = \tfrac{1}{2}\ell(\sigma)\,\gamma^0\gamma^1\,\chi_a(\sigma)$$

5) Supersimetría en hoja de mundo ≡ Superdifeos (invariancia local)

$$\delta X^{\mu}(\sigma) = \sqrt{2\alpha'}\ \bar{\epsilon}(\sigma)\,\Psi^{\mu}(\sigma)$$

$$\delta \Psi^{\mu}(\sigma) = -i\gamma^a(\sigma)\,\epsilon(\sigma)\left[\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}\,\partial_a X^{\mu}(\sigma) - \bar{\Psi}^{\mu}(\sigma)\,\chi_a(\sigma)\right]$$

$$\delta e_a^{\alpha}(\sigma) = -2i\,\bar{\epsilon}(\sigma)\,\gamma^{\alpha}\,\chi_a(\sigma)$$

$$\delta \chi_a(\sigma) = \nabla_a \epsilon(\sigma)$$

fermiónico

donde el parámetro infinitesimal $\epsilon(\sigma)$ es un espinor de Majorana (es decir, tiene componentes reales $\epsilon_+(\sigma), \epsilon_-(\sigma)$)

6) Super Weyl (local)

$$\delta \chi_a(\sigma) = i\gamma_a(\sigma)\,\eta(\sigma) \ , \quad \delta X^{\mu}(\sigma) = \delta e_a^{\gamma}(\sigma) = \delta \Psi^{\mu}(\sigma) = 0$$

espinor Majorana (usar identidad $\gamma^a\gamma^b\gamma_a = 0$ en 2 dim)

S describe gravedad 'superconforme' en 2 dimensiones acoplada a campos escalares $X^{\mu}(\sigma)$ y espinoriales $\Psi^{\mu}(\sigma)$.

Al igual que en la cuerda bosónica, podemos eliminar redundancia de manera covariante bajo Poincaré en espaciotiempo imponiendo condiciones sobre los campos no dinámicos:

- 4 invariancias bosónicas locales (2 difeos, 1 Weyl, 1 Lorentz) nos permiten fijar $\boxed{e_a^{\alpha}(\sigma) = \delta_a^{\alpha}}$ $(\leftrightarrow g_{ab}(\sigma) = \eta_{ab})$
- 4 invariancias fermiónicas locales (2 ϵ's, 2 η's) nos permiten fijar $\boxed{\chi_a(\sigma) = 0}$

Esta es la norma superplana (Si no usamos Weyl ni superWeyl podemos fijar la norma superconforme $e_a^{\alpha}(\sigma) = e^{\lambda(\sigma)}\delta_a^{\alpha}$, $\chi_a(\sigma) = \gamma_a(\sigma)\eta(\sigma)$.)

El análisis aquí es local — globalmente puede haber módulos y supermódulos, así como vectores y espinores de Killing conformes.

sábado, 22 de abril de 2006 02:09 p.m.

(campos libres)

En la norma superplana, la acción se reduce a KG+Dirac sin masa:

$$S[X,\Psi] = -\frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma \left\{ \frac{1}{2\alpha'}\partial^a X^\mu \partial_a X_\mu - i\bar{\Psi}^\mu \gamma^a \partial_a \Psi_\mu \right\},$$

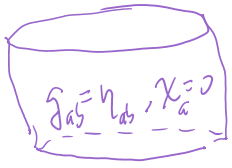
que debe ser suplementada con ecs. de mov. para los campos no dinámicos (constricciones),

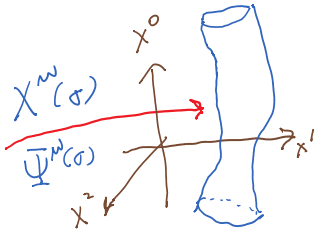
$$T_{ab} \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = -\left(\frac{1}{\alpha'}\partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + i\bar{\Psi}^\mu \gamma_{(a}\partial_{b)}\Psi_\mu - \text{traza} \right) = 0$$

$$J_a \equiv -\frac{\pi}{2\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta \chi^a} = \frac{1}{2}\gamma^b\gamma_a\bar{\Psi}^\mu\partial_b X_\mu = 0$$

supercorriente

L27: 22/11/21
L23: 06/12/23 (repaso)





Las ecs. de mov. para X^μ y $\bar{\Psi}^\mu$ en la norma superplana son

$$\partial^a\partial_a X^\mu = 0 \Rightarrow X^\mu(\sigma) = X^\mu(\tau+\sigma) + \tilde{X}^\mu(\tau-\sigma)$$

KG sin masa

modos izquierdos

derechos

$$\gamma^a\partial_a\bar{\Psi}^\mu = i\begin{pmatrix} 0 & -\partial_\tau+\partial_\sigma \\ \partial_\tau+\partial_\sigma & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_+^\mu \\ \Psi_-^\mu\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{\Psi}^\mu(\sigma) = \begin{pmatrix}\Psi_+^\mu(\tau-\sigma) \\ \Psi_-^\mu(\tau+\sigma)\end{pmatrix}$$

Dirac sin masa

sábado, 22 de abril de 2006 02:24 p.m.

Después de la rotación de Wick $\tau = \sigma^0 \to \sigma^2 = i\tau$

y pasando a las coords complejas habituales

$$w \equiv \sigma^2 + i\sigma^1 = i(\tau + \sigma) \quad , \quad z = e^w$$

$$\bar{w} = \sigma^2 - i\sigma^1 = i(\tau - \sigma) \quad , \quad \bar{z} = e^{\bar{w}}$$

← transform conforme = Weyl ∘ (difeo conforme)

← desacoplados →

tenemos

$$S_{RNS} = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi^\mu \bar{\partial} \psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu \partial \tilde{\psi}_\mu \right)$$

donde $\psi^\mu(z) \equiv \frac{z^{-1/2}}{\sqrt{2}} \psi_+^\mu(\tau+\sigma)$, $\tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \equiv \frac{\bar{z}^{-1/2}}{\sqrt{2}} \psi_-^\mu(\tau-\sigma)$,

↖ por reescalamiento bajo Weyl p.454 ↗

Con constricciones

$$T(z) \equiv T_{zz}(z) = -\frac{1}{\alpha'} \partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2} \psi^\mu \partial \psi_\mu = 0$$

$$J(z) \equiv J_z(z) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \psi^\mu \partial X_\mu = 0$$

$$\tilde{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} X^\mu \bar{\partial} X_\mu - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{\psi}_\mu = 0$$

$$\tilde{J}(\bar{z}) \equiv J_{\bar{z}}(\bar{z}) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} X_\mu = 0$$

$$\left(\text{Weyl} \Rightarrow T^a{}_a = 0 \quad , \quad \text{SuperWeyl} \Rightarrow \gamma^a J_a = 0 \right)$$

sábado, 22 de abril de 2006 02:38 p.m.

$S_{RNS}[X,\psi]$ posee invariancia residual bajo

1) Transformaciones conformes (Difeo Analítico ∘ Weyl)

$z \to z' = z'(z)$, $X'^{\mu}(z',\bar{z}') = X^{\mu}(z,\bar{z})$,

$\psi'^{\mu}(z') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{-1/2} \psi^{\mu}(z)$ ← campo primario con $h=\frac{1}{2}$, $\tilde{h}=0$

$\tilde{\psi}'^{\mu}(\bar{z}') = \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}\right)^{-1/2} \tilde{\psi}^{\mu}(\bar{z})$ ← campo primario con $h=0$, $\tilde{h}=\frac{1}{2}$

Sabemos que estas transformaciones son generadas por tensor de energía momento $T(z)$, $\tilde{T}(\bar{z})$

($j_f(z) = i f(z) T(z)$ es la corriente de Noether asociada a $z \to z' = z + \epsilon f(z)$).

2) Transformaciones superconformes (Superdifeo analítico ∘ Weyl ∘ SuperWeyl)

$$\delta X^{\mu}(z,\bar{z}) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\,\epsilon\left[\eta(z)\,\psi^{\mu}(z) + \eta(z)^{*}\,\tilde{\psi}^{\mu}(\bar{z})\right]$$

$$\delta\psi^{\mu}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\,\epsilon\,\eta(z)\,\partial X^{\mu}(z)$$

$$\delta\tilde{\psi}^{\mu}(\bar{z}) = -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\,\epsilon\,\eta(z)^{*}\,\bar{\partial} X^{\mu}(\bar{z})$$

con $\eta(z)$ anticonmutativo (espinor Majorana-Weyl),

que son generadas por las supercorrientes $J(z)$, $\tilde{J}(\bar{z})$

($j_\eta(z) = \eta(z) J(z)$ es la corriente de Noether asociada).

S_{RNS} es una teoría de campos superconforme (SCFT).

Podemos calcular el propagador para $\tilde{\psi}^\mu(z)$:

$$0 = \int \mathcal{D}\psi \; \frac{\delta}{\delta \psi^\mu(z)} \left[e^{-\frac{1}{4\pi}\int d^2z\, \psi\cdot\bar{\partial}\psi} \; \tilde{\psi}^\nu(z') \right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \langle \bar{\partial}\tilde{\psi}^\mu(z) \; \tilde{\psi}^\nu(z') \rangle + \eta^{\mu\nu}\, \delta^{(2)}(z-z') \langle 1 \rangle$$

p.276 $\Longrightarrow$

$$\boxed{\langle \tilde{\psi}^\mu(z)\, \tilde{\psi}^\nu(z') \rangle = \frac{\eta^{\mu\nu}}{z-z'} \langle 1 \rangle}$$

omitir

y de manera similar $\langle \tilde{\tilde{\psi}}^\mu(\bar{z})\, \tilde{\tilde{\psi}}^\nu(\bar{z}') \rangle = \dfrac{\eta^{\mu\nu}}{\bar{z}-\bar{z}'} \langle 1 \rangle$.

Definimos por tanto el orden normal conforme

$$:\tilde{\psi}^\mu(z)\tilde{\psi}^\nu(z'): \; \equiv \tilde{\psi}^\mu(z)\tilde{\psi}^\nu(z') - \eta^{\mu\nu}\frac{1}{z-z'}$$

$$:\tilde{\tilde{\psi}}^\mu(\bar{z})\tilde{\tilde{\psi}}^\nu(\bar{z}'): \; \equiv \tilde{\tilde{\psi}}^\mu(\bar{z})\tilde{\tilde{\psi}}^\nu(\bar{z}') - \eta^{\mu\nu}\frac{1}{\bar{z}-\bar{z}'}$$

domingo, 23 de abril de 2006 11:53 a.m.

contribución de $\psi(z)$ a $T(z)$

Usando $T^{\psi}(z) = -\frac{1}{2} :\psi^{\mu}\partial\psi_{\mu}(z):$ podemos calcular EPO

$$T^{\psi}(z)T^{\psi}(z') = \frac{1}{4} :\psi^{\mu}\partial\psi_{\mu}(z)\,\psi^{\nu}\partial'\psi_{\nu}(z'):$$ + términos con 1 contracción

$$+\frac{1}{4}\left[-\frac{\eta^{\mu\nu}}{z-z'}\partial'\left(\frac{\eta_{\mu\nu}}{z-z'}\right) + \partial\left(\frac{\delta^{\nu}_{\mu}}{z-z'}\right)\partial'\left(\frac{\delta^{\mu}_{\nu}}{z-z'}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2(z-z')^4}\frac{D}{2}(2-1) + \frac{2}{(z-z')^2}T^{\psi}(z') + \frac{1}{(z-z')}\partial'T^{\psi}(z') + \ldots$$

$$c^{\psi} = \frac{D}{2}$$

De manera similar, tomando el tensor de energía-momento completo, $T(z) = T^{X}(z) + T^{\psi}(z)$ podemos deducir que

$$T(z)T(0) = \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2}T(0) + \frac{1}{z}\partial T(0) + \ldots$$

$$T(z)J(0) = \frac{3}{z^2}J(0) + \frac{1}{z}\partial J(0) + \ldots$$

$J(z)$ es operador primario con $h=\frac{3}{2}$

$$J(z)J(0) = \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z}T(0) + \ldots$$

con $c = c^{X} + c^{\psi} = D + \frac{D}{2} = \frac{3D}{2}$.

Otra novedad es que al fijar la norma en la integral de trayectoria

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab}\,\mathcal{D}X_a\,\mathcal{D}X^{\sim}\mathcal{D}\Psi^{\sim}}{\mathrm{Dif}\times\mathrm{Weyl}\times\mathrm{SDif}\times\mathrm{SWeyl}}\; e^{-S[X,\Psi,g,\chi]}$$

necesitamos fantasmas adicionales: además de (p.265)

$$\mathcal{D}g_{ab} = J\,\mathcal{D}\xi\,\mathcal{D}\lambda \qquad \text{con } J = \det\left(\frac{\delta g_{zz}}{\delta \xi_z}\right)\det\left(\frac{\delta g_{\bar z\bar z}}{\delta \xi_{\bar z}}\right)$$

(Dif, Weyl)

$$= \det \nabla_z \det \nabla_{\bar z},$$

que representamos con campos anticonmutativos b y c, tenemos ahora [ver GSW 4.4, ó D'Hoker & Phong, Rev. Mod. Phys 60, 917]

$$\mathcal{D}X_a = J'\,\mathcal{D}\epsilon\,\mathcal{D}\chi \qquad \text{con } J' = \left[\det\left(\frac{\delta X_a}{\delta \epsilon}\right)\right]^{-1}$$

(SDif, SWeyl)

$$= \left[\det \nabla_z \det \nabla_{\bar z}\right]^{-1},$$

que representamos con campos conmutativos β y γ. ← superparejas de b, c

La acción resultante para fantasmas (en la norma superplana) es

$$S_f = \frac{1}{2\pi}\int d^2z\left(b\bar\partial c + \beta\bar\partial\gamma + \tilde b\,\partial\tilde c + \tilde\beta\,\partial\tilde\gamma\right)$$

que son 2 teorías superconformes adicionales, con

$h_c = -1$ ($\leftrightarrow \xi$), $h_b = 2$ ($\leftrightarrow T$), $h_\gamma = -\frac{1}{2}$ ($\leftrightarrow \epsilon$), $h_\beta = \frac{3}{2}$ ($\leftrightarrow J$),

miércoles, 26 de abril de 2006 09:09 p.m.

$$\langle b(z)\, c(z') \rangle = \frac{1}{z-z'}, \qquad \langle \beta(z)\, \gamma(z') \rangle = -\frac{1}{z-z'},$$

$$T^f = -(\partial b)\, c - 2b\, \partial c - \frac{1}{2}(\partial \beta)\, \gamma - \frac{3}{2}\beta\, \partial \gamma$$

$$J^f = (\partial \beta)\, c + \frac{3}{2}\beta\, \partial c - 2b\, \gamma$$

(con expresiones análogas para la teoría antianalítica),

de donde $c^{b,c} = -26$, $c^{\beta,\gamma} = +11$

$$\Longrightarrow \quad c^{TOT} = c^{X} + c^{\psi} + c^{b,c} + c^{\beta,\gamma}$$

$$= D + \frac{D}{2} - 26 + 11$$

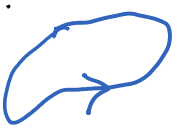
$$= \frac{3}{2} D - 15 .$$

Concluimos entonces que $\boxed{D=10}$ es la dimensión crítica para la supercuerda, donde $c^{TOT} = 0$ y por tanto la anomalía de Weyl se cancela.

(Si $D \neq 10$ —supercuerda no crítica— podemos fijar la norma superconforme, pero modos de Weyl y superWeyl son dinámicos $\longrightarrow$ acción de superLiouville.)

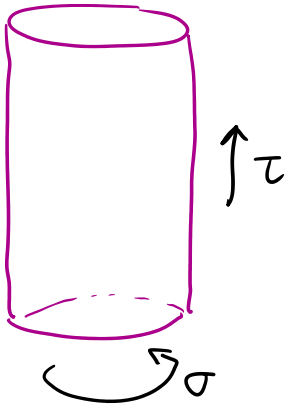
miércoles, 26 de abril de 2006 09:26 p.m.

Analicemos ahora las posibles condiciones de borde, primero en el caso de la supercuerda cerrada.



Sabemos ya que los campos con 'espín' entero deben ser periódicos:

$X^\mu(\sigma+2\pi,\tau) = X^\mu(\sigma,\tau) \quad \forall \mu$ es la única condición covariante bajo Poincaré,



y la periodicidad de los fantasmas c y b se debe a su conexión con reparametrizaciones y deformaciones de la métrica, respectivamente.

Pero los nuevos campos, que tienen espín semientero, permiten 2 condiciones de borde distintas:

$\psi^\mu(\sigma+2\pi,\tau) = +\psi^\mu(\sigma,\tau) \quad \forall \mu$ Ramond (preservan SUSY)

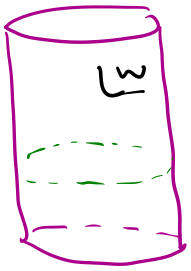
ó

$\psi^\mu(\sigma+2\pi,\tau) = -\psi^\mu(\sigma,\tau) \quad \forall \mu$ Neveu-Schwarz (rompen SUSY)

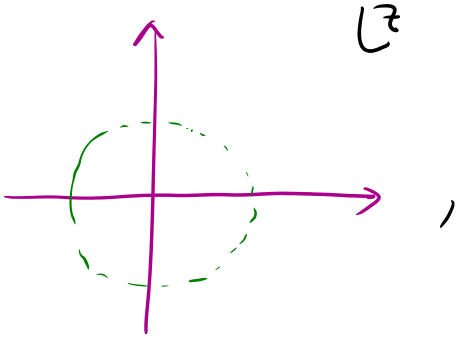
Conviene expresar el signo en la forma $e^{2\pi i \Delta}$, con $\Delta = \begin{cases} 0 & R \\ 1/2 & NS \end{cases}$. Solo existen estas 2 posibilidades porque $S \sim \int d^2z\, \psi \bar{\partial} \psi$ debe ser univaluada.

miércoles, 26 de abril de 2006 09:51 p.m.

Pasando al plano



$z = e^w$



$w = i(\tau + \sigma)$
$\equiv \sigma^2 + i\sigma^1$

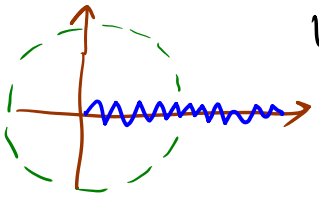
Dado que $\psi^w_{plano}(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-h_\psi} \psi_{cil}(w)$, las 2 opciones son

$\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right) = z^{-1/2}$

$\psi^w(e^{2\pi i} z) = -\psi^w(z)$ R

$\psi^w(e^{2\pi i} z) = +\psi^w(z)$ NS

← ∃ corte:



Más adelante veremos que, para obtener una teoría de supercuerdas consistente, necesitamos de hecho emplear ambas condiciones de borde, que definen entonces 2 distintos "sectores" de una misma teoría de cuerdas. En cada sector, los superfantasmas γ y β deben satisfacer las mismas condiciones de borde que ψ^w, porque γ está asociado al espinor ϵ que relaciona X^w con ψ^w.

miércoles, 26 de abril de 2006 10:04 p.m.

En resumen: $NS \equiv \begin{cases} + & \text{plano} \\ - & \text{cilindro} \end{cases}$, $R \equiv \begin{cases} - & \text{plano} \\ + & \text{cilindro} \end{cases}$.

Tomando en cuenta a los modos derechos $\tilde{\psi}^\mu(\bar{z})$, tenemos entonces 4 sectores para la cuerda cerrada:

	NS-NS	R-R	NS-R	R-NS
$(\Delta, \tilde{\Delta})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(0,0)$	$(\frac{1}{2}, 0)$	$(0, \frac{1}{2})$

Para la cuerda abierta,

$\delta S_{RNS} \Longrightarrow$ término de borde $\frac{1}{2\pi}\int d\tau \left(\psi^\mu \delta\psi_\mu - \tilde{\psi}^\mu \delta\tilde{\psi}_\mu\right)\Big|_{\sigma=0,\pi}$,

que se anula si $\psi^\mu\big|_{\sigma=0,\pi} = \pm\, \tilde{\psi}^\mu\big|_{\sigma=0,\pi} \quad \forall\, \tau$.

Podemos escribir esto en la forma

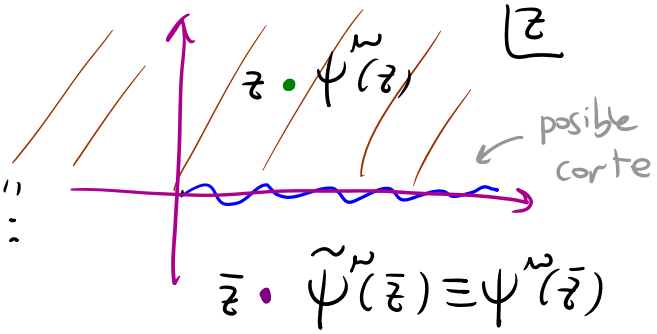
$$\psi^\mu_{cil}(0,\tau) = e^{2\pi i \Delta}\, \tilde{\psi}^\mu_{cil}(0,\tau), \qquad \psi^\mu_{cil}(\pi,\tau) = e^{2\pi i \Delta'}\, \tilde{\psi}^\mu_{cil}(\pi,\tau).$$

Pero siempre podemos redefinir $\tilde{\psi}^\mu_{cil} \to e^{-2\pi i \Delta'} \tilde{\psi}^\mu_{cil}$,

así que basta considerar $\Delta' = 0$.

Hay entonces 2 sectores: $\Delta = \begin{cases} 0 & R \\ \frac{1}{2} & NS \end{cases}$

Pasando del cilindro al plano, podemos implementar nuevamente "truco de duplicación":



Obtenemos entonces $\psi^\mu(z)$ definido en todo el plano, que satisface $\psi^\mu(e^{2\pi i} z) = -e^{2\pi i \Delta} \psi^\mu(z)$ con $\Delta = \begin{cases} 0 & R \\ 1/2 & NS \end{cases}$.

27/04/06

Habiendo entendido las condiciones de borde, podemos escribir el desarrollo en modos (usando $h_\psi = 1/2$)

$$\psi^\mu(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+\Delta} \frac{\psi_r^\mu}{z^{r+1/2}} \qquad \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) = \sum_{r \in \mathbb{Z}+\tilde{\Delta}} \frac{\tilde{\psi}_r^\mu}{\bar{z}^{r+1/2}},$$

↑ periódico NS, antiperiodo R

que (como consecuencia de EPO $\psi^\mu(z)\psi^\nu(0) = \frac{\eta^{\mu\nu}}{z} + \dots$) satisfacen

$$\{\psi_r^\mu, \psi_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{r,-s} = \{\tilde{\psi}_r^\mu, \tilde{\psi}_s^\nu\}$$

Desarrollando también

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} :\partial X^\mu \partial X_\mu: - \frac{1}{2} :\psi^\mu \partial \psi_\mu: = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}},$$

↑ orden normal conforme →

$$J(z) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\, \psi^\mu \partial X_\mu = \sum_{r \in \mathbb{Z}+\Delta} \frac{G_r}{z^{r+3/2}}$$

obtenemos ← orden normal de operadores →

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} :\alpha_{m-n}^\mu \alpha_{\mu n}: + \frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z}+\Delta} (2r-m) :\psi_{m-r}^\mu \psi_{\mu r}: + \delta_{m,0} A_\Delta^{X,\psi}$$

constante de orden ↑

$$G_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \psi_{\mu\, r-n}$$

que satisfacen el álgebra superconforme (o super Virasoro)

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m,-n}$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{12}(4r^2-1)\delta_{r,-s}$$

$$[L_m, G_r] = \frac{m-2r}{2} G_{m+r}$$

p. 461

(que se puede obtener a partir de EPOs TT, JJ, TJ).

L32 : 11/12/23 (repasicual)

La constante de orden $A_\Delta^{\chi,\psi}$ se puede calcular de la manera que vimos en cuerda bosónica (p.ej. comparando $::$ vs. $\circ\circ$, ó usando $[L_1, L_{-1}] = 2L_0$).

Vale la pena memorizar el resultado general:

Cada
- bosón
  - periódico — contribuye $-1/24$
  - antiperiódico — contribuye $+1/48$
- fermión
  - periódico — contribuye $+1/24$
  - antiperiódico — contribuye $-1/48$

al Hamiltoniano H (en w), y L_0 (en z) difiere por $+\frac{c}{24}$

(recordar que $H = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c+\tilde{c}}{24}$ por derivada Schwarziana).

jueves, 27 de abril de 2006 09:08 a.m.

De acuerdo con esto, en L_0^x y $L_0^{b,c}$ tenemos constantes de orden

$$A^x = -\frac{D}{24} + \frac{D}{24} = 0 \quad \checkmark$$

(como vimos en cuerda bosónica)

$$A^{b,c} = +\frac{2}{24} + \frac{-26}{24} = -1 \quad \checkmark$$

Para L_0^ψ tenemos

$$A_\Delta^\psi = A_\Delta^{x,\psi} = \begin{cases} \frac{D}{24} + \frac{D/2}{24} = \frac{D}{16} = \frac{5}{8} & R \quad (\Delta = 0) \\ -\frac{D}{48} + \frac{D/2}{24} = 0 & NS \quad (\Delta = \frac{1}{2}) \end{cases}$$

Por último, en $L_0^{\beta,\gamma}$ aparece

$$A_\Delta^{\beta,\gamma} = \begin{cases} -\frac{2}{24} + \frac{11}{24} = +\frac{3}{8} & R \\ +\frac{2}{48} + \frac{11}{24} = +\frac{1}{2} & NS \end{cases}$$

En conjunto tenemos entonces

$$A_\Delta^{TOT} = A_\Delta^{x,\psi} + A^{b,c} + A_\Delta^{\beta,\gamma} = \begin{cases} 0 & R \\ -\frac{1}{2} & NS \end{cases}$$

← por SUSI y $c^{TOT} = 0$

L28: 24/11/21

Podemos proceder ahora a construir el espacio de de Hilbert e identificar en él a los estados físicos. Con α_n^μ es como antes. ¿Qué pasa con ψ_r^μ?

domingo, 30 de abril de 2006 03:56 p.m.

$\psi^\mu(z), \tilde{\psi}^\mu(\bar{z})$

- NS: tenemos $\{\psi_r^\mu, \psi_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{r,-s}$ $r,s = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots$

Definimos $|0\rangle_{NS}$ tal que

$$\psi_r^\mu |0\rangle_{NS} = 0 \quad \forall\, \mu, \forall\, r>0$$

Los estados excitados son entonces

$\psi_{-r_1}^{\mu_1} \cdots \psi_{-r_n}^{\mu_n} |0\rangle_{NS}$, con $\binom{\mu_i}{r_i} \neq \binom{\mu_j}{r_j}$ $\forall\, i \neq j$

Todos tienen espín entero desde el punto de vista de espaciotiempo 10 dim, y son por tanto bosónicos.

- R: tenemos $\{\psi_r^\mu, \psi_s^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{r,s}$ $r,s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Si $|0\rangle_R$ satisface

$$\psi_r^\mu |0\rangle_R = 0 \quad \forall\, \mu, \forall\, r>0$$

entonces $|0\rangle_R' \equiv \psi_0^\mu |0\rangle_R$ también (porque $\{\psi_{r>0}^\nu, \psi_0^\mu\} = 0$).

Así que el estado base en este sector es degenerado.

Notar que $\{\psi_0^\mu, \psi_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu}$ es equivalente al

álgebra de Dirac $\{\Gamma^\mu, \Gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ con $\Gamma^\mu \equiv \sqrt{2}\psi_0^\mu$.

Los estados base forman por tanto una representación del álgebra de Dirac, es decir, ¡constituyen un espinor de $SO(9,1)$!

Para construirlos explícitamente, definimos ↑ espinor en espacio-tiempo

$$b_0^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^0+\Gamma^1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^0+\psi_0^1), \quad b_0 \equiv \frac{1}{2}(-\Gamma^0+\Gamma^1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi_0^0+\psi_0^1),$$

$$b_1^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^2+i\Gamma^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^2+i\psi_0^3), \quad b_1 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^2-i\Gamma^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^2-i\psi_0^3),$$

$$b_2^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^4+i\Gamma^5) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^4+i\psi_0^5), \quad b_2 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^4-i\Gamma^5) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^4-i\psi_0^5),$$

$$b_3^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^6+i\Gamma^7) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^6+i\psi_0^7), \quad b_3 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^6-i\Gamma^7) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^6-i\psi_0^7),$$

$$b_4^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^8+i\Gamma^9) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^8+i\psi_0^9), \quad b_4 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^8-i\Gamma^9) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^8-i\psi_0^9),$$

y obtenemos así

$$\{b_\alpha, b_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \{b_\alpha, b_\beta\} = 0 = \{b_\alpha^\dagger, b_\beta^\dagger\} \quad \forall \alpha,\beta = 0,\ldots,4$$

5 pares de operadores creación/aniquilación fermiónicos

Definiendo un vacío $|\Omega\rangle$ tal que $b_\alpha|\Omega\rangle = 0 \ \forall \alpha$, obtenemos un total de $2^5 = 32$ estados actuando (0 ó 1 vez) con los operadores de creación $b_\alpha^\dagger$.

(Más en general, un espinor de Dirac tiene $2^{D/2}$ componentes en cualquier dimensión par, p.ej. $2^2 = 4$ en $D = 4$.)

estados base R, $|0\rangle_R$

Denotaremos $|s\rangle_R \equiv |s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\rangle_R$ al estado que se obtiene $\begin{cases} \text{actuando} \\ \text{no actuando} \end{cases}$ con $b_\alpha^\dagger$ sobre $|\Omega\rangle$ si $s_\alpha = \begin{cases} +1/2 \\ -1/2 \end{cases}$.

P. ej., $|\Omega\rangle = |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_R$, $b_2^\dagger b_4^\dagger |\Omega\rangle = |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle_R$

El estado base más general posible es $u_s |s\rangle \longleftrightarrow u = \begin{pmatrix} u_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\cdots} \\ u_{+\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\cdots} \\ \vdots \end{pmatrix}$.

suma implícita

La notación refleja las propiedades de transformación bajo Lorentz: el teorema de Noether da

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z}+\Delta} [\psi_r^\mu, \psi_{-r}^\nu]$$

como (la contribución fermiónica a) los generadores de Lorentz, que actuando sobre estados base $|s\rangle_R$ se reduce a

$$\Sigma_0^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} [\psi_0^\mu, \psi_0^\nu] = -\frac{i}{4} [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] \quad \checkmark$$

Tanto $\Sigma^{\mu\nu}$ como $\Sigma_0^{\mu\nu}$ satisfacen álgebra $so(9,1)$:

$$i[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\sigma\rho}] = \eta^{\nu\sigma}\Sigma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\rho}\Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\Sigma^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}\Sigma^{\mu\sigma}$$

Un conjunto de generadores simultáneamente diagonalizables ("generadores de Cartan") es entonces

$$S^\alpha \equiv i^{\delta_{\alpha,0}} \Sigma^{2\alpha, 2\alpha+1} \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, 4$$

para que S^0 sea hermítico

Generadores de rotaciones $01, 23, 45, 67, 89$

que actuando sobre los estados base se reduce a

$$S_0^\alpha = i^{\delta_{\alpha,0}} \Sigma_0^{2\alpha,2\alpha+1} = b_\alpha^\dagger b_\alpha - \frac{1}{2} ,$$

↑ operador de número (eigenvalores 0,1)

de tal forma que

$$S^\alpha |s\rangle_R = s_\alpha |s\rangle_R \qquad s_\alpha = \pm\frac{1}{2} \Longrightarrow |s\rangle_R \text{ es espinor}$$

Los operadores de creación $(-1)^{\delta_{\alpha,0}} \psi_{-r}^{2\alpha} \pm i(\mp i)^{\delta_{\alpha,0}} \psi_{-r}^{2\alpha+1}$ $(r>0)$ cambian el autovalor de

$$S^\alpha = S_0^\alpha + i^{\delta_{\alpha,0}} \left(-\frac{i}{2}\right) \sum_{r\neq 0} \left[\psi_r^{2\alpha}, \psi_{-r}^{2\alpha+1}\right]$$

por un entero, así que todos los estados en el sector R tienen espín semientero desde el punto de vista 10 dim, y son por tanto fermiónicos.

Recordar que (en dimensión par) la representación de Dirac es reducible: la matriz de quiralidad $\Gamma \equiv \Gamma^0\Gamma^1\cdots\Gamma^9$ (análoga a γ^5) satisface $\Gamma^2 = +1$, $\{\Gamma, \Gamma^\mu\} = 0$ y $\therefore$ $[\Gamma, \Sigma^{\mu\nu}] = 0$.

$\frac{1}{2}\Gamma^0\Gamma^1$ $\frac{1}{2}\Gamma^2\Gamma^3$ etc.

Dado que $\Gamma = 32\, S_0^0 S_0^1 S_0^2 S_0^3 S_0^4$, tenemos

$\Gamma|s\rangle_R = \pm|s\rangle_R$ si el número de $s_\alpha = -\frac{1}{2}$ es par / impar,

lo cual expresa descomposición $\underline{32} = \underline{16} + \underline{16'}$

Dirac Weyl

L33: 17/01/24 (extra)

Es posible generalizar Γ a todo el espectro:

$$\{\Gamma, \Gamma^\mu\} = 0 \longrightarrow \{(-1)^F, \psi^\mu_{-r}\} = 0,$$

donde $F \equiv S^0 + S^1 + S^2 + S^3 + S^4 - \frac{1}{2} - \Delta \pmod 2$

es el número fermiónico (en la hoja de mundo).

Con esta definición, en el sector Ramond ($\Delta = 0$)

$$(-1)^F|s\rangle_R = (-1)^{s_0 + \dots + s_4 - \frac{1}{2}}|s\rangle_R = |s'\rangle_R\, \Gamma_{s's}$$

± 1 para $\frac{16}{16'}$

y $\psi^{\mu_1}_{-r_1} \cdots \psi^{\mu_n}_{-r_n}|s\rangle_R$ tiene $F = n + s_0 + \dots + s_4 - \frac{1}{2}$,

mientras que en el sector Neveu-Schwarz ($\Delta = \frac{1}{2}$)

$(-1)^F|0\rangle_{NS} = -|0\rangle_{NS}$ y $\psi^{\mu_1}_{-r_1} \cdots \psi^{\mu_n}_{-r_n}|0\rangle_{NS}$ tiene $F = n - 1$.

Como veremos más adelante, contribución $-\frac{1}{2} - \Delta$ a F proviene de estado base de superfantasmas β, γ (así que F es en realidad 'número espinorial').

L02/05/06

lunes, 01 de mayo de 2006 02:39 a.m.

Conociendo ya el espacio de Hilbert completo, estamos listos para determinar estados físicos.

En 'cuantización covariante antigua' ignoramos b, c, β, γ (que suponemos están en su estado base) excepto por su contribución a la constante de orden A_Δ^{TOT}.

Las condiciones de estado físico son entonces

$$L_{n>0}^{X,\psi} |fís\rangle = 0$$

$$\left(L_0^{X,\psi} - A_\Delta^{X,\psi} + A_\Delta^{TOT}\right)|fís\rangle = 0 \qquad \left(\leftrightarrow L_0^{TOT}|fís\rangle = 0\right)$$

$$G_{r\geq 0}|fís\rangle = 0$$

junto con la relación de equivalencia para estados espurios (+ físicos = nulos) $L_{-n}|\chi\rangle \simeq 0$, $G_{-r}|\chi\rangle \simeq 0$ $\forall n, r > 0$.

Sabemos que $A_\Delta^{TOT} = -\Delta$,

$$L_0^{X,\psi} - A_\Delta^{X,\psi} = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n>0} \alpha_{-n}^{\mu}\alpha_{n\mu} + \sum_{n>0} r\psi_{-r}^{\mu}\psi_{r\mu} \equiv L_0,$$

Cuerda: cerrada: $\alpha' p^2/4$; abierta: $\alpha' p^2$

$\sum_{n>0} \alpha_{-n}^{\mu}\alpha_{n\mu} \equiv N^X$ $\quad \sum_{n>0} r\psi_{-r}^{\mu}\psi_{r\mu} \equiv N^\psi$

$N^{X,\psi} \equiv N$

lunes, 01 de mayo de 2006 03:05 a.m.

$$G_{\pm 1/2} = \alpha_{0\mu}\,\psi^{\mu}_{\pm 1/2} + \dots \quad \text{(sector NS)},$$

$$G_0 = \alpha_{0\mu}\,\psi^{\mu}_{0} + \dots \quad \text{(sector R)}.$$

Espectro de Supercuerda Abierta

- **NS:** $A^{TOT}_{1/2} = -1/2 \Longrightarrow (L_0 + A^{TOT}_{1/2})|fís\rangle = 0$

es condición de capa de masa

$$\boxed{m^2 = \frac{N - 1/2}{\alpha'}} \qquad N = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots$$

- **Nivel $N=0$:** $|0,k\rangle_{NS}$ con $\boxed{m^2 = -k^2 = -1/2\alpha'}$

Taquión $\phi(x) \in NS$ ← autovalor de $(-1)^F$

- **Nivel $N=\frac{1}{2}$:** $\varepsilon_\mu \psi^{\mu}_{-1/2}|0;k\rangle_{NS}$ con $\boxed{m^2 = -k^2 = 0}$ (vector de polarización)

$$G_{1/2}\,\varepsilon_\mu \psi^{\mu}_{-1/2}|0;k\rangle_{NS} = \sqrt{2\alpha'}\,\varepsilon_\mu k^\mu |0;k\rangle_{NS} = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon\cdot k = 0}$$

($\alpha_0 \cdot \psi_{1/2}$)

$$G_{-1/2}|0;k\rangle_{NS} = \sqrt{2\alpha'}\,k_\mu \psi^{\mu}_{-1/2}|0;k\rangle_{NS} \text{ nulo} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_\mu \simeq \varepsilon_\mu + \lambda k_\mu}$$

($\alpha_0 \cdot \psi_{-1/2}$)

Bosón de Norma (fotón) $A_\mu(x) \in NS$

lunes, 01 de mayo de 2006 03:24 a.m.

En marco donde $k_\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$, todo estado físico es equivalente a combinación lineal

$\varepsilon_i \psi^i_{-1/2} |0;k\rangle_{NS} \quad i = 2, 3, \dots, 9$ — $\underline{8}_V$ de $SO(8)$.

Grupito para $m^2=0$ en $9+1$ dim

- Nivel $N=1$: $(\varepsilon_\mu \alpha^\mu_{-1} + \varepsilon_{\mu\nu} \psi^\mu_{-1/2} \psi^\nu_{-1/2}) |0;k\rangle_{NS}$ $\boxed{m^2 = -k^2 = +\frac{1}{2\alpha'}}$

...

$\in NS_-$,

etc.

- R : $A_0^{TOT} = 0 \Longrightarrow (L_0 + A_0^{TOT}) |fis\rangle = 0$

resulta en $\boxed{m^2 = \frac{N}{\alpha'}}$ $\quad N = 0, 1, 2, \dots$

espinor de polarización

- Nivel 0 : $u_s |s;k\rangle_R$ con $\boxed{m^2 = -k^2 = 0}$

Normino (fotino) $\lambda_s(x)$

$G_0 u_s |s;k\rangle_R = \sqrt{\alpha'} k_\mu \Gamma^\mu_{s's} u_s |s';k\rangle_R = 0 \Rightarrow \boxed{k_\mu \Gamma^\mu_{s's} u_s = 0}$

$\sqrt{2\alpha'} p_\mu \psi_0^\mu$

$\not{\partial} \lambda(x) = 0 \longleftrightarrow$ ¡ Ec. de Dirac !

De hecho Dirac $G_0 = 0 \Rightarrow$ Klein-Gordon $L_0 = G_0^2 = 0$.

En marco donde $k_\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$, operador de Dirac es

$k_0 \Gamma^0 + k_1 \Gamma^1 = k \Gamma^0 (1 - \Gamma^0 \Gamma^1) = k \Gamma^0 (1 - 2S_0^0)$,

así que solo son físicos estados con $\boxed{S_0 = +\frac{1}{2}}$.

Bajo $SO(9,1) \supset SO(1,1) \times SO(8)$

$\uparrow$ S^9 $\quad$ $\uparrow$ S^0 $\quad$ $\uparrow$ $S^1, \dots, S^4$

tenemos descomposición

$\underline{16} = (+1/2, \underline{8}) + (-1/2, \underline{8}')$ $\quad \leftarrow (s_1, s_2, s_3, s_4)$ con # impar de $-1/2$'s

$\underline{16}' = (+1/2, \underline{8}') + (-1/2, \underline{8})$ $\quad \leftarrow (s_1, s_2, s_3, s_4)$ con # par de $-1/2$'s

Sobreviven 2 espinores de $SO(8)$:

$\begin{cases} \underline{8} \text{ con } (-1)^F = +1 & \in R_+ \\ \underline{8}' \text{ con } (-1)^F = -1 & \in R_- \end{cases}$

• Nivel $N=1$: $\left(\varepsilon_{\mu s} \alpha_{-1}^{\mu} + \varepsilon'_{\mu s} \psi_{-1}^{\mu}\right)|s\rangle_R$ con $\boxed{m^2 = -k^2 = \frac{1}{\alpha'}}$,

$\in R_+ \cup R_-$,

etc.

lunes, 01 de mayo de 2006 09:10 p.m.

Espectro de Supercuerda Cerrada

2 copias de cuerda abierta (con $p \to p/2$),

sujetas a condición de empatamiento de niveles

$$(L_0^{TOT} - \tilde{L}_0^{TOT})\,|fís\rangle = 0 \Longrightarrow \boxed{m^2 = \frac{4}{\alpha'}(N-\Delta) = \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N}-\tilde{\Delta})}$$

(donde hemos usado $A_\Delta^{TOT} = -\Delta$, $\tilde{A}_{\tilde{\Delta}}^{TOT} = -\tilde{\Delta}$).

Recordando que

$$R\ (\Delta=0) \Rightarrow \begin{cases} N = 0, 1, 2, \ldots \\ (-1)^F = \pm 1, \pm 1, \pm 1, \ldots \end{cases}$$

y

$$NS\ (\Delta=\tfrac{1}{2}) \Rightarrow \begin{cases} N = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \ldots \\ (-1)^F = -1, +1, -1, +1, \ldots \end{cases}$$

vemos que NS_- ($N-\Delta$ semientero) solo puede empatarse con NS_-.

Entendemos también que los estados en los sectores (NS, NS) y (R, R) son bosónicos ($s_\alpha \in \mathbb{Z}$), mientras que (NS, R) y (R, NS) son fermiónicos ($s_\alpha \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$).

lunes, 01 de mayo de 2006 09:25 p.m.

- (NS_-, NS_-) : $\boxed{m^2 = \frac{4}{\alpha'}\left(N - \frac{1}{2}\right), \quad N = \tilde{N} = 0, 1, 2, \ldots}$

• Nivel $N = 0$: $|0, 0; k\rangle_{NS\text{-}NS}$ $\boxed{m^2 = -k^2 = -2/\alpha'}$

Taquión $\Phi(x)$

Niveles $N \geq 1$ tienen $m^2 > 0$

En los 9 sectores restantes, el nivel más bajo corresponde a estados con $\boxed{m^2 = 0}$:

- (NS_+, NS_+) : $\varepsilon_{\mu\nu}\, \psi^{\mu}_{-1/2}\, \tilde{\psi}^{\nu}_{-1/2}\, |0, 0; k\rangle_{NS\text{-}NS}$

$$G_{1/2} = \tilde{G}_{1/2} = 0 \quad \Rightarrow \quad k^{\mu}\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}k^{\nu} = 0$$

$G_{-1/2}\, \tilde{G}_{-1/2}\, |0, 0; k\rangle_{NS\text{-}NS}$ nulo $\Rightarrow$ $\varepsilon_{\mu\nu} \sim \varepsilon_{\mu\nu} + k_{\mu}\zeta_{\nu} + \xi_{\mu}k_{\nu}$

$(c/\ k\cdot\zeta = k\cdot\xi = 0)$

$\therefore$ $(10-2)^2$ estados físicos, que en términos de representaciones irreducibles de $SO(8)$ son

$$\underline{8}_v \times \underline{8}_v = \underset{(0)}{\underline{1}} + \underset{[2]}{\underline{28}} + \underset{(2)}{\underline{35}}$$

Dilatón — Antisimetrión — Gravitón

$\varphi(x)$ $\quad B_{\mu\nu}(x)$ $\quad h_{\mu\nu}(x)$

lunes, 01 de mayo de 2006 10:22 p.m.

tensor de polarización

$$-(R_+, R_+): \quad \varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n}\underbrace{\left(C\Gamma^{[\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\cdots\Gamma^{\mu_n]}\right)_{\tilde{S}S}}_{\equiv\,\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}} |S,\tilde{S};k\rangle_{R\text{-}R}$$

tensores independientes: $\bar{u}\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}u$

donde $C \equiv \Gamma^0\Gamma^3\Gamma^5\Gamma^7\Gamma^9$ matriz de conjugación de carga

satisface $C\Gamma^\mu C^{-1} = -\Gamma^{\mu T}$, $(C\Gamma^0)\Gamma^\mu(C\Gamma^0)^{-1} = \Gamma^{\mu *}$

$\Rightarrow u^T C$ transforma como $\bar{u} \equiv u^\dagger\Gamma^0$.

A partir de 2 espinores $u, \tilde{u}$ se pueden ∴ formar tensores linealmente independientes

en base con $u_S \in \begin{pmatrix} 16 \\ 16' \end{pmatrix}$, cada $\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \# \\ \# & 0 \end{pmatrix}$

$$\tilde{u}^T C\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}u \qquad n = 0, 1, \ldots, 5,$$

pero los casos con n par ($\Leftrightarrow$ # impar de Γ's) dan cero si $u, \tilde{u}$ tienen la misma quiralidad [ver Polchinski, Vol II, Apéndice B.1], como es el caso en este sector.

Tenemos entonces solo estados con $n = 1, 3, 5$.

En términos de representaciones de $SO(9,1)$:

$$16 \times 16 = 10 + 120 + 126$$

$$[1] \quad [3] \quad [5]_+ \leftarrow \text{rep autodual},$$

Campos Antisimétricos $G_\mu(x) \quad G_{\mu\nu\lambda}(x) \quad G^+_{\mu\nu\lambda\rho}(x)$

miércoles, 03 de mayo de 2006 06:30 p.m.

La definición de autodualidad es como sigue.

Dado un tensor totalmente antisimétrico $T_{\mu_1 \cdots \mu_n}$ en D dimensiones, su dual de Hodge es

$$*T_{\mu_1 \cdots \mu_{D-n}} \equiv \frac{\sqrt{-G}}{n!} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_{D-n}}{}^{\nu_1 \cdots \nu_n} T_{\nu_1 \cdots \nu_n}$$

$\epsilon_{012\cdots D-1} = +1$ Levi-Cívita

(Para $F_{\mu\nu}$ en $D=4$, $F_{\mu\nu} \to *F_{\mu\nu}$ es la transformación $(\vec{E}, \vec{B}) \to (\vec{B}, -\vec{E})$, y las ecs. de Maxwell son $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \leftrightarrow \partial_{[\mu} *F_{\nu\lambda]} = 0$, $\partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0 \leftrightarrow \partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$.)

Si D es par y $n = D/2$, podemos entonces descomponer de manera covariante

$$T_{\mu_1 \cdots D/2} \equiv T^+_{\mu_1 \cdots D/2} + T^-_{\mu_1 \cdots \mu_{D/2}},$$

con $T^\pm_{\mu_1 \cdots D/2} = \pm * T^\pm_{\mu_1 \cdots D/2}$ autodual / antiautodual

En nuestro caso tenemos $D=10$ y

$$G^+_{\mu_1 \cdots \mu_5} = + * G^+_{\mu_1 \cdots \mu_5}$$

$\alpha_0 \cdot \psi_0$ $\tilde{\alpha}_0 \cdot \tilde{\psi}_0$

Condiciones de estado físico $G_0 = 0 = \tilde{G}_0$

$$\Rightarrow k_\mu \varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} \underbrace{\Gamma^{[\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\cdots\Gamma^{\mu_n]}\Gamma^{\mu}}_{(-1)^n\left(\Gamma^{\mu\mu_1\cdots\mu_n} - n\eta^{\mu[\mu_1}\Gamma^{\mu_2\cdots\mu_n]}\right)} = 0 = k_\mu \varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n} \underbrace{\Gamma^{\mu}\Gamma^{[\mu_1}\cdots\Gamma^{\mu_n]}}_{\Gamma^{\mu\mu_1\cdots\mu_p} + n\eta^{\mu[\mu_1}\Gamma^{\mu_2\cdots\mu_n]}}$$

$$\longleftrightarrow k_{[\mu}\varepsilon_{\mu_1\cdots\mu_n]} = 0 = k^{\mu_1}\varepsilon_{[\mu_1\cdots\mu_n]}$$

$$\longleftrightarrow \partial_{[\mu} G_{\mu_1\cdots\mu_n]}(x) = 0 = \partial_{[\mu} * G_{\mu_{n+1}\cdots\mu_q]} \quad ,$$

a diferencia de A_μ, no es un potencial

¡que son las ecs. de Maxwell para la intensidad de campo generalizada $G_{\mu_1\cdots\mu_n}(x)$! Podemos definir campo de de norma asociado $C_{\mu_1\cdots\mu_{n-1}}(x) \simeq C_{\mu_1\cdots\mu_{n-1}}(x) + \partial_{[\mu_1}\lambda_{\mu_2\cdots\mu_{n-1}]}(x)$ tal que $G_{\mu_1\cdots\mu_n}(x) = (n+1)\,\partial_{[\mu} C_{\mu_1\cdots\mu_n]}(x)$.

Los estados físicos no masivos en este sector son entonces

$$\underline{8} \times \underline{8} = \underset{[0]}{\underline{1}} + \underset{[2]}{\underline{28}} + \underset{[4]_+}{\underline{35}_+} \quad \leftarrow \text{reps de } SO(8)$$

Campos de Norma R-R $\quad C(x) \quad C_{\mu\nu}(x) \quad C^+_{\mu\nu\lambda\rho}(x)$

04/05/06

jueves, 04 de mayo de 2006 08:35 a.m.

- (R_-, R_-) : estados $\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} (C\Gamma^{\mu_1 \cdots \mu_n})_{\tilde{s}s} |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R}$

con $n = 1, 3, 5$, que son reps irreducibles en producto

$$\underline{16'} \times \underline{16'} = \underline{10} + \underline{120} + \underline{126} \quad \leftarrow \text{reps de } SO(9,1)$$
$$[1] \quad [3] \quad [5]_-$$

de los cuales son físicos

$$\underline{8'} \times \underline{8'} = \underline{1} + \underline{28} + \underline{35}_- \quad \leftarrow \text{reps de } SO(8)$$
$$[0] \quad [2] \quad [4]_-$$

Campos de Norma R-R $\quad \hat{C}(x) \quad \hat{C}_{\mu\nu}(x) \quad C^-_{\mu\nu\lambda\rho}(x)$

- (R_+, R_-) : estados $\varepsilon_{\mu_1 \cdots \mu_n} (C\Gamma^{\mu_1 \cdots \mu_n})_{\tilde{s}s} |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R}$

con $n = 0, 2, 4$, que figuran en producto

$$\underline{16} \times \underline{16'} = \underline{1} + \underline{45} + \underline{210} \quad \leftarrow \text{reps de } SO(9,1)$$
$$[0] \quad [2] \quad [4]$$

de los cuales son físicos

$$\underline{8} \times \underline{8'} = \underline{8}_v + \underline{56}_t \quad \leftarrow \text{reps de } SO(8)$$
$$[1] \quad [3]$$

Campos de Norma R-R $\quad C_\mu(x) \quad C_{\mu\nu\lambda}(x)$

jueves, 04 de mayo de 2006 09:05 a.m.

- (R_-, R_+) : igual, con $\eta = 0, 2, 4$

$\Rightarrow$ estados físicos $\underline{8}' \times \underline{8} = \underline{8}_V + \underline{56}_t$

Campos de Norma R-R $\quad \hat{C}_\mu(x) \quad \hat{C}_{\mu\nu\lambda}(x)$

vector-espinor de polarización

- (NS_+, R_+) : estados $\varepsilon_{\mu\tilde{s}} \psi^\mu_{-1/2} |0, \tilde{s}; k\rangle_{NS\text{-}R}$

que se pueden separar de manera covariante en

$$u_{\tilde{s}'} (\Gamma^\mu)_{\tilde{s}\tilde{s}'} \psi^\mu_{-1/2} |0, \tilde{s}; k\rangle_{NS\text{-}R} \quad (\text{i.e., } \varepsilon_{\mu\tilde{s}} = u_{\tilde{s}'} (\Gamma^\mu)_{\tilde{s}\tilde{s}'})$$

y $u_{\mu\tilde{s}} \psi^\mu_{-1/2} |0, \tilde{s}; k\rangle_{NS\text{-}R}$ con $\Gamma^\mu_{\tilde{s}'\tilde{s}} u_{\mu\tilde{s}} = 0$,

lo cual corresponde a descomposición

$$\underline{10} \times \underline{16} = \underline{16} + \underline{144} \quad \leftarrow \text{reps de } so(9,1).$$

Condiciones de estado físico

$$G_{1/2} = 0 = \tilde{G}_0 \Rightarrow \quad k^\mu \varepsilon_{\mu\tilde{s}} = 0 = k_\mu \Gamma^\mu_{\tilde{s}'\tilde{s}} \varepsilon_{\nu\tilde{s}},$$

$$G_{-1/2} |0, \tilde{s}; k\rangle_{NS\text{-}R} \simeq 0 \Rightarrow \quad \varepsilon_{\mu\tilde{s}} \simeq \varepsilon_{\mu\tilde{s}} + k_\mu \Gamma_{\tilde{s}}$$

seleccionan

$$\underline{8}_V \times \underline{8} = \underline{8}' + \underline{56} \quad \leftarrow \text{reps de } so(8)$$

$$\lambda_{\tilde{s}'}(x) \quad \chi_{\mu\tilde{s}}(x)$$

Dilatino $\quad$ Gravitino

jueves, 04 de mayo de 2006 09:58 a.m.

Notar que relación de equivalencia

$$\varepsilon_{\mu\tilde{s}} \simeq \varepsilon_{\mu\tilde{s}} + k_\mu \zeta_{\tilde{s}}$$

(que es consecuencia de existencia de estado nulo)

es expresión de invariancia de norma en espaciotiempo

$$\chi_{\mu\tilde{s}}(x) \simeq \chi_{\mu\tilde{s}}(x) + \partial_\mu \zeta_{\tilde{s}}(x)$$

ζ parámetro fermiónico

¡¡Supersimetría local en espaciotiempo!!

- (R_+, NS_+) : igual, con $\tilde{s} \to s$

Estados físicos $\underline{8} \times \underline{8}_v = \underline{8}' + \underline{56}$

$\hat{\lambda}_{s'}(x)$ $\hat{\chi}_{\mu s}(x)$

- (NS_+, R_-): igual a (NS_+, R_+), con $\tilde{s} \to \tilde{s}'$

Estados físicos $\underline{8}_v \times \underline{8}' = \underline{8} + \underline{56}'$

$\lambda_s(x)$ $\chi_{\mu s'}(x)$

- (R_-, NS_+): igual, con $\tilde{s}' \to s'$

Estados físicos $\underline{8}' \times \underline{8}_v = \underline{8} + \underline{56}'$

$\hat{\lambda}_s(x)$ $\hat{\chi}_{\mu s'}(x)$

134 : 22/01/24 +1hora (extra)

lunes, 08 de mayo de 2006 04:08 p.m.

Operadores de Vértice

- NS: $\psi_r^\mu \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-1/2} \psi^\mu(z) \qquad r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$

El estado $|\Psi_1\rangle$ que corresponde a $O=1$ satisface

$$\psi_r^\mu |\Psi_1\rangle \longleftrightarrow \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-1/2} \underbrace{\psi^\mu(z)\cdot 1}_{\psi^\mu(0) + z\partial\psi^\mu(0)+\dots}$$

$$= 0 \quad \forall \; r>0$$

$$\Longrightarrow \quad |\Psi_1\rangle = |0\rangle_{NS}$$

De la misma manera vemos que

$$\psi_{-r}^\mu |0\rangle_{NS} \longleftrightarrow \frac{1}{(r-1/2)!} \partial^{r-1/2}\psi^\mu(0) \qquad \forall\, r>0,$$

y $\psi_{-r_1}^{\mu_1} \cdots \psi_{-r_n}^{\mu_n} |0\rangle_{NS} \longleftrightarrow$ producto en orden normal.

P.ej., $\varepsilon_\mu \psi_{-1/2}^\mu |0;k\rangle_{NS} \longleftrightarrow \varepsilon_\mu \psi^\mu e^{ik\cdot X}$

Notar que con $k^2=0$ este vértice tiene $h=1/2$.

Como veremos más adelante, para obtener $h=1$ hace falta contribución de superfantasmas.

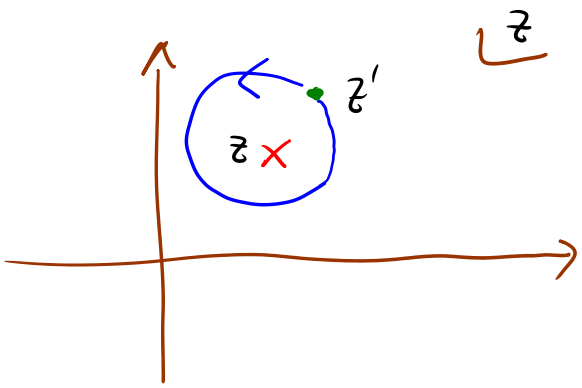
lunes, 08 de mayo de 2006 04:59 p.m.

Como hubiéramos esperado, todos estos vértices $V_{NS}(z)$ tienen espín entero bajo $SO(9,1)$, y satisfacen

$$V_{NS}(z)\,\psi^{\mu}(z') \sim :\partial^{r_1-1/2}\psi^{\mu_1}(z)\cdots:\psi^{\mu}(z') + \dots$$

$$\sim \partial^{r_1-1/2}\left(\frac{\eta^{\mu,\mu}}{z-z'}\right)\cdots + \dots ,$$

de donde vemos que $\psi^{\mu}(z')$ es periódico al rodear $V_{NS}(z)$.

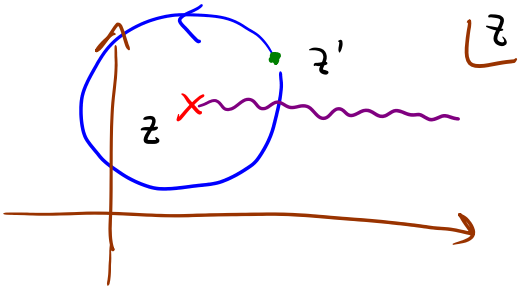


La inserción de $V_{NS}(z)$ no cambia ∴ las condiciones de periodicidad para $\psi^{\mu}(z')$ alrededor del origen, lo cual refleja el hecho de que la emisión/absorción de un bosón no cambia la estadística del estado inicial.

- R: Los vértices $V_R(z)$ deben tener espín semientero bajo $SO(9,1)$, y satisfacer

lunes, 08 de mayo de 2006 05:17 p.m.

$$V_R(z)\,\tilde{\psi}(z') \sim \frac{1}{\sqrt{z-z'}} \cdots ,$$



de tal manera que $\psi^{\tilde{}}(z')$ sea antiperiódico al rodear a $V_R(z')$, como corresponde al hecho de que emisión/absorción de un fermión sí cambia bosón → fermión y fermión → bosón.

¡Es imposible construir semejante $V_R(z)$ usando solo ψ y sus derivadas!

Se requiere bosonizar $\psi^{\tilde{}}$: curiosamente, en 2 dimensiones un par de espinores Majorana-Weyl ψ, ψ' (p.ej. ψ^2, ψ^3) ¡resultan ser equivalentes a (la parte analítica de) un escalar φ!

Definiendo $$\gamma(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi(z) + i\psi'(z)\right),$$

$$\bar{\gamma}(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi(z) - i\psi'(z)\right),$$

tenemos EPOs

$$\gamma(z)\,\bar{\gamma}(z') = \frac{1}{z-z'} + \ldots \quad (\text{como b y c}),$$

$$\psi(z)\psi(z') \sim z-z' \quad , \quad \bar{\psi}(z)\bar{\psi}(z') \sim z-z' \quad .$$

Por otro lado, usando $\varphi(z)\varphi(z') = -\ln(z-z') + :\varphi(z)\varphi(z'):$

(con $\varphi(z)$ la parte analítica de un campo escalar,)

tenemos

$$:e^{+i\varphi(z)}::e^{-i\varphi(z')}: = \frac{1}{z-z'} + \dots \ ,$$

$$:e^{+i\varphi(z)}::e^{+i\varphi(z')}: = z-z' + \dots \ ,$$

$$:e^{-i\varphi(z)}::e^{-i\varphi(z')}: = z-z' + \dots$$

Podemos ∴ identificar

$$\begin{cases} \psi(z) \simeq e^{+i\varphi(z)} \\ \bar{\psi}(z) \simeq e^{-i\varphi(z)} \end{cases} \leftarrow \text{Pesos conformes } h = \frac{1}{2} = h_{\psi} = h_{\bar{\psi}} \ \checkmark$$

(recordar que $:e^{ik\cdot X}:$ tiene $h = \frac{k^2}{2}\frac{\alpha'}{2}$)

Carga central $c^{\psi,\bar{\psi}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = c^{\varphi}$ ✓

Además, $\langle \varphi(z)\,\varphi(z') \rangle = -\ln(z-z')$

$$\underset{|z|=|z'|}{\Longrightarrow} [\hat{\varphi}(z), \hat{\varphi}(z')] = \pm i\pi \ ,$$

lunes, 08 de mayo de 2006 09:36 p.m.

y usando Campbell-Baker-Hausdorff tenemos ∴

$$:e^{+i\hat{\varphi}(z)}: :e^{+i\hat{\varphi}(z')}: = \underbrace{\exp\left(-[\hat{\varphi}(z),\hat{\varphi}(z')]\right)}_{-1} :e^{+i\hat{\varphi}(z')}: :e^{+i\hat{\varphi}(z)}:$$

Comparando EPOs

$$:e^{+i\varphi(z)}: :e^{-i\varphi(-z)}: = \frac{1}{z-(-z)} :e^{+i\varphi(z)-i\varphi(-z)}:$$

$$= \frac{1}{2z} + i\partial\varphi(0) + 2z\underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}:\partial\varphi\partial\varphi(0):\right)}_{T^{\varphi}(0)} + \dots$$

y

$$\psi(z)\bar{\psi}(-z) = \frac{1}{(-z)-z} + :\psi(z)\bar{\psi}(-z):$$

$$= \frac{1}{2z} + :\psi\bar{\psi}(0): + 2z\underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}:\psi\partial\bar{\psi}(0)+\bar{\psi}\partial\psi(0):\right)}_{T^{\psi,\bar{\psi}}(0) = T^{\psi,\psi'}(0)} + \dots$$

concluimos en particular que

$$:\psi\bar{\psi}(z): \simeq i\partial\varphi(z) \quad \text{y} \quad T^{\psi,\bar{\psi}}(z) \simeq T^{\varphi}(z)$$

$:\psi\bar{\psi}(z):$ ↗ Corriente de Noether asociada a $\delta\varphi(z)=\epsilon$

Corriente de Noether asociada a $\delta\psi(z) = +i\epsilon\psi(z)$, $\delta\bar{\psi}(z) = -i\epsilon\bar{\psi}(z)$.

lunes, 08 de mayo de 2006 09:36 p.m.

Considerando todas las EPOs posibles podemos establecer equivalencia entre todos los operadores locales formados con $\psi, \bar{\psi}$ y sus derivadas y todos los operadores locales formados con $:e^{in\varphi}:$ $(n\in\mathbb{Z})$ y sus derivadas.

Las funciones de correlación en ambas teorías son analíticas (meromorfas) y poseen las mismas singularidades, $\therefore$ deben ser idénticas.

En nuestro caso, para bosonizar $\psi^w(z)$ agrupamos

$$\begin{cases} \psi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(+\psi^0+\psi^1), & \bar{\psi}_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi^0+\psi^1) \\ \psi_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^2+i\psi^3), & \bar{\psi}_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^2-i\psi^3) \\ \vdots & \vdots \\ \psi_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^8+i\psi^9), & \bar{\psi}_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^8-i\psi^9) \end{cases}$$

(notar que modos cero de $\psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha$ en sector R son respectivamente b^+_α, b_α), y definimos

$$\psi_\alpha(z) \simeq e^{+i\varphi_\alpha(z)}, \quad \bar{\psi}_\alpha(z) \simeq e^{-i\varphi_\alpha(z)} \qquad \alpha=0,1,\ldots,4$$

lunes, 08 de mayo de 2006 11:27 p.m.

(sutileza: para que $e^{\pm i\varphi_\alpha}$ anticonmute con $e^{\pm i\varphi_\beta}$ $\forall \alpha,\beta$, debemos agregar 'cociclos' C_α tales que

$$\{C_\alpha, C_\beta\} = 0 \quad \forall\, \alpha \neq \beta, \qquad C_\alpha^2 = 1 .$$)

Consideremos ahora operadores $:e^{\pm i\varphi_\alpha/2}:$, que satisfacen

$$:e^{-\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z)}:\,:\underbrace{e^{+i\varphi_\alpha(z')}}_{\psi_\alpha(z')}:\, \simeq \frac{1}{\sqrt{z-z'}}\,:e^{+\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z')}: + \ldots$$

← ¡corte!

$$:e^{+\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z)}:\,:\underbrace{e^{-i\varphi_\alpha(z')}}_{\bar\psi_\alpha(z')}:\, \simeq \frac{1}{\sqrt{z-z'}}\,:e^{-\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z')}: + \ldots$$

Usándolos podemos formar el producto

$$J_s(z) \equiv :\exp\Big[i\sum_\alpha s_\alpha \varphi_\alpha(z)\Big]: \quad \text{Campo de espín},$$

que produce el corte deseado en ψ^μ $\forall \mu$, y resulta ser además espinor de $so(9,1)$ con autovalor s_α bajo generador de Lorentz

$$S_\alpha = i^{\delta_{\alpha,0}} \oint \frac{dz}{2\pi i}\, \underbrace{J^{2\alpha,2\alpha+1}(z)}_{-\frac{i}{2}:\psi^{2\alpha}\psi^{2\alpha+1} - \psi^{2\alpha+1}\psi^{2\alpha}:} = i^{\delta_{\alpha,0}} \oint \frac{dz}{2\pi i}\, \underbrace{:\psi_\alpha \bar\psi_\alpha(z):}_{\simeq (-i)^{\delta_{\alpha,0}}\, i\partial\varphi_\alpha(z)} .$$

lunes, 08 de mayo de 2006 11:42 p.m.

Concluimos entonces que

$$|S\rangle_R \equiv |s_0, s_1, \cdots s_4\rangle_R \longleftrightarrow \mathcal{J}_s(z) \equiv :\exp\left[i \sum_\alpha s_\alpha \varphi_\alpha(z)\right]:$$

09/05/06

El único problema que queda por resolver es que $:e^{\pm \frac{i}{2}\varphi_\alpha}:$ tiene $h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$, por lo que $\mathcal{J}_s(z)$ tiene $h = 5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \neq 1$.

Este problema se soluciona al incorporar la contribución de los superfantasmas. En particular, V_R debe producir también un corte en β, γ. Hace falta entonces "bosonizar" a β, γ, para lo cual se requieren 3 campos:

- 1 bosón $\phi(z)$ con $\langle \phi(z)\phi(z')\rangle = -\ln(z-z')$ y $T^\phi = -\frac{1}{2}:\partial\phi\partial\phi: - \partial^2\phi \Rightarrow c^\phi = 1 + 12v^2 = 13$

  $-\partial^2\phi$ proviene de término $\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \sqrt{g} R v\phi$ en acción ($\leftrightarrow$ fondo dilatónico lineal), con $v = -1$.

  $:e^{n\phi}:$ tiene $h = -\frac{1}{2}n^2 - n$. ← contribución de término adicional en T^ϕ.

miércoles, 10 de mayo de 2006 06:24 p.m.

- 2 fermiones $\eta(z)$, $\xi(z)$, con

$$\eta(z)\xi(z') = \frac{1}{z-z'} + \dots ,$$

$$\eta(z)\,\eta(z') \sim z-z' \sim \xi(z)\xi(z') \qquad \text{(como sistema } b,c\text{)},$$

$$T^{\eta,\xi} = -:\eta\partial\xi: \implies h_\eta = 1,\ h_\xi = 0,\ c^{\eta,\xi} = -2$$

Notar que $c^{\phi} + c^{\eta,\xi} = 13 - 2 = 11 = c^{\beta,\gamma}$ ✓

Reproducimos entonces todas las EPOs si identificamos

$$\beta(z) \simeq e^{-\phi(z)}\partial\xi(z), \qquad \gamma(z) \simeq e^{+\phi(z)}\eta(z).$$

β: $h = 3/2$ — $e^{-\phi}$: $h = -\frac{(-1)^2}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$ — $\partial\xi$: $h = 0+1 = 1$ — $h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ✓

γ: $h = -\frac{1}{2}$ — $e^{+\phi}$: $h = -\frac{1}{2}(1)^2 - (1) = -\frac{3}{2}$ — η: $h = 1$ — $h = -\frac{3}{2} + 1 = -1/2$ ✓

Esto implica en particular que $T^{\beta,\gamma} \simeq T^{\phi,\eta,\xi}$ ✓

y $\underbrace{-:\beta\gamma(z):}_{\text{corriente asociada a}} \simeq \underbrace{-\partial\phi(z)}_{\text{corriente asociada a } \phi(z)\to\phi(z)+a}$

$\beta(z) \to e^{-i\theta}\beta(z)$, $\gamma(z) \to e^{i\theta}\gamma(z)$ (anómala si $\chi = \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{g}R \neq 0$)

β: carga -1 — γ: carga $+1$ — $e^{n\phi}$ tiene carga n ✓

"número de fantasma"

miércoles, 10 de mayo de 2006 09:01 p.m.

Para completar operadores de vértice, quisiéramos ahora determinar operadores $O_{NS}(z)$, $O_R(z)$ que corresponden respectivamente a

$|0\rangle_{NS}$ tal que $\beta_{r\geq\frac{1}{2}}|0\rangle_{NS} = 0 = \gamma_{r\geq\frac{1}{2}}|0\rangle_{NS}$ y

$|0\rangle_R$ tal que $\beta_{r\geq 0}|0\rangle_R = 0 = \gamma_{r\geq 1}|0\rangle_R$.

($|0\rangle_R$ es la contraparte de $|\downarrow\rangle$, que satisfacía $b_{n\geq 0}|\downarrow\rangle = 0 = c_{n\geq 1}|\downarrow\rangle$.)

Bajo el mapeo estado $\leftrightarrow$ operador, estas condiciones se traducen en

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r+1/2}\beta(z)O_{NS}(0) = 0 = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-3/2}\gamma(z)O_{NS}(0) \quad \text{y}$$

$r \geq 1/2$ $\qquad$ $r \geq \frac{1}{2}$

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r+1/2}\beta(z)O_R(0) = 0 = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-3/2}\gamma(z)O_R(0) \quad ,$$

$r \geq 0$ $\qquad$ $r \geq 1$

es decir, $\beta(z)\mathcal{O}_{NS}(0) \sim z^{-1}$, $\gamma(z)\mathcal{O}_{NS}(0) \sim z$,

$\beta(z)\mathcal{O}_{R}(0) \sim z^{-1/2}$, $\gamma(z)\mathcal{O}_{R}(0) \sim z^{1/2}$.

← corte esperado →

miércoles, 10 de mayo de 2006 09:35 p.m.

Claramente $O_{NS}, O_R \neq 1$. De hecho, ningún producto de β, γ y sus derivadas reproduce estas EPOs. Pero en descripción 'bosonizada' podemos ver que

$$O_{NS}(z) \simeq e^{-\phi(z)} \quad \text{y} \quad O_R(z) \simeq e^{-\phi(z)/2}.$$

Este resultado nos sirve para finalmente entender 2 temas que habíamos dejado pendientes.

Primero, la contribución del vacío $|0\rangle_{NS}^{\beta,\gamma}$ ó $|0\rangle_R^{\beta,\gamma}$ al número "fermiónico" (en realidad, espinorial) en la hoja de mundo,

$$F \equiv \underbrace{S^0 + S^1 + S^2 + S^3 + S^4}_{\text{contribución de } \psi^\mu} \underbrace{-\frac{1}{2} - \Delta}_{\text{según prometimos, contribución de } \beta,\gamma} \pmod 2$$

$$\Rightarrow \{(-1)^F, \psi^\mu_{-r}\} = 0 \qquad \Rightarrow \{(-1)^F, \beta_{-r}\} = 0 = \{(-1)^F, \gamma_{-r}\}$$

La definición natural de $F^{\beta,\gamma}$ que logra esto es

$$F_\Delta^{\beta,\gamma} \equiv -\left[\sum_{r>0} (\beta_{-r}\gamma_r + \gamma_{-r}\beta_r) + \delta_{\Delta,0}\gamma_0\beta_0\right] = -\oint \frac{dz}{2\pi i} :\beta\gamma(z):$$

(no confundir con "operador de número" $N_\Delta^{\beta,\gamma} \equiv \sum_{r \in \mathbb{Z}+\Delta} r :\beta_{-r}\gamma_r:$).

miércoles, 10 de mayo de 2006 09:35 p.m.

Pero comparando $\beta(z)\gamma(z') = :\beta(z)\gamma(z'): + (z-z')^{-1}$

$= {}^{\circ}_{\circ}\beta(z)\gamma(z'){}^{\circ}_{\circ} + (z'/z)^{1/2}(z-z')^{-1}$

tenemos ${}^{\circ}_{\circ}\beta\gamma(z){}^{\circ}_{\circ} = -:\beta\gamma(z): \simeq -\partial\phi(z)$ corriente de número de fantasma,

de modo que $\mathcal{O}_{NS} = :e^{-\phi}:$ tiene $F^{\beta,\gamma}_{\Delta=1/2} = n_f = -1 = -\frac{1}{2} - \Delta$ ✓

mientras que $\mathcal{O}_R = :e^{-\phi/2}:$ tiene $F^{\beta,\gamma}_{\Delta=0} = n_f = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \Delta$. ✓

Segundo, los pesos conformes de estos operadores son

respectivamente $h_{NS} = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{1}{2}$

y $h_R = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$,

que justo completan a $V^{X,\psi}_{NS}$ ($h = \frac{1}{2}$ en capa de masa)

y $V^{X,\psi}_{R}$ ($h = \frac{5}{8}$ en capa de masa) para tener $h_{tot} = 1$. ✓

P. ej.,

$$\varepsilon_M \psi^M_{-1/2}|0;k\rangle^{\psi,X}_{NS}|0\rangle^{\beta,\gamma}_{NS} \longleftrightarrow V^{(-1)}_{NS}(z) \equiv \varepsilon_M :\psi^M e^{ik\cdot X} e^{-\phi}(z):$$

omitimos

$h = \frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{4}k^{2\to 0} + \frac{1}{2} = 1$

$$u_s|s;k\rangle^{\psi,X}_{R}|0\rangle^{\beta,\gamma}_{R} \longleftrightarrow V^{(-\frac{1}{2})}_{R}(z) \equiv u_s :\Delta_s e^{ik\cdot X} e^{-\phi/2}(z):$$

$h = 5\times\frac{1}{8} + \frac{\alpha'}{4}k^{2\to 0} + \frac{3}{8} = 1$

Incorporando la parte de modos derechos, obtenemos así vértices $V_i(z,\bar{z})$ con $(h,\tilde{h})=(1,1)$, que usamos para construir invariantes conformes $\mathcal{V}_i \equiv g_c N_i \int d^2z \; V_i(z,\bar{z})$ que se insertan en integral funcional para calcular amplitudes de dispersión.

Recordar que si incluimos vacío de fantasmas $|\downarrow\rangle \longleftrightarrow c(z)$ $(h=-1)$ obtenemos vértices fijos $g_c N_i \; c(z)\tilde{c}(\bar{z}) V_i(z,\bar{z})$ que también son invariantes conformes (y se usan para eliminar redundancia asociada a vectores de Killing conformes $\longleftrightarrow$ modos cero de $c(z)$ y $\tilde{c}(\bar{z})$).

Así como la existencia de fantasmas (fermiónicos) da lugar a estas 2 versiones alternativas de los vértices, la existencia de superfantasmas (bosónicos) permite escribir los vértices de la

supercuerda en un número infinito de distintas versiones o "cuadros" (que resultan útiles para eliminar redundancia debida a espinores de Killing conformes $\longleftrightarrow$ modos cero de $\gamma(z)$ y $\tilde{\gamma}(\bar{z})$).

Los vértices en distinto cuadro difieren en su número de fantasma

$$n_f \equiv -\oint \frac{dz}{2\pi i} :\beta\gamma(z): \simeq -\oint \frac{dz}{2\pi i}\, \partial\phi(z),$$

es decir, utilizan $e^{n_f\phi}$ con distintos valores de n_f.

P.ej., en lugar de

"cuadro −1"

$$\varepsilon_\mu \tilde{\psi}^\mu_{-1/2}|0;k\rangle_{NS} \longleftrightarrow V^{(-1)}_{NS}(z) = \varepsilon_\mu :\psi^\mu e^{ik\cdot X} e^{-\phi}:$$

podemos usar su pariente supercon forme

$$G_{-1/2}\varepsilon_\mu \psi^\mu_{-1/2}|0;k\rangle_{NS} \longleftrightarrow V^{(0)}_{NS}(z) = \{G_{-1/2}, V^{(-1)}_{NS}\}$$

$$= \varepsilon_\mu :\left(i\partial X^\mu + \frac{\alpha'}{2} k\cdot\psi\,\psi^\mu\right) e^{ik\cdot X}:$$

"cuadro 0"

que (si $\varepsilon\cdot k = 0$) también tiene peso conforme $h=1$, y puede $\therefore$ integrarse para obtener $V^{(0)} = \int dz\, V^{(0)}(z)$ invariante.

jueves, 11 de mayo de 2006 02:19 a.m.

(Si implementamos supersimetría en 2 dim geométricamente generalizando hoja de mundo $(z,\bar{z})$ $\longrightarrow$ super-hoja de mundo $(z,\bar{z};\theta,\bar{\theta})$, coords. fermiónicas

entonces $V_{NS}^{(-1)}$ y $V_{NS}^{(0)}$ forman parte de un solo 'supercampo'

$$V(z,\theta) = V_{NS}^{(-1)}(z) + \theta V_{NS}^{(0)}(z) ,$$

de tal forma que $V_{NS}^{(-1)}(z) = V(z,\theta=0)$ es vértice fijo, mientras que $V_{NS}^{(0)}(z) = \int d\theta\, V(z,\theta)$.)

De manera similar, a $u_s|s;k\rangle_R$ puede asociársele

$$V_R^{(-1/2)}(z) = u_s : J_s e^{ik\cdot X} e^{-\phi/2} : \quad \text{"cuadro } -\tfrac{1}{2}\text{"} \quad \text{ó}$$

$$V_R^{(+1/2)}(z) = u_s (\Gamma_\mu)_{ss'} : J_{s'} \left(i\partial X^\mu + \tfrac{\alpha'}{2} k\cdot\psi\psi^\mu\right) e^{ik\cdot X} e^{+\phi/2} : ,$$

"cuadro $+\tfrac{1}{2}$"

que (si $k_\mu \Gamma^\mu u = 0$) tiene también $h = 1$.

jueves, 11 de mayo de 2006 02:41 a.m.

Más en general, a partir de $V^{(n_f)}$ se puede obtener $V^{(n_f+1)}(0) \equiv \left[Q_{BRST}, \xi V^{(n_f)}(0)\right] = \left\{Q_{BRST}, \xi(0)\right\} V^{(n_f)}(0)$

$\left\{Q_{BRST}, \xi(z)\right\}$ es el operador de cambio de retrato.

[Ver Polchinski Sec. 12.5 ; Friedan, Martinec, Shenker NPB 271 (1986) 93.]

La existencia de vértices en diferentes cuadros se vuelve importante al calcular amplitudes de dispersión, porque

$$\int \mathcal{D}\phi\, e^{-S[\phi]} V_1^{(n_1)} V_2^{(n_2)} \cdots \propto \int_{-\infty}^{\infty} d\phi_0\, e^{\phi_0 \chi} e^{n_1 \phi_0} e^{n_2 \phi_0} \cdots$$

($e^{-S[\phi]}$ incluye $-\frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma \sqrt{g} R\phi$)

$\Longrightarrow$ amplitud bien definida solo si

$$\sum_i n_i = n_1 + n_2 + \cdots = -\chi = -2 + 2g + b + c \quad \left(= \sum_i \tilde{n}_i\right).$$

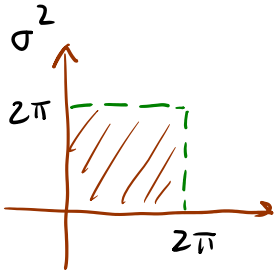
P. ej., en esfera ($\chi = 2$), para amplitud de 4 puntos usamos vértices izquierdos $V_{NS}^{(-1)} V_{NS}^{(-1)} V_{NS}^{(0)} V_{NS}^{(0)}$, $V_R^{(-1/2)} V_R^{(-1/2)} V_{NS}^{(-1)} V_{NS}^{(0)}$, etc.

11/05/06

jueves, 11 de mayo de 2006 08:21 a.m.

Invariancia Modular

Recordar que en toro T^2_τ



$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2+\tau_2^2 \end{pmatrix}$$

$\exists$ difeos grandes (no conectados a la identidad) que forman grupo modular $SL(2,\mathbb{Z})$, generado por

$$T: \begin{cases} \sigma^1 \to \tilde{\sigma}_1 = \sigma^1 - \sigma^2 \\ \sigma^2 \to \tilde{\sigma}_2 = \sigma^2 \end{cases} \Rightarrow \tau \simeq \tau + 1$$

$$S: \begin{cases} \tilde{\sigma}^1 = \sigma^2 \\ \tilde{\sigma}^2 = -\sigma^1 \end{cases} \Rightarrow \tau \simeq -\frac{1}{\tau}$$

$$\Bigg\} \quad \tau \simeq \tilde{\tau} = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$$

Invariancia modular juega un papel clave en finitud UV y, más importante aún, unitariedad de la teoría.

Al calcular amplitudes de supercuerdas en T^2, debemos elegir "condiciones de borde" para $\psi^\mu(\sigma^1,\sigma^2)$ a lo largo de σ^1 y σ^2.

(Más en general, en variedad M debemos especificar estructura de espín: relación entre $\psi_{(A)}(\sigma)$ en distintas regiones A.

[Ver GSW Vol. II, Sec. 12.1])

jueves, 11 de mayo de 2006 08:55 a.m.

$\exists$ 4 opciones : $\overset{\sigma^1\ \sigma^2}{(++)}, (+-), (--), (-+)$

$(++), (+-)$: R ; $(--), (-+)$: NS

Bajo transformaciones modulares,

S, T : $(++) \to (++)$

$(--) \to (--), (-+)$

$(+-) \to (-+), (+-)$

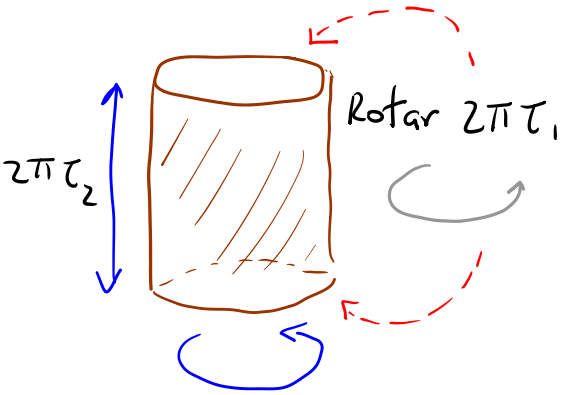
$(-+) \to (+-), (--)$

Así que, p.ej., si incluimos $(+-)$ entonces debemos incluir también $(-+)$ y $(--)$ para que amplitudes a 1 lazo tengan oportunidad de ser invariantes modulares. Notar en particular que necesariamente incluiremos al menos un sector R izquierda (y uno derecho).

Analizaremos ahora el requisito de invariancia modular más de cerca ...

jueves, 23 de marzo de 2006 11:22 a.m.

Recordar que amplitud de cero puntos en $T^2(\tau)$ se puede calcular a través de una traza en formalismo Hamiltoniano:



$$\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)} = Tr_{H_\perp}\left[(\pm 1)^F e^{-2\pi\tau_2 \hat{H} + 2\pi\tau_1 i\hat{P}}\right] \equiv \mathcal{Z}(\tau)$$

↑ dependiendo de si campos fermiónicos son { antiperiódicos / periódicos } en dirección σ^2

Usar sólo $D-2$ osciladores transversales X^i y ψ^i

(los otros 2 se cancelan con b,c y β,γ)

$$= (q\bar{q})^{-c/24} Tr_{H_\perp}\left[(\pm 1)^F q^{L_0} \bar{q}^{\tilde{L}_0}\right], \quad q \equiv e^{2\pi i \tau}.$$

Contribución de $\psi^i(\sigma)$ con distintas estructuras de espín es

$$\mathcal{Z}^{\psi}_{(++)}(\tau) = Tr_R\left[(-1)^F q^{H^\psi}\right], \quad \mathcal{Z}^{\psi}_{(+-)}(\tau) = Tr_R\left[q^{H^\psi}\right],$$

$$\mathcal{Z}^{\psi}_{(-+)}(\tau) = Tr_{NS}\left[(-1)^F q^{H^\psi}\right], \quad \mathcal{Z}^{\psi}_{(--)}(\tau) = Tr_{NS}\left[q^{H^\psi}\right],$$

donde $H^\psi \equiv \sum_{r>0} r\psi^i_{-r}\psi^i_r$

$+1/3$	R	$\leftarrow (D-2)(+1/24)$
$-1/6$	NS	$\leftarrow (D-2)(-1/48)$

jueves, 11 de mayo de 2006 09:19 a.m.

Tenemos entonces

$$Z^{\psi}_{(--)} = q^{-1/6}\left[\prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty}(1+q^r)\right]^8 = \underbrace{\left\{q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\right\}^{-4}}_{\equiv \eta(\tau)^{-4}} \underbrace{\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^{n-1/2})^2\right\}^4}_{\equiv \theta_3(0|\tau)^4}$$

Eta de Dedekind — Función Teta de Jacobi

$$Z^{\psi}_{(-+)} = -q^{-1/6}\left[\prod_{r=1/2}^{\infty}(1-q^r)\right]^8 = -\eta(\tau)^{-4}\underbrace{\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^{n-1/2})^2\right\}^4}_{\equiv \theta_4(0|\tau)^4}$$

por $(-1)^F$

$$Z^{\psi}_{(+-)} = q^{1/3}\left[\prod_{r=0}^{\infty}(1+q^r)\right]^8 = \eta(\tau)^{-4}\underbrace{\left\{q^{1/8}(1+1)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^n)^2\right\}^4}_{\equiv \theta_2(0|\tau)^4}$$

$$Z^{\psi}_{(++)} = -q^{1/3}\left[\prod_{r=0}^{\infty}(1-q^n)\right]^8 = -\eta(\tau)^{-4}\underbrace{\left\{q^{1/8}(1-1)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^n)^2\right\}^4}_{\equiv \theta_1(0|\tau)^4}$$

por $(-1)^F$

¿Cómo combinar para obtener invariancia modular?

lunes, 15 de mayo de 2006 05:15 p.m.

Usando $\eta(\tau+1) = e^{i\pi/12}\eta(\tau)$, $\eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\eta(\tau)$,

$\theta_3(0|\tau+1) = \theta_4(0|\tau)$, $\theta_3(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\theta_3(0|\tau)$,

$\theta_4(0|\tau+1) = \theta_3(0|\tau)$, $\theta_4(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\theta_2(0|\tau)$,

$\theta_2(0|\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}}\theta_2(0|\tau)$, $\theta_2(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2}\theta_4(0|\tau)$,

$\theta_1(0|\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}}\theta_1(0|\tau)$, $\theta_1(0|-1/\tau) = -i(-i\tau)^{1/2}\theta_1(0|\tau)$,

se puede verificar que es invariante la combinación

$$Z^{\Psi}_{TOT}(\tau) \equiv \frac{1}{2}\left(Z^{\Psi}_{(--)} + Z^{\Psi}_{(-+)} - Z^{\Psi}_{(+-)} \pm Z^{\Psi}_{(++)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\eta(\tau)^{-4}\left(\theta_3(0|\tau)^4 - \theta_4(0|\tau)^4 - \theta_2(0|\tau)^4 \mp \theta_1(0|\tau)^4\right)$$

(En realidad

$$Z^{\Psi}_{TOT}(\tau+1) = e^{4\pi i/3} Z^{\Psi}_{TOT}(\tau), \quad Z^{\Psi}_{TOT}(-1/\tau) = Z^{\Psi}_{TOT}(\tau),$$

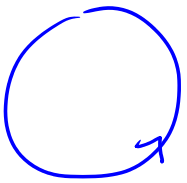
pero la fase se cancela al multiplicar por contribución de modos derechos $Z^{\Psi}_{TOT}(\bar{\tau}) = \left(Z^{\Psi}_{TOT}(\tau)\right)^*$.)

lunes, 15 de mayo de 2006 06:03 p.m.

Recordar que amplitud total en el toro

$$\mathcal{M}^{(0)}_{T^2} \equiv \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{4(\mathrm{Im}\,\tau)^2}\, Z^X(\tau,\bar\tau)\, Z^\Psi_{TOT}(\tau)\, Z^{\tilde\Psi}_{TOT}(\bar\tau)$$

se puede interpretar como suma sobre amplitud a un lazo para cada partícula en el espectro de la teoría libre:



$$\mathcal{M}^{(0)}_{T^2} \sim \sum_i \mathcal{M}^{(0)}_{S^1}(m_i^2) = \sum_i (-1)^{F_i}\int_0^\infty \frac{dT}{2T}(2\pi T)^{-5} e^{-m_i^2 T/2}.$$

F_i: número fermiónico en el espaciotiempo

Vemos entonces que

$$Z^\Psi_{TOT}(\tau) = \frac{1}{2}\left(Z^\Psi_{(--)} + Z^\Psi_{(-+)} - Z^\Psi_{(+-)} \pm Z^\Psi_{(++)}\right)$$

$$= \mathrm{Tr}_{NS}\left[q^{H^\Psi}\tfrac{1}{2}(1+(-1)^F)\right] - \mathrm{Tr}_R\left[q^{H^\Psi}\tfrac{1}{2}(1\pm(-1)^F)\right]$$

Proyección Gliozzi-Scherk-Olive (GSO) $\Rightarrow$

NS_+: ~~$|0;k\rangle_{NS}$~~, $\varepsilon_\mu \psi^\mu_{-1/2}|0;k\rangle_{NS}$, ~~$(\varepsilon_\mu \alpha^\mu_{-1} + \varepsilon_{\mu\nu}\psi^\mu_{-1/2}\psi^\nu_{-1/2})|0,k\rangle_{NS}$~~, ...

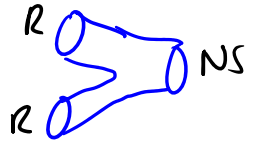
$R_\pm$: $u_s|s;k\rangle_R$ con $\Gamma u = \pm u$, ...

lunes, 15 de mayo de 2006 06:37 p.m.

Si bien esto da invariancia modular, no es la única posibilidad. P.ej., también funciona

$$Z^{\Psi}_{\text{TOT}}(\tau) = Z^{\Psi}_{(1+1)} = -\eta(\tau)^{-4}\,\theta_1(0|\tau)^4 = \text{Tr}_R\left[q^{H^{\Psi}}(-1)^F\right].$$

Pero la teoría **no** puede contener solo R_+ y R_-, porque EPO $V_R V_R \sim V_{NS} \Longrightarrow$ interacción



Una teoría de cuerdas consistente, además de ser invariante modular, debe poseer interacciones bien definidas: las EPOs deben

- cerrar $\left(\Delta: NS\times NS = NS = R\times R,\ NS\times R = R = R\times NS;\ (-1)^F: +\times + = + = -\times -,\ +\times - = - = -\times +\right)$

y

- ser univaluadas (P. ej., en $R_+ \times R_- = NS_-$ tenemos

$$:e^{-\phi/2}e^{\frac{i}{2}\varphi_0}e^{\frac{i}{2}\varphi_1}\cdots e^{\frac{i}{2}\varphi_4}(z)::e^{-\phi/2}e^{\frac{i}{2}\varphi_0}e^{\frac{i}{2}\varphi_1}\cdots e^{\frac{i}{2}\varphi_3}e^{-\frac{i}{2}\varphi_4}(0):$$

$$= \underbrace{z^{-1/4}z^{1/4}z^{1/4}z^{1/4}z^{1/4}z^{-1/4}}_{\sqrt{z}}:e^{-\phi}e^{i\varphi_0}e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}e^{i\varphi_3}(0):+\ldots$$

$\sqrt{z}$ corte que debe ser compensado por corte en modos derechos

lunes, 15 de mayo de 2006 08:11 p.m.

Lo mismo sucede en $R_+ \times NS_-$ y $R_- \times NS_-$, pero no en los demás productos.)

Las proyecciones GSO que encontramos arriba dan lugar a 2 teorías que satisfacen estos requisitos:

- IIB: incluir sectores con $(-1)^F = +1$, $(-1)^{\tilde{F}} = +1$,

es decir,	(NS_+, NS_+)	(R_+, R_+)	(R_+, NS_+)	(NS_+, R_+)
$m^2=0$:	$\varphi\ B_{(2)}\ h_{\mu\nu}$	$C_{(0)}\ C_{(2)}\ C^+_{(4)}$	$\chi^1_{\mu S}\ \lambda^1_S$	$\chi^2_{\mu S}\ \lambda^2_S$
rep de $SO(8)$:	$\underline{1}\ \underline{28}\ \underline{35}$	$\underline{1}\ \underline{28}\ \underline{35}_+$	$\underline{56}\ \underline{8'}$	$\underline{56}\ \underline{8'}$

- IIA: incluir sectores con $(-1)^F = +1$, $(-1)^{\tilde{F}} = \begin{cases} +1 & NS \\ -1 & R \end{cases}$,

es decir,	(NS_+, NS_+)	(R_+, R_-)	(R_+, NS_+)	(NS_+, R_-)
$m^2=0$:	$\varphi\ B_{(2)}\ h_{\mu\nu}$	$C_{(1)}\ C_{(3)}$	$\chi^1_{\mu S}\ \lambda^1_S$	$\chi^2_{\mu S}\ \chi^2_S$
rep de $SO(8)$:	$\underline{1}\ \underline{28}\ \underline{35}$	$\underline{8}_V\ \underline{56}_t$	$\underline{56}\ \underline{8'}$	$\underline{56'}\ \underline{8}$

¡Ninguna de estas 2 teorías tiene taquión! ✓

($\Rightarrow$ Fondo $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $\Phi = \Phi_0$, $B_{(2)} = \ldots = 0$ es estable.)

Ambas teorías incluyen bosones y fermiones ✓

Notar que paridad en espaciotiempo

$$\mathbb{P}: X^i \to -X^i, \quad \psi^i \to -\psi^i \qquad \forall\, i=1,\dots,9$$

$$\Rightarrow \Gamma^i \to -\Gamma^i, \quad \Gamma \to -\Gamma \quad \text{y} \therefore \quad \underline{8} \leftrightarrow \underline{8}', \quad \underline{56} \leftrightarrow \underline{56}',$$

de modo que $\begin{matrix}\text{IIA}\\ \text{IIB}\end{matrix}$ es $\begin{matrix}\text{invariante}\\ \text{no invariante}\end{matrix}$ bajo $\mathbb{P}$ $\begin{matrix}\text{(no quiral)}\\ \text{(quiral)}\end{matrix}$.

(Vemos también que la proyección GSO

$(-1)^F = (-1)^{\tilde{F}} = \begin{cases} +1 & \text{NS} \\ -1 & \text{R} \end{cases}$ da teoría equivalente a IIB,

y $(-1)^F = \begin{cases} +1 & \text{NS} \\ -1 & \text{R} \end{cases}$, $(-1)^{\tilde{F}} = +1$ es equivalente a IIA.)

18/05/06

Ambas teorías incluyen 2 gravitinos χ^1, χ^2,

con sus correspondientes invariancias de norma

$$\chi^A(x) \simeq \chi^A(x) + \partial_\mu \xi^A(x) \qquad A = 1, 2,$$

(ξ: parámetro espinorial)

que, por consistencia, deben reflejar simetrías de las teorías en conjunto.

lunes, 15 de mayo de 2006 09:45 p.m.

$\longleftrightarrow$ ¡2 supersimetrías locales en espaciotiempo!

Teorías con supersimetría $\mathcal{N}=2$ en $D=10$

(por eso denominamos a estas teorías 'tipo II').

Las corrientes asociadas son

$$j_s(z) = e^{-\phi/2} \mathcal{J}_s(z) \qquad h = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1 \quad \checkmark$$

y $$\tilde{j}_s(\bar{z}) = e^{-\tilde{\phi}/2} \tilde{\mathcal{J}}_s(\bar{z}) \qquad \tilde{h} = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1, \quad \checkmark$$

y las cargas correspondientes

$$Q^1_s \equiv Q_s \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} j_s(z), \quad Q^2_s \equiv \tilde{Q}_s \equiv \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \tilde{j}_s(\bar{z})$$

transforman como espinores bajo $SO(9,1)$:

son 32 supercargas $\begin{cases} \underline{16} + \underline{16}' & \text{en IIA} \\ \underline{16} + \underline{16} & \text{en IIB} \end{cases}$

que satisfacen superálgebra $\{Q, Q\} \sim P_\mu \Gamma^\mu$

y convierten $|\text{bosón}\rangle \longleftrightarrow |\text{fermión}\rangle$

martes, 16 de mayo de 2006 08:26 a.m.

Se puede verificar que el espectro de ambas teorías es supersimétrico observando que

$$Z^{\psi}_{\text{tor}}(\tau) = \frac{1}{2}\eta(\tau)^{-4}\left(\underbrace{\theta_3(0|\tau)^4 - \theta_4(0|\tau)^4 - \theta_2(0|\tau)^4}_{=0 \text{ por identidad 'abstrusa' de Jacobi}} \pm \underbrace{\theta_1(0|\tau)^4}_{=0 \text{ por modo cero } \int d\psi_0 1 = 0}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{M}^{(0)}_{T^2} = \sum_i \mathcal{M}^{(0)}_{S^1}(m_i^2) = 0$$

Es decir, después de proyección GSO, por cada bosón con masa m_i^2 existe un fermión con la misma masa:

P.ej., con $m^2=0$ hay { 128 estados bosónicos, 128 estados fermiónicos } $\underline{256 = 2^8}$.

Multiplete de Supergravedad $\mathcal{N}=2$ en $D=10$

martes, 16 de mayo de 2006 08:48 a.m.

Esto es justo como corresponde a representación no masiva de superálgebra $N=2$ en $D=10$: yendo al marco donde $k_M=(k,k,0,0,\dots)$ se puede ver que la mitad de las 32 supercargas aniquilan a los estados, y la otra mitad forman 8 pares de operadores de creación/aniquilación fermiónicos.

(En general, con n supercargas se obtiene rep. no masiva con $2^{n/4}$ estados, y rep. masiva con $2^{n/2}$ estados. [Ver p.ej. Polchinski Vol. II Apéndice B])

Existe otra manera de lograr invariancia modular: pidiéndola no para los modos izquierdos y derechos por separado, sino para su producto.

Esto da lugar a otras 2 teorías 'consistentes', que resultan de una proyección GSO diagonal:

domingo, 28 de mayo de 2006 11:06 p.m.

- OB : Sectores con $\Delta = \tilde{\Delta}$, $(-1)^F = (-1)^{\tilde{F}}$

es decir,	(NS_+, NS_+)	(NS_-, NS_-)	(R_+, R_+)	(R_-, R_-)
$m^2 \leq 0$:	φ. $B_{(2)}$ $h_{\mu\nu}$	$\emptyset$	$C^1_{(0)}$ $C^1_{(2)}$ $C^+_{(4)}$	$C^2_{(0)}$ $C^2_{(2)}$ $C^-_{(4)}$
rep de $so(d)$: ($d=8$ ó 9)	$\underline{1}$ $\underline{28}$ $\underline{35}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$ $\underline{28}$ $\underline{35}_+$	$\underline{1}$ $\underline{28}$ $\underline{35}_-$

- OA : Sectores con $\Delta = \tilde{\Delta}$, $(-1)^F = \begin{cases} (-1)^{\tilde{F}} & NS \\ -(-1)^{\tilde{F}} & R \end{cases}$

es decir,	(NS_+, NS_+)	(NS_-, NS_-)	(R_+, R_-)	(R_-, R_+)
$m^2 \leq 0$:	φ $B_{\mu\nu}$ $h_{\mu\nu}$	$\emptyset$	$C^1_{(1)}$ $C^1_{(3)}$	$C^2_{(1)}$ $C^2_{(3)}$
rep de $so(d)$: ($d=8$ ó 9)	$\underline{1}$ $\underline{28}$ $\underline{35}$	$\underline{1}$	$\underline{8_v}$ $\underline{56_t}$	$\underline{8_v}$ $\underline{56_t}$

En estos casos la amplitud a un lazo involucra

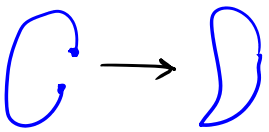
$$Z^{\psi,\tilde{\psi}}_{TOT}(\tau) = \frac{1}{2}|\eta(\tau)|^{-8}\left(|\theta_3(0|\tau)|^8 + |\theta_4(0|\tau)|^8 + |\theta_2(0|\tau)|^8 \pm |\theta_1(0|\tau)|^8\right)$$

que es $\neq 0$ (teoría evidentemente no es supersimétrica) pero invariante modular.

En estas teorías $\nexists$ fermiones, y espectro incluye taquión,

$\therefore$ parecen tan poco interesantes como cuerda bosónica.

Quizás estas teorías se vuelven estables en ciertos fondos no triviales [ver p.ej. Klebanov-Tseytlin hep-th/9811035].
Es posible entenderlas como proyecciones de IIB/A bajo número fermiónico en espaciotiempo $(-1)^F$ [Bergman, Gaberdiel 9906055].
se ha postulado además que OA es equivalente ('dual') a IIA en cierto fondo no supersimétrico [Costa-Gutperle, 0012072], y que taquión indica decaimiento
OA en fondo plano → IIA en fondo plano
[Gutperle-Strominger, 0104136; Adams-Polchinski-Silverstein, 0108075]

¿Teorías con cuerdas abiertas? Recordar  :
teoría consistente incluye necesariamente cuerdas cerradas.
Hemos visto que invariancia modular requiere proyección GSO para sector de cuerdas cerradas.
Para tener interacciones bien definidas, sector de

lunes, 29 de mayo de 2006 09:20 a.m.

Cuerdas abiertas debe incluir también proyección GSO:

- I (abierta): NS_+ R_+ ← (elegimos R_+ en vez de R_- por la conexión con IIB que necesitaremos más abajo)

$m^2=0$: A_μ η_s

rep de $SO(8)$: $\underline{8}_v$ $\underline{8}$

$16=2^4$ estados $\longleftrightarrow$ rep no masiva de SUSI $\mathcal{N}=1$ en $D=10$

$\therefore$ sector de cuerdas cerradas debe poseer solo SUSI $\mathcal{N}=1$, y en particular, 1 solo gravitino.

La única manera de proyectar IIA ó IIB a $\mathcal{N}=1$ reteniendo invariancia bajo Poincaré es

IIB/Ω : cuerdas "IIB" no orientadas $\equiv$ I (cerrada)

Ω ↑ paridad en hoja de mundo: $z \longleftrightarrow \bar{z}$ $(\sigma \longleftrightarrow 2\pi-\sigma)$ $\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_n^\mu \longleftrightarrow \tilde{\alpha}_n^\mu \\ \psi_r^\mu \longleftrightarrow \tilde{\psi}_r^\mu \\ \vartheta_s \longleftrightarrow \tilde{\vartheta}_s \end{cases}$$

Proyección retiene estados con $\Omega=+1$.

En (NS_+, NS_+) y (R_+, R_+) sobreviven

φ ~~$B_{\mu\nu}$~~ $h_{\mu\nu}$ ~~$C_{(0)}$~~ $C_{(2)}$ ~~$C^+_{(4)}$~~

Sobrevive además combinación lineal $(NS_+, R_+) + (R_+, NS_+)$:

lunes, 29 de mayo de 2006 09:52 a.m.

$$\lambda_{s'} \equiv \lambda^1_{s'} + \lambda^2_{s'} \qquad \chi_{\mu s} \equiv \chi^1_{\mu s} + \chi^2_{\mu s}$$

En conjunto tenemos $\underline{1}$ $\underline{35}$ $\underline{28}$ $\underline{56}$ y $\underline{8}'$ de $SO(8)$:

Multiplete de Supergravedad $\mathcal{N}=1$ en $D=10$

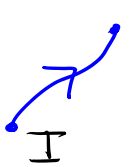
(64 bosones + 64 fermiones)

1 supercarga $Q_s \equiv Q^1_s + Q^2_s$

Por consistencia cuerda abierta también debe ser no orientada

Recordar que en sector de cuerda abierta

$$\Omega : z \leftrightarrow -\bar{z} \qquad \sigma \quad \pi-\sigma \qquad \Longrightarrow \begin{cases} \alpha^\mu_n \leftrightarrow (-1)^n \alpha^\mu_n \\ \psi^\mu_r \leftrightarrow (-1)^r \psi^\mu_r \end{cases}$$

y al agregar índices de Chan-Paton, 

$1 \le I, J \le N$,

tenemos $\Omega : |IJ\rangle \leftrightarrow |JI\rangle$, ó

$\Omega : |IJ\rangle \leftrightarrow M_{JJ'} |J'I'\rangle M^{-1}_{I'I}$ con $M \equiv i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{N/2} \\ -\mathbb{1}_{N/2} & 0 \end{pmatrix}$,

a partir de lo cual obtenemos grupo de norma

$SO(N)$ ó $Sp(N/2)$.

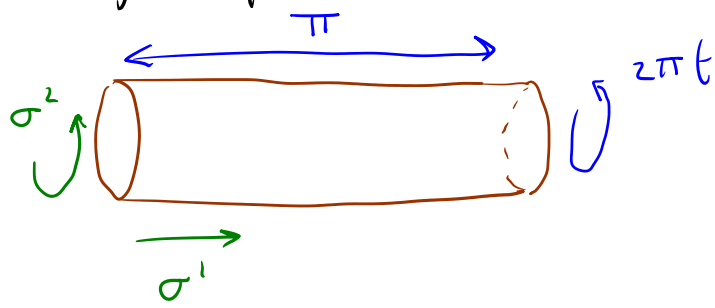
Pero de esta familia infinita de teorías

¡solo 1 resulta ser consistente!

lunes, 29 de mayo de 2006 11:01 a.m.

Para cuerdas abiertas, el requisito de ausencia de renacuajos juega un papel análogo al de invariancia modular para cuerdas cerradas:

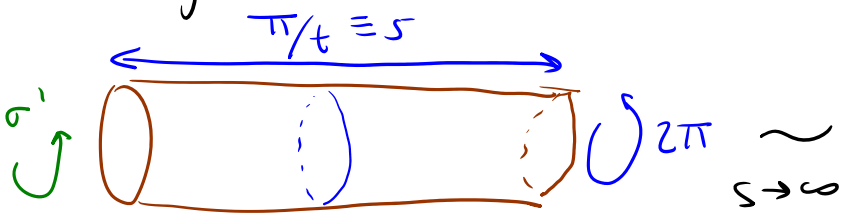
al igual que en la cuerda bosónica,



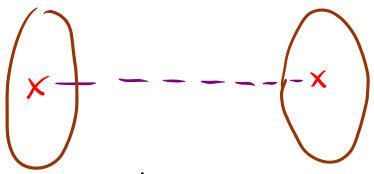
$$\sim \int_0^\infty \frac{dt}{t} Z^X(it)\, Z^\Psi_{TOT}(it)$$

R y NS c/sin $(-1)^F$

contiene divergencia en límite $t \to 0$, debida a renacuajo de estados no masivos de cuerda cerrada,



$\sim_{s\to\infty}$



$$\frac{1}{k^2}\Big|_{k^2=0}$$

↑ cuerda cerrada

NS-NS: términos en Z^Ψ_{TOT} sin $(-1)^F$ en traza

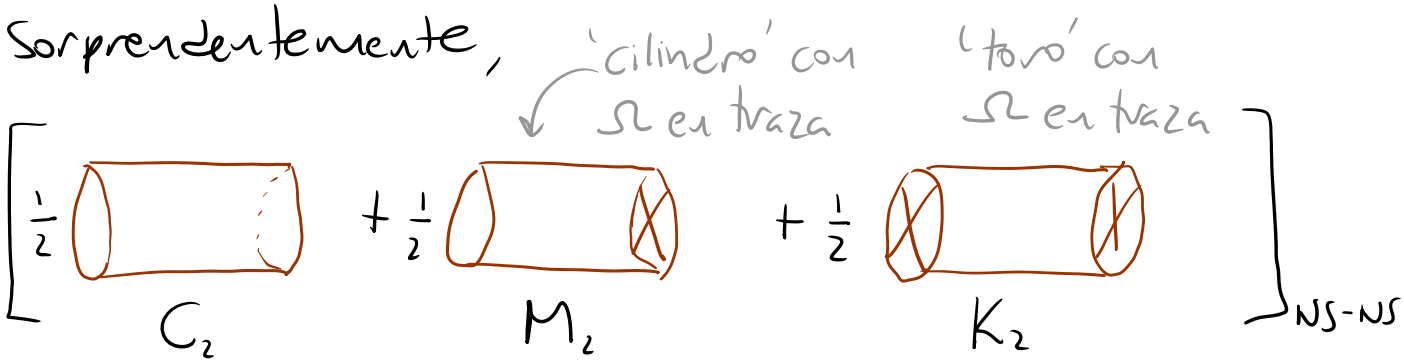
R-R: términos en Z^Ψ_{TOT} con $(-1)^F$ en traza

Esta divergencia se traduce en anomalías tanto en inv. superconforme (2-dim) como en inv. de norma (10-dim).

lunes, 29 de mayo de 2006 11:35 a.m.

Sabemos que la existencia de un renacuajo (vértice de 1 pata en la acción efectiva) es una señal de que el fondo no resuelve las ecs. de mov., por lo que corrección al fondo que logre satisfacer ecs. de mov. eliminará renacuajo y divergencia. Pero en este caso, ecs. de mov. son inconsistentes y no tienen solución (p.ej., renacuajo RR se traduce en término $\mu \int d^{10}x\, C_{01\ldots9}$ en acción efectiva, cuya variación $\Rightarrow \mu = 0$), así que el renacuajo debe simplemente estar ausente — es decir, debe cancelarse de alguna manera.

Sorprendentemente,



$$= (N^2 \pm 2\cdot 32N + 32^2)\, \frac{1}{8\pi\,(8\pi^2\alpha')^5} \int_0^\infty ds\, [16 + \mathcal{O}(e^{-s})]$$

↑ para $Sp(N/2)$, $SO(N)$

[Ver Polchinski Vol. II, Sec. 10.8]

lunes, 29 de mayo de 2006 11:54 a.m.

(El signo relativo aparece porque en el caso

$SO(N)$ hay $\begin{cases} \frac{1}{2}N(N+1) & \text{estados con } \Omega = +1 \\ \frac{1}{2}N(N-1) & \text{estados con } \Omega = -1 \end{cases}$

$+N$ como factor total, mientras que en

$Sp(N/2)$ hay $\begin{cases} \frac{1}{2}N(N-1) & \text{estados con } \Omega = +1 \\ \frac{1}{2}N(N+1) & \text{estados con } \Omega = -1 \end{cases}$

$-N$ como factor total.)

La contribución del sector R-R,

$$\left[\frac{1}{2} \quad + \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{2} \right]_{R\text{-}R}$$

tiene la misma magnitud pero el signo opuesto.

¡¡Ambos renacuajos se cancelan solo para $SO(32)$!!

(En la cuerda bosónica ocurre cancelación $\uparrow 2^5$

similar para $SO(8192)$) $\uparrow 2^{13}$

Solo teoría $SO(32)$ es consistente : teoría tipo I

27/05/06

sábado, 03 de junio de 2006 09:35 a.m.

Teorías Heteróticas

Aprovechando que los modos izquierdos y derechos de la cuerda cerrada son independientes, podemos usar

- Modos Izquierdos de Cuerda Bosónica Orientada
- Modos Derechos de Supercuerda Orientada

para construir teoría superconforme $(0,1)$, con

Campos	$(c,\tilde{c})$
$X^\mu(z)$; $\tilde{X}^\mu(\bar{z})$, $\tilde{\psi}^\mu(\bar{z})$ $\mu=0,\dots,9$	$\Rightarrow$ $(10,15)$
espinores $\lambda^A(z)$ $A=1,\dots,32$	$\Rightarrow$ $(16,0)$
$b(z), c(z)$; $\tilde{b}(\bar{z}), \tilde{c}(\bar{z}), \tilde{\beta}(\bar{z}), \tilde{\gamma}(\bar{z})$	$\Rightarrow$ $(-26,-15)$
	$(0,0)$ ✓

donde $\lambda^A(z) \overset{\text{Bosonización}}{\longleftrightarrow} X^k(z)$ $k=10,\dots,25$.

La acción y constricciones son

$$S=\frac{1}{4\pi}\int d^2z\left(\frac{2}{\alpha'}\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \lambda^A\bar{\partial}\lambda^A + \tilde{\psi}^\mu\partial\tilde{\psi}_\mu\right)$$

$$T=-\frac{1}{\alpha'}\partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2}\partial\lambda^A\partial\lambda_A$$

$$\tilde{T}=-\frac{1}{\alpha'}\bar{\partial}\tilde{X}^\mu\bar{\partial}\tilde{X}_\mu - \frac{1}{2}\bar{\partial}\tilde{\psi}^\mu\bar{\partial}\tilde{\psi}_\mu$$

$$\tilde{J}=i\sqrt{2/\alpha'}\,\tilde{\psi}^\mu\bar{\partial}\tilde{X}_\mu$$

(Notar que λ^A y $\tilde{\psi}^\mu$ tienen la misma acción, pero diferentes constricciones.)

Simetría global en hoja de mundo es $SO(9,1) \times SO(32)$.

Notar que, a diferencia de la cuerda abierta con factores de Chan-Paton, obtenemos aquí simetría interna no abeliana con carga esparcida por toda la cuerda, no únicamente en los extremos.

La 'condición de borde' más general para λ^A es

$$\lambda^A(\sigma + 2\pi, \sigma^2) = M^{AB} \lambda^B(\sigma^1, \sigma^2)$$

M: matriz $O(32)$

Se conocen 9 elecciones distintas de M^{AB} y proyección GSO que dan lugar a teorías consistentes (con invariancia modular e interacciones bien definidas). De estas, solo 2 son supersimétricas. Las 7 restantes son análogas a teorías Tipo 0, excepto por una que no tiene taquión y posee grupo de norma $SO(16) \times SO(16)$. [Ver Polchinski Vol. II, Cap. 11]

① Teoría Heterótica SO(32)

Para $\tilde{\psi}^{\mu}(\bar{z})$, imponemos $(-1)^{\tilde{F}} = +1$

$\tilde{NS}$ $\quad \tilde{\psi}^{\mu}_{-1/2}|0;k\rangle_{\tilde{NS}}$ $\quad \underline{8}_V$

$\tilde{R}$ $\quad |\tilde{S};k\rangle_{\tilde{R}}$ $\quad \underline{8}$

estados con $m^2=0$

Para $\lambda^A(z)$ escogemos la misma periodicidad $\forall A$, encontrando $\therefore$ 2 sectores

NS : $M=-\mathbb{1}$

R : $M=+\mathbb{1}$

Definiendo un operador de número fermiónico F que incluya a todos los λ^A, imponemos $(-1)^F=+1$

Las constantes de orden en $L_0^{x,\lambda}+L_0^{b,c}$ son $\therefore$

NS : $8\left(-\frac{1}{24}\right)+32\left(-\frac{1}{48}\right)=-1$

R : $8\left(-\frac{1}{24}\right)+32\left(+\frac{1}{24}\right)=+1$

Los niveles izquierdos más bajos son $\therefore$

- Nivel $N=0$: $\quad |0;k\rangle_{NS} \quad m^2=-\frac{4}{\alpha'}$ $\quad$ Taquión

Tiene $(-1)^F=+1$ porque en este caso $\nexists\ \beta,\gamma$

PERO no se puede empatar con ningún nivel derecho.

miércoles, 07 de junio de 2006 09:06 p.m.

- Nivel $N = 1/2$: $\lambda^A_{-1/2}|0;k\rangle$ $\quad m^2 = -2/\alpha'$

  Tiene $(-1)^F = -1$ y es ∴ eliminado por proyección GSO

- Nivel $N = 1$: $\alpha^M_{-1}|0;k\rangle_{NS}$ $\quad \lambda^A_{-1/2}\lambda^B_{-1/2}|0;k\rangle_{NS}$ $\quad m^2 = 0$

  rep $SO(8)\times SO(32)$: $(\underline{8}_v, \underline{1})$ $\quad (\underline{1}, \underline{496})$ rep. adjunta de $so(32)$

  $\underline{496}$: $\frac{32\times 31}{2}$

  Tienen $(-1)^F = +1$ ✓

Es posible empatarlos con niveles derechos no masivos ✓

Al combinar con los modos derechos, vemos entonces que los campos sin masa de esta teoría son

$\widetilde{NS}_+$ $\quad \widetilde{R}_+$

$$[(\underline{8}_v, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{496})]\,(\underline{8}_v + \underline{8})$$

$$= (\underline{1},\underline{1}) + (\underline{28},\underline{1}) + (\underline{35},\underline{1}) + (\underline{56},\underline{1}) + (\underline{8}',\underline{1})$$

Multiplete de SUGRA $N=1$

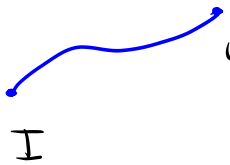
$$+ (\underline{8}_v, \underline{496}) + (\underline{8}, \underline{496})$$

Multiplete Vectorial (SYM) en rep. adjunta de $SO(32)$

miércoles, 07 de junio de 2006 09:17 p.m.

¡Notar que estos son los mismos campos que la teoría Tipo I! (∴ ambas teorías tienen la misma acción a bajas energías.)

Pero niveles con $m^2>0$ son diferentes. En particular,

I: 

2 cargas vectoriales 32

$\Rightarrow$ todos los estados $|\cdots; I, J\rangle$ pertenecen a reps. tensoriales de $SO(32)$: [2] y (2)

496 528

HO:

Carga distribuida $\longleftrightarrow$ λ^A_{-r} $r\in\mathbb{Z}+\Delta$

$\Rightarrow$ se pueden encontrar estados en representaciones arbitrarias de $SO(32)$

(P.ej., $\exists$ espinor de $SO(32)$ con $m^2=+4/\alpha'$)

② Teoría Heterótica $E_8 \times E_8$

Dividimos $\lambda^A(z)$ en 2 grupos $\begin{cases} A = 1, \dots, 16 \\ A' = 17, \dots, 32 \end{cases}$

con 'condiciones de borde' independientes, y

consideramos 8 sectores $\begin{pmatrix} NS & NS' & \widetilde{NS} \\ R & R' & \widetilde{R} \end{pmatrix}$ con

proyección GSO $(-1)^F = (-1)^{F'} = (-1)^{\widetilde{F}} = 0$.

Los niveles derechos son como antes: $\underline{8}_v + \underline{8}$ con $m^2 = 0$.

Los niveles izquierdos son:

- NS-NS' (constante de orden -1, como antes)

  • Nivel $N=1$ es el primero que puede empatarse ($m^2=0$):

$$\alpha^M_{-1}|0\rangle_{NS,NS'} \qquad \lambda^A_{-1/2}\lambda^B_{-1/2}|0\rangle_{NS,NS'} \qquad \lambda^{A'}_{-1/2}\lambda^{B'}_{-1/2}|0\rangle_{NS,NS'}$$

$(\underline{8}_v, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{120}, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{1}, \underline{120})$ de $SO(8)\times SO(16)\times SO(16)$

$\underline{120}$: $\frac{16\times 15}{2}$ rep adjunta de $SO(16)$

- R-R' (constante de orden $+1$, como antes)

  No da estados sin masa

miércoles, 07 de junio de 2006 09:42 p.m.

- R-NS' (Constante de orden $8(-\frac{1}{24})+16(\frac{1}{24})+16(-\frac{1}{48})=0$)

• Nivel $N=0$: $m^2=0$

De manera similar a lo que sucedió para el vacío R en la supercuerda, la existencia de los modos cero λ_0^A implica que estados en este sector son

$|\sigma, 0; k\rangle_{R-NS'}$, con $\sigma_\alpha = \pm\frac{1}{2}$ $\alpha = 1, \ldots, 8$

y que transforman como espinor de $SO(16)$

De estos $2^8 = 256$ estados, la mitad sobreviven proyección GSO $(-1)^F = +1$: $2^8 = \underline{128} + \underline{128'}$

así que estados físicos pertenecen a $(\underline{1}, \underline{128}, \underline{1})$.

- NS-R' De manera similar, $(\underline{1}, \underline{1}, \underline{128})$.

Combinando con $\underline{8}_V$ de modos derechos, se obtienen campos de norma en $\underline{120} + \underline{128}$ de cada $SO(16)$

adjunta ↑ ↑ espinorial

$\underbrace{\qquad\qquad}$

¡rep. adjunta $\underline{248}$ de E_8!

$\therefore$ Grupo de Norma es $E_8 \times E_8$

Solo el subgrupo $SO(16) \times SO(16)$ es manifiesto en esta presentación de la teoría.

Los generadores adicionales que están en E_8 pero no en $SO(16)$ son espinores

$$\exp\left[i \sum_{\alpha=1}^{8} \sigma_\alpha X^{\alpha+9}(\tau) \right], \quad \exp\left[i \sum_{\alpha=9}^{16} \sigma_\alpha X^{\alpha+9}(\tau) \right]$$

↑ bosonización de $\lambda^{2\alpha-1}, \lambda^{2\alpha}$ ↑

con $\sigma_\alpha = \pm 1/2$ (y número par de $-1/2$'s)

Los estados con $m^2 = 0$ son:

$$(\underline{1}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{28}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{35}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{56}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{8}', \underline{1}, \underline{1})$$

Multiplete de SUGRA $\mathcal{N}=1$

$$+ (\underline{8}_v, \underline{248}, 1) + (\underline{8}, \underline{248}, \underline{1}) + (\underline{8}_v, \underline{1}, \underline{248}) + (\underline{8}, \underline{1}, \underline{248})$$

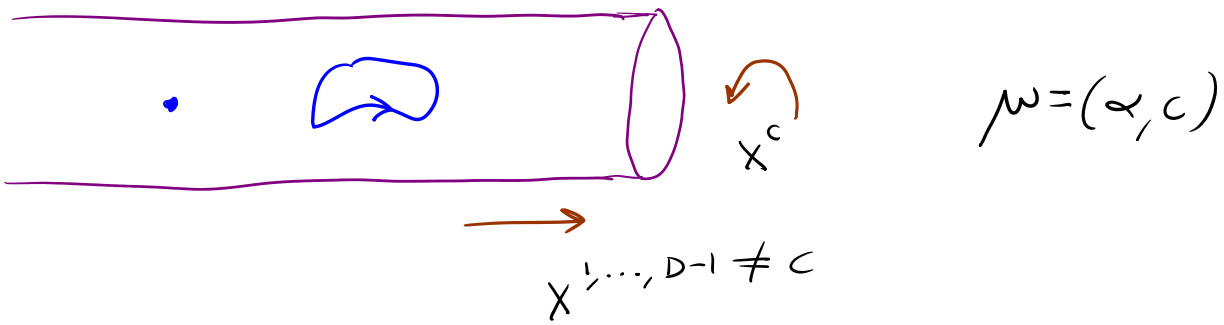
Multiplete Vectorial (SYM) $E_8 \times E_8$

lunes, 04 de septiembre de 2006 03:50 p.m.

4. Dualidad T y D-branas

Si queremos eventualmente hacer contacto con el mundo real, necesitamos esconder 6 dimensiones. La manera más obvia es postular que son compactas y pequeñas. Consideremos primero el caso más sencillo posible: una dimensión compactificada en un círculo:

$$X^c \simeq X^c + 2\pi R \qquad (p.ej.,\ c=9)$$



La presencia de este círculo modifica la teoría en 3 aspectos:

1) El momento se discretiza,

$$p^c = \frac{n}{R} \qquad n \in \mathbb{Z}$$ número de Kaluza-Klein

(porque $e^{i(2\pi R)\hat{p}^c}|\psi\rangle = |\psi\rangle$).

lunes, 04 de septiembre de 2006 04:14 p.m.

Esto sucede tanto para teorías de partículas como de cuerdas. Para cada campo asociado podemos hacer descomposición de Fourier

$$\phi(x^\mu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\frac{n}{R}x^c}\varphi_n(x^\alpha),$$

obteniendo una colección infinita de campos definidos en $D-1$ dimensiones, $\{\varphi_n\}$, con masas

$$m_n^2 \equiv -p_\alpha p^\alpha = p_c p^c - p_\mu p^\mu = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + M^2$$

$\{$ masa $(D-1)$-dimensional; masa D-dimensional

Notar que para R pequeño m_n^2 es grande a menos que $n=0$, de modo que

$R \to 0 \Rightarrow$ retener solo $\varphi_0(x^\alpha)$, independiente de x^c

Reducción Dimensional

2) Campos con Índices Espaciotemporales se descomponen en bloques, p.ej.,

$$G_{\mu\nu} \sim \left(\begin{array}{c|c} g_{\alpha\beta} & A_\alpha \\ \hline A_\beta & \sigma \end{array}\right)$$

$(D-1)\times(D-1)$

$D\times D$

lunes, 04 de septiembre de 2006 04:34 p.m.

Bajo reducción dimensional,

$$\frac{1}{2K^2}\int d^D x\,\sqrt{-G}\,R \longrightarrow \frac{2\pi R}{2K^2}\int d^{D-1}x\left[\sqrt{-g}\,r + F^2 + (\partial\sigma)^2\right]$$

y la invariancia bajo difeos del tipo

$$x^c \to x'^c = x^c + \lambda(x^\alpha)$$

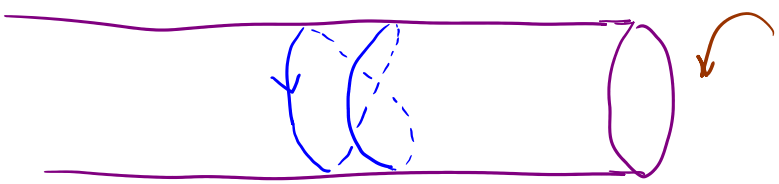
se convierte en invariancia de norma $U(1)$

$$A_\alpha \to A'_\alpha = A_\alpha - \partial_\alpha \lambda$$

La carga asociada es número de KK n

(de modo que en reducción dimensional retenemos solamente estados neutros).

3) Cuerdas cerradas pueden enrollarse alrededor del círculo,



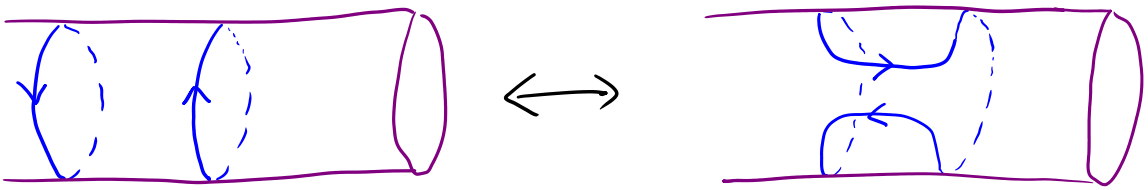
lo cual se expresa en cambio en condición de periodicidad

$$X^c(\sigma+2\pi,\tau) = X^c(\sigma,\tau) + e\cdot 2\pi R \qquad e\in\mathbb{Z}$$

número de enrollamiento

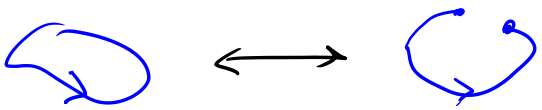
lunes, 04 de septiembre de 2006 04:59 p.m.

El enrollamiento de una cuerda puede cambiar en teoría con interacciones, pero, por razones topológicas, el enrollamiento total se conserva en interacciones de cuerda cerrada:



$e=+1 \quad e=-1$ $\qquad$ $e=0$

Notar que esto nos obliga a incluir en teoría completa sectores con e arbitrario.

En teoría con cuerdas abiertas, e_{TOT} claramente no se conserva en procesos  .

¿Qué sucede en el caso de cuerdas cerradas no orientadas? Recordar que en este caso espectro se trunca para retener solo estados invariantes bajo

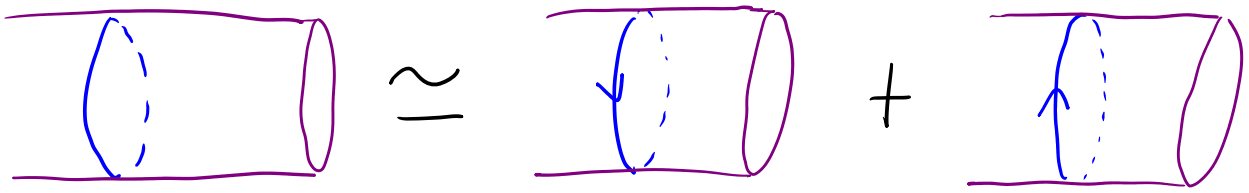
$$\Omega : \alpha_n^\mu \leftrightarrow \tilde{\alpha}_n^\mu, \quad e \leftrightarrow -e,$$

p.ej. $\tilde{\alpha}_{-1}^\mu |0,0;k_\alpha,1,1\rangle + \alpha_{-1}^\mu |0,0;k_\alpha,1,-1\rangle$

(n, e $\qquad$ n, e)

lunes, 04 de septiembre de 2006 05:17 p.m.

Es decir,



Debido a esto, las interacciones conservan solo el enrollamiento total módulo 2:

$$(V_{+1}+V_{-1})(V_{+1}+V_{-1}) \longrightarrow (V_{+2}+V_{-2}) + V_0 .$$

Regresando a cuerda orientada, si imponemos la nueva condición de periodicidad

$$X^c(e^{2\pi i}z, e^{-2\pi i}\bar{z}) = X^c(z,\bar{z}) + e\cdot 2\pi R$$

en expansión usual $X^c(z,\bar{z}) = X^c(z) + \tilde{X}^c(\bar{z})$,

$$X^c(z) = x^c_I + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(-\alpha^c_0 \ln z + \sum_{n\neq 0}\frac{\alpha^c_n}{n z^n}\right),$$

$$\tilde{X}^c(\bar{z}) = x^c_D + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\left(-\tilde{\alpha}^c_0 \ln \bar{z} + \sum_{n\neq 0}\frac{\tilde{\alpha}^c_n}{n \bar{z}^n}\right),$$

encontramos que α^c_0 y $\tilde{\alpha}^c_0$ ya no tienen que ser iguales:

$$X^c(e^{2\pi i}z, e^{-2\pi i}\bar{z}) = X^c(z,\bar{z}) + \underbrace{i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}(-\alpha^c_0 + \tilde{\alpha}^c_0)2\pi i}_{= e\cdot 2\pi R} .$$

Recordando además que

$$\text{Noether} \Longrightarrow \underbrace{p^c}_{\frac{n}{R}} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}\left(\alpha_0^c + \tilde{\alpha}_0^c\right) \equiv \frac{1}{2}\left(p_I^c + p_D^c\right),$$

podemos despejar

$$p_I^c \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\,\alpha_0^c = \frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'}$$

$$p_D^c \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\,\tilde{\alpha}_0^c = \frac{n}{R} - \frac{eR}{\alpha'}$$

(n y e son aquí operadores con autovalores enteros)

Notar que para direcciones no compactas, $p^\alpha = p_I^\alpha = p_D^\alpha$.

Con estas definiciones, las relaciones de conmutación para los modos cero son simplemente

$$[x_I^c, p_I^c] = i = [x_D^c, p_D^c], \quad [x_I^c, p_D^c] = 0 = [x_D^c, p_I^c].$$

Dado que

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4} p_I^\mu p_{I_\mu} + N, \quad \tilde{L}_0 = \frac{\alpha'}{4} p_D^\mu p_{D_\mu} + \tilde{N},$$

el espectro de masas en $D-1$ dimensiones que se obtiene a partir de condiciones de estado físico

$$L_0 + A = 0, \quad \tilde{L}_0 + \tilde{A} = 0 \quad \text{es}$$

lunes, 04 de septiembre de 2006 05:52 p.m.

$$m^2 \equiv -p^\alpha p_\alpha = \begin{cases} p_I^c p_{Ic} - p_I^{\tilde{}} p_{I\mu} = \left(\frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{4}{\alpha'}(N+A) \\ p_D^c p_{Dc} - p_D^{\tilde{}} p_{D\mu} = \left(\frac{n}{R} - \frac{eR}{\alpha'}\right) + \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N}+\tilde{A}) \end{cases}$$

es decir,

$$m^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{eR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}(N+\tilde{N}+A+\tilde{A})$$

$$\tilde{N} - N = ne + A - \tilde{A} \qquad \text{(empatamiento de niveles)}$$

P.ej., para cuerda bosónica $\left(A^{x,b,c} = \tilde{A}^{\tilde{x},\tilde{b},\tilde{c}} = -\frac{24}{24} = -1\right)$,

estados sin masa son

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\, \alpha_{-1}^\alpha \tilde{\alpha}_{-1}^\beta |0,0;k^\alpha,0,0\rangle \longrightarrow \varphi,\ B_{\alpha\beta},\ h_{\alpha\beta}$$

$$\alpha_{-1}^c \tilde{\alpha}_{-1}^c |0,0;k^\alpha,0,0\rangle \longrightarrow \sigma \equiv h_{cc}$$

$$\varepsilon_\alpha\left(\alpha_{-1}^\alpha \tilde{\alpha}_{-1}^c \pm \alpha_{-1}^c \tilde{\alpha}_{-1}^\alpha\right)|0,0;k,0,0\rangle \longrightarrow A_\alpha^{(h)} \equiv h_{\alpha c},\ A_\alpha^{(B)} \equiv B_{\alpha c}$$

Campos de norma $U(1) \times U(1)$

con cargas asociadas n e

(Recordar que la cuerda se acopla a $B_{\mu\nu}$ de manera análoga al modo en que partícula se acopla a A_μ.

lunes, 04 de septiembre de 2006 06:20 p.m.

En el caso de cuerda sin enrollar la carga neta bajo $B_{\mu\nu}$ en cualquier dirección ν es cero, pero para cuerda enrollada tenemos acoplamiento

$$\int d\tau d\sigma\, B_{c\alpha}\, \partial_a(\epsilon^{ab} X^c \partial_b X^\alpha) \longrightarrow \int d\tau\, A^{(B)}_\alpha\, \partial_\tau X^\alpha (e\cdot 2\pi R),$$

es decir, cuerda porta carga neta $\propto e$ bajo $B_{c\alpha}$.)

Un hecho curioso es que existen 12 estados adicionales que se vuelven no masivos si ajustamos $R = \ell_c \equiv \sqrt{\alpha'}$:

$$\tilde{\varepsilon}_\alpha \tilde{\alpha}^\alpha_{-1} |0,0;k,\pm 1,\pm 1\rangle \quad , \quad \tilde{\alpha}^c_{-1} |0,0;k,\pm 1,\pm 1\rangle ,$$

$$\varepsilon_\alpha \alpha^\alpha_{-1} |0,0;k,\pm 1,\mp 1\rangle , \quad \alpha^c_{-1} |0,0;k,\pm 1,\mp 1\rangle ,$$

$$|0,0;k,\pm 2,0\rangle \quad , \quad |0,0;k,0,\pm 2\rangle .$$

En particular, tenemos aquí 4 nuevos bosones de norma (campos vectoriales no masivos), de modo que al ajustar $R \to \ell_c$, simetría se ensancha. Portan carga bajo $U(1)\times U(1)$ original, así que tenemos ahora un grupo de norma no abeliano.

lunes, 04 de septiembre de 2006 06:47 p.m.

En base a las EPOs de los operadores de vértice correspondientes, es posible deducir que el grupo en cuestión es $SU(2) \times SU(2)$ (6 generadores). Y a partir de las interacciones (codificadas, p.ej., en la acción efectiva) uno puede entender que al pasar de $R = l_c$ a $R = l_c + \epsilon$ esta simetría se rompe espontáneamente:

$$SU(2) \times SU(2) \xrightarrow[\langle \sigma \rangle \neq 0]{\text{Higgs}} U(1) \times U(1).$$

Regresaremos a esto más adelante...

Volviendo a análisis de espectro, consideremos ahora 2 límites:

1) $R \to \infty$ Descompactificación

$\Rightarrow$ n/R se vuelve continuo

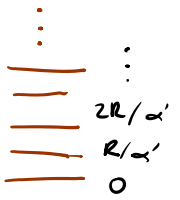
$e \neq 0 \Rightarrow m \sim \left| \frac{eR}{\alpha'} \right| \to \infty$

$\Rightarrow$ $p_I^c = p_D^c = p^c$ Recuperamos teoría no compacta ✓

martes, 05 de septiembre de 2006 08:27 a.m.

2) $R \to 0$ ¿Reducción Dimensional?

$$\Longrightarrow \begin{cases} n \neq 0 \Longrightarrow m \sim \left|\frac{n}{R}\right| \to \infty \\ \text{¡} \frac{eR}{\alpha'} \text{ se vuelve continuo!} \end{cases}$$



$$\Longrightarrow p_I^c = -p_D^c = p^c$$ ¡Dimensión compacta No desaparece!

¡Vemos entonces que el efecto de 1) y 2) es esencialmente el mismo!

De hecho, espectro

$$m^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{eR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}\left(N + \tilde{N} + A + \tilde{A}\right)$$

$$ne = \tilde{N} - N + \tilde{A} - A$$

es invariante bajo transformación

$$\left.\begin{array}{l} R \longleftrightarrow R_T \equiv \frac{\alpha'}{R} \\ (n,e) \longleftrightarrow (n_T, e_T) \equiv (e,n) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} p_I^c \leftrightarrow (p_I^c)_T \equiv p_I^c \\ p_D^c \leftrightarrow (p_D^c)_T \equiv -p_D^c \end{cases}$$

Dualidad T (de 'target')

Kikkawa, Yamasaki (1984)
Sakai, Senda (1985)
Nair, Shapere, Strominger, Wilczek (1986)

martes, 05 de septiembre de 2006 08:43 a.m.

La teoría con radio R_T es idéntica a la teoría con radio R, pero reescrita en términos de

$$X_T^c(z,\bar{z}) \equiv X^c(z) - \tilde{X}^c(\bar{z})$$

$\tilde{X}$ incorpora $p_D^c \to -p_D^c$, pero preserva $T(z)$, $\tilde{T}(\bar{z})$ y EPO $X^c(z_1,\bar{z}_1)X^c(z_2,\bar{z}_2)$,

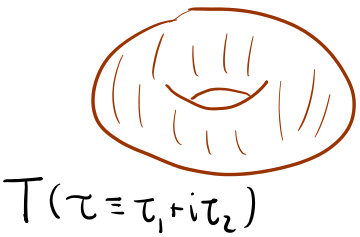
$\therefore$ espectro e interacciones son idénticas

En resumen, T = paridad en espacio, actuando sólo sobre modos derechos

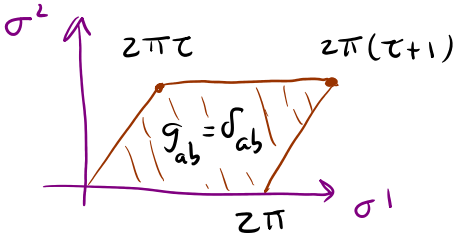
07/09/06

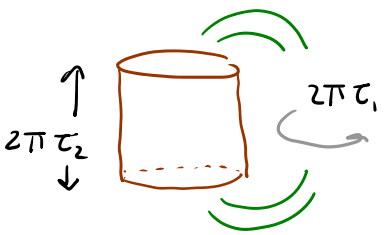
Se puede mostrar invariancia en cada orden de la expansión perturbativa.

Amplitud a un lazo es suma sobre espectro libre, así que debe ser invariante: en toro,



$T(\tau \equiv \tau_1 + i\tau_2)$





,

martes, 05 de septiembre de 2006 09:08 a.m.

la función de partición (contribución de X^c)

$$\mathcal{Z}^{X^c}(\tau) \equiv \int_{\mathcal{T}^2(\tau)} \mathcal{D}X^c(\sigma^1,\sigma^2)\; e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'}\int d^2\sigma\, \partial_a X^c \partial_a X^c}$$

se descompone en una suma sobre sectores con distintos números de enrollamiento:

$$X^c(\sigma^1+2\pi,\sigma^2) = X^c(\sigma^1,\sigma^2) + e\cdot 2\pi R \qquad \forall\, e,f\in\mathbb{Z}$$

$$X^c(\sigma^1+2\pi\tau_1,\sigma^2+2\pi\tau_2) = X^c(\sigma^1,\sigma^2) + f\cdot 2\pi R$$

↑ necesario para preservar invariancia modular

La integral gaussiana se puede calcular escribiendo

$$X^c(\sigma^1,\sigma^2) = X^c_{cl}(\sigma^1,\sigma^2) + \eta(\sigma^1,\sigma^2),$$

donde

$$X^c_{cl}(\sigma^1,\sigma^2) = e\cdot\sigma^1 R + (f-e\tau_1)\frac{\sigma^2 R}{\tau_2}$$

es solución de ec. de mov. con enrollamiento (e,f),

y $\eta(\sigma^1,\sigma^2)$ es una función periódica arbitraria.

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{X^c}(\tau) = \mathcal{Z}^{\eta}(\tau)\, 2\pi R \sum_{e,f=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\pi R^2}{\alpha'\tau_2}\underbrace{\left((f-e\tau_1)^2+e^2\tau_2^2\right)}_{|f-e\tau|^2}\right]$$

contribución usual de coordenada no compacta / $\int dx$

↑ de integral sobre modo cero de X^c

lunes, 11 de septiembre de 2006 06:07 p.m.

Notar que la suma es invariante modular: no cambia bajo $\tau \to \tau' = \tau + 1$, $(e, f) \to (e', f') = (e, f-e)$

ni bajo $\tau \to \tau' = -1/\tau$ $\left(\Rightarrow \tau_2' = \frac{\tau_2}{|\tau|^2}\right)$,

$(e, f) \to (e', f') = (f, -e)$

Para mostrar que también es invariante bajo dualidad T, necesitamos "fórmula de resumación de Poisson" [ver GSW vol. 2, p. 71]:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi \frac{(m-b)^2}{a}\right] = \sqrt{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi a n^2 + 2\pi i b n\right].$$

Tomando $m = f$, $a = \frac{\alpha' \tau_2}{R^2}$, $b = e\tau$, podemos reescribir

$$Z^X(\tau) = Z^n(\tau)\, 2\pi \sqrt{\alpha' \tau_2} \sum_{n,e=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi \tau_2 \left(\frac{\alpha' n^2}{R^2} + \frac{e^2 R^2}{\alpha'}\right) + 2\pi i \tau_1 n e\right],$$

$$q \equiv e^{2\pi i \tau} \longrightarrow q^{\alpha'(p_I^c)^2/4}\, \bar{q}^{\alpha'(p_D^c)^2/4}$$

donde invariancia bajo $p_I^c \to p_I^c$, $p_D^c \to -p_D^c$ es manifiesta.

✓

lunes, 11 de septiembre de 2006 06:34 p.m.

Esta última expresión es de hecho la que resulta directamente de definición Hamiltoniana

$$Z^{X^c}(\tau) = Tr_{\mathcal{H}^c}\left[\exp\left(-2\pi\tau_2 H + 2\pi i \tau_1 P\right)\right] = (q\bar{q})^{-c/24} Tr\left[q^{L_0+A}\,\bar{q}^{\tilde{L}_0+\tilde{A}}\right]$$

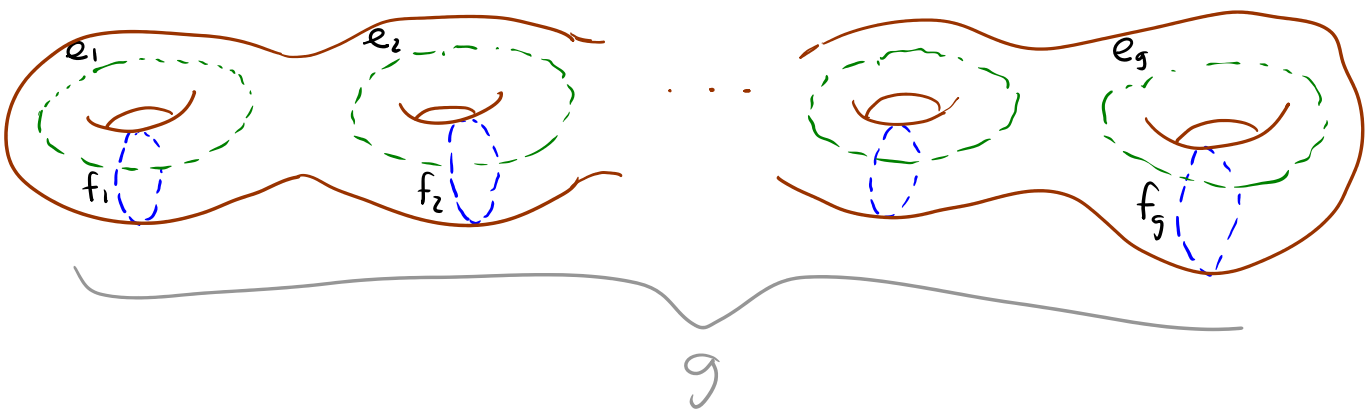
(donde vemos también explícitamente invariancia bajo $\alpha_n^c \to \alpha_n^c$, $\tilde{\alpha}_n^c \to -\tilde{\alpha}_n^c$).

¿Qué sucede a orden más alto en la expansión perturbativa?

La superficie de género $g>1$ (es decir, con g manijas) tiene módulos complejos τ_M, $M=1,\dots,3g-3$

(Riemann-Roch: $k - m = 3\chi \Rightarrow 6(g-1)$ módulos reales) ($\chi = 2-2g$)

Para definir $X^c(\sigma_1,\sigma_2)$ sobre ella, debemos especificar $2g$ números de enrollamiento (e_i, f_i) $i=1,\dots,g$



lunes, 11 de septiembre de 2006 07:14 p.m.

Se puede mostrar entonces que la función de partición toma la forma

$$\mathcal{Z}_g^{X^c}(R;\tau_M) \propto R \sum_{e_i,f_i} \exp\left[-\frac{\pi R^2}{\alpha'}(f_i - e_j\bar{\Omega}_{ji})(\Omega_2^{-1})_{ik}(f_k - e_l\Omega_{lk})\right],$$

donde $\Omega_{ij}(\tau_M) \equiv (\Omega_1)_{ij} + i(\Omega_2)_{ij}$ es la "matriz de periodos"

$\Omega_{g\times g}$, simétrica

($\Omega(\tau) = \tau$ en el caso $g=1$) [ver Givcon, Porrati, Rabinovici, hep-th/9401139]

Después de usar la fórmula de Poisson para reemplazar $f_i \to n_i$ se tiene entonces

$$\mathcal{Z}_g^{X^c}(R;\tau_M) \propto R^{1-g} \sum_{n_i,e_i} \exp\left[i\frac{\pi\alpha'}{2}\left(P^c_{I_i}\Omega_{ij}P^c_{I_j} - P^c_{D_i}\bar{\Omega}_{ij}P^c_{D_j}\right)\right],$$

donde $P^c_{\substack{I\\D}\,i} \equiv \frac{n_i}{R} \pm \frac{e_i R}{\alpha'}$ son los momentos $\begin{matrix}\text{izquierdos}\\ \text{derechos}\end{matrix}$ de las g cuerdas que circulan alrededor de los lazos.

Bajo dualidad T encontramos entonces

$$\mathcal{Z}_g^{X^c_T}(R_T;\tau_M) = \left(\frac{R}{l_c}\right)^{\underbrace{2g-2}_{-\chi_g}} \mathcal{Z}_g^{X^c}(R;\tau_M)$$

lunes, 11 de septiembre de 2006 08:38 p.m.

Concluimos entonces que amplitud total

$$\mathcal{Z}[\Phi, R] = \sum_{g=0}^{\infty} e^{-\Phi \chi_g} \int_M d^{3g-3}\tau \; \tilde{f}_g(\tau) \, \mathcal{Z}_g^{X^c}(R;\tau)$$

es invariante bajo dualidad T siempre y cuando

$$\Phi_T = \Phi - \ln(R/\ell_c),$$

es decir,

$$g_{c_T} = g_c\left(\frac{\ell_c}{R}\right)$$

Podemos verificar esta fórmula notando que las amplitudes de dispersión de gravitones con $e=n=0$ (que son estados invariantes bajo T) pueden leerse a partir de acción efectiva

$$S = \frac{1}{2K^2}\int dx^c d^{D-1}x^\alpha \cdots \overset{n=0}{=\!=} \underbrace{\frac{2\pi R}{2K^2}}_{\equiv \frac{1}{2K_{D-1}^2} = \frac{2\pi R_T}{2K_T^2}} \int d^{D-1}x \cdots$$

(porque amplitud es T-invariante)

$$\overset{K^2 \propto g_c^2}{\Longrightarrow} \quad \frac{g_c^2}{R} = \frac{g_{cT}^2}{R_T} \quad \Longrightarrow \quad g_{cT} = g_c\left(\frac{\ell_c}{R}\right) \checkmark$$

lunes, 11 de septiembre de 2006 08:55 p.m.

Hemos visto entonces que dualidad T es una simetría de expansión perturbativa de la teoría de cuerdas bosónica, que relaciona entre sí 2 estados (fondos) a primera vista distintos.

Recordar ahora que si ajustamos el radio de x^c a su valor autodual $\boxed{R = \ell_c = R_T}$, la simetría de norma se ensancha de $U(1)\times U(1)$ a $SU(2)\times SU(2)$, y que cerca de este punto, cambiar R significa encender $\langle\sigma\rangle \neq 0$, donde $\sigma \equiv h_{cc}$ porta carga bajo 4 de las 6 transformaciones en $SU(2)\times SU(2)$.

Escogiendo de manera apropiada los 4 parámetros correspondientes, podemos de hecho rotar $\langle\sigma\rangle \longleftrightarrow -\langle\sigma\rangle$, que corresponde a

$$R = \ell_c\left(1+\frac{\langle\sigma\rangle}{2}\right) \longleftrightarrow R_T = \frac{\ell_c^2}{R} \simeq \ell_c\left(1-\frac{\langle\sigma\rangle}{2}\right).$$

$\Longrightarrow$ ¡ T es una simetría de norma !

Por consistencia de la teoría, debe ∴ preservarse incluso a nivel no perturbativo.

12/09/06

lunes, 11 de septiembre de 2006 11:38 p.m.

Con solo una dimensión compacta, hemos encontrado el grupo de dualidad discreto $\mathbb{Z}_2$.

Encontraremos un grupo mucho mayor al compactificar sobre toro d-dimensional $T^d \equiv \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{d}$.

En este caso, conviene usar coords.

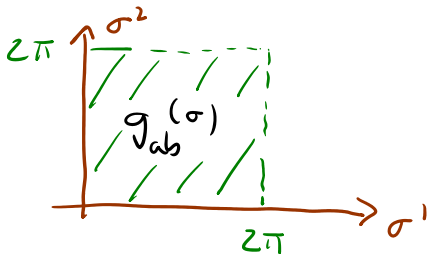
$$x^c \simeq x^c + 2\pi \ell_c \,, \quad c = 1, \dots, d$$

$$\longleftrightarrow \quad X^c(\sigma^1 + 2\pi, \sigma^2) = X^c(\sigma^1, \sigma^2) + e^c 2\pi \ell_c \,,$$

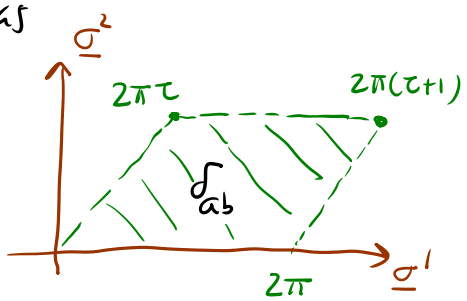
(e^c: números de enrollamiento)

codificando el tamaño y la forma del toro en métrica constante $G_{cc'}$. P.ej., toro recto: $G_{cc'} = \frac{R_c^2}{\alpha'} \delta_{cc'}$.

(Recordar descripciones alternativas



vs.



para T^2. Aquí $\sigma^a \to x^c$.)

Descripción en métrica plana se puede obtener en coords.

$$x^{\underline{c}} \equiv e_c^{\ \underline{c}}\, x^c \,, \quad \text{con} \quad G_{cc'} \equiv e_c^{\ \underline{c}}\, e_{c'}^{\ \underline{c}}$$

↑ muchas-pata / vielbein / d-ada.

martes, 12 de septiembre de 2006 08:51 a.m.

Sobre $d \geq 2$ dimensiones compactas podemos encender, además de métrica, campo antisimétrico constante $B_{cc'}$. Nuestra compactificación estará caracterizada entonces por

$$G_{cc'} + B_{cc'} \longleftrightarrow \frac{d(d+1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} = d^2 \text{ parámetros.}$$

Notar que $B_{cc'}$ constante es "pura norma" ($H_{(3)} = dB_{(2)} = 0$), y el término correspondiente en la acción, $\int d\sigma dt\, B_{cc'} \underbrace{\partial_\sigma X^c \partial_t X^{c'}}_{\partial_\sigma (X^c \partial_t X^{c'})}$, es una derivada total.

Pero, debido a que dimensiones involucradas son compactas, su presencia sí cambia la física (de manera análoga a lazo de Wilson $\int dt\, A_c \partial_t X^c$, que para su eliminación requiere una transformación de norma "grande": $A_c \to A_c - \partial_c \lambda$ con $\lambda(x_c)$ No periódica).

El término con $B_{cc'}$ no afecta ec. de mov. y ∴ expansión en modos, pero sí cambia definición del momento conjugado a X^c, y modifica ∴ relación entre el

martes, 12 de septiembre de 2006 09:22 a.m.

coeficiente de τ en expansión, $\alpha_0^c + \tilde{\alpha}_0^c$, y el generador de traslaciones, $p_c = \frac{n_c}{l_c}$ ← números de Kaluza-Klein [ver Polchinski, sec. 8.4].

Se encuentra que el espectro está dado por

$$m^2 = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{p_{I_c} G^{cc'} p_{I_{c'}}}_{\equiv p_I^2 = p_{I\underline{c}} p_{I\underline{c}}} + p_{D_c} G^{cc'} p_{D_{c'}} \Big) + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} + A + \tilde{A}),$$

$$(p_{I\underline{c}} \equiv e^c_{\underline{c}} p_{Ic})$$

↑ muchas-pata inversa

con condición de empatamiento

$$\frac{\alpha'}{4}(p_I^2 - p_D^2) = \tilde{N} - N + \tilde{A} - A,$$

donde

$$p_{I_D c} \equiv \frac{1}{l_c}\left[n_c - B_{cc'} e^{c'} \pm G_{cc'} e^{c'} \right]$$

índices naturalmente abajo — índices naturalmente arriba

Notar que efecto de $B_{cc'}$ solo es visible en sector con $e^c \neq 0$ ($\therefore$ $B_{\alpha\beta}$ cte. es invisible ✓).

martes, 12 de septiembre de 2006 09:53 a.m.

Dados $G_{cc'}$ y $B_{cc'}$, los autovalores de P_{I_c} y P_{D_c},

$K_r \equiv \frac{l_c}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} k_{I_c} \\ k_{D_c} \end{pmatrix}$ $\forall\ n_c, e^c \in \mathbb{Z}$ forman una red $\mathcal{R}$

en espacio de momentos 2d-dimensional.

Cada punto en esta red representa un posible estado (para modos cero en las d dimensiones compactas).

Los operadores de vértice correspondientes,

$$V_{(n_c,e^c)}(z,\bar{z}) = :\exp\left[ik_{I_c}X^c(z) + ik_{D_c}\tilde{X}^c(\bar{z})\right]:,$$

tienen EPO

$$V(z,\bar{z})\,V'(0,0) \sim z^{\frac{\alpha'}{2}k_I\cdot k_I'} \bar{z}^{-\frac{\alpha'}{2}k_D\cdot k_D'}\,V''(0,0),$$

que solo es univaluada (permitiendo ∴ que interacciones estén bien definidas) si exigimos que

$$\frac{\alpha'}{2}k_I\cdot k_I' - \frac{\alpha'}{2}k_D\cdot k_D' \equiv K\circ K' \in \mathbb{Z} \quad \forall\ K,K'\in\mathcal{R}$$

Conviene ∴ considerar a nuestra red $\mathcal{R}$ como subespacio de $\mathbb{R}^{d,d}$ ← métrica $\mathrm{diag}(\underbrace{+1,+1,\cdots}_{d},\underbrace{-1,-1,\cdots}_{d})$

Para que teoría sea invariante modular, es necesario exigir que $\mathcal{R}$ sea una red par y autodual, es decir,

$$K \circ K' \equiv K_I \cdot K_I' - K_D \cdot K_D' \in 2\mathbb{Z} \quad \forall\, K, K' \in \mathcal{R}$$

y

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^* \equiv \{ K' \in \mathbb{R}^{d,d} \mid K \circ K' \ \forall\ K \in \mathcal{R} \}$$

↑ red dual a $\mathcal{R}$

Esta descripción de posibles $G_{cc'}, B_{cc'}$ se conoce con el nombre de compactificación de Narain.

Aunque no es obvio, resulta que todas las redes pares autoduales en $\mathbb{R}^{d,d}$ están conectadas entre sí a través de transformaciones $O(d,d,\mathbb{R})$: dada una compactificación de Narain $\mathcal{R}_0$, podemos obtener todas las demás rotándola de todas las maneras posibles. Las redes resultantes describen en general teorías/compactificaciones físicamente distintas. Pero no lo son si rotación en cuestión deja $K_I \cdot K_I'$ y $K_D \cdot K_D'$ invariantes,

porque en ese caso EPOs y espectro No cambian.
El espacio de redes que describen compactificaciones que en un principio parecerían físicamente distintas es entonces

$$\frac{O(d,d,\mathbb{R})}{O(d,\mathbb{R})\times O(d,\mathbb{R})}$$, que según podemos verificar, tiene el número correcto de parámetros:

$$\frac{2d(2d-1)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} = d^2. \checkmark$$

Para describir el efecto que una rotación $O(d,d,\mathbb{R})$ tiene sobre los campos de fondo $G_{cc'}$ y $B_{cc'}$, conviene cambiar de base para convertir $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$,
y definir entonces

$$O(d,d,\mathbb{R}) \equiv \left\{ M = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right) \;\middle|\; M^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$d\times d$ con entradas reales

$\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$ en nueva base

martes, 12 de septiembre de 2006 10:33 a.m.

En esta nueva base, la red que corresponde al fondo $G_{cc'} = \delta_{cc'}$, $B_{cc'} = 0$ (es decir, un toro recto con radios propios autoduales, y sin tensor antisimétrico) es simplemente

$$\mathcal{R}_0 \equiv \left\{ \begin{pmatrix} e^c \\ n_{c'} \end{pmatrix} \;\middle|\; e^c, n_{c'} \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Y, empaquetando los campos de fondo (en el caso general) en una sola matriz constante

$$E_{cc'} \equiv G_{cc'} + B_{cc'} ,$$

el efecto de una rotación

$$M : \mathcal{R} \longmapsto \mathcal{R}^{(M)} \equiv M\mathcal{R} \quad , \quad M \in O(d,d,\mathbb{R}),$$

es transformar

$$M : E \longmapsto E^{(M)} \equiv (aE+b)(cE+d)^{-1}$$

(de donde uno puede deducir $G^{(M)}$ y $B^{(M)}$).

Como habíamos visto antes, en general

$$M \in \frac{O(d,d,\mathbb{R})}{O(d,\mathbb{R}) \times O(d,\mathbb{R})}$$ conecta compactificaciones

jueves, 14 de septiembre de 2006 12:40 a.m.

R y $R^{(M)}$ que dan lugar a espectros distintos, y son ∴ físicamente No equivalentes.

Pero notemos ahora que el subgrupo de rotaciones con componentes enteras,

$$O(d,d,\mathbb{Z}) = \left\{ Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; Z^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

deja invariante a la compactificación de referencia R_0 (aunque permuta los distintos puntos entre sí) lo cual implica que MR_0 y $(MZ)R_0$ son físicamente equivalentes.

Este subgrupo discreto es entonces el grupo de dualidad T (simetría no trivial) para d dimensiones compactas, y tenemos

$$E_T = (aE+b)(cE+d)^{-1}$$

En general, ¡estas transformaciones mezclan a la métrica G con el tensor antisimétrico B!

jueves, 14 de septiembre de 2006 02:10 a.m.

El grupo $O(d,d,\mathbb{Z})$ es generado por:

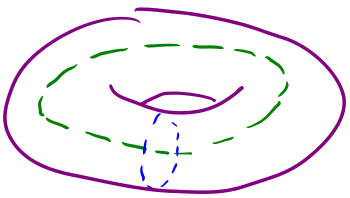
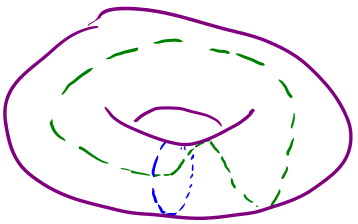
1) Difeos grandes de T^d

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^T)^{-1} \end{pmatrix} \qquad a \in SL(d,\mathbb{Z})$$

$$\Longrightarrow \quad G \to a G a^T, \quad B \to a B a^T,$$

como corresponde a difeos $\vec{x} \to \vec{x}' = a^{-1}\vec{x}$,

en donde la matriz a debe tener entradas enteras para preservar la periodicidad.

(P.ej., en $d=2$  $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 

y la transformación análoga para el otro ciclo generan el grupo $SL(2,\mathbb{Z})$.)

2) Corrimiento Entero de B

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & b \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \qquad b = -b^T$$

$$\Longrightarrow \quad G \to G, \quad B \to B + b$$

Este tipo de transformaciones son claramente simetrías, puesto que solo permutan los distintos

$$k_{I_D\,c} = \frac{1}{l_c}\left[n_c - B_{cc'}e^{c'} \pm G_{cc'}e^{c'}\right] \quad \text{entre sí.}$$

A nivel de la integral funcional, el punto es que la acción euclideana cambia por un múltiplo de $2\pi i$.

3) Generalización de $R \leftrightarrow \alpha'/R$ sobre cada S^1

$$Z_i = \begin{pmatrix} \mathbb{1}-U_i & U_i \\ U_i & \mathbb{1}-U_i \end{pmatrix}, \quad (U_i)_{cc'} \equiv \delta_{ic}\delta_{ic'}$$

si $G_{cc'} = \frac{R_c^2}{\alpha'}\delta_{cc'}$ y $B_{cc'} = 0$, entonces

Z_i solo cambia $G_{ii} \longrightarrow 1/G_{ii}$

(dejando invariantes a $B_{cc'}$ y las componentes restantes de $G_{cc'}$), lo cual corresponde precisamente a $R_i \longrightarrow \alpha'/R_i$.

En el caso general, Z_i mezcla G con B.

(Una simetría discreta adicional, que no forma parte de $O(d,d,\mathbb{Z})$, es la paridad en la hoja de mundo, Ω, que intercambia $k_{I_c} \leftrightarrow k_{D_c}$, lo cual equivale a modificar el fondo $(G,B) \leftrightarrow (G,-B)$.)

Notar que en esta descripción, las relaciones de conmutación de los modos son

$$[X^c, P_{c'}] = \delta^c_{c'},$$

$$[\alpha^c_m, \alpha^{c'}_n] = m G^{cc'} \delta_{m,-n} = [\tilde{\alpha}^c_m, \tilde{\alpha}^{c'}_n],$$

así que bajo dualidad T los estados de la cuerda $\alpha^c_{-n} \cdots \tilde{\alpha}^{c'}_{-n'} \cdots |n_c, e^c\rangle$ cambian no solo porque $\begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} e_\pi \\ n_\pi \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix}$, sino además porque los osciladores transforman de manera no trivial:

$$\alpha_n(E) \to (d - CE^T)^{-1} \alpha_n(E_\pi), \quad \tilde{\alpha}_n(E) \to (d + cE)^{-1} \tilde{\alpha}_n(E_\pi).$$

jueves, 14 de septiembre de 2006 09:12 a.m.

Se puede mostrar que $O(d,d,\mathbb{Z})$ es una simetría de la expansión perturbativa, siempre y cuando el dilatón transforme de acuerdo con

$$\Phi \longrightarrow \Phi_\pi = \Phi - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\det G}{\det G_\pi}\right),$$

es decir,

$$g_{c_\pi} = g_c \left(\frac{\det G_\pi}{\det G}\right)^{1/4}$$

Notar que elemento de volumen $\sqrt{\det G_\pi}$ solo cambia en las rotaciones que involucren transformaciones del tipo 3).

lunes, 25 de septiembre de 2006 05:05 p.m.

Es posible generalizar dualidad T a fondos no triviales $G_{\mu\nu}(x)$, $B_{\mu\nu}(x)$, $\Phi(x)$ independientes de una coordenada x^c (pero, en general, dependientes de coordenadas restantes $x^{\alpha \neq c}$). [Ver p.ej. Giveon, Porrati, Rabinovici]

La transformación en este caso está dada por

$$G^T_{cc} = \frac{1}{G_{cc}}, \quad G^T_{c\alpha} = \frac{B_{c\alpha}}{G_{cc}}, \quad G^T_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - \frac{G_{\alpha c}G_{\beta c} + B_{\alpha c}B_{\beta c}}{G_{cc}},$$

$$B^T_{cc} = 0, \quad B^T_{c\alpha} = \frac{G_{c\alpha}}{G_{cc}}, \quad B^T_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - \frac{G_{\alpha c}B_{c\beta} + B_{\alpha c}G_{c\beta}}{G_{cc}},$$

$$\Phi^T = \Phi - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\det G}{\det G^T}\right)$$

Reglas de Buscher

lunes, 25 de septiembre de 2006 05:13 p.m.

¿Cuál es el efecto de T sobre fermiones en supercuerdas?

Consideremos IIA. Sabemos que

$$T_c: \quad X^c(z) \to +X^c(z), \quad \tilde{X}^c(\bar{z}) \to -\tilde{X}^c(\bar{z});$$

por invariancia superconforme debemos tener entonces

$$T_c: \quad \psi^c(z) \to +\psi^c(z), \quad \tilde{\psi}^c(\bar{z}) \to -\tilde{\psi}^c(\bar{z})$$

Esto implica en particular que, en sector R,

$$\tilde{\psi}_0^c \to -\tilde{\psi}_0^c \implies \tilde{\Gamma} \to -\tilde{\Gamma},$$

es decir, $(-1)^{\tilde{F}} \longrightarrow -(-1)^{\tilde{F}}$.

Dado que esto invierte la proyección GSO para modos derechos, concluimos que ¡teoría T-dual es IIB!

En efecto,

IIA en círculo con radio R_A y acoplamiento g_{c_A} $\underline{\underline{T}}$ IIB en círculo con radio $R_B = \frac{l_c^2}{R_A}$ y $g_{c_B} = g_{c_A}\left(\frac{l_c}{R_A}\right)$

lunes, 25 de septiembre de 2006 05:33 p.m.

Notar en particular la relación entre los campos sin masa de ambas teorías:

- En sector NS-NS, campos de IIA y IIB coinciden:
  $\varphi, B_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}$
- En sector R-R, IIA tiene $C_{(1)}, C_{(3)}$ y IIB tiene $C_{(0)}, C_{(2)}, C_{(4)}^{+}$. Sabemos que

$$T_c : |s\rangle \to |s\rangle, \quad |\tilde{s}\rangle \to (\Pi^c)_{\tilde{s}\tilde{s}'} |\tilde{s}'\rangle,$$

donde $\Pi_c \equiv \Gamma^c \Gamma$ es la matriz de paridad en dirección de x^c (anticonmuta con Γ^c, conmuta con Γ^α). P.ej., si $c=9$, tenemos

$$\Gamma^9 \propto b_4^\dagger - b_4 \implies \Pi^9 |\tilde{s}_0, \cdots, \tilde{s}_3, \pm\tfrac{1}{2}\rangle \propto |\tilde{s}_0, \cdots, \tilde{s}_3, \mp\tfrac{1}{2}\rangle$$

Tenemos por tanto

$$\left(C\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}\right)_{s\tilde{s}} |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R} \xrightarrow{T_c} \pm \left(C\Gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}\Gamma^c\right) |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R}$$

$(\Gamma^c)^2 = +1$

$\Rightarrow$ si Γ^c estaba presente se cancela; si no, se agrega

Vemos entonces que

$$\begin{array}{ccc} \text{IIA} & \overset{T_c}{} & \text{IIB} \\ C_\alpha & \longleftrightarrow & C_{\alpha c} \\ C_c & \longleftrightarrow & C \\ C_{\alpha\beta\gamma} & \longleftrightarrow & C_{\alpha\beta\gamma c} \\ C_{\alpha\beta c} & \longleftrightarrow & C_{\alpha\beta} \end{array}$$

De manera similar, las supercargas

$$Q, \tilde{Q} \xrightarrow{T_c} Q, T_c\tilde{Q} .$$

Notar además que, en el caso de varias dimensiones compactas,

$$T_{c_1 \cdots c_d} : \text{IIA} \longrightarrow \begin{cases} \text{IIA} & \text{si } d \in 2\mathbb{Z} \\ \text{IIB} & \text{si } d \in 2\mathbb{Z}+1 \end{cases}$$

Examinemos ahora el caso de la cuerda heterótica

Conviene usar para modos izquierdos descripción puramente bosónica,

$$\lambda^A(z) \quad A=1,\dots,32 \longrightarrow \overset{q+h}{X}(z) \quad h=1,\dots,16$$

Tras compactificar en T^d imponemos condición de periodicidad sobre x^c, $c=10-d,\dots,9$ y ∴ obtenemos momentos

$$K^r \equiv \frac{l_c}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \overset{q+h}{k_I} \\ k_I^c \\ k_D^c \end{pmatrix} \in \Gamma \subset \mathbb{R}^{16+d,d},$$

con Γ red par autodual con signatura $(16+d,d)$

$$\left(K\circ K \equiv \frac{l_c^2}{2}\left(k_I^{q+h}\delta_{hh'}k_I^{q+h'} + k_I^c G_{cc'}k_I^{c'} - k_D^c G_{cc'}k_D^{c'} \right). \right)$$

Consideremos primero teoría sin compactificar ($d=0$). En este caso Γ es una red euclídea (signatura $(16,0)$). Se sabe que, módulo rotaciones $O(16)$, ∃ exactamente 2 redes pares autoduales en $\mathbb{R}^{16}$:

lunes, 25 de septiembre de 2006 10:20 p.m.

$$\Gamma_{16} \equiv \left\{ (n_1, \dots, n_{16}), (n_1 + \tfrac{1}{2}, \dots, n_{16} + \tfrac{1}{2}) \;\middle|\; n_r \in \mathbb{Z}, \sum_{r=1}^{16} n_r \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

y

$\Gamma_8 \times \Gamma_8$, donde

$$\Gamma_8 \equiv \left\{ (n_1, \dots, n_8), (n_1 + \tfrac{1}{2}, \dots, n_8 + \tfrac{1}{2}) \;\middle|\; n_r \in \mathbb{Z}, \sum_{r=1}^{8} n_r \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

Recordando que

$$m^2 = \underbrace{k_{I_{q+h}} k_{I_{q+h}}}_{\frac{2}{\alpha'} K_h K_h \equiv \frac{2}{\alpha'} q_h q_h \equiv \frac{2}{\alpha'} q^2} + \frac{4}{\alpha'}(N-1) = \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N} - \tilde{\Delta}),$$

← como en supercuerda

observamos que estados sin masa tienen

$* q^2 = 0, N = 1:$ $\varepsilon_\mu \alpha_{-1}^\mu \tilde{\psi}_{-1/2}^\nu |0, 0; k_\mu, 0^{16}\rangle \longleftrightarrow \varphi, B_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}$

q

$$\varepsilon_\mu^h \alpha_{-1}^{q+h} \tilde{\psi}_{-1/2}^\mu |0, 0; k_\mu, 0^{16}\rangle \longleftrightarrow A_\mu^h$$

bosones de norma en 16 direcciones t_h que conmutan ("subálgebra de Cartan")

Operadores de vértice $:\partial X^{q+h}(z)$

lunes, 25 de septiembre de 2006 10:49 p.m.

ó

* $q^2=2$, $N=0$: $\varepsilon^{(q)}_{\mu}\tilde{\psi}^{\mu}_{-1/2}|0,0,k_\mu;q\rangle \longleftrightarrow A^q_\mu$

bosones de norma en 480 direcciones de t_q con carga q_h bajo t_h:

Operadores de Vértice $e^{ik_{I_h}X^h(z)}$;

$i\partial X^{q+h}(z):e^{ik_{I_h}X^h(0)}: \sim \frac{\sum' k_{I\,q+h}}{2}\frac{1}{z}:e^{ik_{I_h}X^h(0)}:$

$\Longrightarrow [t_h,t_q]=q_h t_q$

• R_{16}: $q=(\pm1,\pm1,0^{14})$ ó permutaciones

$4\binom{16}{2}=\frac{4\cdot16\cdot15}{2}=480$

480 "Raíces" de $so(32)$ $\Longrightarrow$ Grupo de Norma es $SO(32)$

• $R_8\times R_8$: $q=(\pm1,\pm1,0^6,0^8)$ ó $(0^8,\pm1,\pm1,0^6)$

ó permutaciones $4\binom{8}{2}=\frac{4\cdot8\cdot7}{2}=112$ 112

ó $q=(\pm\frac{1}{2}^8,0^8)$ ó $(0^8,\pm\frac{1}{2}^8)$ ó permutaciones

c/número par de $-\frac{1}{2}$'s $1+\binom{8}{2}+\binom{8}{4}+\binom{8}{6}+1=128$

240+240 "Raíces" de $E_8\times E_8$ $\Longrightarrow$ Grupo de Norma $E_8\times E_8$

Recuperamos entonces las 2 teorías de cuerdas conocidas.

Para $d \geq 1$, se sabe que existe una sola red par autodual, es decir, todas las redes con estas características están conectadas entre sí por rotaciones $O(16+d, d, \mathbb{R})$.

Por analogía con cuerda bosónica, el espacio de compactificaciones que a primera vista parecerían dar teorías distintas es

$$\frac{O(16+d, d, \mathbb{R})}{O(16+d, \mathbb{R}) \times O(d, \mathbb{R})}$$, el cual tiene dimensión

$$\frac{(16+2d)(15+2d)}{2} - \frac{(16+d)(15+d)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} = d^2 + 16d$$

En términos de los campos que definen la compactificación,

$$G_{cc'}, B_{cc'} \Longrightarrow \frac{d(d+1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} = d^2 \text{ parámetros}$$

$$+ \quad A_c^h \quad h = 1, \ldots, 16 \Longrightarrow 16d \text{ parámetros}$$

constante ($\therefore$ pura norma, como B)

Total $d^2 + 16d$ ✓

Para los campos de norma vectoriales ($\leftrightarrow$ líneas de Wilson), tenemos 16 parámetros porque este es el rango del grupo ($SO(32)$ ó $E_8 \times E_8$).

El punto es que $\mathcal{L}_{SYM} \sim Tr\left(F^2\right)$ incluye potencial $\propto Tr\left([A_c, A_{c'}]^2\right)$, de modo que para tener solución estática a las ecs. de mov. debemos tomar A_c's constantes y simultáneamente diagonalizables. Es decir, escribiendo

$$A_c = A_c^h t_h + A_c^q t_q ,$$

debemos poner $A_c^q = 0$ y elegir valores de A_c^h.

En presencia de $G_{cc'}$, $B_{cc'}$, A_c^h (y en coords. tales que $x^c \simeq x^c + 2\pi l_c$), cuantización canónica da

$$k_{\frac{I}{D}c} = \frac{n_c}{l_c} + \left(\pm G_{cc'} + B_{cc'}\right)\frac{e^{c'}}{l_c} - A_c^h q^h - A_c^h A_{c'}^h \frac{e^{c'} l_c}{2} ,$$

$$k_I^{q+h} = \frac{\sqrt{2}}{l_c}\left(q^h + A_c^h e^c l_c\right), \quad c/\ q^h \in \begin{cases} R_{16} \text{ en HO} \\ R_8 \times R_8 \text{ en HE} \end{cases}$$

[ver Narain, Sarmadi, Witten, NPB 279 (1987) 369]

martes, 26 de septiembre de 2006 09:16 a.m.

Como en el caso de la cuerda bosónica, las transformaciones discretas que dejan al espectro

$$m^2 = k_{I_c} G^{cc'} k_{I_{c'}} + k_{I_{q+h}} \delta^{hh'} k_{I_{q+h'}} + \frac{4}{\alpha'}(N-1)$$

invariante forman grupo de dualidad T $O(16+d, d, \mathbb{Z})$, y es generado por difeos grandes, corrimiento entero de $B_{cc'}$ ó A^h_c, y transformaciones $R \leftrightarrow 1/R$ sobre cada eje.

Un punto interesante es que, dado que (módulo $O(16+d, d, \mathbb{R})$) existe una sola red par autodual $\Gamma \subset \mathbb{R}^{16+d,d}$, debemos obtener el mismo conjunto de redes (y ∴ teorías) al compactificar HO ó HE...

Es decir, ¡ $HO \overset{T}{\longleftrightarrow} HE$!

Para ver esto un poco más de cerca, consideremos por simplicidad el caso $d=1$, donde, en presencia de $A^h_{c=9}$, tenemos

$$k_{I,D}^{q} = \frac{n}{R} \pm \frac{eR}{l_c^2} - q_h A_q^h - \frac{eR}{2} A_c^h A_c^h$$

$$k_I^{q+h} = \frac{\sqrt{2}}{l_c}\left(q_h + eR A_q^h\right) \qquad q_h \in \begin{cases} R_{16} & \text{en HO} \\ R_8 \times R_8 & \text{en HE} \end{cases},$$

donde ahora hemos usado coord $x^9 \simeq x^9 + 2\pi R \longleftrightarrow G_{99} = 1$.

(se puede ver que $K \cdot K = \frac{l_c^2}{2}(k_I^2 - k_D^2) = 2n + q^2 \in 2\mathbb{Z}$ ✓)

- Si elegimos ahora HO con radio R y línea de Wilson

$$A_q^h = \begin{cases} \frac{1}{2R} & h = 1, \dots, 8 \\ 0 & h = 9, \dots, 16 \end{cases} \qquad \left(\Longrightarrow A_q^h A_q^h = 8\left(\tfrac{1}{2R}\right)^2 = \frac{2}{R^2}\right),$$

encontramos que

$$k_{I,D}^{q} = \frac{n - \frac{1}{2}(q_1 + \dots + q_8) - e}{R} \pm \frac{eR}{l_c^2}$$

$$k_I^{q+h} = \frac{\sqrt{2}}{l_c} \times \begin{cases} q_h + \frac{e}{2} & \text{si } h = 1, \dots, 8 \\ q_h & \text{si } h = 9, \dots, 16 \end{cases} \qquad \forall\, q \in R_{16}$$

A partir de $m^2 = (k_I^9)^2 + k_I^{9+h} k_I^{9+h} + \frac{4}{\alpha'}(N-1)$

vemos que para $n = e = N = 0$ solo los estados

con $q_1 + q_2 + \dots + q_8 = 0$ $(y\ q^2 = 2)$ permanecen

sin masa, es decir,

martes, 26 de septiembre de 2006 09:52 a.m.

$q = (\underbrace{\pm 1, \mp 1, 0^6}, 0^8)$ (con signos correlacionados)

+ permutaciones: $2\binom{8}{2} = 56$

ó

$q = (0^8, \underbrace{\pm 1, \pm 1, 0^6})$ (cualquier combinación de signos)

+ permutaciones: $4\binom{8}{2} = 112$

El grupo de norma no roto por línea de Wilson resulta ser $G = U(8) \times SO(16)$.

- Si elegimos en cambio HE con radio R' y

$$A'^{\mu}_{q} = \begin{cases} \frac{1}{R'} & \mu = 1, q \\ 0 & \mu \neq 1, q \end{cases} \quad \left(\Rightarrow A'^{\mu}_{q} A'^{\mu}_{q} = \frac{2}{R'^2} \right)$$

encontramos que

$$k_{I_D}^{\prime q} = \frac{n' - q_1' - q_q' - e'}{R'} \pm \frac{e' R'}{l_c^2}$$

$$k_I^{\prime q+\mu} = \frac{\sqrt{2}}{l_c} \times \begin{cases} q_\mu' + e' & \text{si } \mu = 1, q \\ q_\mu' & \text{si } \mu \neq 1, q \end{cases} \quad \forall q' \in \Lambda_8 \times \Lambda_8$$

a partir de lo cual se puede deducir que el grupo de norma es $G' = U(8) \times SO(16)$.

martes, 26 de septiembre de 2006 10:06 a.m.

Es posible mostrar que estas 2 redes están conectadas por dualidad T, con $R' = \frac{l_c^2}{R}$.

El mapeo del estado general $(q, n, e) \longrightarrow (q', n', e')$ es complicado [ver Ginsparg, PRD 35 (1987), 648]; pero resulta fácil de ver explícitamente en subsector con $k_I^{q+n} = 0 = k_I'^{q+n}$.

Para estos estados tenemos

$$q_h = \begin{cases} -e/2 & h = 1, \dots, 8 \\ 0 & h = 9, \dots, 16 \end{cases} \Longrightarrow k_{I,D}^{q} = \frac{n+e}{R} \pm \frac{eR}{l_c^2},$$

y

$$q'_h = \begin{cases} -e & h = 1, 9 \\ 0 & h \neq 1, 9 \end{cases} \Longrightarrow k_{I,D}'^{q} = \frac{n'+e'}{R'} \pm \frac{e'R'}{l_c^2},$$

que satisfacen $k_I'^{q} = k_I^{q}$, $k_D'^{q} = -k_D^{q}$ bajo

$$R' = \frac{l_c^2}{R}, \quad e' = n + e, \quad n' = -n \quad (\Rightarrow e' + n' = e).$$

26/09/06

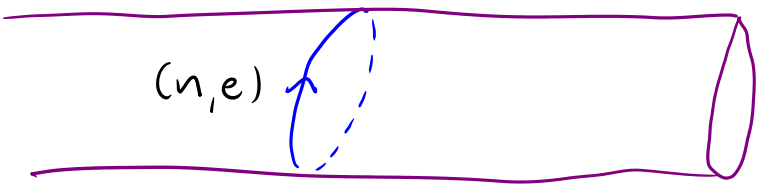
¿Qué pasa con teoría tipo I bajo T?

2 novedades { cuerdas abiertas
cuerdas no orientadas

Estudiaremos cada una por separado.

Consideremos primero teoría con cuerdas abiertas orientadas (p.ej., cuerda bosónica).

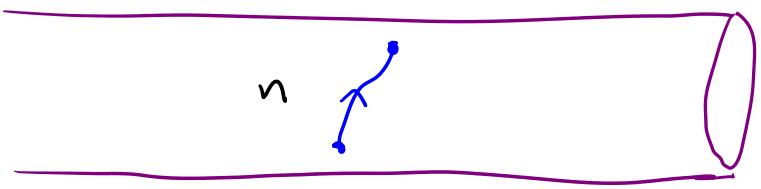
Incluye necesariamente cuerdas cerradas, y sabemos que al compactificar en S^1,



,

T: sector de cuerdas cerradas con (n,e) $\longleftrightarrow$ sector de cuerdas cerradas con $(n_T, e_T) = (e, n)$

¿Qué sucede con el sector de cuerdas abiertas?



Posee número KK pero no enrollamiento, ∴ No puede mapearse a sector de cuerdas abiertas c/mismas propiedades.

En particular, cuando $R \to 0$ tenemos

$m^2 \sim \left(\frac{n}{R}\right)^2 \to \infty$ si $n \neq 0 \Longrightarrow$ ¡reducción dimensional!

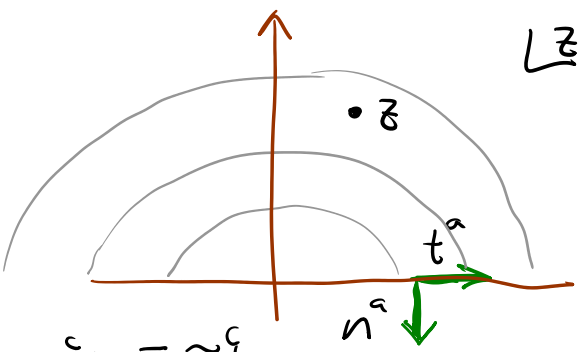
Es decir, las cuerdas abiertas en descripción T-dual se mueven no en D sino en solo $D-1$ dimensiones...

¿Cómo es que esto no contradice el hecho de que tendremos cuerdas cerradas en D dimensiones?

Lo que distingue a las cuerdas abiertas de las cerradas son sus extremos, donde impusimos ciertas condiciones de borde.

En la teoría original,

$$X^c(z,\bar{z}) = X^c(z) + \tilde{X}^c(\bar{z})$$



impusimos c.b. Neumann

(extremo libre): $\underbrace{\partial_n}_{\equiv n^a \partial_a = \partial_\sigma} X^c\big|_{\partial M} = 0 \leftrightarrow \partial X^c\big|_{z=\bar{z}} = \bar{\partial}\tilde{X}^c\big|_{z=\bar{z}}$

$\partial_\sigma = i(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}})$

$\Longrightarrow X^c(\bar{z}) = \tilde{X}^c(\bar{z})$ impuesto en $z = \bar{z}$;

truco de duplicación es usar $\forall z$, es decir,

$$X^c(z,\bar{z}) = X^c(z) + X^c(\bar{z}).$$

En teoría T dual tendremos entonces

$$X_T^c(z,\bar z) = X_T^c(z) + \tilde X_T^c(\bar z) = X^c(z) - \tilde X^c(\bar z),$$

con condiciones de borde $\partial X^c|_{z=\bar z} = \bar\partial \tilde X^c|_{z=\bar z}$

$$\Longrightarrow \partial X_T^c\big|_{z=\bar z} = -\bar\partial \tilde X_T^c\big|_{z=\bar z} \longleftrightarrow \underbrace{\partial_t X_T^c}_{\equiv t^a\partial_a = \partial_\tau}\Big|_{\partial M} = 0$$

$\partial_\tau = i(z\partial_z + \bar z\partial_{\bar z})$

es decir, c.b. Dirichlet (extremo fijo).

Podemos satisfacerlas tomando

$$X_T^c(\bar z) = -\tilde X_T^c(\bar z) \quad \text{impuesto en } z=\bar z;$$

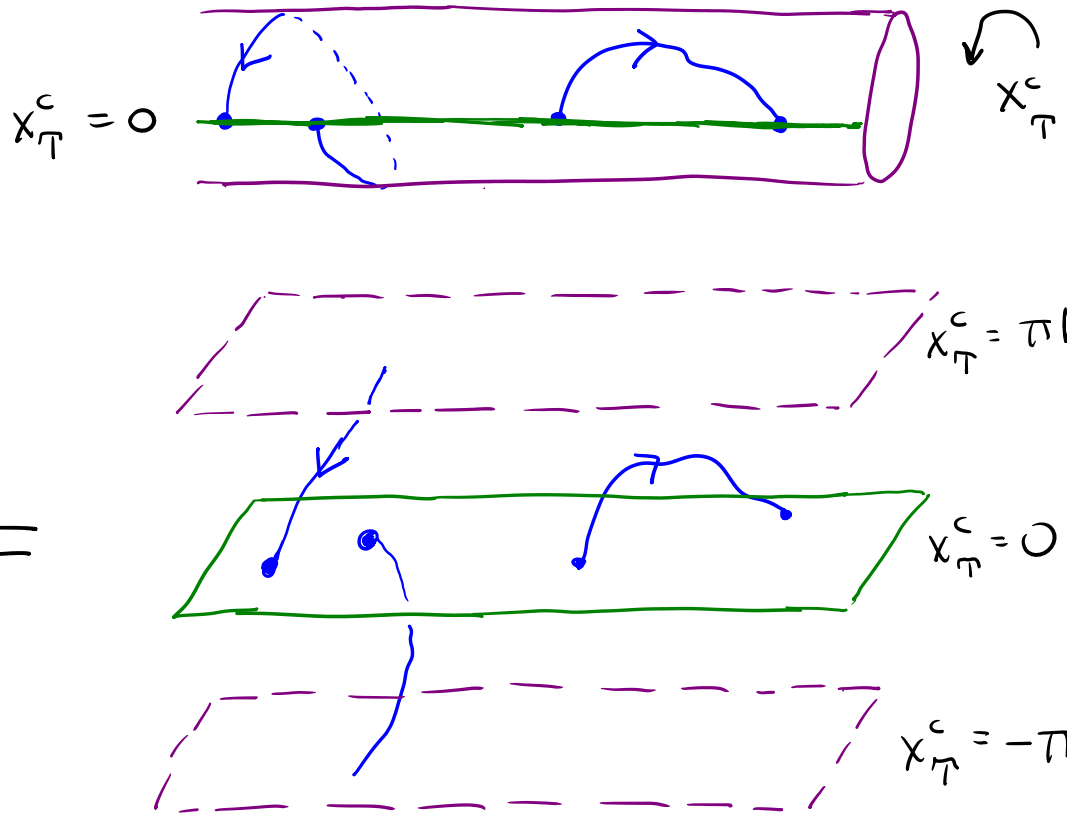
truco de duplicación es usar $\forall z$, es decir,

$$X_T^c(z,\bar z) = X_T^c(z) - X_T^c(\bar z).$$

En cualquier caso, tenemos $X_T^c(z,\bar z) = 0 \quad \forall\, z=\bar z$,

de donde vemos que ambos extremos de la cuerda abierta están fijos en $x_T^c = 0$ (aunque pueden moverse libremente a lo largo de x^a):

miércoles, 27 de septiembre de 2006 07:03 p.m.



Semejante cuerda abierta no puede tener número KK n_π $(=e=0)$, pero sí enrollamiento e_π:

$$X^c_\pi(\sigma=\pi,\tau) - X^c_\pi(\sigma=0,\tau) = \int_0^\pi d\sigma\, \partial_\sigma X^c_\pi(\sigma,\tau)$$

$$= \underbrace{i\left(z\partial X^c_\pi(z) - \bar{z}\bar{\partial} X^c_\pi(\bar{z})\right)}$$

$$\underbrace{i\left(z\partial X^c(z) + \bar{z}\bar{\partial} X^c(\bar{z})\right)}$$

$$= \int_0^\pi d\sigma\, \partial_\tau X^c(\sigma,\tau)$$

$$= 2\pi\alpha'\left(\frac{n}{R}\right) \equiv e_\pi\, 2\pi R_\pi$$

con $\boxed{e_\pi = n}$

miércoles, 27 de septiembre de 2006 07:43 p.m.

Recordemos ahora que, en teoría original, espectro es

$$M^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N-1),$$

y estados sin masa $\alpha_{-1}^{\mu} |0; k_\alpha, 0\rangle$ representan fotón: fluctuación infinitesimal en campo de norma $A_\mu(x)$ definido en D dimensiones.

El operador de vértice correspondiente es $\partial_t X^\mu$ ($\leftrightarrow \partial_\tau X^\mu \leftrightarrow \partial X^\mu + \bar{\partial}\tilde{X}^\mu = 2\partial X^\mu$), y ∴ cuerda abierta en fondo $A_\mu(x)$ no trivial se describe con

$$S \longrightarrow S + \int_{\partial M} d\tau \, A_\mu(X) \partial_\tau X^\mu$$

El término adicional modifica las condiciones de borde:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \, \partial_a X_\mu \partial_a X^\mu + \int_{\partial M} d\tau \, A_\mu \partial_\tau X^\mu$$

$$\overset{\delta X^\mu}{\Longrightarrow} \quad \delta S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \, \partial^2 X^\mu \delta X_\mu$$

$$+ \int d\tau \left[\frac{1}{2\pi\alpha'} \delta X_\mu \partial_\sigma X^\mu + \delta X^\nu \partial_\nu A_\mu \partial_\tau X^\mu + A_\mu \partial_\tau \delta X^\mu \right]$$

$$\underbrace{\qquad}_{-\partial_\tau X^\nu \partial_\nu A_\mu \delta X^\mu}$$

así que condiciones de borde son ahora

$$\partial_\sigma X^\mu + 2\pi\alpha' F^\mu{}_\nu \partial_\tau X^\nu = 0$$

(las cuales se reducen a Neumann usual cuando $F_{\mu\nu}=0$).

Recordemos también que no cualquier $A_\mu(x)$ constituye un fondo consistente para la propagación de la cuerda: $A_\mu(x)$ debe definir teoría 2-dim conforme, para lo cual es necesario que satisfaga ec. de mov. Al orden más bajo en α', esta ecuación es simplemente la de Maxwell en el vacío: $\partial_\mu F^{\mu\nu}=0$.

Las soluciones más sencillas son aquellas con

$F_{\mu\nu}$ = constante $\longleftrightarrow$ A_μ lineal.

Para poder discutir dualidad T, tomemos

$$A_\mu = A_\mu(x^\alpha) = F_{\alpha\mu} x^\alpha \quad \text{(independiente de } x^c\text{)},$$

o, para ser más concretos, $A_\alpha = 0$, $A_c = f X^1$.

En este caso, condiciones de borde para cuerda abierta son

$$\partial_\sigma X^1 + 2\pi\alpha' \partial_\tau X^c = 0, \quad \partial_\sigma X^c - 2\pi\alpha' f \partial_\sigma X^1 = 0 \quad (\text{y } \partial_\sigma X^{\alpha\neq 1} = 0).$$

En descripción T-dual, estas se convierten en

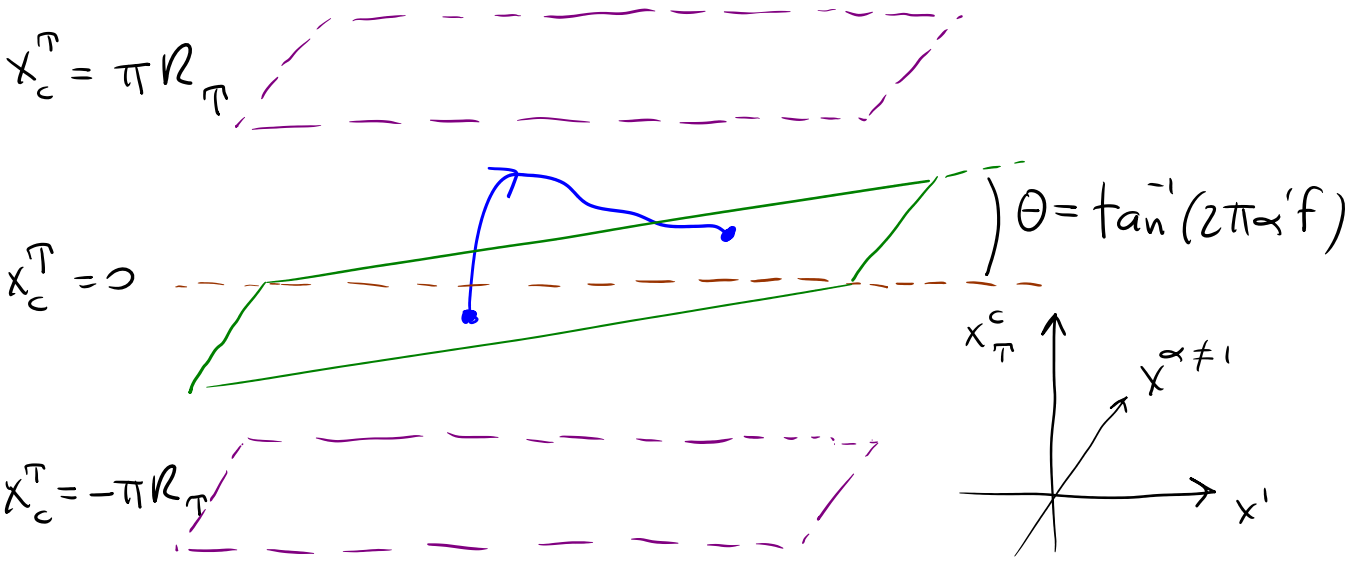
$$\partial_\sigma X^\alpha + 2\pi\alpha' f \partial_\sigma X^c_\pi = 0 \quad , \quad \partial_\tau X^c_\pi - 2\pi\alpha' f \partial_\tau X^\alpha = 0 \qquad (\partial_\sigma X^{\alpha\neq 1} = 0)$$

es decir,

$$\partial_\sigma \left(X^\alpha + 2\pi\alpha' f X^c_\pi \right) = 0 \qquad \text{Neumann}$$

$$\partial_\tau \left(X^c_\pi - 2\pi\alpha' \underbrace{f X^\alpha}_{A_c} \right) = 0 \qquad \text{Dirichlet} \ ,$$

de donde vemos que ambos extremos de la cuerda están ahora fijos sobre un hiperplano inclinado:



La conclusión es entonces que, en teoría T-dual,

$$\Phi_c(x^\alpha) \equiv 2\pi\alpha' A_c(x^\alpha)$$

describe la posición del hiperplano en la dirección x^c_π.

miércoles, 27 de septiembre de 2006 10:10 p.m.

El ejemplo que hemos visto es

$$F_{1c}(x^\gamma) = f \longleftrightarrow A_c(x^\gamma) = f x^1 \Longleftrightarrow \Phi_c(x^\gamma) = 2\pi\alpha' f x^1$$

Campo magnético

Hiperplano inclinado con pendiente cte. $\tan\theta = 2\pi\alpha' f$

pero igualmente es posible ver que

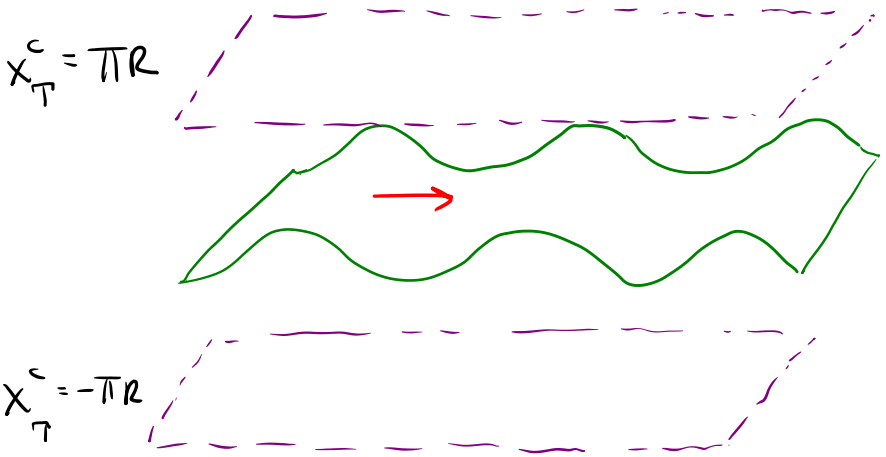
$$F_{0c}(x^\gamma) = f \longleftrightarrow A_c(x^\gamma) = f x^0 \Longleftrightarrow \Phi_c(x^\gamma) = 2\pi\alpha' f x^0$$

Campo eléctrico

Hiperplano moviéndose con velocidad cte. $V = 2\pi\alpha' f$

Otro ejemplo es onda electromagnética plana,

$A_c(x^\gamma) = \int dk\, e^{ik(x^1 - x^0)} f(k)$, que también resuelve ec. de Maxwell, y corresponde a hiperplano ondulatorio:



$$\Phi_c(x^\gamma) = \int dk\, e^{ik(x^1 - x^0)} 2\pi\alpha' f(k)$$

[ver Callan y Klebanov, hep-th/9511173]

miércoles, 27 de septiembre de 2006 10:45 p.m.

Vemos entonces que el hiperplano es un objeto dinámico, capaz de cambiar su orientación, moverse u oscilar: D-brana — "D" de Dirichlet / "brana" de membrana

Regresando al caso con fondo $A_c = 0$ $(\leftrightarrow \Phi_c = 0)$, espectro de cuerda abierta en descripción T-dual es

$$m^2 = \left(\frac{e_T R_T}{\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N-1)$$

Los estados sin masa son ahora de 2 tipos distintos:

$\alpha_{-1}^{\alpha} |0;k,0\rangle$ (e_T) $\longleftrightarrow$ Vértice $\partial_z X^{\alpha}$

y

$\alpha_{-1}^{c} |0;k,0\rangle \longleftrightarrow$ Vértice $\partial_z X^{c}$.

El primero representa una fluctuación infinitesimal en campo de norma $A_\alpha(x^\alpha)$ que vive sobre hiperplano.

El segundo representa una fluctuación infinitesimal en la posición del hiperplano ("coordenada colectiva") a lo largo de la única dirección transversal X_T^c; es el bosón de Goldstone asociado a la ruptura espontánea de la invariancia translacional.

Nuestra conclusión es entonces que, justo como las cuerdas cerradas describen excitaciones de la generalización cuerdística del espaciotiempo, las cuerdas abiertas describen excitaciones de la D-brana en la cual se encuentran sus extremos.

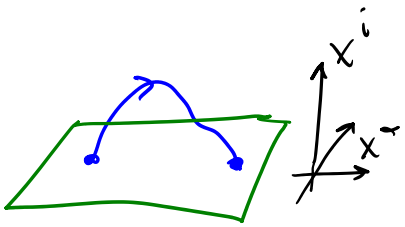
[28/09/06

Notar que podemos generalizar fácilmente al caso donde T-dualizamos más direcciones:

$$T_{D-1, D-2, \cdots, p+1} \Longrightarrow \text{c.b.} \begin{cases} \partial_n X^\alpha = 0 & \alpha = 0, \ldots, p \quad \text{Neumann} \\ \partial_t X^i = 0 & i = p+1, \ldots, D-1 \quad \text{Dirichlet} \end{cases}$$

$l \equiv D-p-1$ direcciones

donde lo que obtenemos es una Dp-brana (hiperplano con p dimensiones espaciales),



cuyas excitaciones nuevamente son unidimensionales — están descritas por cuerdas abiertas que empiezan y terminan en la brana. La cuantización de estas cuerdas da lugar a una torre infinita de estados, asociados a campos que viven sobre el hiperplano.

miércoles, 27 de septiembre de 2006 11:26 p.m.

En particular, tenemos campos sin masa

$A_\alpha(x^\sigma)$: campo de norma sobre Dp-brana

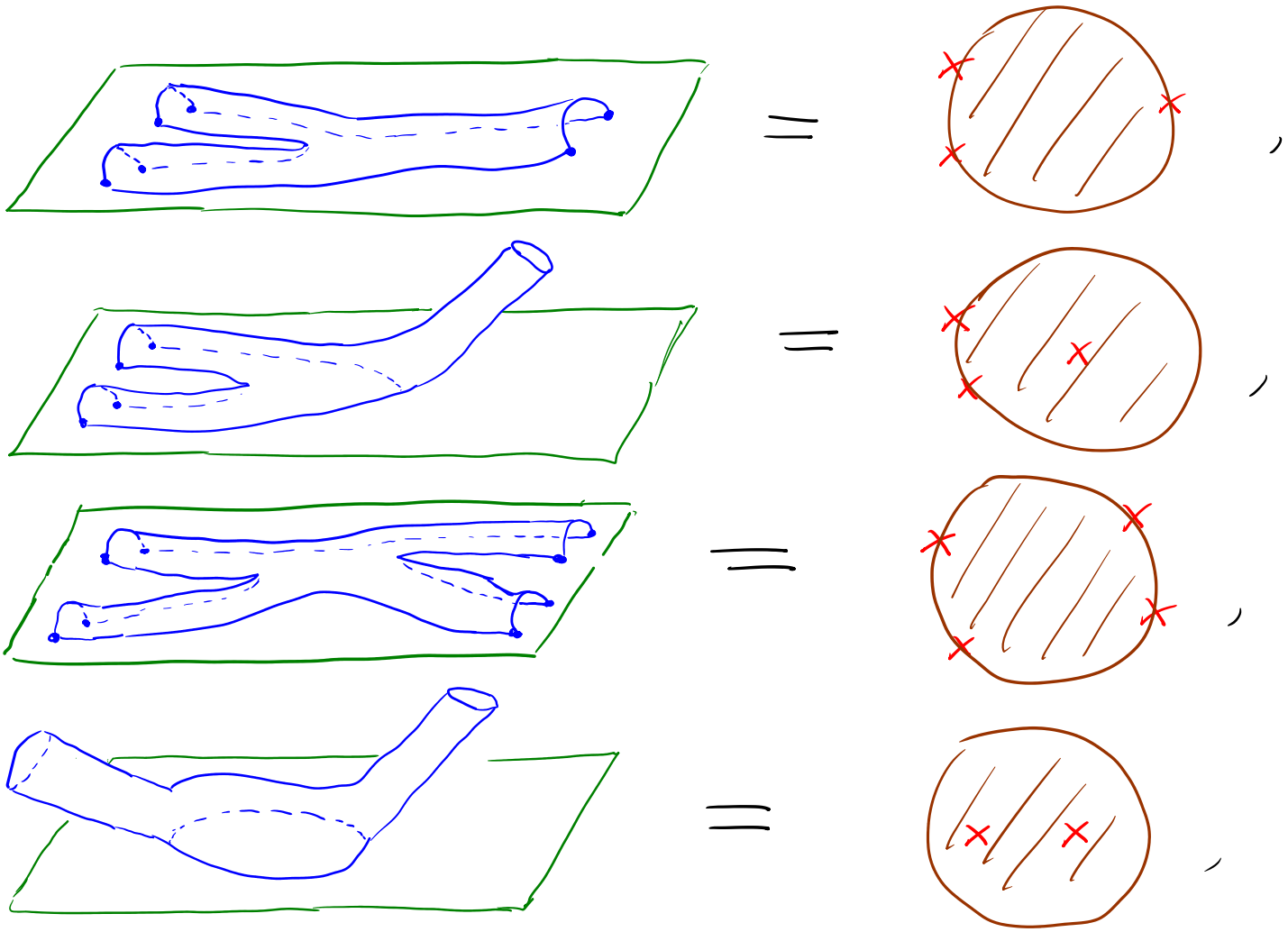
$\Phi^i(x^\sigma)$: campos escalares sobre Dp-brana, que describen su posición en las D-p-1 direcciones transversales.

Hemos descubierto entonces una nueva serie de objetos extendidos en la teoría de cuerdas, conectados entre sí a través de $Dp \xrightarrow{T_\mu} \begin{cases} D(p-1) & \text{si } \mu = \alpha \\ D(p+1) & \text{si } \mu = i \end{cases}$

Notar que antes de T-dualizar ($\ell = 0$) teníamos, sin saberlo, una D(D-1)-brana (D25-brana en el caso de la cuerda bosónica, D9-brana en supercuerda): hiperplano que llena TODO el espacio, cuyas excitaciones son ∴ cuerdas abiertas que se mueven libremente en todas las direcciones.

En el extremo opuesto, si T-dualizamos todas las direcciones ($\ell = D-1$), obtenemos una D0-brana, que es una partícula ¡con una torre infinita de excitaciones!

Notar que podemos determinar la manera en que interactuan entre sí (o con el entorno) las distintas excitaciones de la D-brana calculando amplitudes de dispersión de cuerdas abiertas (o abiertas y cerradas):

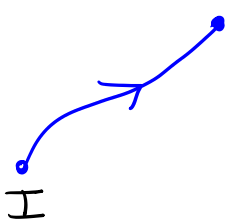


etc. [ver, p.ej., Hashimoto, Klebanov, hep-th/9611214]

viernes, 29 de septiembre de 2006 08:57 a.m.

Otra generalización: factores de Chan-Paton.

Recordar que, en teoría original donde cuerda abierta satisface c.b. puramente Neumann, es posible obtener campo de norma no abeliano postulando que en cada extremo existe un grado de libertad adicional, no dinámico, que puede estar en uno de N estados:



$I, J = 1, \ldots, N$ ($\exists$ N "tipos" de extremos)

El estado general es entonces una combinación lineal

$$\Lambda_{IJ} |\cdots; IJ\rangle \longleftrightarrow \phi(x)_{IJ} \ ,$$

↑ factor de Chan-Paton

y las amplitudes incluyen factores $Tr(\Lambda^{(1)}\Lambda^{(2)}\cdots)$.

Tanto el espectro como las amplitudes son evidentemente invariantes bajo transformaciones $U(N)$

$$\Lambda \longrightarrow \Lambda' = U\Lambda U^{-1} = U\Lambda U^{\dagger} ,$$

(sólo $SO(N)$ ó $Sp(N)$ en cuerda no orientada).

Esto equivale a redefinir etiquetas para extremos:

$$|IJ\rangle \longrightarrow |I'J'\rangle = U^{-1}_{II'}\,|IJ\rangle\,U_{J'J}\,.$$

Es decir, extremo final/inicial transforma en representación fundamental/antifundamental de $U(N)$; mientras que el estado en conjunto transforma en representación adjunta. En caso infinitesimal,

$$\Lambda \to \Lambda' = e^{i\epsilon^r t_r}\,\Lambda\, e^{-i\epsilon^r t_r} = \Lambda + i\epsilon^r [t_r, \Lambda] + \dots$$

Tomando $\underbrace{U(1)_1 \times U(1)_2 \times \dots U(1)_N}_{N \text{ generadores simultáneamente diagonalizables}} \subset U(N)$,

$$t_h = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{i.e., } (t_h)_{IJ} = \delta_{hI}\delta_{hJ})$$

$N^2 - N$ generadores restantes $(t_q)_{IJ} = \delta_{iI}\delta_{jJ}$

$$[t_h, t_q] = q_h t_q \qquad q_h = \begin{cases} +1 & h = i \\ -1 & h = j \\ 0 & h \neq i,j \end{cases}$$

Vemos que estado $|ij\rangle \longleftrightarrow \Lambda_{IJ} = \delta_{iI}\delta_{iJ}$

porta carga $q_i = +1$ bajo $U(1)_i$ y $q_j = -1$ bajo $U(1)_j$.

Consideremos ahora el efecto de encender un valor de fondo constante para el campo de norma,

$$A_c^h \equiv \frac{\theta_h}{2\pi R} \qquad h = 1, \dots, N$$

(con $1 \leq \theta_h < 2\pi$, porque lazo de Wilson

$$\exp\left[i \oint dx^c A_c^h t_h\right] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & & \\ & & & e^{i 2\pi R A_c^h} & \\ & & & & 1 \cdots 1 \end{bmatrix}$$

es invariante bajo $A_c^h \to A_c^h + \frac{l}{R}$ $l \in \mathbb{Z}$).

En su presencia, acoplamiento $q_h \int d\tau A_c^h \partial_\tau X^c$ corre la definición del momento conjugado a X^c, que ahora es

$$P_c = \frac{n}{R} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \, \partial_\tau X^c + \frac{\theta_i - \theta_j}{2\pi R}$$

para estado $|ij\rangle$.

Pasemos ahora a la descripción T-dual, donde tendremos nuevamente N^2 estados por cada modo de oscilación.

Encontramos que un estado de cuerda abierta del tipo $|ij\rangle$ tiene número de enrollamiento

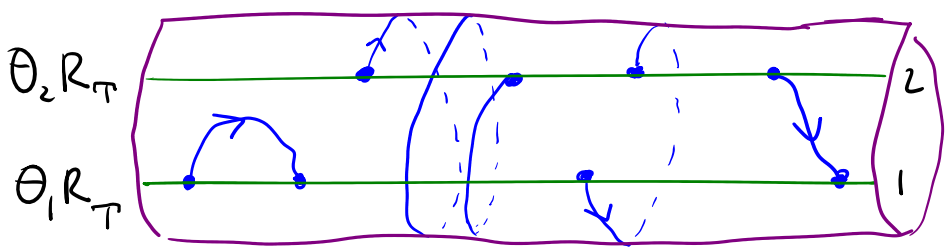
$$X_T^c(\sigma=\pi) - X_T^c(\sigma=0) = \int_0^\pi d\sigma\, \partial_\sigma X_T^c$$

$$= \int_0^\pi d\sigma\, \partial_\tau X^c$$

$$= 2\pi\alpha' \left(\frac{n}{R} - \frac{\theta_i - \theta_j}{2\pi R} \right)$$

$$= e_T\, 2\pi R_T + \theta_j R_T - \theta_i R_T$$

Dado que cada uno de los extremos de estas N^2 tipos de cuerda abierta vive sobre una D-brana, vemos que tenemos ahora N D-branas en distintas posiciones $x_T^c = \theta_1 R_T, \theta_2 R_T, \ldots, \theta_N R_T$:



$\|ij\rangle$:	1-1	2-2	1-2	2-1
e_T :	0	+2	−1	0

sábado, 30 de septiembre de 2006 02:41 p.m.

Confirmamos aquí que $\Phi_c^h(x^\tau) \equiv 2\pi\alpha' A_c^h(x^\tau)$ describe la posición de la D-brana número h.

Notar que aún en la teoría original teníamos N D-branas (todas coincidentes, puesto que D(D-1)-branas llenan todo el espacio), y el grado de libertad de Chan-Paton asociado a cada extremo de una cuerda abierta simplemente denota a cual de las N D-branas está adherido!

Y tanto en la descripción original como en la T-dual, la simetría $U(N)$ se origina simplemente de la posibilidad de reetiquetar a las N D-branas.

Configuración con:

Lazo de Wilson A_c^h con n_1 $\theta_1/2\pi R$'s, n_2 $\theta_2/2\pi R$'s, $\vdots$ $\vdots$

$\xleftrightarrow{T}$

D-branas desplazadas n_1 en $\theta_1 R_T$, n_2 en $\theta_2 R_T$, $\vdots$ $\vdots$

rompe espontáneamente $U(N) \to U(n_1) \times U(n_2) \times \ldots$

En teoría T-dual, una cuerda abierta del tipo i-j debe satisfacer condiciones de borde

$$\begin{cases} \text{en } \sigma=0: & X^c_\tau = \theta_i R_\tau \,, \quad \partial_\sigma X^\tau = 0 \quad \forall \tau \\ \text{en } \sigma=\pi: & X^c_\tau = \theta_j R_\tau + e_\tau 2\pi R_\tau \,, \quad \partial_\sigma X^\tau = 0 \quad \forall \tau \end{cases}$$

y tiene ∴ expansión en modos

$$X^c_\tau(z,\bar z) = \theta_i R_\tau + \frac{R_\tau}{2\pi i}(2\pi e_\tau - \theta_i + \theta_j)\ln\left(\frac{z}{\bar z}\right) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\sum_{m\neq 0}\frac{\alpha^c_m}{m}\left(z^{-m}-\bar z^{-m}\right)$$

El espectro resultante es

$$m^2 = \left[\frac{R_\tau(2\pi e_\tau + \theta_j - \theta_i)}{2\pi\alpha'}\right]^2 + \frac{1}{\alpha'}(N-1).$$

Si las N^2 D-branas están en la misma posición (p.ej. $\theta_h = 0$, $h=1,\dots,N$), obtenemos $N^2 \cdot D$ estados sin masa

$$(\varepsilon_\alpha)_{IJ}\,\alpha^\tau_{-1}|0;k^\tau;0;IJ\rangle \qquad (\varepsilon_c)_{IJ}\,\alpha^c_{-1}|0;k^\tau;0;IJ\rangle$$

(e_τ)

que representan fluctuaciones en campos en D-1 dimensiones

$(A_\alpha)_{IJ} = A^n_\alpha(t_r)_{IJ}$ campo de norma $U(N)$

$(\Phi_c)_{IJ} = \Phi^n_c(t_r)_{IJ}$ campo escalar en representación adjunta

¡ N objetos $\leftrightarrow$ N^2 grados de libertad !

sábado, 30 de septiembre de 2006 09:06 p.m.

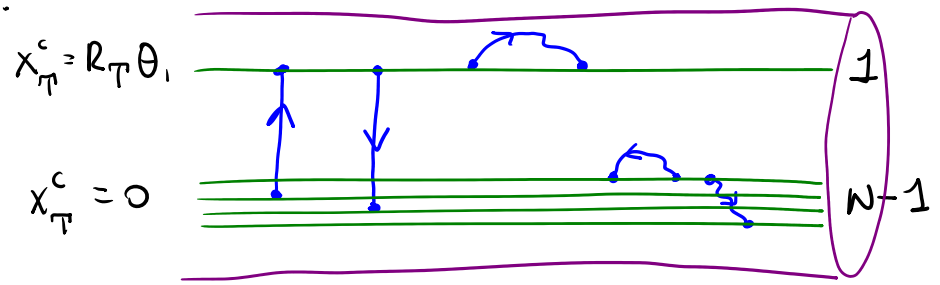
Si separamos 1 D-brana, tomando p.ej.

$$\langle \Phi_c^1 \rangle = \theta_1 R_T \neq 0 ,$$

entonces los $2(N-1)\cdot D$ estados $|I1\rangle, |1J\rangle$ $I,J \neq 1$

adquieren masa:

$$m = \frac{R_T |\theta_1|}{2\pi\alpha'}$$



$\therefore$ Grupo de Norma $U(N) \to U(N-1) \times U(1)$

En acción efectiva a bajas energías, esto es precisamente el mecanismo de Higgs:

$$\mathcal{L}_{SYM} \supset Tr([\Phi_c, A_\alpha]^2) = Tr(R_T^2\theta_1^2 \underbrace{[t_1, t_q]}_{q_1 t_q} A_\alpha^q A_q^\alpha \underbrace{[t_1, t_{q'}]}_{q'_1 t_{q'}})$$

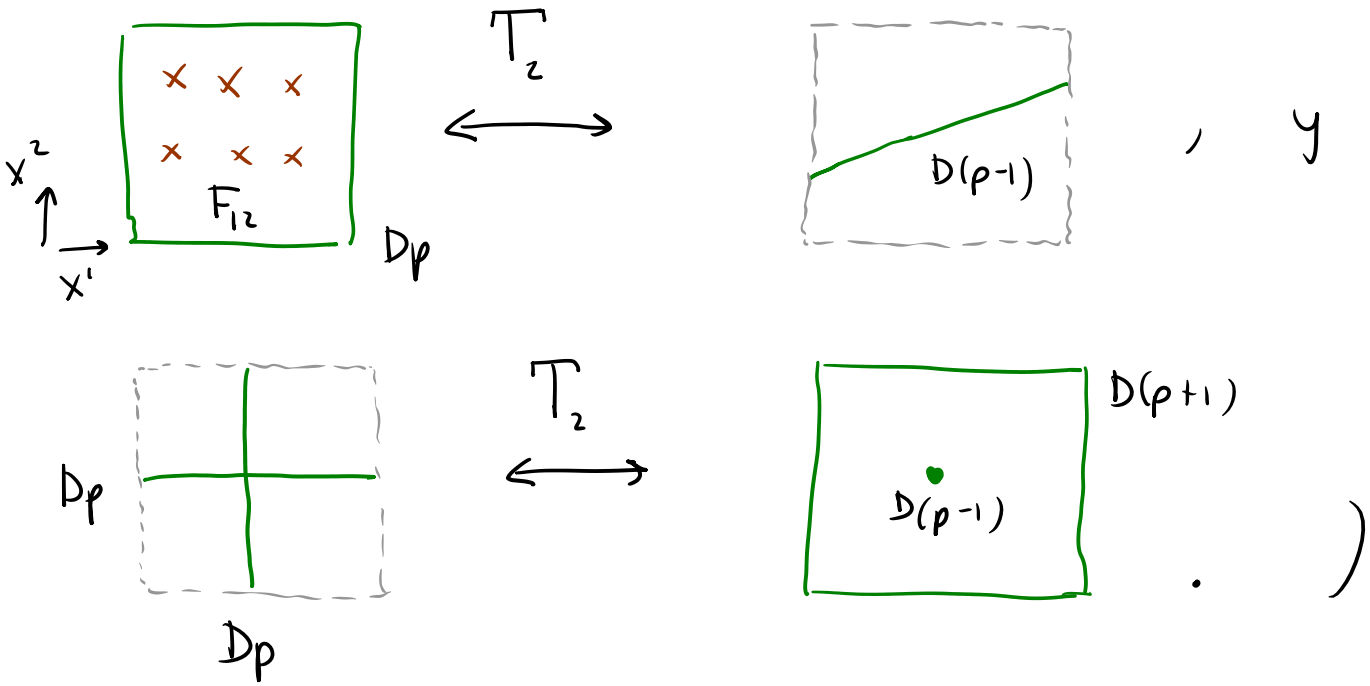
$$\propto R_T^2\theta_1^2 \sum_{q|q_1\neq 0} A_\alpha^q A_{-q}^\alpha$$

$\propto m^2$ ~ bosones W

Vale la pena resaltar que el descubrimiento de las D-branas implica una unificación de las teorías con y sin cuerdas abiertas. En particular, de los $2+2\times\infty$ tipos de teorías de cuerdas bosónicas (orientadas o no, con o sin cuerdas abiertas, con $N\geq 1$ grados de libertad de Chan-Paton), podemos concluir directamente que las $1+1\times\infty$ teorías orientadas son parte de una sola. En efecto, si comenzamos con la teoría $U(N)$ con N arbitrariamente, compactificamos todas las dimensiones espaciales, y encendemos líneas de Wilson θ_c^h y/o campos magnéticos $F_{cc'}^h$ y/o eléctricos F_{oc}^h entonces a través de distintas secuencias de dualidades T podemos obtener una teoría con cuerdas cerradas libres de moverse en $25+1$ dimensiones y cuerdas abiertas con extremos adheridos a N D-branas de distinta dimensionalidad, ubicadas en

posiciones distintas y/o inclinadas a distintos ángulos y/o moviéndose a distintas velocidades.

(Recordar en particular que



Después de ello podemos descompactificar algunas o todas las dimensiones, ajustando los valores de θ_c^h para retener solo $n \in \mathbb{N}$ D-branas cerca del origen (con dimensiones, posiciones, orientaciones y velocidades arbitrarias).

En nuestra concepción antigua, donde no "veíamos" a las D-branas y nos fijábamos solamente

en lo que harían las cuerdas cerradas y abiertas, cada una de esta colección infinita de posibles configuraciones hubiera definido una teoría distinta (aunque no habíamos hablado de la mayor parte de ellas porque no poseen invariancia de Poincaré).

Pero ahora entendemos que se trata simplemente de distintos estados dentro de una misma teoría, que se diferencian uno de otro por el número y tipo de Dp-branas que contienen. Esto incluye en particular al estado con $n=0$ D-branas, que es precisamente la "teoría" con solo cuerdas cerradas.

Para intentar un razonamiento semejante en el caso de las teorías de cuerdas no orientadas (bosónicas o Tipo I), nos falta entender el efecto de la dualidad T en este contexto.

Consideremos primero cuerdas cerradas no orientadas.

Recordar que en este caso la acción de paridad en la hoja de mundo ($\sigma \leftrightarrow 2\pi - \sigma$) es

$$\Omega : \alpha_m^\mu \longleftrightarrow \tilde{\alpha}_m^\mu \,, \quad (n, e) \longleftrightarrow (n, -e)$$

$$\Rightarrow p^c_{\substack{I \\ D}} \longleftrightarrow p^c_{\substack{D \\ I}} \,,$$

y que en teoría no orientada retenemos solo los estados que son invariantes bajo esta transformación, como p.ej., $\alpha_{-1}^{\mu\ n\ e} |0,0;k_\alpha,1,-1\rangle + \tilde{\alpha}_{-1}^{\mu\ n\ e} |0,0;k_\alpha,1,1\rangle$.

Bajo T_c, la componente $\mu = c$ se convierte en

$$\alpha^c_{-1} |0,0;k_\alpha,-1,1\rangle - \tilde{\alpha}^c_{-1} |0,0;k_\alpha,1,1\rangle \,,$$

estado que es simétrico no bajo Ω, sino bajo

$$\alpha^c_m \longleftrightarrow -\tilde{\alpha}^c_m \,, \quad (n, e) \longleftrightarrow (-n, e)$$

$$\Rightarrow p^c_{\substack{I \\ D}} \longleftrightarrow -p^c_{\substack{D \\ I}}$$

miércoles, 04 de octubre de 2006 10:43 p.m.

Es decir, lo que en descripción original era

$$\Omega : \quad X^c(z) \leftrightarrow \tilde{X}^c(\bar{z}) \quad \Rightarrow \quad X^c(z,\bar{z}) \leftrightarrow X^c(\bar{z},z),$$

en descripción T-dual se convierte en

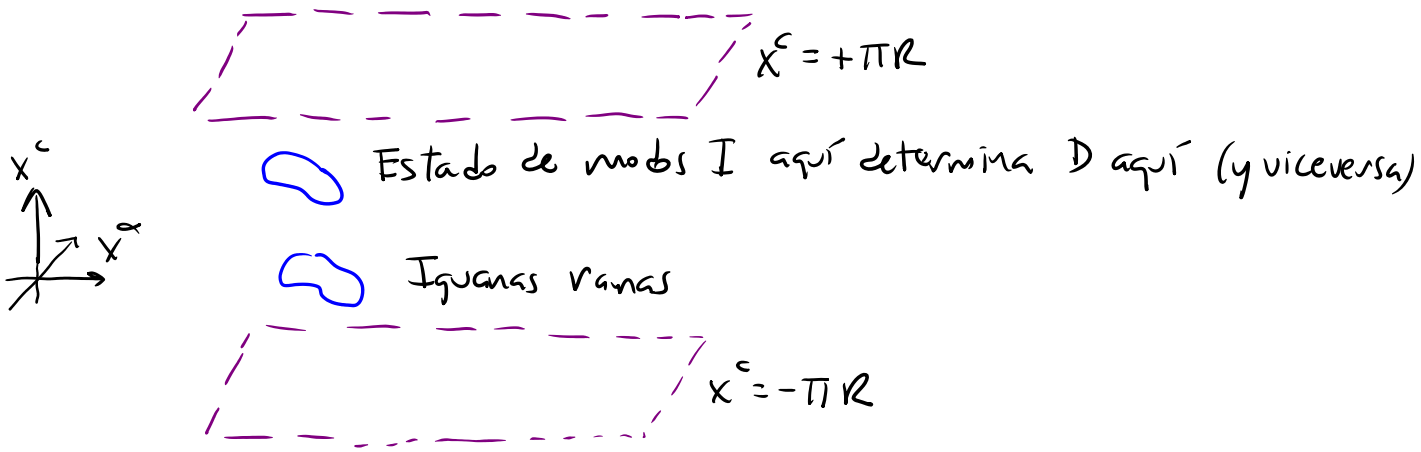
$$\Omega\mathcal{I}^c : \quad X^c_T(z) \leftrightarrow -\tilde{X}^c_T(\bar{z}) \quad \Rightarrow \quad X^c_T(z,\bar{z}) \leftrightarrow -X^c_T(\bar{z},z)$$

paridad en espaciotiempo a lo largo de X^c_T

paridad en hoja de mundo

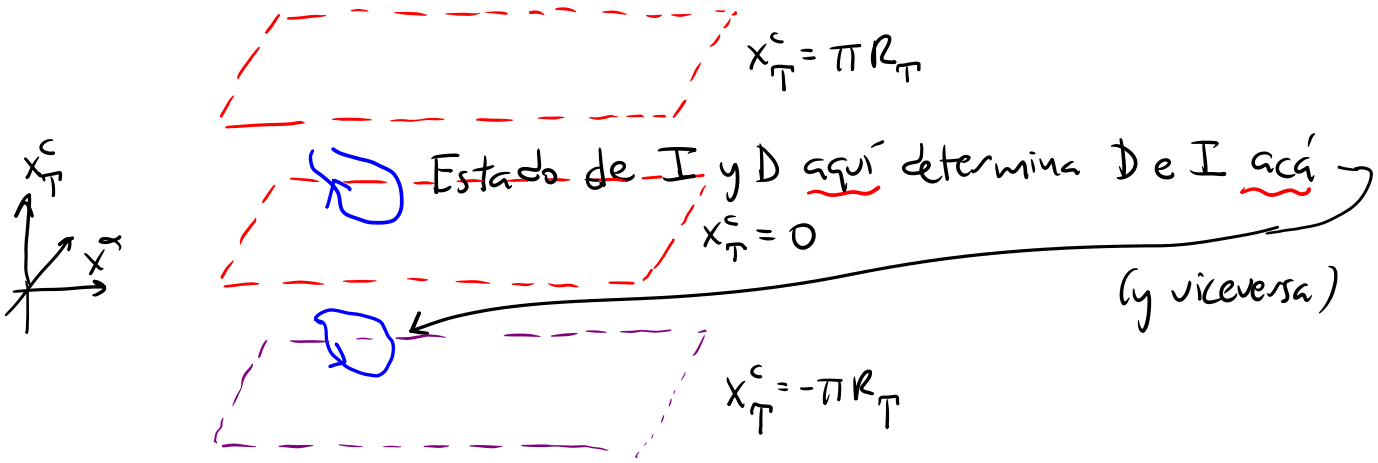
y la teoría contiene entonces solo los estados que son simétricos bajo esta transformación.

Mientras que en la teoría original



después de T-dualizar encontramos

miércoles, 04 de octubre de 2006 11:08 p.m.



El espacio físico se reduce por lo tanto al intervalo

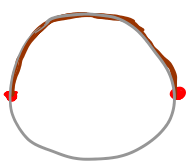
$$S^1/\mathbb{Z}_2 = \{ x^c_T \mid 0 \le x^c_T \le \pi R_T \}$$

$\hookleftarrow \{1, \Omega\pi^c\}$ Orientidad (u Orientifolio)

Esta es una generalización del concepto matemático, más conocido, de orbidad (u orbifolio), abreviación de órbita-variedad, donde se identifican puntos de una variedad conectados por la acción de algún grupo G de simetrías puramente geométricas.

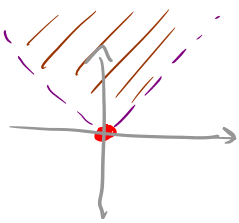
P.ej. $S^1/\mathbb{Z}_2 = \{ x^c \in \mathbb{R} \mid x^c \simeq x^c + 2\pi R,\ x^c \simeq -x^c \}$

$\hookleftarrow \{1, \pi^c\}$



ó $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_3 = \{ z \in \mathbb{C} \mid z \simeq e^{i2\pi/3} z \simeq e^{i4\pi/3} z \}$

$\hookleftarrow \{1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\}$



En estos ejemplos vemos que, si G tiene puntos fijos, la orbidad es singular (no es una variedad) ahí. A pesar de ello, la teoría de cuerdas está bien definida en orbidades (gracias a sectores 'torcidos') [Dixon, Harvey, Vafa, Witten, NPB 261 (1985) 678].

Las orientidades son una generalización cuerdística donde tomamos el cociente por ΩG en vez de G. En el caso que estamos estudiando, $\Omega G = \{1, \Omega\pi^c\}$, el espacio termina en los hiperplanos (D-1)-dimensionales $x^c_\pi = 0$ y $x^c_\pi = \pi R_\pi$, los cuales se distinguen precisamente porque quedan fijos bajo $x^c_\pi \to -x^c_\pi$

Notar que si una cuerda se mete a uno de estos 2 hiperplanos, coincide con su imagen, y ∴ se vuelve no orientada.

Es necesario resaltar también que no hay grados de libertad localizados en estos hiperplanos, por lo que, a diferencia de las D-branas, NO son dinámicos.

jueves, 05 de octubre de 2006 07:58 a.m.

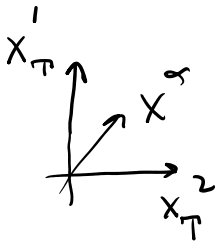
Si empezamos en teoría no orientada y T-dualizamos en $k = D-1-p$ dimensiones, obtenemos una teoría donde los estados son simétricos bajo $\Omega\,\Pi^{c_1}\cdots\Pi^{c_k}$.

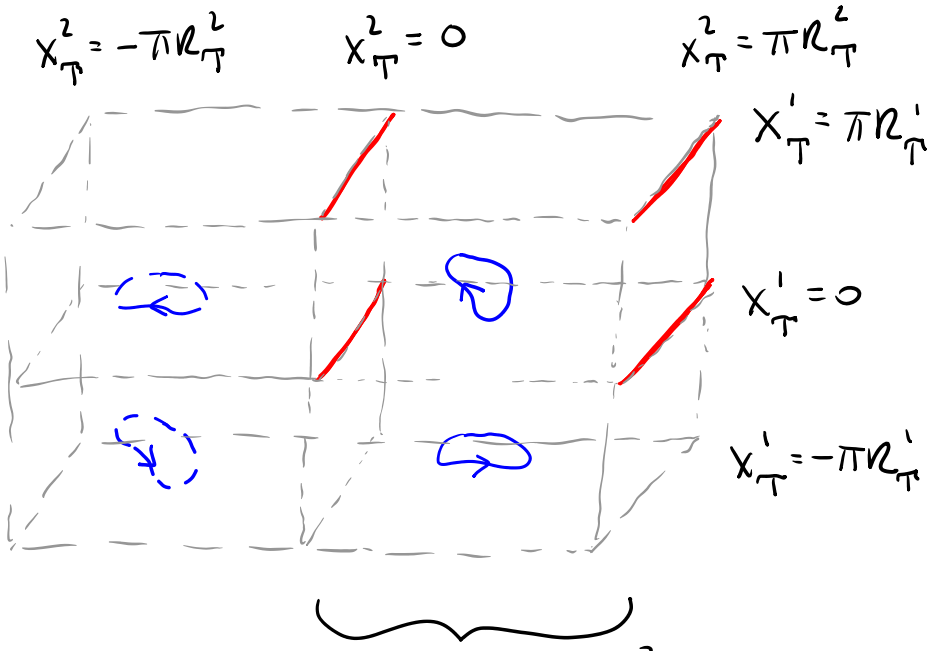
El espacio físico nuevamente se reduce a la mitad,

$$T^k \equiv \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{k} \longrightarrow T^k/\mathbb{Z}_2 \leftarrow \{1, \Omega\,\Pi^{c_1}\cdots\Pi^{c_k}\},$$

y obtenemos 2^k hiperplanos fijos $(p+1)$-dimensionales que llamamos Op-planos ≡ Orienti-p-planos.

P. ej., para $k=2$,





Espacio físico: Orientidad $T^2/\mathbb{Z}_2$

Notar que para $k \neq 1$, Op-planos no son la frontera completa del espacio (no tienen dimensión $D-1$).

jueves, 05 de octubre de 2006 08:15 a.m.

La teoría original ($k=0$) tenía 1 $O(D-1)$-plano, que llenaba todo el espacio, por lo que cada punto era su propia imagen. En este caso, las cuerdas necesariamente están inmersas en el O-plano, y es por ello que son no orientadas.
Aprendemos entonces que las teorías de cuerdas no orientadas son simplemente las teorías orientadas definidas en un fondo distinto, que incluye un $O(D-1)$-plano

Podemos ahora finalmente entender lo que sucede con teoría tipo I bajo dualidad T.
El hecho de que las cuerdas en I sean no orientadas nos indica que viven sobre un $O9$-plano.
El hecho de que I incluya cuerdas abiertas con grados de libertad de Chan-Paton nos indica la presencia de varias $D9$-branas.

jueves, 05 de octubre de 2006 08:28 a.m.

Después de T-dualizar a lo largo de una dirección x^c, obtendremos teoría I' definida en orientifold $\mathbb{R}^{8,1} \times S^1/\mathbb{Z}_2 \leftarrow \{1, \Omega\pi^c\}$, con 2 O8-planos en $x^c_\pi = 0, \pi R_\pi$, y con un cierto número de D8-branas.

Para ver esto más explícitamente, consideremos en teoría I el lazo de Wilson arbitrario

$$A^h_c = \frac{\theta_h}{2\pi R} \qquad h = 1, \ldots, 16 \qquad -\pi \leq \theta_h \leq \pi \ ,$$

es decir,

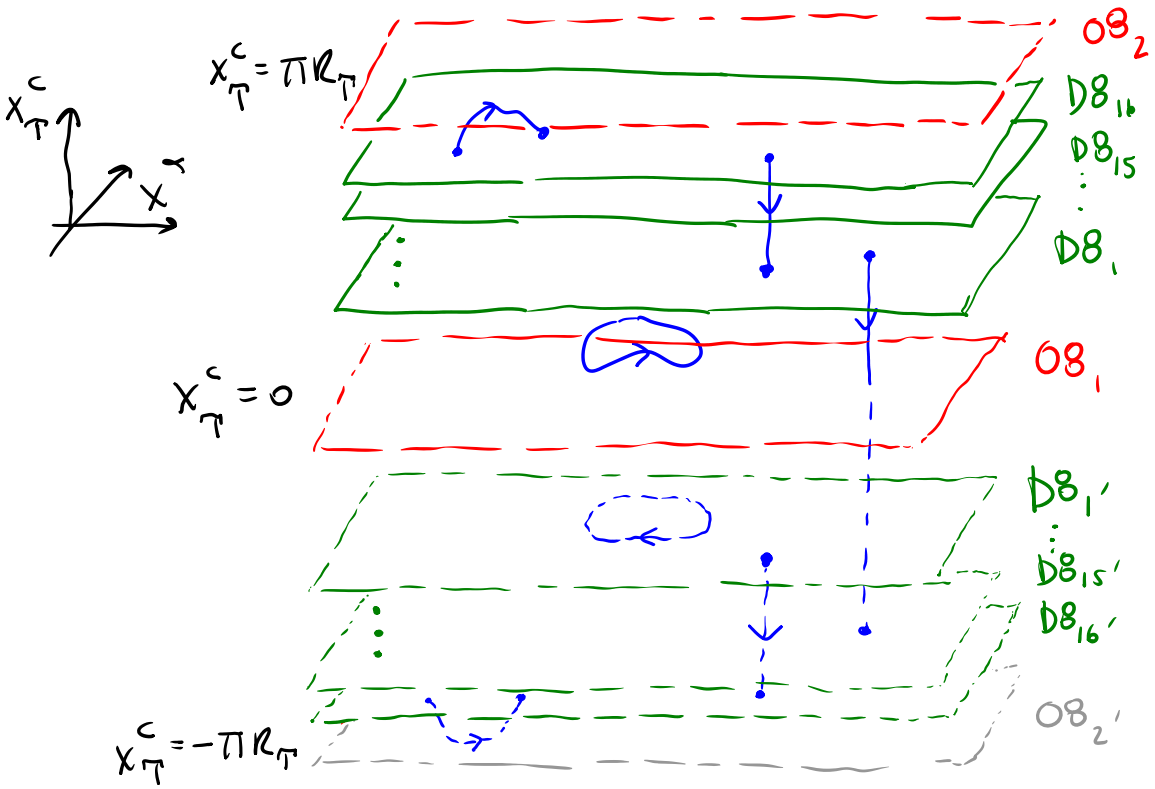
$$A_c = \frac{1}{2\pi R} \begin{bmatrix} \theta_1 & & & & & \\ & -\theta_1 & & & & \\ & & \theta_2 & & & \\ & & & -\theta_2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \theta_{16} \\ & & & & & & -\theta_{16} \end{bmatrix}$$

(que es lo que se obtiene al diagonalizar

$$\begin{bmatrix} 0 & i\theta_1 & & & \\ -i\theta_1 & 0 & i\theta_2 & & \\ & -i\theta_2 & 0 & & \\ & & & \ddots & i\theta_{16} \\ & & & -i\theta_{16} & 0 \end{bmatrix} \in U(1)_1 \times U(1)_2 \times \ldots \times U(1)_{16} \subset so(32)\Big).$$

jueves, 05 de octubre de 2006 08:39 a.m.

En descripción T-dual, tenemos 32 D8-branas en $x_T^c = \pm \theta_h R_T$, es decir, 16 D-branas entre los 2 O8-planos, más sus 16 imágenes:



Las cuerdas aquí son orientadas, a menos que estén inmersas en uno de los O8-planos. En el caso de cuerdas abiertas, esto solo es posible si la(s) D-brana(s) involucrada(s) coincide(n) con el O8-plano.

Con θ_h's genéricas, el grupo de norma (tanto en I como en I') está roto a $U(1)^{16}$.

Si $1 \le n \le 16$ D8-branas coinciden fuera de los O8-planos, la simetría se ensancha a $U(n) \times U(1)^{16-n}$: hay n^2-n nuevos estados sin masa que provienen de las cuerdas que conectan D-branas distintas en este bouche.

Si $1 \le n \le 16$ D8-branas coinciden sobre uno de los O8-planos, aparecen estados sin masa adicionales, que provienen de las cuerdas que conectan una de las n D-branas y alguna de sus n imágenes. Todas las cuerdas involucradas son ahora no orientadas, y obtenemos: grupo de norma ensanchado $SO(2n) \times U(1)^{16-n}$.

Cuando $n=16$ (p.ej. $\theta_c^h = 0 \ \forall h$) recuperamos $SO(32)$.

Ahora, ¿qué tipo de cuerdas cerradas tenemos en I'?

En I, teníamos cuerdas IIB truncado bajo Ω (p.ej., φ, $B_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu}$, ...). En I', proyección no

jueves, 05 de octubre de 2006 09:33 a.m.

elimina ya estados localmente, sino que elimina la mitad del espacio que está detrás de los O8's, por lo que, fuera de los O8-planos tenemos cuerdas cerradas IIA (p.ej., ahora sí retenemos $B_{\mu\nu}$).

En resumen,

$$I \xleftrightarrow{T_c} I' \equiv \text{IIA con 2 O8's y 16 D8's} \equiv IA.$$

Pero esto implica que

$$I = \text{IIB con 1 O9 y 16 D9's} \equiv IB$$

Es decir, I es solo una clase particular de estados de IIB. Si empezamos con I, compactificamos (con posibles lazos de Wilson y/o campos magnéticos y/o eléctricos), T-dualizamos y después descompactificamos, podemos obtener IIA ó IIB en 9+1 dimensiones no compactas, con o sin Dp-branas (y con o sin Op-planos), donde p es par en IIA e impar en IIB.

lunes, 09 de octubre de 2006 04:42 p.m.

Recordar que en las teorías tipo II existen 2 gravitinos χ, $\tilde{\chi}$ (que provienen del sector R-NS y NS-R, respectivamente), y ∴ 2 supercargas

$$\begin{cases} Q_s, \tilde{Q}_{s'} \in \underline{16} + \underline{16}' & \text{en IIA} \\ Q_s, \tilde{Q}_s \in \underline{16} + \underline{16} & \text{en IIB} \end{cases}$$

(Recordar que $s \equiv (s_0, s_1, \ldots, s_4)$ con $s_\alpha = \pm 1/2$ y un número par de $-1/2$'s, mientras que $s' \equiv (s_0', \ldots, s_4')$ tiene un número impar de $-1/2$'s.)

Esto se manifiesta en el hecho de que los estados forman supermultipletes (p.ej., obtenemos $2^{32/2 \cdot 2} = 256$ estados no masivos, y un cierto múltiplo de $2^{32/2} = 256^2$ estados en cada nivel masivo), y las amplitudes son invariantes bajo 32 supersimetrías:

"bosonización" de β, γ

$$Q_s = \oint dz\, J_s(z), \quad \text{con } J_s(z) \propto e^{-\phi/2} e^{i s_\alpha \varphi^\alpha}$$

bosonización de ψ^α

el operador de vértice para $|s\rangle_R$,

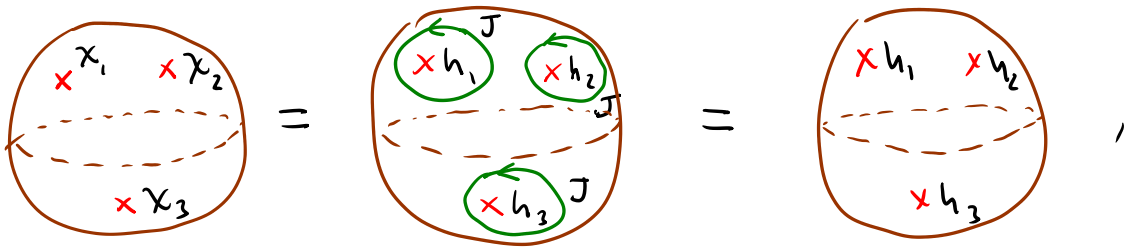
lunes, 09 de octubre de 2006 05:10 p.m.

por lo que si $Q_s|h\rangle = |\chi\rangle$

(p.ej., $\Sigma_{\text{gravitón}}$ $\Sigma_{\text{gravitino}}$)

$$\longleftrightarrow \quad V_\chi(z,\bar z) = \oint dz'\, J_s(z')\, V_h(z,\bar z')\ ,$$

entonces encontramos que



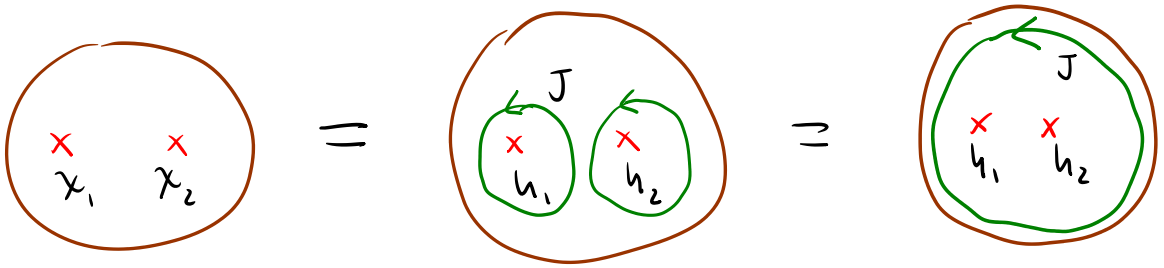
y un número infinito de relaciones similares, en cualquier hoja de mundo sin bordes.

Esto implica en particular que la acción efectiva es invariante bajo estas 32 supersimetrías.

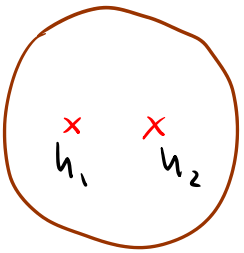
En la teoría tipo I, en cambio, la proyección bajo Ω (=presencia de OS) retiene solo 1 gravitino $\chi + \tilde\chi$, y tenemos ∴ solo 1 supercarga $Q_s + \tilde Q_s \in 16$.

Esta es la misma SUSY preservada por las condiciones de borde (N ∀ μ) de cuerda abierta (=presencia de DS),

que igualan modos izquierdos con derechos. El punto aquí es que, en presencia de Dq-brana(s), tenemos amplitudes No invariantes bajo Q_s ó $\tilde{Q}_s$ por separado:



$\neq$

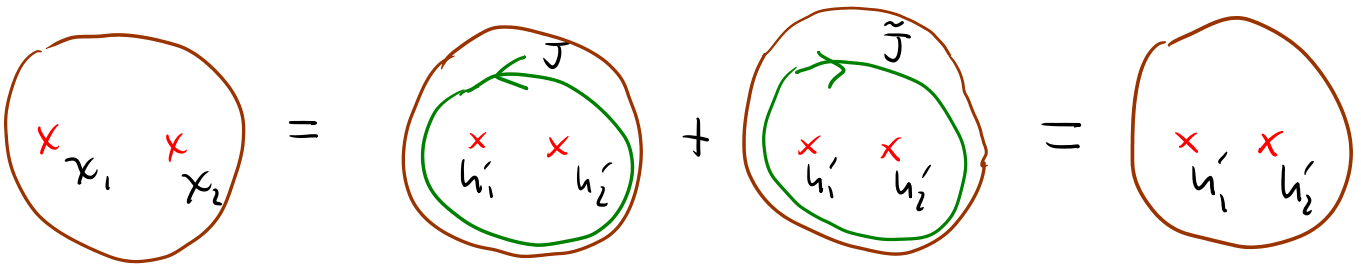


,

pero, dado que las condiciones de borde implican que $J_s(z)\big|_{z=\bar{z}} = \tilde{J}_s(\bar{z})\big|_{z=\bar{z}}$, las amplitudes

SÍ son invariantes bajo las 16 supersimetrías $Q_s + \tilde{Q}_s$:

$$|\chi\rangle = (Q_s + \tilde{Q}_s)|h'\rangle \Longrightarrow$$



.

lunes, 09 de octubre de 2006 05:40 p.m.

Sabemos que $T_c : Q, \tilde{Q} \to Q, \Pi^c \tilde{Q}$, con $\Pi^c \equiv \Gamma^c \Gamma$, por lo que las condiciones de borde asociadas a una Dp-brana (N para $\alpha = 0, \dots, p$; D para $i = p+1, \dots, 9$) preservan las 16 supersimetrías

$$Q_s + (\Pi^\perp \tilde{Q})_s \quad , \text{ con } \Pi^\perp \equiv \underbrace{\Pi^{p+1} \cdots \Pi^9}$$

$k \equiv 9-p$ impar/par en IIA/B,

$\therefore \Pi^\perp$ tiene índices ss'/ss ✓

Notar que

$$\Pi^\perp = \pm \Gamma^0 \Gamma^1 \cdots \Gamma^p$$

El signo de $\Pi^\perp$ en cualquier caso depende del orden en que se realizan las k transformaciones de dualidad T.

Existen $\therefore$ 2 tipos distintos de D-branas p-dimensionales, que llamamos Dp-brana ($\equiv D_p$) y anti-Dp-brana ($\equiv \overline{Dp}$).

Cada una de estos objetos preserva un conjunto de 16 supersimetrías, pero se trata de conjuntos con intersección vacía, por lo que sistema $Dp + \overline{Dp}$ no preserva ninguna supersimetría.

lunes, 09 de octubre de 2006 06:05 p.m.

Resumiendo:

- El estado $|\Omega\rangle \in$ IIA/B que corresponde al vacío en segunda cuantización (no estado fundamental de 1 cuerda, sino estado sin cuerdas), es decir, el espacio Minkowski $(9+1)$-dimensional, es invariante bajo una transformación general

$$\eta_s Q_s + \tilde{\eta}_{\tilde{s}} \tilde{Q}_{\tilde{s}} \quad \text{con } \eta_s, \tilde{\eta}_{\tilde{s}} \text{ arbitrarios}$$

(32 parámetros independientes):

$$|\Omega\rangle' = \exp\left[i\left(\eta_s Q_s + \tilde{\eta}_{\tilde{s}} \tilde{Q}_{\tilde{s}}\right)\right] |\Omega\rangle = |\Omega\rangle$$

$$\longleftrightarrow \quad \boxed{Q_s |\Omega\rangle = 0 = \tilde{Q}_{\tilde{s}} |\Omega\rangle} \quad \forall\, s, \tilde{s}\,.$$

- El estado con 1 Dp-brana $|Dp\rangle \in$ IIA/B (fondo solitónico sin cuerdas), en cambio, es invariante solo bajo transformaciones $\eta_s Q_s + \tilde{\eta}_{\tilde{s}} \tilde{Q}_{\tilde{s}}$ con

$$\tilde{\eta}_{\tilde{s}} = \pm \left(\Gamma^0 \Gamma^1 \cdots \Gamma^p\right)_{\tilde{s}s} \eta_s \quad \text{(16 parámetros independientes)}$$

↑ signo dado

$\longleftrightarrow$ $\boxed{(Q \pm \Gamma^{01\cdots p} \tilde{Q})_s \, |D_p\rangle = 0}$

Las otras 16 supersimetrías $(Q \mp \Gamma^{01\cdots p} \tilde{Q})_s$ están rotas espontáneamente. Esto no es extraño: esperamos justamente que un estado arbitrario rompa la supersimetría (p.ej. $Q_s |1 \text{ gravitón}\rangle \neq 0$), y que solo $|S\rangle$ sea invariante bajo todas las 32 supersimetrías. Que la presencia de la Dp-brana rompa SUSY es análogo al hecho de que rompe la invariancia bajo translaciones. (Y, justo como los escalares $\psi^i_{-1/2} |0;k\rangle_{NS}$ son los bosones de Goldstone asociados a la ruptura de la invariancia translacional, los fermiones $|s;k\rangle_R$ son los 'goldstinos' asociados a la ruptura de la supersimetría.)

Lo que sí es inesperado es que $|Dp\rangle$ preserve parte (la mitad) de las supersimetrías: es un estado BPS (Bogomolnyi–Prasad–Sommerfield).

lunes, 09 de octubre de 2006 08:18 p.m.

Consideremos, p.ej., la Dp-brana: $(Q_s - \Gamma^0_{ss'}\tilde{Q}_{s'})|Dp\rangle = 0$

$$\Rightarrow \quad 0 = \langle Dp| \{ Q_s - \Gamma^0_{ss'}\tilde{Q}_{s'} , \underbrace{(Q_t - \Gamma^0_{tt'}\tilde{Q}_{t'})^\dagger}_{Q_t^\dagger - \tilde{Q}^\dagger_{t'}(\Gamma^0)^\dagger_{t't}} \} |Dp\rangle \quad \forall s,t,$$

$$-\Gamma^0_{t't}$$

(porque $\Gamma^0 = b_0^+ - b_0$)

Utilizando el álgebra de supersimetría

$$\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\} = -p_\mu \Gamma^\mu_{ss'}, \qquad \{\tilde{Q}_{s'}, \bar{\tilde{Q}}_s\} = -p_\mu \Gamma^\mu_{s's}$$

$$\{Q_s, \bar{\tilde{Q}}_t\} = -q\,\delta_{st} + \dots, \qquad \{\tilde{Q}_{s'}, \bar{Q}_{t'}\} = +q\,\delta_{s't'} + \dots,$$

↑ carga central (conservada) ↑

$$0 = \langle Dp| \Big(\underbrace{\{Q_s, Q_t^\dagger\}}_{-\{Q_s, \bar{Q}_{t'}\}\Gamma^0_{t't}} - \Gamma^0_{ss'} \underbrace{\{\tilde{Q}_{s'}, \tilde{Q}^\dagger_{t'}\}}_{-p_\mu \Gamma^\mu_{s't}} \Gamma^0_{t't} - \Gamma^0_{ss'} \underbrace{\{\tilde{Q}_{s'}, Q_t^\dagger\}}_{-q\Gamma^0_{s't}} + \underbrace{\{Q_s, \tilde{Q}^\dagger_{t'}\}}_{+q\Gamma^0_{st'}} \{\Gamma^0_{t't}\} \Big) |Dp\rangle .$$

$$\underbrace{-p_\mu \Gamma^\mu_{st'}}_{+m_{Dp}\,\delta_{st}} \qquad +m_{Dp}\,\delta_{st} \qquad -q_{Dp}\,\delta_{st} \qquad -q_{Dp}\,\delta_{st}$$

$+m_{Dp}\,\delta_{st}$ en marco en reposo

$$p^\mu |Dp\rangle = (m_{Dp}, 0, 0, \dots)|Dp\rangle$$

Concluimos entonces que

$$0 = 2\delta_{st}(m_{Dp} - q_{Dp}) \Longrightarrow \boxed{m_{Dp} = +q_{Dp}},$$

donde vemos que un estado BPS masivo debe portar carga. Notar que en el caso de la anti-Dp-brana hubiéramos obtenido $m_{\bar{D}p} = -q_{\bar{D}p}$: como esperaríamos, $m_{Dp} = m_{\bar{D}p} > 0$ y $q_{Dp} = -q_{\bar{D}p} > 0$.

Repitiendo el mismo cálculo actuando con $Q_s \pm \Gamma^0_{ss'}\tilde{Q}_{s'}$ sobre un estado $|X\rangle$ arbitrario y tomando el término $s=t$ obtenemos

$$0 \leq |(Q_s \pm \Gamma^0_{ss'}\tilde{Q}_{s'})^\dagger |X\rangle|^2 + |(Q_s \pm \Gamma^0_{ss'}\tilde{Q}_{s'})|X\rangle|^2$$

$$= 2(m_X \pm q_X),$$

es decir,

$$\boxed{m_X \geq |q_X|}$$ Desigualdad BPS [Witten, Olive 1978]

(Bautizada así por analogía con una cota similar descubierta por BPS para el monopolo 't Hooft-Polyakov.)

lunes, 09 de octubre de 2006 09:08 p.m.

los estados BPS, que son aniquilados por alguna fracción de las supercargas (en este caso, la mitad), son aquellos que saturan esta desigualdad: portan la mínima masa posible para la carga dada. Esto implica en particular que son estables.

Notar que, en el caso de la Dp-brana, con $m_{Dp} = T_{Dp}$, las 16 supercargas $Q_s + \Gamma^0_{ss'} \tilde{Q}_{s'}$ que no aniquilan $|Dp\rangle$ satisfacen el álgebra

$$\left\{ Q_s + \Gamma^0_{ss'} \tilde{Q}_{s'}, \left(Q_t + \Gamma^0_{tt'} \tilde{Q}_{t'}\right)^\dagger \right\} |Dp\rangle = 4 m_{Dp} \delta_{st} |Dp\rangle .$$

Recordando que los espinores $Q, \tilde{Q}$ son, además de Weyl, Majorana ($\overline{Q}_{s'} \equiv Q_s^\dagger \Gamma^0_{ss'} \downarrow = Q_s^T C_{ss'}$, con $C \equiv \Gamma^0 \Gamma^3 \Gamma^5 \Gamma^7 \Gamma^9$), esto significa que tenemos 8 pares de operadores de creación/aniquilación fermiónicos. Actuando con ellos sobre $|Dp\rangle$, obtenemos un supermultiplete $2^8 = 256$-dimensional.

Es decir, cuando hablamos de 1 D0-brana, estamos en realidad considerando uno de 128 estados bosónicos + 128 estados fermiónicos, que tienen todos la misma masa y la misma carga. Este es el mismo número de estados que encontramos en el supermultiplete no masivo (que ahora entendemos como un caso particular de estados BPS, que tienen $q=0$).

En cambio, a partir de un estado masivo no BPS $|X\rangle$, con $m_X > |q_X|$, obtendríamos un supermultiplete $2^{32/2} = 2^{16} = 256^2$-dimensional.

Hemos aprendido ∴ que los estados BPS tienen otra propiedad especial: forman parte de supermultipletes cortos.

miércoles, 11 de octubre de 2006 06:00 p.m.

De la misma manera, las Dp-branas con otros valores de p son masivas y BPS solo porque portan una carga conservada que aparece en el álgebra de supersimetría, cuya forma general involucra

$$\{\tilde{Q}_{\tilde{s}}, \underbrace{\bar{Q}_{t'}}_{Q^{\dagger}_{t}\,\Gamma^{0}_{tt'}}\} = \sum_{p} \frac{1}{p!}\, q^{\mu_1\cdots\mu_p} \left(\Gamma_{\mu_1\cdots\mu_p}\right)_{\tilde{s}t'}$$

↑ Carga Central

(solo con respecto a $Q, \tilde{Q}, P_\mu$)

con $p \begin{cases} \text{par} \\ \text{impar} \end{cases}$ $\left(\text{y } \tilde{s} = \begin{cases} s' \\ s \end{cases}\right)$ en $\begin{matrix} \text{IIA} \\ \text{IIB} \end{matrix}$.

¿Qué significa $q^{\mu_1\cdots\mu_p}$? El punto aquí es que la carga que naturalmente porta un objeto extendido no es una carga escalar convencional. Sabemos que la línea de mundo asociada a una partícula (0-brana) se acopla de manera natural a un campo de norma convencional A_μ (o, lo que es lo mismo a una 1-forma $A_{(1)} \equiv A_\mu dx^\mu$):

$$S_0 \supset q \int_{M_1} A_{(1)} \equiv q \int_{M_1} d\tau \, \underbrace{\partial_\tau X^\mu A_\mu(X(\tau))}_{\equiv A_\tau(\tau)} ,$$

q: carga; M_1: línea de mundo; $A_\tau(\tau)$: retracción de A_μ a la línea de mundo

que podemos reescribir como

$$\int d^D x \; J^\mu(x) A_\mu(x) ,$$

donde la corriente está definida por

$$J^\mu(x) \equiv q \int_{M_1} d\tau \, \partial_\tau X^\mu \delta^{(D)}(x - X(\tau)) .$$

Notar que, como esperaríamos,

$$\int d^{D-1} x \, J^0(x) = q \int_{M_1} d\tau \, \partial_\tau X^0 \, \delta^{(1)}(x^0 - X^0(\tau)) = q$$

$J^0(x)$: densidad de carga escalar; q: carga escalar total

Conocemos también la generalización al caso de una 1-brana —se trata simplemente de la manera en que la hoja de mundo de la cuerda se

acopla naturalmente al campo de norma generalizado $B_{\mu\nu}$ (o, lo que es lo mismo, a la 2-forma $B_{(2)} \equiv \frac{1}{2} B_{\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$):

$$S_2 \supset \rho_2 \int_{M_2} B_{(2)} \equiv \rho_2 \int_{M_2} d\tau d\sigma \underbrace{\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X^\nu B_{\mu\nu}(X(\tau,\sigma))}_{\equiv B_{\tau\sigma}(\tau,\sigma) \text{ retracción a } M_2}$$

(ρ_2: densidad de carga (T/L))

$$= \frac{1}{2} \int d^D x\, J^{\mu\nu}(x) B_{\mu\nu}(x)$$

con corriente generalizada

$$J^{\mu\nu}(x) \equiv \rho_2 \int d\tau d\sigma\, \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \epsilon^{ab} \delta^{(D)}(x - X(\tau,\sigma)).$$

Notar que esta corriente se conserva,

$$\partial_\mu J^{\mu\nu}(x) = \rho_2 \int d\tau d\sigma\, \partial_b X^\nu \epsilon^{ab} \underbrace{\partial_a X^\mu \partial_\mu \delta^{(D)}(x - X(\tau,\sigma))}_{\partial_a \delta^{(D)}(x - X(\tau,\sigma))}$$

$$- \underbrace{\partial_a \partial_b X^\nu \epsilon^{ab}}_{=0} \delta^{(D)}(x - X(\tau,\sigma))$$

(como es necesario para que su acoplamiento a $B_{\mu\nu}$ sea invariante de norma), por lo que resulta natural definir una carga conservada generalizada

$$q^\mu \equiv \int d^{D-1}x\, J^{0\mu}(x) = \rho_2 \int_{M_2} d\tau d\sigma\, \partial_a X^0 \partial_b X^\mu \epsilon^{ab} \delta^{(1)}(x^0 - X^0(\tau,\sigma))$$

que en la norma $\tau = X^0$ se reduce a

$$q^\mu = \rho_2 \int d\sigma\, \partial_\sigma X^\mu = \rho_2 \int dX^\mu$$

ρ_2: densidad de carga; $\int dX^\mu$: extensión total de la cuerda en dirección μ

q^μ: carga vectorial total

Este vector claramente contiene información no solo sobre la magnitud de la carga neta, sino también sobre la orientación de la cuerda.

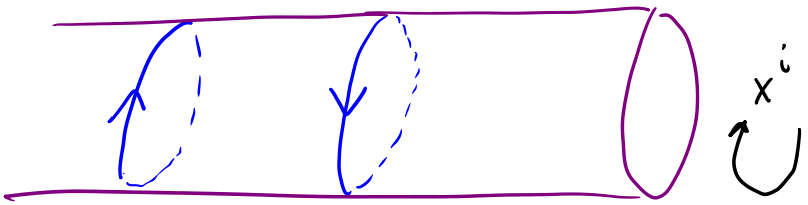
En esencia, q^μ codifica $D-1$ 'tipos de carga' asociados a '$D-1$ campos de norma' $B_{\mu\nu}$.

P.ej., para una cuerda cerrada definida sobre T^{D-1},

$$q^i = \rho_1 \int dX^i = \rho_1 \, e^i \, 2\pi R_i \quad \text{(sin suma)}$$

e^i: número de enrollamiento

Notar que, de acuerdo con esto, el signo de la carga depende de la orientación de la cuerda:



Cuerda Anticuerda

Todo esto tiene una generalización obvia al caso de una p-brana: su volumen de mundo se acopla de manera natural a un campo de norma generalizado $C_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}}$ ($\leftrightarrow$ (p+1)-forma $C_{(p+1)} \equiv \frac{1}{(p+1)!} C_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_{p+1}}$),

$$S_p \supset \rho_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} C_{(p+1)} \equiv \rho_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} d^{p+1}\sigma \, \partial_0 X^{\mu_1} \cdots \partial_p X^{\mu_{p+1}} C_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}}(X(\sigma))$$

ρ_p: densidad de carga (q/p-volumen)

$\partial_0 X^{\mu_1} \cdots \partial_p X^{\mu_{p+1}} C_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}}(X(\sigma)) \equiv C_{01\cdots p}(\sigma)$ retracción

miércoles, 11 de octubre de 2006 11:29 p.m.

$$= \frac{1}{(p+1)!} \int d^D x \; J^{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}}(x) C_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}}(x) \;,$$

donde la corriente generalizada

$$J^{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}}(x) \equiv \rho_p \int_{\mu_{p+1}} d^{p+1}\sigma \, \partial_{a_1} X^{\mu_1} \cdots \partial_{a_{p+1}} X^{\mu_{p+1}} \epsilon^{a_1 \cdots a_{p+1}} \delta^{(D)}(x - X(\sigma))$$

da lugar a carga conservada generalizada

$$q^{\mu_1 \cdots \mu_p} \equiv \rho_p \int d^{D-1}x \, J^{0 \mu_1 \cdots \mu_p}(x)$$

$$= \rho_p \int d^{p+1}\sigma \, \partial_{a_1} X^0 \partial_{a_2} X^{\mu_1} \cdots \partial_{a_{p+1}} X^{\mu_{p+1}} \epsilon^{a_1 \cdots a_{p+1}} \delta^{(1)}(x^0 - X^0(\sigma))$$

$$q^{\mu_1 \cdots \mu_p} = \rho_p \int dX^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dX^{\mu_{p+1}}$$

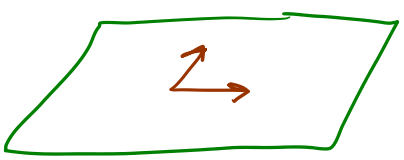
$q^{\mu_1 \cdots \mu_p}$: carga tensorial total

$\int dX^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dX^{\mu_{p+1}}$: volumen total c/orientación

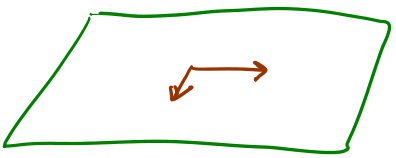
De acuerdo con esto, una p-brana enrollada 1 vez sobre p-toro recto en direcciones $123 \cdots p$ tiene carga

$$q^{123 \cdots p} = \rho_p (2\pi R_1) \cdots (2\pi R_p) = \rho_p V_p$$

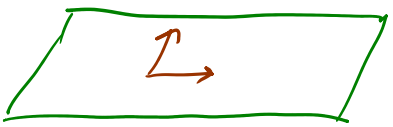
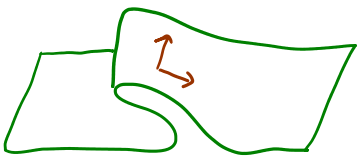
Podemos considerar en particular el límite de descompactificación $R_i \to \infty$, en cuyo caso obtenemos una brana infinita (con densidad de carga ρ_p finita). Vemos también nuevamente que el signo de la carga depende de la orientación de la brana (elección de un orden canónico para base en espacio tangente):



brana



antibrana

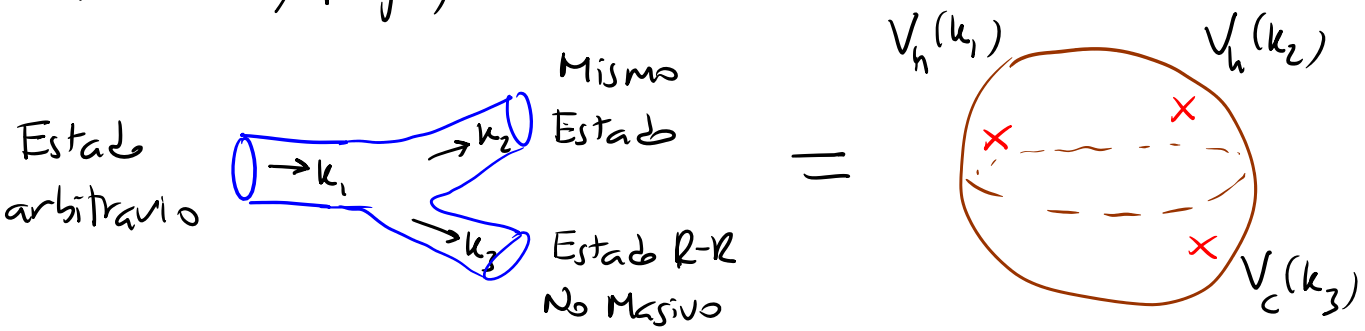
(y  y  tienen cargas iguales).

Ahora, habiendo entendido la naturaleza de la carga generalizada que porta un objeto p-dimensional, nos preguntamos ¿a qué campo de norma se acopla una Dp-brana? Hemos visto que $q^{\mu_1 \cdots \mu_p}$ aparece en $\{\tilde{Q}, \bar{Q}\} \leftrightarrow (NS, R) \times (R, NS) = (R, R)$, y debe ser por lo tanto una carga Ramond-Ramond.

jueves, 12 de octubre de 2006 12:47 a.m.

Recordar que los vértices R-R no masivos involucran no directamente al campo de norma $C_{(p+1)}$ sino a la intensidad de campo $G_{(p+2)} \equiv dC_{(p+1)}$ (cuyas componentes son por definición $\partial_{[\mu_1} C_{\mu_2 \cdots \mu_{p+2}]}$).

Esto implica en particular que las amplitudes con vértices R-R se anulan cuando el momento correspondiente se hace cero, p.ej.,



$$\longrightarrow_{k_3 \to 0} 0 .$$

Vemos así que no existen en el lagrangiano efectivo términos $\sim g_{RR} h^2 C$ (como sí los hay $\sim g_{NSNS} h^2 B$), lo cual indica que ¡ninguna estado de oscilación de la cuerda porta carga R-R!

Las D-branas, en cambio, sí portan carga R-R (y no carga NS-NS); con ellas tenemos de hecho una fuente para cada campo de norma.

Para ver esto, recordemos primero que la intensidad de campo R-R $G_{(p+2)} = d C_{(p+1)}$, que estaría naturalmente asociada a Dp-brana, satisface en ausencia de fuentes la ec de mov. $d * G_{(p+2)} = 0$ (dual de Hodge)

(generalización de la ec. de Maxwell $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$)

y la identidad de Bianchi $d G_{(p+2)} = 0$ (generalización de $\partial^\mu * F_{\mu\nu} = 0$).

Podemos describir la misma física usando la intensidad de campo dual $G_{(8-p)} \equiv * G_{(p+2)}$

Canáloga a $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho}$, que intercambia $(\vec{E}, \vec{B}) \leftrightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$, con campo de norma asociado $C_{(7-p)}$ (definido tal que $G_{(8-p)} = d C_{(7-p)}$), que se acoplaría naturalmente a D(6-p)-brana.

En estas variables, lo que antes era la identidad de Bianchi se reconoce ahora como la ec. de mov. $d*G_{(8-p)}=0$, y la anterior ec. de mov. es ahora la identidad de Bianchi $dG_{(8-p)}=0$.

En presencia de una Dp-brana tenemos

$$d*G_{(p+2)} \propto \rho_p \delta^{(9-p)}(x) \quad \longleftrightarrow \quad \text{Dp-brana es una fuente 'eléctrica' para } C_{(p+1)}$$

o, de manera equivalente,

$$dG_{(8-p)} \propto \rho_p \delta^{(9-p)}(x) \quad \longleftrightarrow \quad \text{Dp-brana es una fuente 'magnética' para } C_{(7-p)}$$

(El hecho de que la identidad de Bianchi para $G_{(8-p)}$ no se cumpla significa que $C_{(7-p)}$ no se puede definir globalmente, que es justo la situación que tenemos para el campo de Maxwell A_μ en presencia de un monopolo magnético.)

A la inversa, D(6-p)-brana es una fuente eléctrica para $C_{(7-p)}$ y magnética para $C_{(p+1)}$.

lunes, 16 de octubre de 2006 03:51 p.m.

Tenemos entonces

- En teoría IIA : D0 D2 D4 D6 D8

Fuente eléctrica de : $C_{(1)}$ $C_{(3)}$ $C_{(5)}$ $C_{(7)}$ $C_{(9)}$

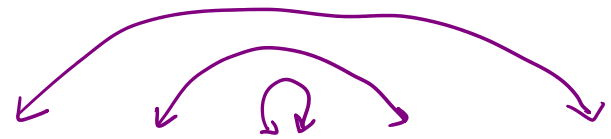
Fuente magnética de : $C_{(7)}$ $C_{(5)}$ $C_{(3)}$ $C_{(1)}$ $"C_{(-1)}"$

(Notar que $G_{(10)} = dC_{(9)}$ satisface $d * G_{(10)} \equiv dG_{(0)} = 0$

$\Rightarrow G_{(0)} = cte$, $\therefore$ $\not\exists$ fluctuaciones

— análogo a $F_{\mu\nu}$ en 2 dimensiones.

$G_{(0)}$ toma valores distintos en lados opuestos de D8.)



- En teoría IIB : D(-1) D1 D3 D5 D7 D9

Fuente eléctrica de $C_{(0)}$ $C_{(2)}$ $C^{+}_{(4)}$ $C_{(6)}$ $C_{(8)}$ $C_{(10)}$

Fuente magnética de: $C_{(8)}$ $C_{(6)}$ $C^{+}_{(4)}$ $C_{(2)}$ $C_{(0)}$ $"C_{(-2)}"$

D(-1)-brana denota "objeto" asociado a cuerdas abiertas con condiciones de borde D $\forall \mu = 0, \ldots, 9$,

objeto que existe entonces solo un instante : instantón

lunes, 16 de octubre de 2006 04:18 p.m.

(Notar que $G_{(11)} = d C_{(10)} = 0 \Rightarrow C_{(10)} = cte.$

$\therefore$ $\nexists$ fluctuaciones — análogo a A_μ en 1 dim.)

Vemos entonces que el hecho de que de que las teorías IIA/B incluyan en su espectro no perturbativo Dp-branas con p par/impar implica que contienen una fuente (eléctrica y magnética) para c/u de los campos de norma Ramond-Ramond!

Para que $C_{(p+1)}$ tuviera normalización canónica escribiríamos como término cinético

$$-\int d^{10}x \sqrt{-g}\, \frac{1}{2(p+1)!}\, g^{\mu_1\nu_1} \cdots g^{\mu_{p+2}\nu_{p+2}} G_{\mu_1 \cdots \mu_{p+2}} G_{\nu_1 \cdots \nu_{p+2}}$$

($g^{\mu\nu}$: métrica en espaciotiempo; G: intensidad de campo R-R)

$$\left(\Rightarrow [G] = M^5,\ [C] = M^4\right),$$

pero en vez de esto usaremos la normalización habitual para los campos de supergravedad:

lunes, 16 de octubre de 2006 04:34 p.m.

$$-\frac{1}{2\kappa^2}\int d^{10}x\sqrt{-g}\,\frac{1}{2(p+2)!}\underbrace{g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_{p+2}\nu_{p+2}}G_{\mu_1\cdots\mu_{p+2}}G_{\nu_1\cdots\nu_{p+2}}}_{\equiv G^2_{(p+2)}}$$

$\left(\equiv 16\pi G_N\right)$

$$\left([\kappa^2]=M^{-8}\Rightarrow [G]=M^1,\ [C]=M^0\right).$$

Con esta normalización, el término de acoplamiento entre $C_{(p+1)}$ y Dp-brana es

$$\rho_{Dp}\int d^{p+1}\sigma\,\partial_{\sigma^0}X^{\mu_1}\cdots\partial_{\sigma^{p+1}}X^{\mu_{p+1}}C_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}(X),$$

ρ_{Dp} ← densidad de carga

con $[\rho_p]=M^{p+1}\Longrightarrow [q_p\equiv\rho_p V]=M$,

justamente como usamos en la desigualdad BPS:

$$M_X\geq q_{pX},\qquad \boxed{M_{Dp}=q_{Dp}}$$

(para Dp-branas sin excitar),

o, definiendo la tensión $\tau\equiv\frac{\text{masa}}{p\text{-volumen}}$,

$$\boxed{\tau_{Dp}=\rho_{Dp}}$$

lunes, 16 de octubre de 2006 05:27 p.m.

Notar que para la cuerda usamos este mismo tipo de normalización, puesto que escribimos el término de acoplamiento al campo de norma B_{α} en la forma

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'}}_{\equiv \rho_{F1}} \int d^2\sigma\, \partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X^\nu B_{\mu\nu}(X) \,,$$

$\leftarrow [B] = M^0$

lo cual dice que la densidad de carga de la cuerda fundamental ($\equiv F1$) es igual a su tensión:

$$\boxed{\tau_{F1} = \rho_{F1}}$$

Esto parecería nuevamente provenir de una desigualdad BPS, y en efecto es así: el punto es que, al calcular $\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\}$ a través de EPO, lo que obtenemos es en realidad

$$V_s(z) \cdot V_{s'}(0) \sim -\frac{1}{z} \Gamma^\mu_{ss'} \partial X_\mu(0) \,,$$

de donde

lunes, 16 de octubre de 2006 05:41 p.m.

$$\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\} = -\underbrace{P_I^\mu (\Gamma^\mu)_{ss'}}_{\equiv p^\mu + q^\mu_{NS}}$$

← carga central proporcional al enrollamiento de F1:

$$q^\mu_{NS} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\underbrace{\left[X^\mu(\sigma=2\pi) - X^\mu(\sigma=0)\right]}_{\equiv \Delta X^\mu}$$

$$(R,NS)\times(R,NS) = (NS,NS)$$

(para dirección compacta $\mu = i$, $P_I^i \equiv p^i + q^i_{NS} = \frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'}$).

De manera similar, $\{\tilde{Q}_{s'}, \bar{\tilde{Q}}_{s}\} = -\underbrace{P_D^\mu (\Gamma^\mu)_{s's}}_{\equiv p^\mu - q^\mu_{NS}}$

A partir de estas relaciones de anticonmutación, podemos concluir que un estado $|F1\rangle$ donde la cuerda sin excitar está extendida únicamente en la dirección $+x^i$, y tiene $\therefore q^i_{NS} > 0$, es BPS:

$$\left[Q_s - (\Gamma^0\Gamma^1)_{st} Q_t\right]|F1\rangle = \left(\mathbb{1} - \Gamma^0\Gamma^1\right)_{st} Q_t |F1\rangle = 0$$

$$\updownarrow$$

$$\left[\tilde{Q}_{\tilde{s}} + (\Gamma^0\Gamma^1)_{\tilde{s}\tilde{t}}\tilde{Q}_{\tilde{t}}\right]|F1\rangle = \left(\mathbb{1} + \Gamma^0\Gamma^1\right)_{\tilde{s}\tilde{t}}\tilde{Q}_{\tilde{t}}|F1\rangle = 0$$

lunes, 16 de octubre de 2006 06:16 p.m.

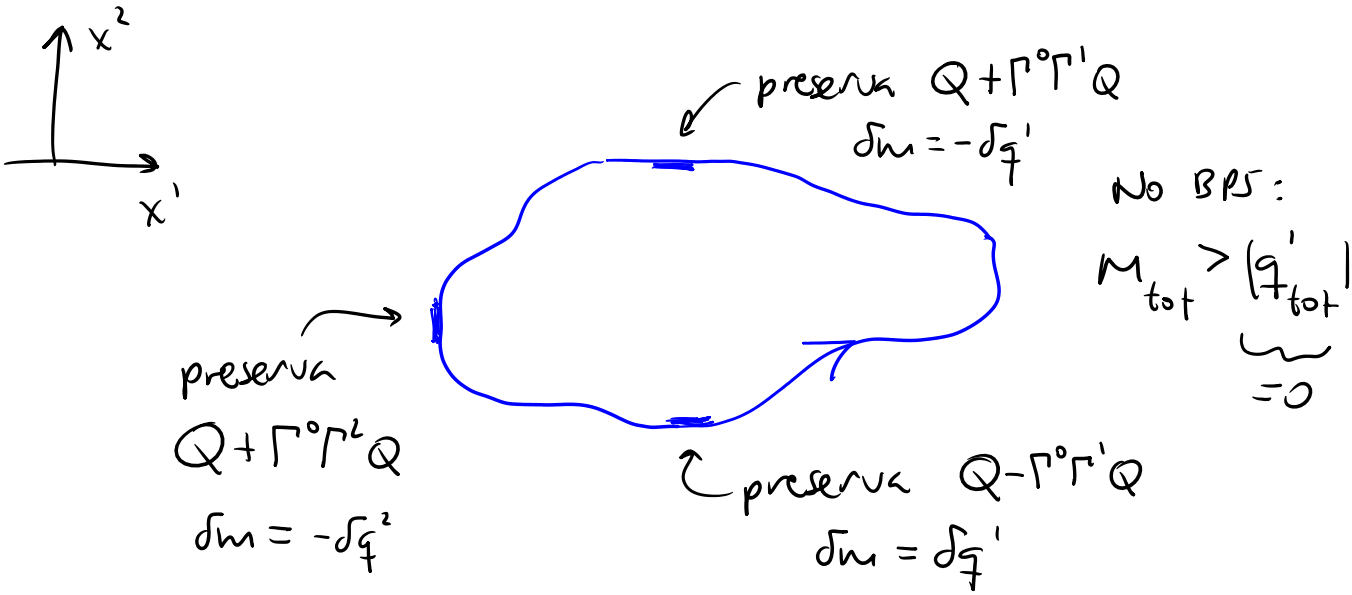
$$(\Gamma^0\Gamma^1)^2 = \mathbb{1}, \quad \sum_s (\Gamma^0\Gamma^1)_{ss} = \sum_s (2b_0^\dagger b_0 - \mathbb{1})_{ss} = \sum_s (2(s_0+\tfrac{1}{2}) - 1) = 0$$

$\Rightarrow (\Gamma^0\Gamma^1)_{st}$ tiene 8 autovalores $+1$ y 8 autovalores -1

$\therefore |F1\rangle$ preserva 16 supersimetrías. La 'anticuerda' $|\overline{F1}\rangle$, que tiene $q^i_{NS} < 0$, preserva las otras 16. Ambas satisfacen

$$M_{F1} = \pm q^i_{F1} = |q^i_{F1}| \quad \longleftrightarrow \quad \tau_{F1} |\Delta X^i| = \rho_{F1} |\Delta X^i| .$$

Esto implica en particular que $\tau_{F1} = \rho_{F1}$, relación que, más en general, expresa el hecho de que cada trozo de una cuerda sin excitar es 'localmente' BPS (porta tanta carga como masa), aún cuando la cuerda en su conjunto pudiera no serlo:



miércoles, 18 de octubre de 2006 06:24 p.m.

Incluyendo las cargas que portan la F1 y las Dp, hemos visto que tenemos el álgebra de supersimetría

$$\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\} = -(p^\mu + q^\mu_{NS})(\Gamma_\mu)_{ss'}$$

$$\{\tilde{Q}_{s'}, \bar{\tilde{Q}}_{s}\} = -(p^\mu - q^\mu_{NS})(\Gamma_\mu)$$

$$\{\tilde{Q}_{s'}, \bar{Q}_{t'}\} = +\sum_p \frac{1}{p!} q_R^{\mu_1 \cdots \mu_p} (\Gamma_{\mu_1 \cdots \mu_p})_{s't'}$$

← par/impar en IIA/B

En esta última expresión, debemos incluir en la suma las cargas R-R portadas por todos los distintos tipos de D-branas presentes en IIA/B. Recordando que $q_R^{\mu_1 \cdots \mu_p} \equiv \int d^{10}x \, J_R^{0 \mu_1 \cdots \mu_p}(x)$ es $\neq 0$ solo para índices espaciales, una opción sería incluir

$$\sum_{p=\begin{cases}0,2,4,6,8\\1,3,5,7,9\end{cases}} \frac{1}{p!} q_R^{i_1 \cdots i_p} (\Gamma_{i_1 \cdots i_p})_{s't'}$$

jueves, 19 de octubre de 2006 08:51 a.m.

Pero, recordando que nuestras supercargas tienen quiralidad definida, una segunda opción es reescribir los términos con $p \geq 5$ multiplicando por Γ para reemplazar

$$q_R^{i_1 \cdots i_p} \Gamma_{i_1 \cdots i_p} \longrightarrow \pm q_R^{i_1 \cdots i_p} \underbrace{\Gamma^{\mu_1 \cdots \mu_{10-p}} \epsilon_{i_1 \cdots i_p \mu_1 \cdots \mu_{10-p}}}_{\Gamma^{j_1 \cdots j_p} \text{ con } j_\ell \neq i_k}$$

$$\equiv q_R^{\mu_1 \cdots \mu_{10-p}} \Gamma_{\mu_1 \cdots \mu_{10-p}},$$

↑ tiene siempre un índice temporal

después de lo cual tenemos

$$\{\tilde{Q}_{s'}^{s}, \bar{Q}_{t'}\} = + \sum_{p=\begin{cases}0,2,4\\1,3,5\end{cases}} \frac{1}{p!} q_R^{\mu_1 \cdots \mu_p} \left(\Gamma_{\mu_1 \cdots \mu_p}\right)_{s't'}^{s},$$

con $\mu_k = 0, \ldots, 9$ (y $q_R^{\mu_1 \cdots \mu_5}$ autodual o antiautodual).

Notar que, en el lado izquierdo, tenemos $16 \times 16 = 256$ anticonmutadores independientes. ¿Cuántas cargas independientes tenemos en el lado derecho?

jueves, 19 de octubre de 2006 09:10 a.m.

$$\text{IIA}: \quad \underset{p=0}{1} + \frac{10\cdot 9}{2} + \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4} = 1 + 45 + 210 = 256$$

$$\text{IIB}: \quad \underset{p=1}{10} + \frac{10\cdot 9\cdot 8}{2\cdot 3} + \frac{1}{2}\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 10 + 120 + 126 = 256$$

En lo que se refiere al anticonmutador $\{\tilde{Q}, \bar{Q}\}$, no podrían existir ∴ términos adicionales del lado derecho: tenemos un álgebra 'máximamente extendida'. Así que ∄ más objetos R-R BPS.

Examinemos ahora los anticonmutadores restantes desde esta misma perspectiva:

$$\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\} = -(p^\mu + q^\mu_{Ns})(\Gamma_\mu)_{ss'}$$

$$\{\tilde{Q}_{s'}, \bar{\tilde{Q}}_{s}\} = -(p^\mu - q^\mu_{Ns})(\Gamma_\mu)^{s's}_{ss'}$$

Sabemos que q^i_{Ns} $(\leftrightarrow B_{\mu i})$ es portada por F1, que puede ser entonces BPS. Y, de manera similar a lo que dijimos para las Dp-branas, q^0_{Ns} puede

interpretarse como la carga asociada a una brana extendida en $10-1=9$ dimensiones: una NS9-brana [ver hep-th/9705162, 0410185]. El campo de norma asociado, $B_{(10)}$, claramente no tendría fluctuaciones (justo como $C_{(10)}$ que se acopla a D9).

Obviamente sabemos también el significado de las cargas p^{μ} ($\leftrightarrow g_{\mu\nu}$). Los estados BPS correspondientes son simplemente estados no masivos.

Claramente, tanto en los anticonmutadores $Q-\bar{Q}$ como en los $\tilde{Q}-\bar{\tilde{Q}}$, tenemos más cantidades independientes en el lado izquierdo que en el derecho: recordando que las supercargas son Majorana (y $\therefore$ $\bar{Q}$ no es independiente de Q),

$$\frac{16\times 17}{2} = 136 \text{ anticonmutadores vs. } 10 \text{ cargas}$$

En ambos casos pudieran existir entonces objetos BPS adicionales que porten $136-10=126$ nuevas cargas.

jueves, 19 de octubre de 2006 09:42 a.m.

Y hemos visto más arriba que 126 es precisamente el número de cargas en un tensor $q^{\mu_1 \cdots \mu_5}$ autodual o antiautodual.

Esto sugiere ∴ la posible existencia de 5-branas BPS tanto en IIA como en IIB.

Y estos objetos de hecho existen:

$\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\}$ incluye $-\frac{1}{5!} q^{\mu_1 \cdots \mu_5}_{NS_+} (\Gamma_{\mu_1 \cdots \mu_5})_{ss'}$ ← autodual

y

$\{\tilde{Q}_s, \tilde{\bar{Q}}_{s'}\}$ incluye $-\frac{1}{5!} q^{\mu_1 \cdots \mu_5}_{NS_-} (\Gamma_{\mu_1 \cdots \mu_5})^{s's}_{s\,s'}$, ← antiautodual

de manera tal que las cargas

$\frac{1}{2}(q_{NS_+} \pm q_{NS_-})^{\mu_1 \cdots \mu_5}$ son los duales magnéticos

de la carga de F1 (enrollamiento) q^{μ}_{NS}

y del momento (número de KK) p^{μ}, respectivamente,

y los objetos que las portan son

NS5-brana, fuente magnética de $B_{(2)}$

KK5-brana, fuente magnética de vector KK $A_{(1)}$ $(A_\mu \equiv g_{\mu c})$

Como veremos más adelante, ambas se pueden describir como configuraciones solitónicas de los campos de supergravedad.

En base a las propiedades de transformación de las supercargas bajo dualidad T se puede mostrar que

$$\text{NS5 en IIA/B} \xleftrightarrow{T_\alpha} \text{NS5 en IIB/A}$$

$$\text{NS5 en IIA/B} \xleftrightarrow{T_i} \text{KK5 en IIB/A}$$

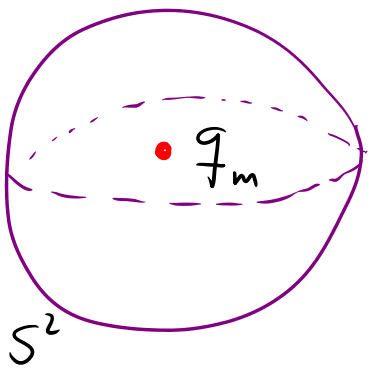
(donde α, i denotan respectivamente direcciones paralelas y perpendiculares a las 5-branas)

[Ver hep-th/9708086].

miércoles, 25 de octubre de 2006 08:31 p.m.

Habiendo visto ya que la teoría 'de cuerdas' incluye fuentes tanto eléctricas como magnéticas para diversos campos de norma, debemos recordar que Dirac mostró que en tales circunstancias las cargas eléctricas y magnéticas deben satisfacer una cierta regla de cuantización.

Su argumento original se refería a un monopolo magnético en 3+1 dimensiones,



en cuya presencia la identidad de Bianchi se modifica a

$$dF_{(2)} = q_m \delta^{(3)}(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \int_{B_3} dF_{(2)} = \int_{S_2 \equiv \partial B_3} F_{(2)} = q_m$$

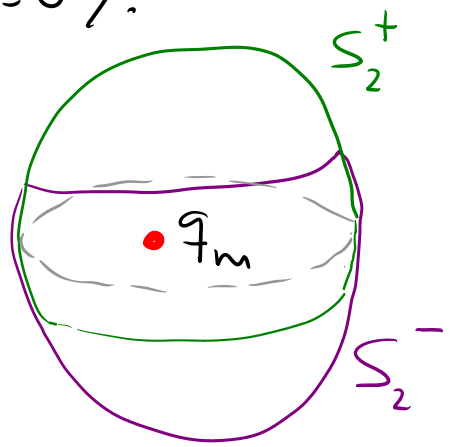
(Justo del mismo modo que la ec. de mov.

$$d * F_{(2)} = \rho_e \Longrightarrow \int_{S^2} * F_{(2)} = q_e . \;)$$

miércoles, 25 de octubre de 2006 08:45 p.m.

$q_m \neq 0$ claramente implica que NO es posible encontrar $A_{(1)}$ definido globalmente que satisfaga $F_{(2)} = dA_{(1)}$ (porque en ese caso tendríamos necesariamente $dF_{(2)} = 0$).

Lo que sí resulta posible es definir por separado $A^+_{(1)}$ y $A^+_{(1)}$ en los "hemisferios" norte y sur S_2^+ y S_2^-, respectivamente, con $A^+_{(1)} = A^-_{(1)} + d\lambda$



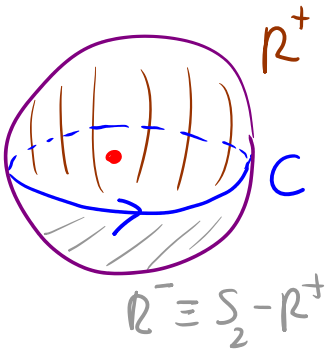
en la franja ecuatorial $S_2^+ \cap S_2^-$ (lo cual es necesario para garantizar que ambos campos de norma definen la misma intensidad de campo en el traslape, $dA^+_{(1)} = F_{(2)} = dA^-_{(1)}$).

Una carga eléctrica que se mueva a lo largo de una curva C en la franja ecuatorial se acopla directamente a $A^+_{(1)}$ ó $A^-_{(1)}$, adquiriendo ∴ una fase

miércoles, 25 de octubre de 2006 08:58 p.m.

$$\exp\left(i q_e \oint_C A^+_{(1)}\right) = \exp\left(i q_e \int_{R^+} F_{(2)}\right) \equiv \Phi^+$$

$C = \partial R^+$



ó

$$\exp\left(i q_e \oint_C A^-_{(1)}\right) = \exp\left(-i q_e \int_{R^-} F_{(2)}\right) \equiv \Phi^-$$

$C = -\partial R^-$

Por consistencia debemos tener entonces $\Phi^+ = \Phi^-$, es decir,

$$1 = \exp\left[i q_e \left(\int_{R^+} F_{(2)} + \int_{R^-} F_{(2)}\right)\right] = \exp\left[i q_e \int_{S_2} F_{(2)}\right]$$

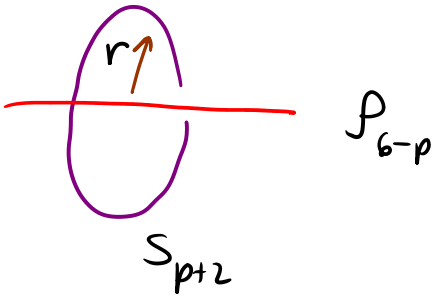
$$= \exp\left[i q_e q_m\right]$$

$$\Rightarrow \quad q_e q_m = 2\pi n \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

Este argumento se generaliza directamente al caso en D dimensiones donde p-brana es una fuente eléctrica para campo de norma $C_{(p+1)}$ y (D-4-p)-brana es su contraparte magnética [Neponnechie (1985); Teitelboim (1986)].

miércoles, 25 de octubre de 2006 10:14 p.m.

A nosotros nos interesa el caso $D = 9+1$, donde el monopolo magnético no es en general una cero-brana como consideró Dirac, sino una $(6-p)$-brana. Semejante objeto tiene $3+p$ dimensiones transversales, que podemos separar en una dirección radial y una esfera $(p+2)$-dimensional.



Con la normalización (propia de supergravedad) que adoptamos para el campo de norma $A_{(p+1)}$, la identidad de Bianchi es ahora

$$\partial F_{(p+2)} = 2K^2 \rho_{6-p} \delta^{(3+p)}(\vec{x}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2K^2} \int_{S_{p+2}} F_{(p+2)} = \rho_{6-p}$$

(mientras que la ec. de mov. es

$$\partial * F_{(p+2)} = 2K^2 \rho_p \delta^{(9-p)}(\vec{x}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2K^2} \int_{S_{8-p}} * F_{(p+2)} = \rho_p \,).$$

Definiendo como antes $A^{\pm}_{(p+1)}$ en "hemisferios" $S^{\pm}_{p+2}$, y considerando una p-brana que se mueve en

miércoles, 25 de octubre de 2006 10:49 p.m.

la franja ecuatorial $S^+_{p+2} \cap S^-_{p+2}$, acoplándose al campo de norma a través de $\rho_p \int_{M_{p+1}} A^{\pm}_{(p+1)}$, obtenemos la condición de cuantización

$$2\kappa^2 \rho_p \rho_{6-p} = 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Para branas 'localmente' BPS, como lo son todas las que hemos visto hasta ahora, esto implica

$$2\kappa^2 \tau_p \tau_{6-p} = 2\pi n \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Tomemos p.ej. el caso de la cuerda fundamental, que está cargada eléctricamente bajo $B_{(2)}$, y tiene

$$\tau_{F1} \equiv \frac{1}{2\pi \ell_c^2}.$$

Su dual magnético, la NS5-brana, debe tener una tensión que es un múltiplo de $\frac{2\pi}{2\kappa^2 \tau_{F1}}$. Si suponemos que porta el cuanto mínimo de carga magnética,

miércoles, 25 de octubre de 2006 11:04 p.m.

y fijamos la normalización de la constante de acoplamiento de cuerdas g_c definiendo

$$2\kappa^2 \equiv 16\pi G_N \equiv (2\pi)^7 g_c^2 \ell_c^8 ,$$

concluiríamos que

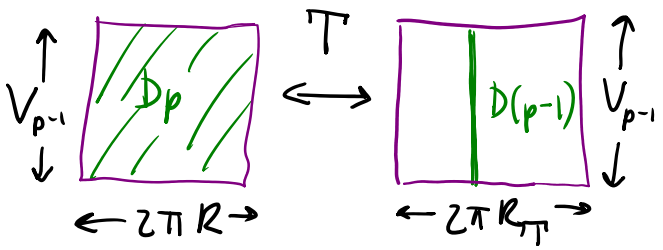
$$\boxed{\tau_{NS5} = \frac{1}{(2\pi)^5 g_c^2 \ell_c^6}}$$

De manera similar, si supusemos que las Dp-branas y D(6-p)-branas portan el cuanto mínimo de carga (respectivamente eléctrica y magnética) asociada a $C_{(p+1)}$, tendríamos $\tau_{Dp}\tau_{D(6-p)} = \frac{1}{(2\pi)^6 g_c^2 \ell_c^8}$

$$\Longrightarrow \tau_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^{a_p} g_c^{b_p} \ell_c^{p+1}} \quad \text{con } a_p + a_{6-p} = 6,\ b_p + b_{6-p} = 2\ \forall p .$$

Recordando además que $Dp \overset{T}{\longleftrightarrow} D(p-1)$, debemos tener

$$\tau_{Dp} V_{p-1} 2\pi R = \tau^{T}_{D(p-1)} V_{p-1} ,$$



es decir,

$$\frac{1}{(2\pi)^{a_p} g_c^{b_p} l_c^{p+1}} 2\pi R = \frac{1}{(2\pi)^{a_{p-1}} \underbrace{g_c^{b_{p-1}}}_{(g_c \frac{l_c}{R})^{b_{p-1}}} l_c^p}$$

$$\Rightarrow \quad a_{p-1} = a_p - 1 \,, \quad b_{p-1} = 1 \quad \forall\, p \,.$$

Junto con la condición de cuantización, esto implicaría

$$\boxed{\tau_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}}} \,.$$

Más adelante calcularemos explícitamente la tensión de las D-branas, verificando este resultado.

Notar que, cuando $g_c \ll 1$ tenemos

$$\tau_{F1} l_c^2 \sim \mathcal{O}(g_c^0) \ll \tau_{Dp} l_c^{p+1} \sim \mathcal{O}(g_c^{-1}) \ll \tau_{NS5} l_c^6 \sim \mathcal{O}(g_c^{-2})$$

lo cual pone de manifiesto el carácter no perturbativo de Dp-branas y NS5-branas.

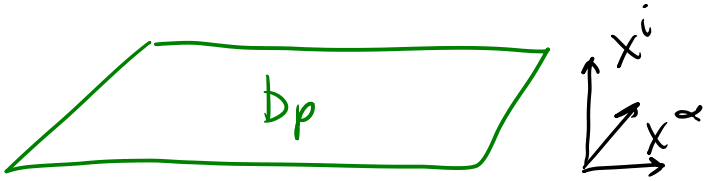
Notar también que $\frac{\tau_{F1}}{\tau_{D1}} = g_c$ nos da una manera más 'operacional' de entender nuestra definición de g_c.

jueves, 26 de octubre de 2006 12:24 a.m.

Como habíamos dicho antes, las interacciones de las excitaciones de una D-brana (cuerdas abiertas) entre sí y con su entorno (cuerdas cerradas) se pueden determinar a partir de cálculos de amplitudes de dispersión. Y como siempre, los resultados se pueden resumir en una acción efectiva para los modos no masivos.
Es relativamente fácil deducir la forma de la parte bosónica de esta acción.
Parametrizando el volumen de mundo M_{p+1} con coords. σ^a, $a=0,\dots,p$, la trayectoria de la Dp-brana en el espaciotiempo puede ser descrita de manera covariante a través de D funciones $X^\mu(\sigma^a)$.
Anteriormente habíamos considerado la cuantización de cuerdas abiertas asociadas a una Dp-brana plana en el espacio tiempo de Minkowski.

jueves, 26 de octubre de 2006 08:26 a.m.

Para tal brana resulta natural escoger la norma estática $\sigma^a = x^a \quad a = 0, \dots, p$,



en cuyo caso la Dp-brana sin excitar corresponde a

$$X^\alpha(x) = x^a \quad \alpha = 0, \dots, p \,, \qquad X^i(x) = x_0^i \quad i = p+1, \dots, 9$$

y una trayectoria más general se describe a través de

$$X^\alpha(x) = x^a \,, \qquad X^i(x^a) = X_0^i + \Phi^i(x^a) \,,$$

donde Φ^i son precisamente los campos escalares que se obtienen como modos no masivos de las cuerdas abiertas. En un espaciotiempo de Minkowski, por invariancia bajo translaciones la acción solo puede depender de $\partial_a \Phi^i$. De hecho, la propuesta natural al orden más bajo en derivadas es generalización de Nambu-Goto:

$$-\tau_{p+1} \int d^{p+1}\sigma \, \sqrt{-\det(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu})}$$

Dirac,

τ_{p+1}: tensión; M_{p+1}: volumen

que es invariante tanto bajo difeos en el volumen de mundo como bajo Poincaré en el espaciotiempo.

Recordando que dualidad T_i convierte al campo escalar Φ^i en el campo de norma $A^i \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'}\Phi^i$, vemos que la acción debe involucrar a la intensidad de campo $F_{\alpha\beta}$ de una manera específica:

$$-\tau_p \int_{M_{p+1}} d^{p+1}\sigma \sqrt{-\det\left(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{ab}\right)}$$

Si los escalares no están excitados (o consideramos D9-brana), esto se reduce a

$$-\tau_p \int_{M_{p+1}} d^{p+1}\sigma \sqrt{-\det\left(\eta_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab}\right)} \qquad \text{Born-Infeld}$$

¡Notar que esta acción incluye una serie infinita de correcciones en α'! A través del cálculo de la anomalía de Weyl ($\leftrightarrow$ función β), es posible mostrar que esta es la acción exacta para F constante

[Fradkin, Tseytlin; Abouelsaood, Callan, Nappi, Yost]

jueves, 26 de octubre de 2006 09:02 a.m.

Pero le hacen falta correcciones que involucren derivadas de F ($\xleftrightarrow{T}$ la acción de Dirac recibirá también correcciones con derivadas segundas o más altas de los campos escalares).

Consideremos ahora la manera en que la D-brana se acopla a un fondo no trivial de cuerdas cerradas. Para la métrica $g_{\mu\nu}$, obviamente habría que reemplazar $\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$ con la nueva métrica inducida

$$g_{ab}(\sigma) \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^b} g_{\mu\nu}(X(\sigma))$$

Trabajando en el marco de cuerdas (no de Einstein), el campo dilatónico debiera aparecer a través de un factor $e^{-\varphi}$ en el disco $\longleftrightarrow$ nivel árbol. Y recordando que $F_{\mu\nu}$ cambia bajo una transformación de norma de $B_{\mu\nu}$,

jueves, 26 de octubre de 2006 09:16 a.m.

(cuerda abierta se acopla a $B_{\mu\nu}$ y A_μ a través de

$$\frac{1}{4\pi\alpha'}\int_{M_2} d^2\sigma\, \epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu} + \int_{\partial M_2} d\tau\, \partial_\tau X^\mu A_\mu ,$$

que es invariante bajo la transformación simultánea

$$B_{\mu\nu} \to B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$$

$$A_\mu \to A_\mu - \frac{\Lambda_\mu}{2\pi\alpha'} \quad \Longrightarrow \quad F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\pi\alpha'}(\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu)$$

Vemos que la acción de la D-brana debe involucrar no a $F_{(2)}$ ó a $B_{(2)}$ por separado, sino a la combinación invariante de norma $B_{(2)} + 2\pi\alpha' F_{(2)} \equiv \tilde{F}_{(2)}$.

En conjunto tenemos ∴ la acción Dirac-Born-Infeld

$$S_{DBI} \equiv -\tau_p \int d^{p+1}\sigma\, e^{-\varphi} \sqrt{-\det\left(g_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab}\right)}$$

con $g_{ab} \equiv \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}$, $B_{ab} \equiv \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu}$,

que en efecto se obtiene a partir de función β [Leigh].

lunes, 20 de noviembre de 2006 08:40 p.m.

Sabemos además que D_p se acopla a campo Ramond-Ramond $C_{(p+1)}$ a través de término

$$\pm\tau_p \int_{M_{p+1}} C_{(p+1)} \equiv \underbrace{\pm\tau_p}_{\text{densidad de carga } \rho_p} \int d\sigma^0 \cdots d\sigma^p \underbrace{\partial_{\sigma^0} X^{\mu_0} \cdots \partial_{\sigma^p} X^{\mu_p} C_{\mu_0 \cdots \mu_p}(X(\sigma))}_{\text{retracción } C_{\sigma^0 \cdots \sigma^p}(\sigma)}$$

Por dualidad T, deben existir términos adicionales que acoplan campos R-R con $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$, y ∴, por invariancia bajo transformaciones de norma de $B_{(2)}$, con $\tilde{F}_{(2)} \equiv B_{(2)} + 2\pi\alpha' F_{(2)}$.

El resultado se puede resumir en la acción tipo Chern-Simons ó Wess-Zumino [Douglas]

$$S_{WZ} = \pm\tau_p \int_{M_{p+1}} e^{\tilde{F}_{(2)}} \wedge \sum_q C_{(q)}$$

$$\equiv \pm\tau_p \int_{M_{p+1}} C_{(p+1)} \pm\tau_p \int_{M_{p+1}} \tilde{F}_{(2)} \wedge C_{(p-1)} \pm \cdots$$

donde $\left(T_{(n)} \wedge T'_{(n')}\right)_{a_1 \cdots a_{n+n'}} \equiv \frac{1}{n!n'!} T_{[a_1 \cdots a_n} T'_{a_{n+1} \cdots a_{n+n']}}$

lunes, 20 de noviembre de 2006 09:06 p.m.

Los términos más allá del primero muestran que Dp se puede acoplar también a $C_{(q)}$ con $q = p-1, p-3, \ldots$

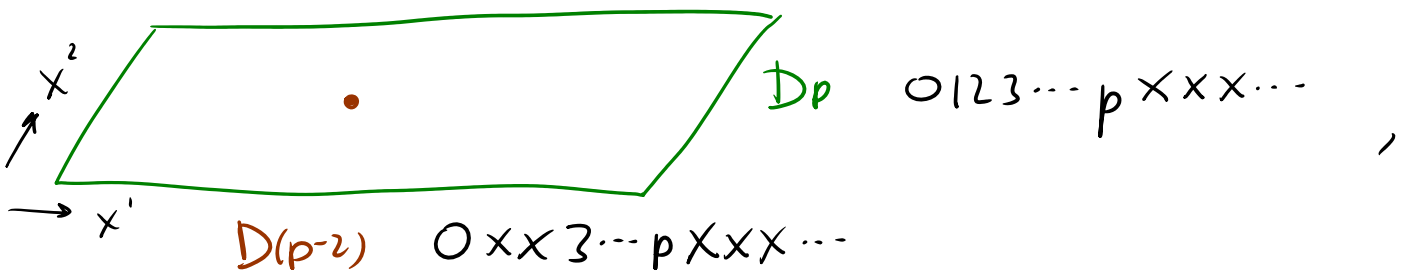
P.ej., si consideramos una Dp-brana que porta un campo magnético $F_{12} \neq 0$ (ó $B_{12} \neq 0$), el segundo término es (en norma estática $\sigma^a = X^a$)

$$\pm T_p \int_{M_{p+1}} dx^0 \cdots dx^p \; 2\pi\alpha' F_{12} C_{03\cdots p} ,$$

es decir, esta Dp porta (además de carga bajo $C_{(p+1)}$) carga de D(p-2)-brana

$$q^{3\cdots p} = \underbrace{\pm T_p 2\pi\alpha' F_{12} V_{12}}_{\rho_{p-2}} \int dx^3 \cdots dx^p$$

Para entender la interpretación física de esto, notemos primero que un estado con Dp y D(p-2) superpuestas,



lunes, 20 de noviembre de 2006 09:35 p.m.

No preservaría ninguna supersimetría:

Dp preserva $\tilde{\eta} = \Gamma^{012\cdots p}\eta$ (16 supersimetrías)

D(p-2) preserva $\tilde{\eta} = \pm\Gamma^{03\cdots p}\eta$ (16 supersimetrías)

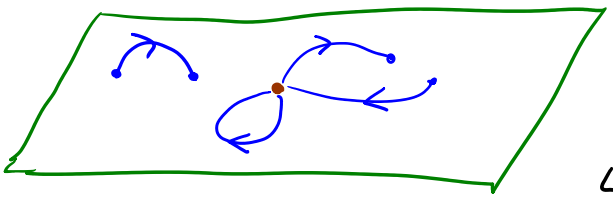
$\Longrightarrow$ superpuestas preservarían sólo η tal que

$$\Gamma^{012\cdots p}\eta = \pm\Gamma^{03\cdots p}\eta \Longrightarrow \Gamma^{12}\eta = \pm\eta,$$

lo cual es imposible porque

$(\Gamma^{12})^2 = -1 \Longrightarrow \Gamma^{12}$ tiene autovalores $\pm i$

Dado que esta configuración NO es BPS, su estabilidad no está garantizada. De hecho, el sistema tiene excitaciones taquiónicas, y es ∴ perturbativamente inestable.



Sus excitaciones están descritas por cuerdas fundamentales de 4 tipos distintos:

$p\text{-}p$, $(p-2)\text{-}(p-2)$, $(p-2)\text{-}p$, $p\text{-}(p-2)$

asociadas a branas individuales — asociadas a sistema conjunto

Para los últimos 2 tipos, $X^{0,3,\cdots,p}(z,\bar{z})$ satisfacen condiciones de borde Neumann en ambos extremos, y $X^{p+1,\cdots,9}(z,\bar{z})$ satisfacen condiciones Dirichlet en ambos extremos, pero $X^{1,2}(z,\bar{z})$ son D en $\sigma^1=0$ y N en $\sigma^1=\pi$, o viceversa. La expansión en modos correspondiente es entonces antiperiódica,

$$X^{1,2}(z,\bar{z}) = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{r\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \frac{\alpha_r^{1,2}}{r}\left(z^{-r} \mp \bar{z}^{-r}\right) \quad \text{para} \begin{matrix} D\text{-}N \\ N\text{-}D \end{matrix}.$$

$z \equiv e^{\sigma^2+i\sigma^1}$

$$\Longrightarrow z = \begin{cases} \bar{z} & \text{en } \sigma=0 \\ e^{2\pi i}\bar{z} & \text{en } \sigma=\pi \end{cases}$$

Recordando que, en el plano $w \equiv \sigma^2+i\sigma^1$, el campo fermiónico ψ^w en el sector R tiene (por definición) la misma periodicidad que X^w, y en el sector NS tiene la periodicidad opuesta a X^w, vemos que la constante de orden para L_0 (energía de punto cero) en el caso de cuerdas $p-(p-2)$ ó $(p-2)-p$ es

lunes, 20 de noviembre de 2006 10:14 p.m.

$A_R = 0$ (por supersimetría en hoja de mundo) y

$$A_{NS} = (8-2)\left(-\tfrac{1}{24}\right) + (8-2)\left(-\tfrac{1}{48}\right) + 2\left(+\tfrac{1}{48}\right) + 2\left(+\tfrac{1}{24}\right)$$

$X^{\tilde{\mu}}, b, c$ $X^{1,2}$ $\psi^{\tilde{\mu}}, \beta, \gamma$ $\psi^{1,2}$ $X^{1,2}$ $\psi^{1,2}$

bosón periódico — fermión antiperiódico — bosón antiperiódico — fermión periódico

$$= -\frac{4}{24} - \frac{4}{48} = -\frac{1}{4} < 0$$

(Más en general, $A_{NS} = -\frac{1}{2} + \frac{\#_{ND}}{4}$, así que los sectores NS y R solo podrían ser degenerados si $\#_{ND} = 0, 4, 8$.)

El estado más bajo $|0, s_1\rangle_{NS}$ ($s_1 = \pm\frac{1}{2}$) es ∴ un taquión,

$\psi_r^{0,3,\cdots,9}$, $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ — $\psi_r^{1,2}$, $r \in \mathbb{Z}$

y la contribución adicional de s_1 al número fermiónico (en la hoja de mundo) F hace que este estado (fermiónico en el espaciotiempo) sobreviva la proyección GSO $(-1)^F = \pm 1$.

El sistema Dp-D(p-2) quiere ∴ decaer. El resultado final de este decaimiento debe portar las mismas cargas y tener menos energía, es decir, debe ser un estado ligado Dp-D(p-2).

A partir del álgebra supersimétrica en marco en reposo,

$$\left\{\begin{bmatrix} Q \\ \tilde{Q} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q^\dagger & \tilde{Q}^\dagger \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\mathbb{1} + \begin{bmatrix} 0 & q^{3\cdots p} \\ \mp q^{3\cdots p}_{RR} & 0 \end{bmatrix}\Gamma^{03\cdots p} + \begin{bmatrix} 0 & q^{1\cdots p}_{RR} \\ \pm q^{1\cdots p}_{RR} & 0 \end{bmatrix}\Gamma^{01\cdots p}$$

$(11)^2 = \mp 1$

$(11)^2 = \pm 1$

para $\frac{p(p+1)}{2}$ impar / par,

deducimos que los autovalores de la matriz hermítica

$$\begin{bmatrix} m & \pm i q_{D(p-2)} \pm q_{Dp} \\ \mp i q_{D(p-2)} \pm q_{Dp} & m \end{bmatrix}$$ deben ser no negativos,

por lo que la determinante $m^2 - (q^2_{D(p-2)} + q^2_{Dp}) \geq 0$,

es decir, cualquier estado con ambos tipos de carga debe

satisfacen la desigualdad BPS

$$m \geq \sqrt{q^2_{D(p-2)} + q^2_{Dp}}$$

Con esto confirmamos que el estado no ligado, con $m = q_{D(p-2)} + q_{Dp}$, NO es BPS.

Podemos notar además que Dp plana con $\tilde{F}_{12} = 2\pi\alpha' F_{12}$ constante tiene justamente

$$m = \tau_p \int dx^1 \cdots dx^p \sqrt{-\det \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & \tilde{F}_{12} & 0 & \\ & -\tilde{F}_{12} & 1 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \tau_p V_{12} \sqrt{1 + (2\pi\alpha' F_{12})^2} \int dx^3 \cdots dx^p$$

$$= \sqrt{\underbrace{(\tau_p V_{12})^2}_{\rho_p} + \underbrace{(\tau_p V_{12} 2\pi\alpha' F_{12})^2}_{\rho_{p-2}}} \; V_{3\cdots p}$$

$$= \sqrt{q^2_{Dp} + q^2_{D(p-2)}}$$

¡y es ∴ BPS!

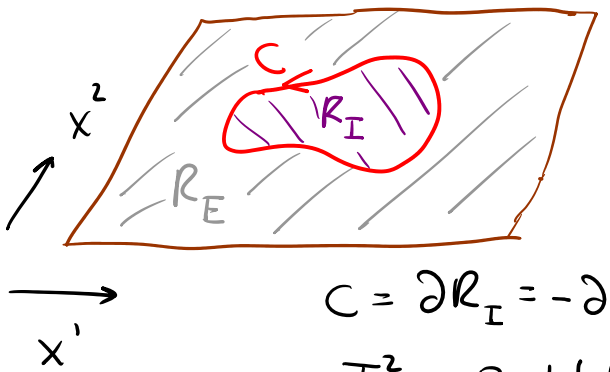
(preserva $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} 32 = 8$ supersimetrías)

En base a este resultado, interpretamos al sistema Dp + F_{12} constante como un estado ligado de 1 Dp-brana y n_{p-2} D(p-2)-branas, donde

$$n_{p-2} = \frac{q_{D(p-2)}}{\tau_{p-2}\, V_{3\cdots p}} = \frac{\tau_p\, V_{12}\, 2\pi\alpha' F_{12}\, V_{3\cdots p}}{\tau_{p-2}\, V_{3\cdots p}} = \frac{1}{2\pi} V_{12}\, F_{12}$$

Esto solo tiene sentido si $\frac{1}{2\pi} V_{12} F_{12} \in \mathbb{Z}$, y en un T^2 tenemos justamente

$$\exp\left(i \oint_C A_{(1)}\right) = \exp\left(i \int_{R_I} F_{(2)}\right) = \exp\left(-i \int_{R_E} F_{(2)}\right)$$



$C = \partial R_I = -\partial R_E$

$T^2 = R_I \cup R_E$

$$\Rightarrow \exp\left(i \int_{T^2} F_{(2)}\right) = 1,$$

es decir, el flujo magnético debe estar cuantizado,

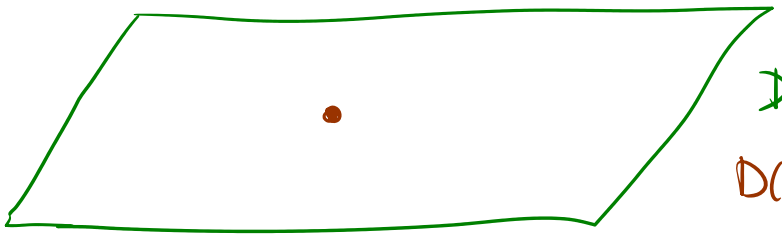
$$\frac{1}{2\pi} \int_{T^2} F_{(2)} = n \in \mathbb{Z}. \quad \checkmark$$

$V_{12} F_{12}$ si $F_{12} = cte.$

Al formarse el estado ligado, las D(p-2)-branas se disuelven en Dp y se convierten en campo magnético constante.

De manera similar, los términos adicionales en S_{WZ} que acoplan $F\wedge F$, $F\wedge F\wedge F$, ... a $C_{(p-3)}$, $C_{(p-5)}$, ..., implican que la Dp-brana puede portar carga de D(p-4), D(p-6), etc.

El primer caso es curioso, porque



Dp	0 1 2 3 4 5 ⋯ p
D(p-4)	0 x x x x 5 ⋯ p

superpuestas preservarían supersimetrías tales que

$$\hat{\eta} = \Gamma^{01\cdots p}\eta = \pm\Gamma^{05\cdots p}\eta \longleftrightarrow \underbrace{\Gamma^{1234}}\eta = \pm\eta,$$

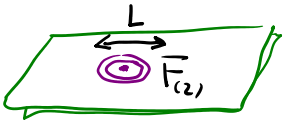
$$(\Gamma^{1234})^2 = +1$$
$$\mathrm{Tr}(\Gamma^{1234}) = 0$$

es decir, un total de 8 supersimetrías. (Las 32-8=24 supercargas rotas generan un multiplete 2^{12}-dimensional.)

Para una cuerda Dp-D(p-4) ó D(p-4)-Dp obtenemos las constantes de orden $A_R = 0$ y $A_{NS} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 0$, lo cual indica que, como era de esperarse, no existe taquión (y el espectro es de hecho supersimétrico). La desigualdad BPS en este caso resulta ser

$$m \geq |q_{Dp}| + |q_{D(p-4)}| ,$$

así que, de existir un estado ligado, debe ser 'marginal' (o 'en umbral'). Estos de hecho existen y son descritos por Dp con $(F \wedge F)_{1234} \sim F_{12} F_{34} \neq 0$ [ver Sen, hep-th/9511026]. (Para sistemas con 2 o más Dp's, el estado ligado está descrito por un instantón [Witten, 9511030; Vafa 9512078]



)

Para N Dp-branas paralelas sabemos que A_a y X^i se convierten en matrices $N \times N$, y la teoría efectiva es entonces no abeliana, con grupo de norma $U(N)$.

martes, 21 de noviembre de 2006 11:33 a.m.

Parte de ella se puede deducir usando dualidad T, a partir de la acción no abeliana para N Dq-branas.

P.ej.,

$$S_{DBINA} = -T_q \int d^{1+}x \; Tr\, S\left[e^{-\varphi} \sqrt{-\det\left(g_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab}\right)} \right]$$

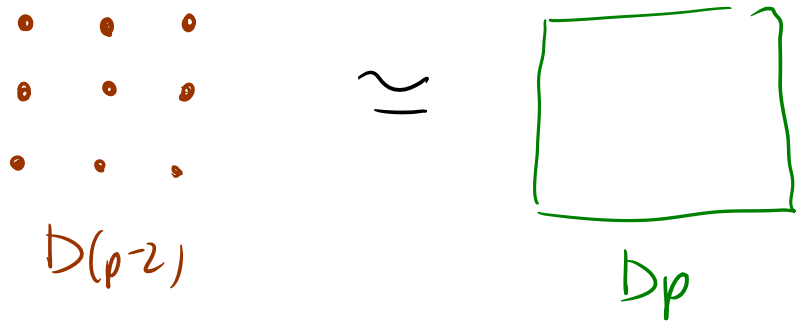
retracciones usando $D_a X^i = \partial_a X^i + i[A_a, X^i]$ y campos $g_{\mu\nu}(X)$, $B_{\mu\nu}(X)$, $\varphi(X)$ (matriz)

Traza sobre índices U(N), considerando solo productos simétricos de F's y DX's (dejando fuera así términos con derivadas covariantes de F) [Tseytlin, hep-th/9701125]

Al T-dualizar Dq $\longrightarrow$ Dp, aparecen términos con conmutadores $[X^i, X^j]$ [Myers, hep-th/9910053]

Procedimiento similar para S_{WZNA} produce acoplamientos de Dp-branas con $C_{(p+2)}$, $C_{(p+5)}$, etc. Es decir, una colección de Dp's puede portar carga de D(p+2), D(p+4), etc.

Este es el llamado 'efecto dieléctrico' [Myers]:



Hasta aquí discutimos solo la parte básica de la acción. La extensión supersimétrica para el caso abeliano ha sido analizada en un fondo plano en [Aganagic, Popescu, Schwarz, hep-th/9610249, 9612080] y para un fondo general en

[Cederwall, von Gussich, Nilsson, Westerberg, 9610148,
" + Sundell, 9611159].

Para el caso no abeliano, ver

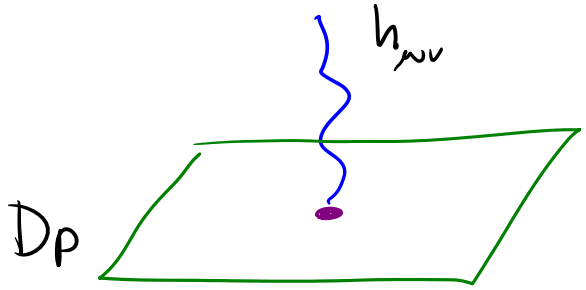
[Collinucci, de Roo, Eenink, hep-th/0205150
Bergshoeff, de Roo, Sevrin, 0011264].

miércoles, 22 de noviembre de 2006 05:02 p.m.

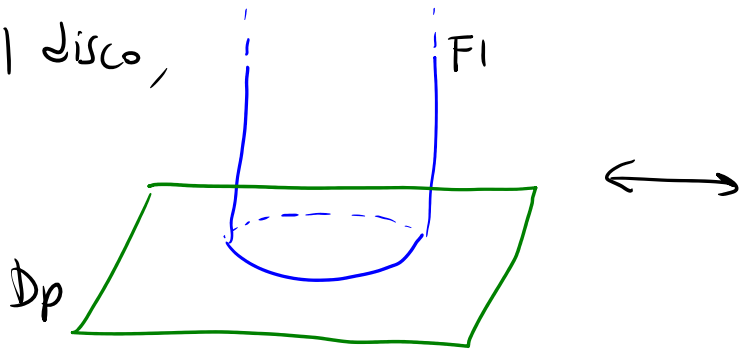
Ahora, ¿cómo podemos calcular la tensión de Dp?

Evidentemente $\tau_p = \frac{\text{energía}}{\text{p-volumen}}$ controla la intensidad con que la D-brana se acopla al campo gravitacional.

En efecto, S_{DBI} implica que Dp es fuente de $h_{\mu\nu}(x) \equiv g_{\mu\nu}(x) - \eta_{\mu\nu}$, con 'constante de acoplamiento' τ_p. En particular, el término de $O(h)$ en S_{DBI} corresponde al vértice de 1 pata (renacuajo)



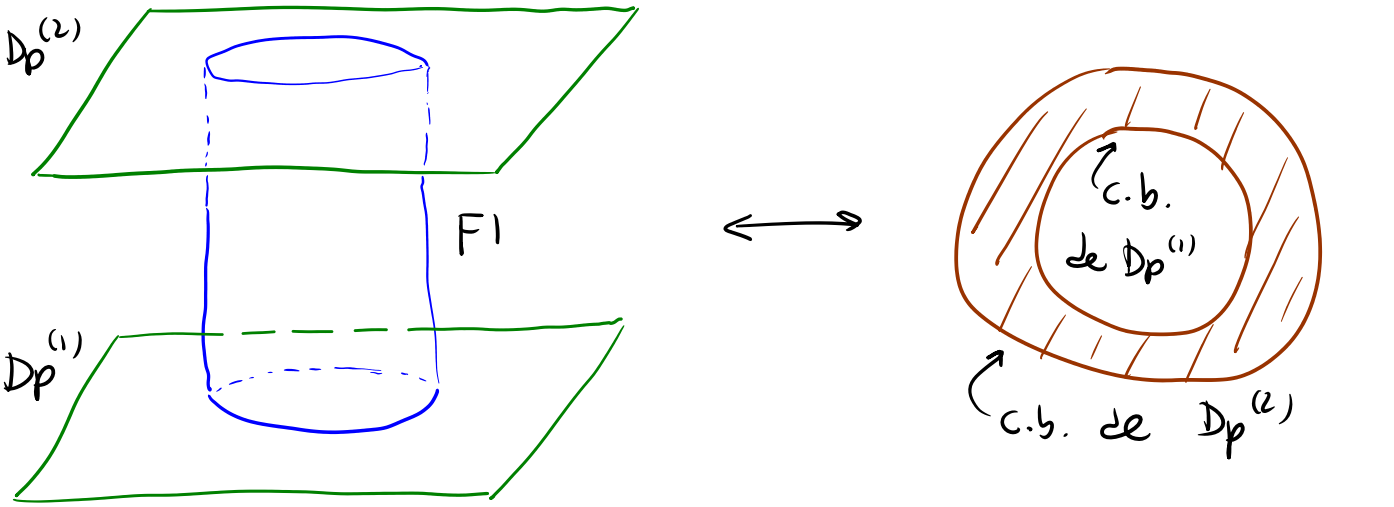
Este vértice se deduce a partir de amplitud de 1 cuerda en el disco,



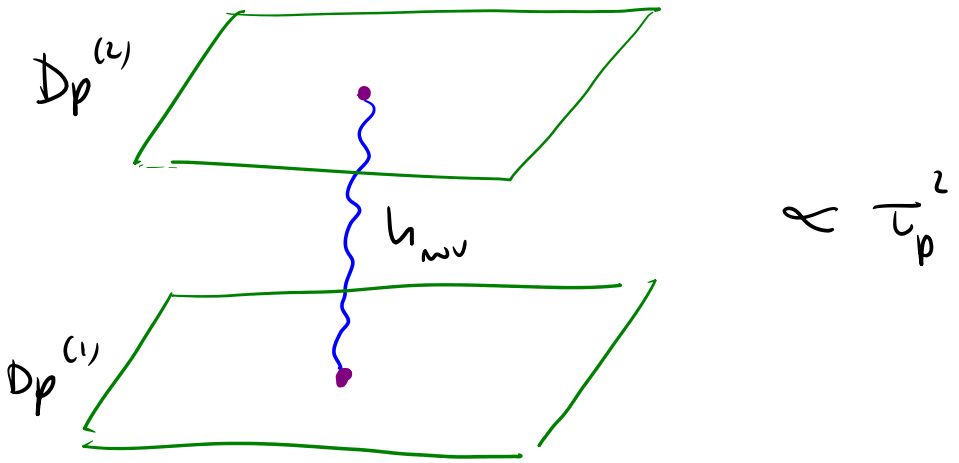
Pero es un poco difícil determinar la normalización correcta de esta amplitud.

miércoles, 22 de noviembre de 2006 05:15 p.m.

Nos resultará más fácil calcular la amplitud que describe la interacción entre 2 Dp-branas paralelas,



que se puede comparar con el diagrama de campos



Calcularemos primero este último diagrama. En realidad nos interesan también los diagramas análogos donde las Dp's intercambian un φ ó $B_{\mu\nu}$, porque, como veremos más adelante, la amplitud

de cuerdas incluye a todos los campos NS-NS no masivos en un mismo paquete.

Necesitamos determinar la forma explícita de los vértices y propagadores, a partir de la acción efectiva $S_s + S_{DBI}$, donde

$$S_s = \frac{1}{2K^2}\int d^D x \sqrt{-g}\, e^{-2\varphi}\left[R + 4(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{12}H^2\right] + \text{R-R} + \text{fermiones}$$

$K^2 \equiv 8\pi G_N$ incluye $e^{2\varphi_0}$ (parte cte. de $\Phi(x) = \varphi_0 + \varphi(x)$)

$g_{\mu\nu}(x)$ métrica en marco de cuerdas

$$= \frac{1}{2K^2}\int d^D x \sqrt{-g_E}\left[R_E - \frac{4}{D-2}(\partial_\mu \varphi)_E^2 - \frac{1}{12}e^{-8\varphi/D-2} H_E^2\right] + \ldots,$$

$$g_{E\mu\nu} \equiv e^{-\frac{4\varphi(x)}{D-2}} g_{\mu\nu}(x) \overset{D=10}{=} e^{-\varphi/2} g_{\mu\nu}(x)$$

métrica en marco de Einstein

incluye $e^{-\varphi_0}$

$$S_{DBI} = -\tau_p \int d^{p+1}x\, e^{-\varphi}\sqrt{-\det(g_{ab} + B_{ab})}$$

$$= -\tau_p \int d^{p+1}x\, e^{-\left(\frac{p-3}{4}\right)\varphi}\sqrt{-\det\left(g_{Eab} + e^{-\varphi/2}B_{ab}\right)}$$

miércoles, 22 de noviembre de 2006 06:23 p.m.

Para obtener los vértices, desarrollamos S_{DBI} a orden lineal en φ, $B_{\mu\nu}$ y $h_{\mu\nu} \equiv g_{E\,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ (campos adimensionales, no canónicamente normalizados):

$$S_{DBI} = -\tau_p V_{p+1} - \tau_p \int d^{p+1}x \left[\left(\frac{p-3}{4}\right)\varphi + \frac{1}{2} h^{\alpha}_{\ \alpha} + \mathcal{O}(h^2) \right]$$

$$= \text{cte.} - \int d^{10}x \left[J_\varphi(x)\varphi(x) + \frac{1}{2} T^{\mu\nu}(x) h_{\mu\nu}(x) + J_B^{\mu\nu}(x) B_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(h^2) \right]$$

con

$$\begin{cases} J_\varphi(x) \equiv \tau_p \left(\frac{p-3}{4}\right) \delta^{(9-p)}(x^i) \\ T^{\mu\nu}(x) \equiv \tau_p \hat{\eta}^{\mu\nu} \delta^{(9-p)}(x^i) \quad , \quad \hat{\eta}^{\mu\nu} \equiv \begin{cases} \eta^{\mu\nu} \text{ si } \mu=\alpha,\ \nu=\beta \\ 0 \text{ si } \mu \text{ ó } \nu = i \end{cases} \\ J_B^{\mu\nu}(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Para obtener los propagadores, desarrollamos S_s a orden cuadrático en los mismos campos:

$$S_s = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x \left[\frac{1}{4} h_{\mu\nu} \partial^2 \underbrace{\left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu} h\right)}_{\equiv \bar{h}^{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\varphi \partial^2 \varphi + \ldots \right]$$

en norma $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$ (de Donder = harmónica = Lorenz)

$(\Rightarrow$ ec. de mov. $\partial^2 \bar{h}^{\mu\nu} = \kappa^2 T^{\mu\nu}$ ✓ $)$

miércoles, 22 de noviembre de 2006 06:41 p.m.

Para el dilatón tenemos entonces el propagador

$$\langle \varphi(k)\varphi(-k)\rangle = -2k^2 \frac{1}{k^2} \equiv$$

Para el gravitón, escribiendo el término cinético como

$$\frac{1}{2k^2}\ \frac{1}{2} h_{\mu\nu} M^{\mu\nu\lambda\rho} \partial^2 h_{\lambda\rho}$$

con $M^{\mu\nu\lambda\rho} \equiv \frac{1}{4}\left(\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}\right)$,

tenemos el propagador

$$\langle h_{\mu\nu}(k) h_{\lambda\rho}(-k)\rangle = -2k^2 \frac{1}{k^2} D_{\mu\nu\lambda\rho} \equiv$$

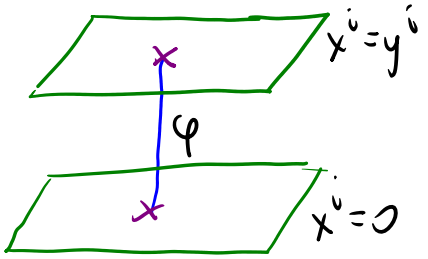
donde

$$D_{\mu\nu\lambda\rho} \equiv \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda} - \frac{2}{D-2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho}$$

satisface $M^{\mu\nu\lambda\rho} D_{\lambda\rho\sigma\tau} = \frac{1}{2}\left(\delta^{\mu}_{\sigma}\delta^{\nu}_{\tau} + \delta^{\mu}_{\tau}\delta^{\nu}_{\sigma}\right)$.

Con estos ingredientes podemos finalmente calcular los 2 diagramas que nos interesan,

miércoles, 22 de noviembre de 2006 06:49 p.m.



$$= \int d^{10}x\, d^{10}x'\, J_\varphi(x) \left(2\kappa^2 \int \frac{d^{10}k}{(2\pi)^{10}} \frac{e^{ik\cdot(x-x')}}{k^2} \right) J_\varphi(x')$$

$$= 2\kappa^2 \tau_p^2 \left(\frac{p-3}{4}\right)^2 \underbrace{\int d^{p+1}x\, d^{p+1}x'}_{\int \frac{d^{p+1}(x+x')}{2^{p+1}} \int d^{p+1}(x-x')} \int \frac{d^{10}k}{(2\pi)^{10}} \frac{e^{ik_\parallel\cdot(x-x')}\, e^{ik_\perp\cdot(y-0)}}{k_\parallel^2 + k_\perp^2}$$

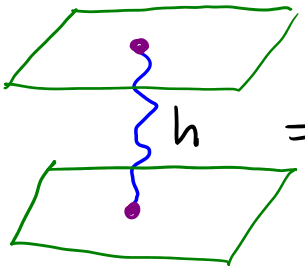
$\leftarrow (2\pi)^{p+1}\delta^{(p+1)}(k_\parallel)$

$$= 2\kappa^2 \tau_p^2 \left(\frac{p-3}{4}\right)^2 V_{p+1} \underbrace{\int \frac{d^{q-p}k_\perp}{(2\pi)^{q-p}} \frac{e^{ik_\perp\cdot y}}{k_\perp^2}}$$

$\equiv \Delta_{q-p}(y)$ propagador escalar en direcciones transversales

$= cte \cdot (y^2)^{-\left(\frac{7-p}{2}\right)}$

y de manera similar



$$= 2\kappa^2 \tau_p^2 V_{p+1} \underbrace{\frac{1}{2}\hat{\eta}^{\mu\nu}\left(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho}\right)\frac{1}{2}\hat{\eta}^{\lambda\rho}}_{D_{\mu\nu\lambda\rho}} \Delta_{q-p}(y)$$

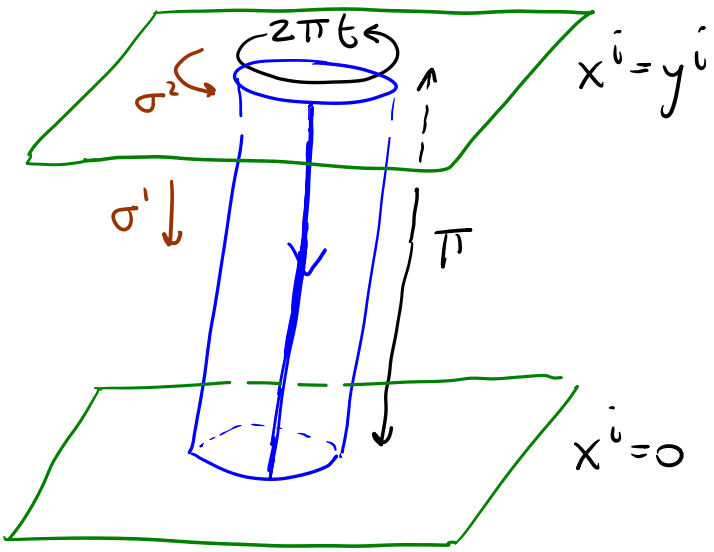
$$\frac{1}{4}\left[(p+1) + (p+1) - \frac{1}{4}(p+1)^2\right]$$

jueves, 23 de noviembre de 2006 09:50 a.m.

La amplitud total de interacción entre las 2 Dp-branas a través de campos NS-NS sin masa es entonces

$$\mathcal{M}^{m^2=0}_{NS-NS}(y) = 2K^2\tau_p^2 V_{p+1}\Delta_{q-p}(y)\left[\underbrace{\left(\frac{p-3}{4}\right)^2 + \frac{p+1}{2} - \left(\frac{p+1}{4}\right)^2}_{\frac{p^2-6p+9+8p+8-p^2-2p-1}{16}=1}\right]$$

Pasemos ahora al cálculo en cuerdas, donde nos interesa determinar la amplitud de cero puntos en el anillo/cilindro, que podemos interpretar como un lazo de cuerda abierta. Como vimos antes, en el formalismo canónico la normalización de este lazo está completamente definida:



jueves, 23 de noviembre de 2006 10:14 a.m.

$$\mathcal{M}^{(0)}_{C^2} = \int_0^\infty \frac{dt}{2t}\, Tr_{H_\perp}\left[e^{-2\pi t \hat{H}} \right]$$

(igualar $b,c,\beta,\gamma, X^{0,9}, \psi^{0,9}$)

$\alpha' \hat{m}^2$

con $\hat{H} = \hat{L}_0^{TOT} = \underbrace{\alpha' \hat{p}^2 + \alpha' \left(\frac{y-0}{2\pi\alpha'}\right)^2}_{\equiv \hat{H}_0} + \hat{N} + A_\Delta$

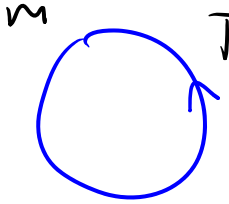
(A_Δ: cte. de orden)

$$\hat{H}_X + \hat{H}_\psi$$

$$\hat{H}_X \equiv \sum_{i=1}^{8} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^i_{-n} \alpha^i_n - \frac{1}{24} \right)$$

$$\hat{H}_\psi \equiv \sum_{i=1}^{8} \left(\sum_{r>0} r \psi^i_{-r} \psi^i_r \; \begin{matrix} -\frac{1}{48} \\ +\frac{1}{24} \end{matrix} \right) \begin{matrix} NS \\ R \end{matrix}$$

(Recordar que $\mathcal{M}^{(0)}_{C^2}$ se puede interpretar como suma de lazos de partícula,



$$= \int_0^\infty \frac{dT}{2T} \int \frac{d^{p+1}k}{(2\pi)^{p+1}} e^{-\frac{T}{2}(k^2+m^2)} = -\frac{1}{2} \ln\left[\det(-\partial^2 + m^2) \right]$$

sobre espectro de cuerda abierta (con -1 para fermiones).)

jueves, 23 de noviembre de 2006 10:42 a.m.

Como es usual, la amplitud se factoriza,

$$\mathcal{M}_{C^2} = \int_0^\infty \frac{dt}{2t} \mathrm{Tr}_0\left(e^{-2\pi t \hat{H}_0}\right) \mathrm{Tr}_X\left(e^{-2\pi t \hat{H}_X}\right) \left[\mathrm{Tr}^{GSO}_{NS}\left(e^{-2\pi t \hat{H}_\psi}\right) - \mathrm{Tr}^{GSO}_{R}\left(e^{-2\pi t \hat{H}_\psi}\right)\right]$$

bosones fermiones

donde $\mathrm{Tr}^{GSO}_{\substack{NS\\R}}(\cdots) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{NS}(\cdots) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{NS}\left((-1)^{\hat{F}}\cdots\right)$,

y tenemos

2 orientaciones

$\langle k|k\rangle = (2\pi)^{p+1}\delta^{(p+1)}(k-k) = V_{p+1}$

$$\mathrm{Tr}_0\left(e^{-2\pi t \hat{H}_0}\right) = 2V_{p+1}\int \frac{d^{p+1}k}{(2\pi)^{p+1}} e^{-2\pi t\left(\alpha' k^2 - \frac{y^2}{2\pi\alpha'}\right)}$$

$$= 2V_{p+1}(8\pi^2\alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-ty^2/2\pi\alpha'},$$

$$\mathrm{Tr}_X\left(e^{-2\pi t \hat{H}_X}\right) = \left(e^{\frac{2\pi t}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{N_n=0}^{\infty} e^{-2\pi t n N_n}\right)^8$$

$q^{-1/24}$ $\qquad$ $(1-q^n)^{-1}$ $\qquad$ $q \equiv e^{-2\pi t}$

$$\equiv \eta(it)^{-8}$$

función eta de Dedekind

jueves, 23 de noviembre de 2006 10:56 a.m.

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{NS}\left(e^{-2\pi t\hat{H}_\psi}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi t}{48}}\prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty}\left(1+e^{-2\pi tr}\right)\right)^8$$

$$= \frac{1}{2}q^{-1/6}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-1/2}\right)\right]^8$$

$$= \frac{1}{2}\left[q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^n\right)\right]^{-4}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^n\right)\left(1+q^{n-1/2}\right)^2\right]^4$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\Theta_3(0|it)^4}{\eta(it)^4}$$ ← función teta de Jacobi ,

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{NS}\left((-1)^{\hat{F}}e^{-2\pi t\hat{H}_\psi}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2\pi t}{48}}\prod_{r=1/2}^{\infty}\left(1-e^{-2\pi tr}\right)\right)^8$$

$$= -\frac{1}{2}q^{-1/6}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n-1/2}\right)\right]^8$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\Theta_4(0|it)^4}{\eta(it)^4} ,$$

$$\frac{1}{2}\,Tr_R\left(e^{-2\pi t\hat{H}_\psi}\right) = \frac{1}{2}(8+8)\left(e^{-\frac{2\pi t}{24}}\prod_{r=1}^{\infty}(1+e^{-2\pi t r})\right)^8$$

$$= \frac{1}{2}\,q^{1/3}\left[\sqrt{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)\right]^8$$

$$\equiv \frac{1}{2}\,\frac{\theta_2(0|it)^4}{\eta(it)^4}\,,$$

$$\frac{1}{2}\,Tr_R\left((-1)^{\hat{F}}e^{-2\pi t\hat{H}_\psi}\right) = \frac{1}{2}(8-8)\left(e^{-\frac{2\pi t}{24}}\prod_{r=1}^{\infty}(1-e^{-2\pi t r})\right)^8$$

$$\equiv \frac{1}{2}\,\frac{\theta_1(0|it)^4}{\eta(it)^4} = 0\,.$$

Juntándolo todo concluimos que

$$\mathcal{M}_{c^2}(y) = \cancel{2}V_{p+1}\int_0^\infty \frac{dt}{\cancel{2}t}\,(8\pi^2\alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}}\,e^{-t\frac{y^2}{2\pi\alpha'}}\,\eta(it)^{-8}\,\frac{1}{2}\left[\frac{\theta_3(it)^4-\theta_4(it)^4-\theta_2(it)^4}{\eta(it)^4}\right]$$

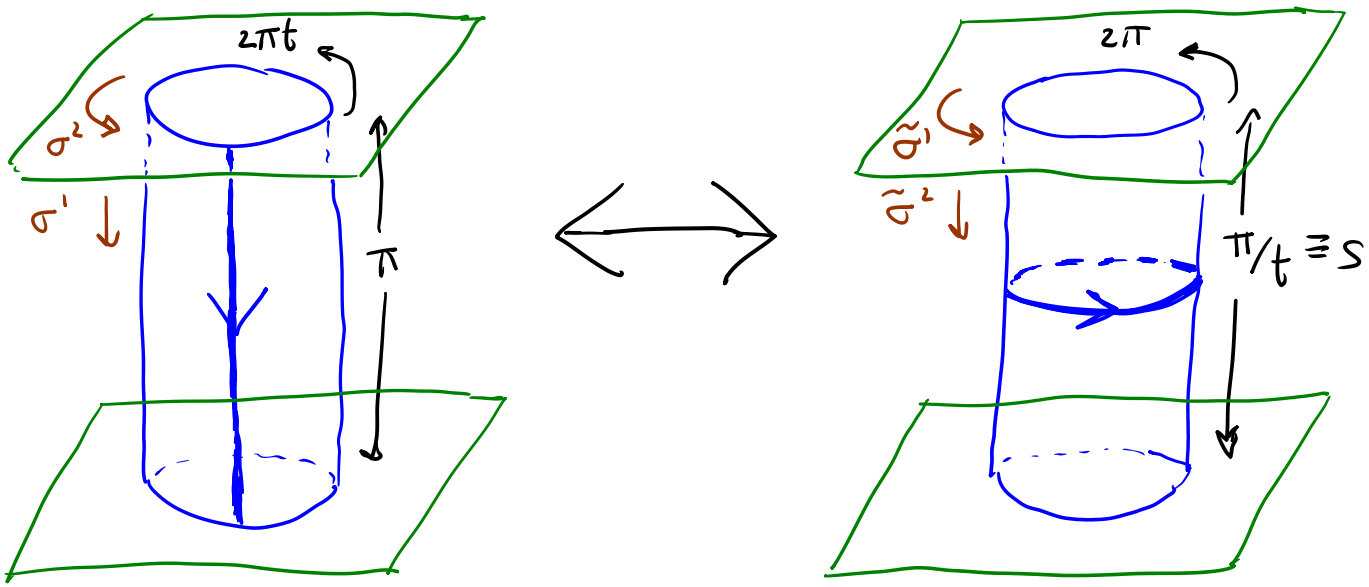
$= 0$ porque $\theta_3(0|\tau)^4 = \theta_4(0|\tau)^4 + \theta_2(0|\tau)^4$

identidad abstrusa de Jacobi

Este resultado es consecuencia del espectro supersimétrico de la cuerda abierta.

jueves, 23 de noviembre de 2006 11:13 a.m.

Pero nos interesa reinterpretar esta amplitud en términos de una cuerda cerrada:



Al hacer esta traducción, los estados de cuerda cerrada en el sector NS-NS (ψ^i antiperiódico en $\tilde{\sigma}^1 = \sigma^2/t$) corresponden a los términos sin $(-1)^F$ en la traza sobre estados de cuerda abierta, mientras que las cuerdas cerradas R-R (ψ^i periódico en $\tilde{\sigma}^1 = \sigma^2/t$) corresponden a los términos con $(-1)^F$ en la traza de cuerda abierta.

Esperaríamos en particular una repulsión R-R por el hecho de que las 2 Dp's tienen cargas del

mismo signo bajo $C_{01\cdots p}$, y una atracción NS-NS debida a la interacción gravitacional/dilatónica.

El hecho de que $M^{(0)}_{c^2} = 0$ indica que la repulsión R-R se cancela (incluso para estados masivos) con la atracción NS-NS, de modo que las Dp-branas paralelas NO ejercen ninguna fuerza neta una sobre la otra. Esto es consecuencia de la condición BPS: $M_{TOT} = Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 = M_1 + M_2$, por lo que no puede existir una energía potencial.

(Para un sistema $Dp\text{-}\overline{Dp}$, donde no se preserva ninguna simetría, la contribución del sector R-R tiene el signo contrario, y se suma ∴ al sector NS-NS para dar una atracción neta.

De hecho $M_{c^2}(y)$ diverge cuando $y \leq l_c$, porque aparece un taquión en el espectro de cuerda abierta. Ver [Banks, Susskind, hep-th/9511194].)

martes, 28 de noviembre de 2006 09:31 a.m.

Quedándonos solo con las trazas sin $(-1)^F$ tenemos

$$\mathcal{M}_{NS\text{-}NS} = \int_0^\infty \frac{dt}{2t} \mathrm{Tr}_o\left(e^{-2\pi t \hat{H}_o}\right) \mathrm{Tr}_x\left(e^{-2\pi t \hat{H}_x}\right)\left[\frac{1}{2}\mathrm{Tr}_{NS}\left(e^{-2\pi t \hat{H}_\psi}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}_R\left(e^{-2\pi t \hat{H}_\psi}\right)\right]$$

$$= 2V_{p+1}\int_0^\infty \frac{dt}{2t}\left(8\pi^2\alpha' t\right)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{ty^2}{2\pi\alpha'}} \eta(it)^{-8}\left[\frac{1}{2}\frac{\theta_3(0|it)^4}{\eta(it)^4} - \frac{1}{2}\frac{\theta_2(0|it)^4}{\eta(it)^4}\right]$$

Esto incluye todavía la contribución de todos los modos de cuerda cerrada (= todos los modos de cuerda abierta). Para aislar la contribución de los modos no masivos, recordemos que dan la contribución dominante en el límite $s \equiv \frac{\pi}{t} \to \infty$ $(t \to 0)$, que corresponde propagación de la cuerda cerrada a través de una gran distancia. (Todos los modos de cuerda abierta contribuyen a este límite. Los modos no masivos de cuerda abierta dan la contribución dominante en el límite opuesto $t \to \infty$ $(s \to 0)$.)

martes, 28 de noviembre de 2006 09:49 a.m.

Usando $\eta(it) = t^{-1/2}\eta(i/t)$, $\theta_3(0|it) = t^{-1/2}\theta_3(0|i/t)$,

$\theta_2(it) = t^{-1/2}\theta_4(i/t)$, $\theta_4(0|it) = t^{-1/2}\theta_2(0|i/t)$,

y cambiando la variable de integración $t \to s = \pi/t$,

$$M_{NS\text{-}NS} = V_{p+1}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\left(8\pi^3\alpha'\right)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\alpha' s}}\left(\frac{\pi}{s}\right)^4 \eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^{-8}\frac{1}{2}\left[\frac{\theta_3\left(0|\frac{is}{\pi}\right)^4}{\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^4} - \frac{\theta_4\left(0|\frac{is}{\pi}\right)^4}{\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^4}\right].$$

Cuando $s \to \infty$ tenemos $q \equiv e^{-2s} \ll 1$ y $\therefore$

$$\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^{-8} = \left[q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\right]^{-8} = q^{-1/3}\left[1+8q+\mathcal{O}(q^2)\right],$$

$$\frac{\theta_3\left(0|\frac{is}{\pi}\right)^4}{\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^4} = q^{-1/6}\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n-1/2})\right]^8 = q^{-1/6}\left[1+8q^{1/2}+\mathcal{O}(q)\right],$$

$$\frac{\theta_4\left(0|\frac{is}{\pi}\right)^4}{\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^4} = q^{-1/6}\left[\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n-1/2})\right]^8 = q^{-1/6}\left[1-8q^{1/2}+\mathcal{O}(q)\right],$$

así que

$$\eta^{-8}\left(\frac{\theta_3^4}{\eta^4} - \frac{\theta_4^4}{\eta^4}\right) = q^{-1/3}\left[1+\mathcal{O}(q)\right]q^{-1/6}\left[\cancel{1}+8q^{1/2}-\cancel{1}+8q^{1/2}+\mathcal{O}(q)\right]$$

$$= 16 + \mathcal{O}(q),$$

($8q^{1/2} + 8q^{1/2} = 16q^{1/2}$)

martes, 28 de noviembre de 2006 10:07 a.m.

de modo que

$$\mathcal{M}_{NS\text{-}NS} = V_{p+1} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left(\frac{8\pi^3\alpha'}{s}\right)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\alpha' s}} \left(\frac{\pi}{s}\right)^4 \left[0\cdot e^s + 8 + \mathcal{O}(e^{-s})\right]$$

taquión — modos no masivos — modos con $m^2 = 2/\alpha'$

Separando la contribución de los modos no masivos,

y reescribiendo la integral usando $T \equiv \alpha' s$, tenemos

$$\mathcal{M}^{m^2=0}_{NS\text{-}NS} = V_{p+1}\, 8 (8\pi^2\alpha')^{-\frac{p+1}{2}} (\pi\alpha')^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{dT}{} T^{-\left(\frac{9-p}{2}\right)} e^{-y^2/2T}}$$

completar cuadrado

$$\underbrace{\int_0^\infty \frac{dT}{} \int \frac{d^{9-p}k}{(2\pi)^{\frac{9-p}{2}}} e^{-\frac{T}{2}k^2 + ik\cdot y}}$$

$$(2\pi)^{\frac{9-p}{2}} 2 \underbrace{\int \frac{d^{9-p}k}{(2\pi)^{9-p}} \frac{e^{ik\cdot y}}{k^2}}_{\Delta_{9-p}(y)},$$

es decir,

$$\mathcal{M}^{m^2=0}_{NS\text{-}NS}(y) = V_{p+1} (2\pi)^{7-2p} \alpha'^{3p} \Delta_{9-p}(y).$$

Igualando a resultado en campos, $2K^2 \tau_p^2 V_{p+1} \Delta_{9-p}(y)$,

concluimos finalmente que

$$\tau_p = \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa} (2\pi l_c)^{3-p},$$

o, recordando nuestra convención

$$g_c \equiv \frac{\tau_{F1}}{\tau_{D1}} = \frac{1/2\pi l_c^2}{\sqrt{\pi}(2\pi)^2 l_c^2/\kappa} = \frac{\kappa}{\sqrt{\pi}(2\pi)^3 l_c^4}$$

(es decir, $2\kappa^2 \equiv (2\pi)^7 g_c^2 l_c^8$),

$$\tau_p = \frac{1}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}}.$$

Este es justamente el valor que habíamos deducido antes, con lo cual verificamos la consistencia con dualidad T y el hecho de que una Dp-brana porta el cuanto mínimo de carga. ✓

Ya que estamos en el tema de la normalización de los acoplamientos, conviene notar que, con este valor para τ_p, la acción efectiva para N Dp-branas (S_{DBINA}) se reduce a bajar energías a super-Yang-Mills (con 16 supersimetrías) en $p+1$ dimensiones (que se puede entender como la reducción dimensional de SYM $\mathcal{N}=1$ en $9+1$ dim),

$$S_{SYM} = \frac{1}{4g_{YM}^2}\int d^{p+1}x\, Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + \text{fermiones},$$

ζ incluye A_α, Φ_i

con $$\boxed{g_{YM}^2 = (2\pi)^{p-2} g_c \ell_c^{p-3}}$$

El caso más familiar (p.ej. por QCD) es $p=3$, donde $[g_{YM}^2] = M^0$. Esta teoría (SYM $\mathcal{N}=4$ $U(N)$ en $3+1$ dim) resulta ser invariante conforme aún a nivel cuántico ($\beta_{g_{YM}} = 0$, a diferencia de QCD). Para $p \leq 3$ acoplamiento adimensional $g_{YM}^2 E^{p-3} \to \infty$ en $E \to \infty$ súper-renormalizable

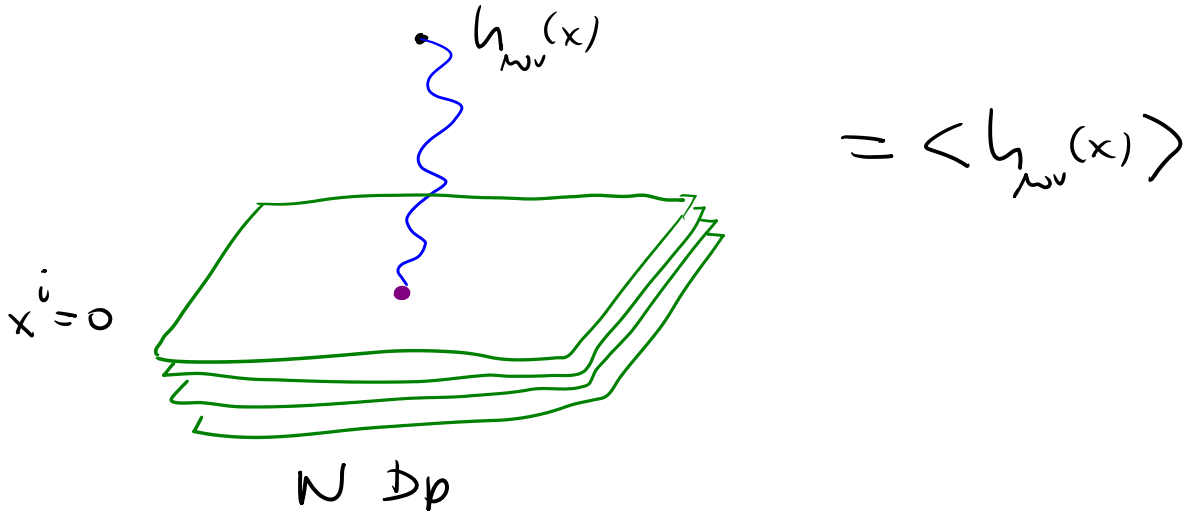
$p = 0$ no renormalizable.

lunes, 04 de diciembre de 2006 09:09 p.m.

Puesto que sabemos que una Dp-brana es fuente del campo gravitacional (+ dilatónico + R-R), esperaríamos que una colección de $N>>1$ Dp-branas deforme el espacio de manera apreciable (notar que por ser BPS, podemos simplemente apilar un número arbitrario de Dp-branas paralelas).

Bajo condiciones apropiadas (que detallaremos más adelante), deberíamos entonces poder describir este fondo curvo como una solución de las ecs. de movimiento de supergravedad.

Podemos deducir la forma asintótica de los campos a partir de nuestra cuenta previa:



lunes, 04 de diciembre de 2006 09:31 p.m.

Tenemos

$$\langle h_{\alpha\beta}(x)\rangle = -\int d^{10}x'\,\frac{1}{2}T^{\mu\nu}(x')\left[2\kappa^2\int\frac{d^{10}k}{(2\pi)^{10}}\frac{e^{ik\cdot(x-x')}}{k^2}D_{\mu\nu\alpha\beta}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}2\kappa^2 N\tau_p\underbrace{\int d^{p+1}x'\int\frac{d^{10}k}{(2\pi)^{10}}\frac{e^{ik_\parallel\cdot(x-x')}e^{ik_\perp\cdot(x-0)}}{k_\parallel^2+k_\perp^2}}_{\Delta_{9-p}(x_\perp)}\underbrace{\hat\eta^{\mu\nu}D_{\mu\nu\alpha\beta}}_{\hat\eta^{\mu\nu}\left(2\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta}-\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta}\right)}$$

$$\left[2-\tfrac{1}{4}(p+1)\right]\eta_{\alpha\beta}$$

así que

$$\langle h_{\alpha\beta}(x)\rangle = 2\kappa^2 N\tau_p\left(\frac{p-7}{8}\right)\Delta_{9-p}(x_\perp).$$

Usando

$$\Delta_d(x) \equiv \int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{e^{ik\cdot x}}{k^2} = 2^{-2}\pi^{-d/2}\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)\frac{1}{x^{d-2}},$$

$$2\kappa^2 = (2\pi)^7 g_c^2 l_c^8 \quad y \quad \tau_p = \frac{1}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}}, \text{ esto es}$$

$$\langle h_{\alpha\beta}(x)\rangle = \left(\frac{p-7}{8}\right)\underbrace{(4\pi)^{\frac{5-p}{2}}\Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right)}_{\equiv c_p}N g_c l_c^{7-p}\frac{1}{x_\perp^{7-p}}\eta_{\alpha\beta}.$$

$$\equiv R^{7-p} \qquad \equiv \frac{1}{r^{7-p}}$$

De manera similar

$$\langle h_{ij}(x)\rangle = -\frac{1}{2}2k^2 N\tau_p \Delta_{q-p}(x_\perp)\underbrace{\hat{\eta}^{\mu\nu}\left[2\eta_{\mu i}\eta_{\nu j}-\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta_{ij}\right]}_{0-\frac{1}{4}(p+1)}$$

$$= \left(\frac{p+1}{8}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{7-p}$$

y

$$\langle\varphi(x)\rangle = -2k^2\tau_p\left(\frac{p-3}{4}\right)\Delta_{q-p}(x_\perp)$$

$$= \left(\frac{3-p}{4}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{7-p}.$$

Para $r \gg R$ tenemos entonces

$$ds_E^2 = \left[1+\left(\frac{p-7}{8}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{7-p}\right]\underbrace{(-dx_0^2+\ldots+dx_p^2)}_{\equiv dx_{||}^2}$$

$$+\left[1+\left(\frac{p+1}{8}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{7-p}\right]\underbrace{(dx_{p+1}^2+\ldots+dx_q^2)}_{\equiv dx_\perp^2}$$

$$= dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2$$

y

$$\overline{\Phi}(r) = \underbrace{\Phi_0}_{\ln g_c} + \underbrace{\left(\frac{3-p}{4}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^{7-p}}_{\equiv\varphi(r)}$$

lunes, 04 de diciembre de 2006 10:25 p.m.

La solución correspondiente de las ecs. de supergravedad $\forall r$ resulta ser

$$ds_E^2 = A(r)^{\frac{p-7}{8}} dx_{\parallel}^2 + A(r)^{\frac{p+1}{8}} dx_{\perp}^2$$

$$e^{\Phi} = g_c A(r)^{\frac{3-p}{4}}$$

$$C_{01\cdots p} = 1 - A(r)^{-1}$$

p-brana negra extremal (con carga R-R)

[Horowitz, Strominger '91]

con $A(r) \equiv 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p}$ función armónica en espacio transversal

Es más habitual dar la métrica en el marco de cuerdas:

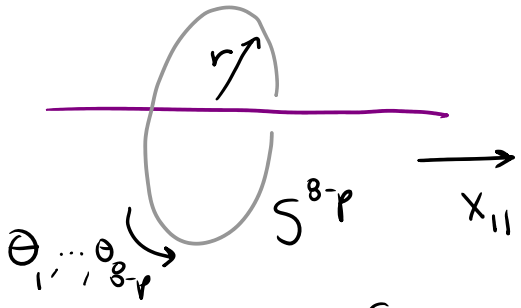
$$ds_c^2 = e^{\varphi/2} ds_E^2 = A^{-1/2} dx_{\parallel}^2 + A^{1/2} dx_{\perp}^2$$

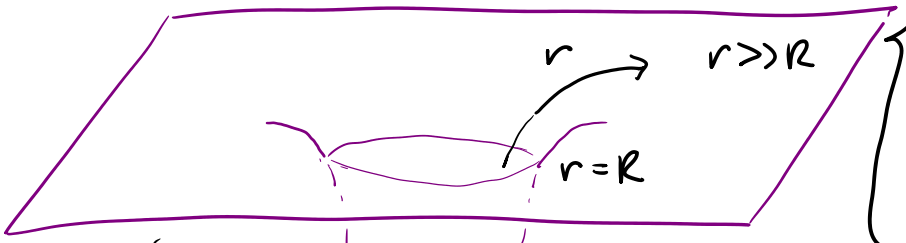
Como esperaríamos, esta solución es BPS, y preserva 16 supersimetrías globales (Y de hecho, resulta más fácil determinarla a partir de las condiciones BPS

$$\left.\begin{aligned} \delta\chi_m &= (D_m + \ldots)\epsilon(r) = 0 \\ \delta\lambda &= (\ldots)\epsilon(r) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{c/ } \epsilon(r) = f(r)\begin{pmatrix}\eta \\ \tilde{\eta}\end{pmatrix}$$

$$\tilde{\eta} = \Gamma^{01\cdots p}\eta \quad .)$$

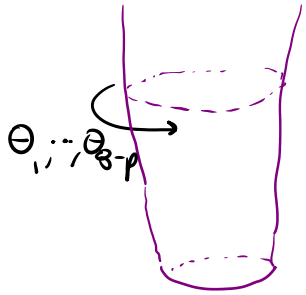
La geometría es estática, y análoga a un agujero negro cargado asintóticamente plano:





$$\begin{cases} g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu} \\ e^{\Phi} \to g_c \\ G_{1\cdots p} \to 0 \end{cases}$$

garganta $0 < r \lesssim R$



$$\begin{cases} g^{rr} \to 0 : \text{horizonte (área} = 0) \\ g_{tt} \to 0 : \text{superficie de límite estacionario} \\ R \sim r^{\frac{3-p}{2}} \to \begin{cases} \infty & p > 3 \\ \text{cte.} & p = 3 \\ 0 & p < 3 \end{cases} \quad \text{(R: Ricci)} \\ e^{\Phi} \sim g_c r^{-\left(\frac{7-p}{4}\right)(3-p)} \to \begin{cases} 0 & p > 3 \\ \text{cte} & p = 3 \\ \infty & p < 3 \end{cases} \end{cases}$$

Recordar que supergravedad es apenas una aproximación a la acción efectiva de cuerdas, válida cuando

1) la curvatura es pequeña (para suprimir correcciones del tipo $\alpha' R^2$) y

2) la constante de acoplamiento $g_c e^{\phi} \ll 1$ (para suprimir correcciones debidas a hojas de mundo con género $n \geq 1$)

La p-brana negra extremal cumple con el primer requisito $\forall r$ si $p \leq 3$ y $R \gg l_c \longleftrightarrow g_c N \gg 1$

y satisface el segundo requisito $\forall r$ si $p \geq 3$ y $g_c \ll 1$.

Vemos entonces que solo la solución con $p=3$ es completamente confiable $\forall r$ si $g_c N \gg 1$, $g_c \ll 1$ (los casos con $p \neq 3$ sufren algún tipo de corrección en $r \to \infty$ ó en $r \to 0$ aún cuando $g_c N \gg 1$, $g_c \ll 1$).

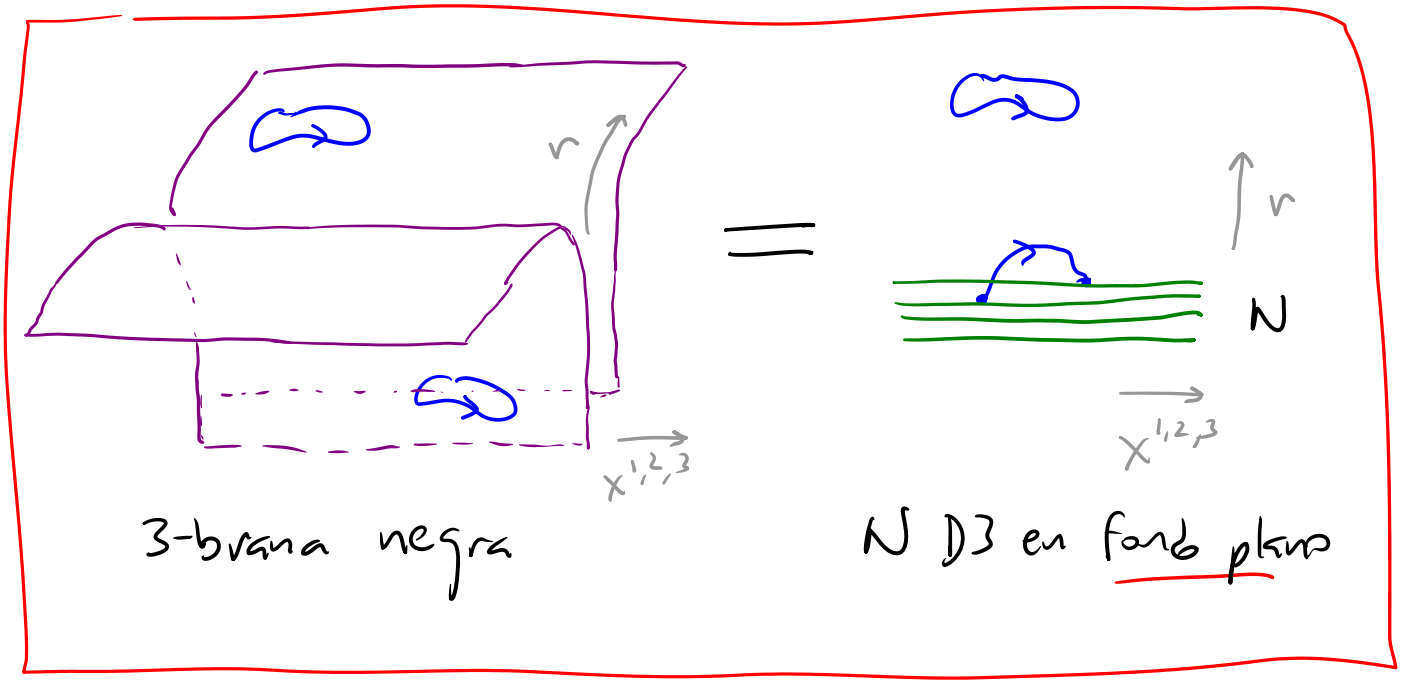
Y notemos ahora algo muy curioso: en esta solución confiable $\forall r$, la 3-brana negra extremal, la geometría es completamente suave (si $g_c N \gg 1$), y se puede extender en la región detrás del horizonte para obtener un espaciotiempo geodésicamente completo [ver hep-th/9405124].

¡¡No queda ∴ rastro alguno de la fuente de los campos!!

martes, 05 de diciembre de 2006 01:38 a.m.

¿¿Dónde quedó entonces la pila de N D3-branas??

La interpretación moderna es que la 3-brana negra extremal y la pila de D3-branas sin excitar dan descripciones alternativas del mismo sistema físico, es decir, tenemos una dualidad (cuya forma precisa e incluso existencia es algo controvertida):



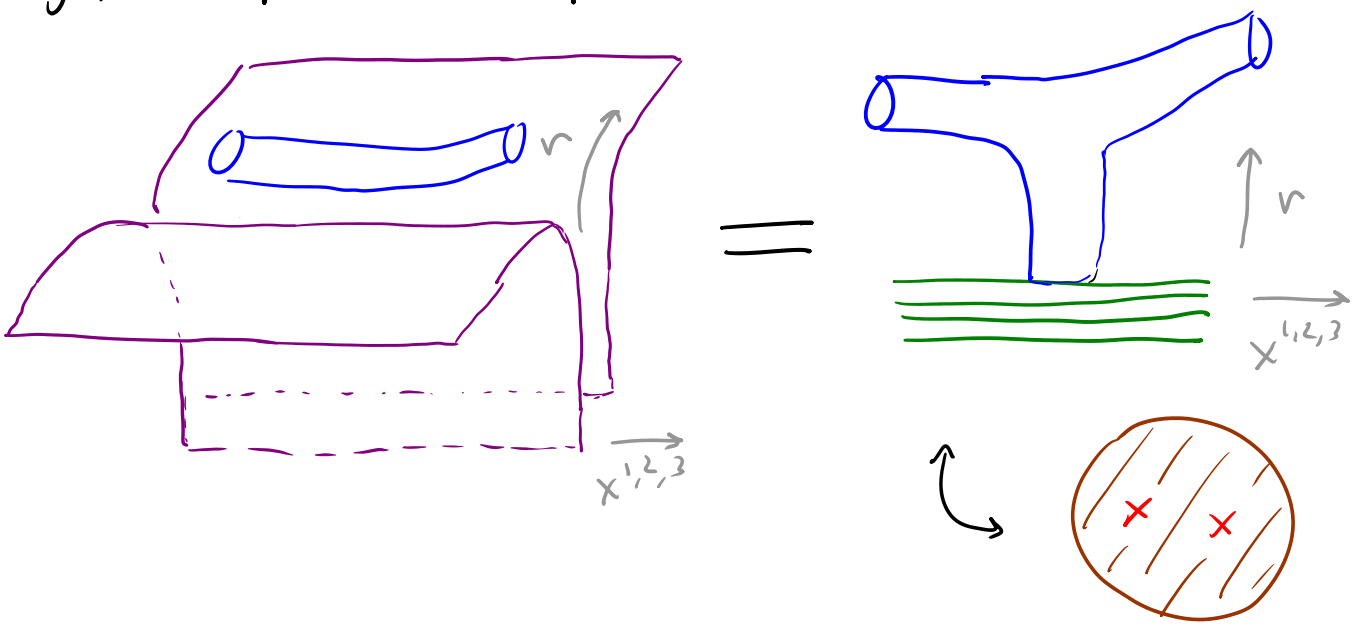
Esta dualidad se puede poner a prueba comparando cantidades calculadas en las 2 descripciones, pero existe una limitación importante: del lado izquierdo, la descripción con el modelo sigma no lineal es perturbativa solo si $g_c N >> 1$ (de otra manera habría que sumar todas las

correcciones en α'), mientras que la descripción en el lado derecho es perturbativa sólo si $g_c^N \ll 1$ (de otra manera habría que sumar sobre hojas de mundo con un número arbitrario de agujeros).

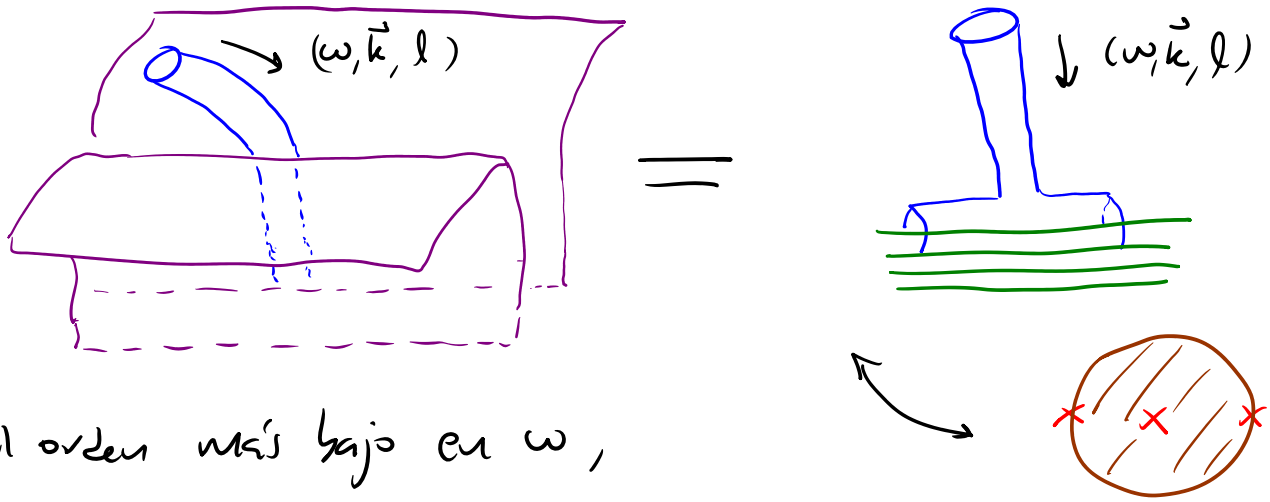
Así que, de entrada, sólo tenemos control cuantitativo sobre estas 2 descripciones en regímenes mutuamente excluyentes. (Existe un problema técnico adicional: incluso cuando $g_c^N \gg 1$, del lado izquierdo no tenemos una buena descripción perturbativa, por el hecho de que el fondo incluye un campo R-R, cuyo operador de vértice R-R crea un corte en la hoja de mundo, ocasionando que el modelo sigma no lineal no esté bien definido en el formalismo RNS [ver sin embargo hep-th/9904104, 0307032 para RNS, hep-th/9805028 para GS, hep-th/0411170 para B].)

En general resulta difícil entonces comparar cálculos realizados en los 2 lenguajes.

A pesar de esto, algunas comparaciones funcionan.
P.ej., la amplitud de dispersión de cuerda cerrada



en el límite de baja transferencia de momento
(es decir, $r \gg R$) [ver hep-th/9510200, 9601057, 9603194],
y la amplitud de absorción para ondas parciales de dilatón



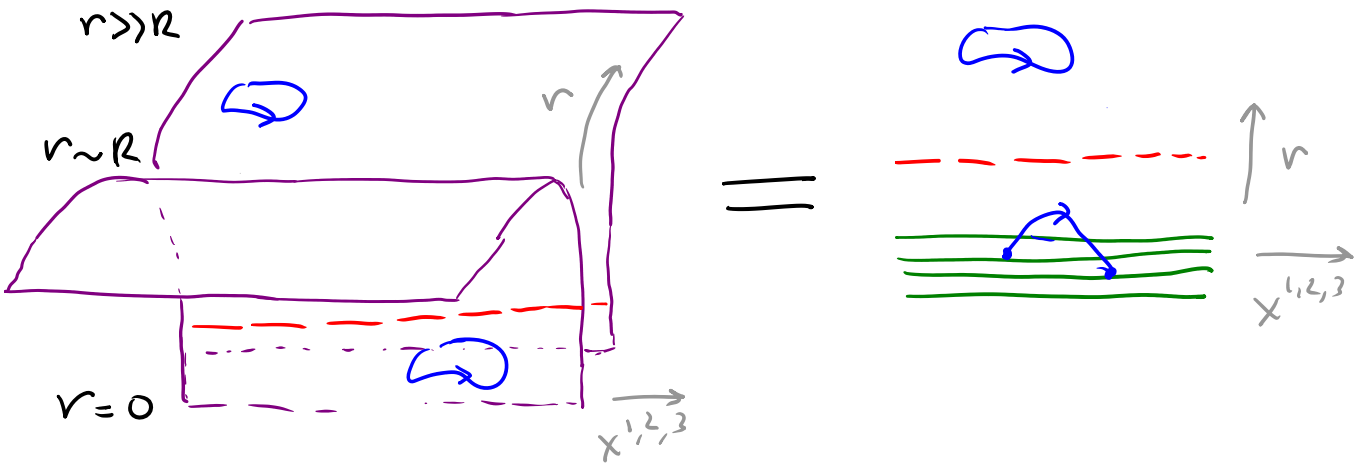
al orden más bajo en ω,

$$\sigma_4^{(l)} = \frac{\pi^4}{24} \frac{(l+3)(l+1)}{[(l+1)!]^4} \left(\frac{\omega R}{2}\right)^{4l} \omega^3 R^8$$

[ver hep-th/9611214, 9702076, 9905174].

martes, 05 de diciembre de 2006 01:38 a.m.

Notar que a bajas energías, $\omega \ll \frac{1}{R}$, en ambas descripciones las branas se desacoplan del "bulto":

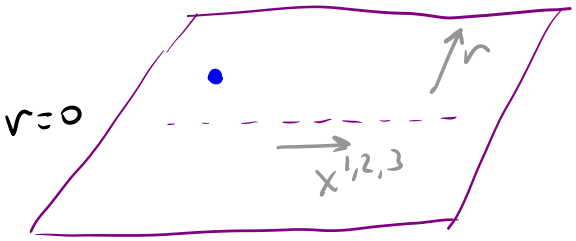


Y de hecho, si $g_c N \gg 1$ tenemos $R \gg \ell_c$

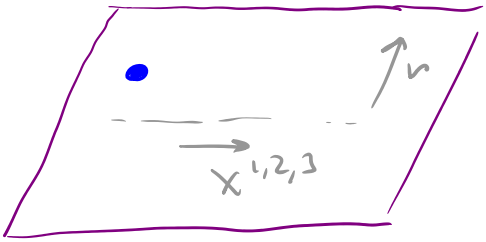
así que estamos en el regimen $\omega \ll \frac{1}{R} \ll \frac{1}{\ell_c}$

(límite de Maldacena: $\omega R \to 0$ con $g_c N \gg 1$ fijo),

donde las 2 descripciones se simplifican a



Supergravedad IIB en Fondo Plano (9+1 dim)



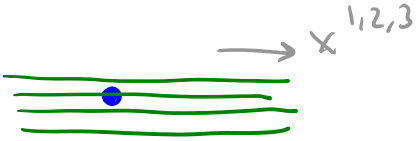
Supergravedad IIB en Fondo Plano (9+1 dim)

=

+

Cuerdas IIB en Fondo Cercano al Horizonte (9+1 dim)

+



Super-Yang-Mills $\mathcal{N}=4$ SU(N) (3+1 dim)

El fondo cercano al horizonte resulta de reemplazar

$$A(r) = 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^4 \xrightarrow[r \ll R]{} \left(\frac{R}{r}\right)^4 .$$

La geometría es

$$ds_c^2 = ds_E^2 = \underbrace{\frac{r^2}{R^2}\left(-dt^2 + d\vec{x}^2\right) + \frac{R^2}{r^2}dr^2}_{\text{anti-de Sitter } 4+1 \text{ dim con radio de curvatura } R} + \underbrace{R^2 d\Omega_5^2}_{\text{esfera 5-dim con radio } R}$$

(espaciotiempo máximamente simétrico con constante cosmológica negativa $\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2}$)

el dilatón es constante, y tenemos N unidades de flujo Ramond-Ramond a través de la 5-esfera.

La conclusión es entonces que, como un caso límite de la dualidad entre la 3-brana negra y una pila de D3-branas, tenemos la equivalencia aún más sorprendente

¡¡ Teoría de Cuerdas tipo IIB en $AdS_5 \times S^5$ = Super-Yang-Mills $\mathcal{N}=4$ $SU(N)$ en 3+1 dim !!

[Maldacena '97, ver p.ej. compendio hep-th/9905111]

miércoles, 06 de diciembre de 2006 01:06 p.m.

Dado que en el lado derecho tenemos una teoría cuántica de campos completamente convencional (y en particular, no gravitacional), que está bien definida a cualquier escala energética (es incluso invariante conforme), esta dualidad norma/gravedad o correspondencia AdS/CFT ¡nos presenta por primera vez con una definición no perturbativa de la teoría de cuerdas IIB!

Notar que los distintos estados que podemos considerar del lado izquierdo no están restringidos a pequeñas fluctuaciones del fondo — podemos considerar, p.ej. un agujero negro dentro de AdS_5, y a través de la dualidad tendremos una descripción alternativa en términos de la teoría de norma. La única restricción que nos impone la elección de SYM $\mathcal{N}=4$ como teoría de norma específica es que los fondos accesibles deben ser asintóticamente $AdS_5 \times S^5$.

miércoles, 06 de diciembre de 2006 01:28 p.m.

Es posible argumentar de manera similar para obtener una dualidad en el caso de Dp-branas con $p \neq 3$, aunque la situación ahí es más complicada por el hecho de que el fondo de brana negra correspondiente no es confiable para toda r [ver hep-th/9802042, 9807137].

Regresando a la discusión general de las soluciones de brana negra, vale la pena señalar que se conoce también solución que describe a una pila de N Dp-branas excitadas, con una densidad de energía (adicional a su tensión) distribuida uniformemente en las direcciones longitudinales, la p-brana negra no extremal

$$ds_c^2 = A^{-1/2}\left[-f\,dx_0^2 + dx_1^2 + \ldots + dx_p^2\right] + A^{1/2}\left[\frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_{8-p}^2\right]$$

$$e^{\Phi} = g_c A^{\frac{3-p}{4}} \qquad C_{01\cdots p} = \coth\gamma\,[1 - A^{-1}]$$

con $A = 1 + \tanh\gamma\left(\frac{R}{r}\right)^{7-p}$ $\qquad R^{7-p} \equiv c_p N g_c \ell_c^{7-p}$

$f = 1 - \left(\frac{r_h}{r}\right)^{7-p}$ $\qquad \operatorname{senh}^2\gamma \equiv \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{R}{r_h}\right)^{2(7-p)}} - \frac{1}{2}$

Esta geometría tiene 2 horizontes, en $r=r_h$ y $r=0$ (similar al agujero negro Reissner-Nordström, es decir, Schwarzschild + carga eléctrica).

Sabemos que el álgebra de supersimetría implica la cota BPS $\boxed{M \geq Q}$ (que en términos de la brana negra se relaciona con la ausencia de una singularidad desnuda — 'censura cósmica').

Dado que la geometría es asintóticamente plana, existe una definición natural de su masa (= energía total, ya que el sistema está en reposo), a partir del comportamiento asintótico de la métrica:

$$g_{00}^E \xrightarrow[r\to\infty]{} -1 + \frac{2k^2}{(D-2)\,\Omega_{D-2-p}} \frac{M}{V_p\, r^{D-3-p}}$$

ADM (Arnowitt, Deser, Misner)

$\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}$ volumen de S^d

$$\Longrightarrow \quad M = \frac{\tau_p V_p}{c_p g_c} \left(\frac{r_h}{l_c}\right)^{7-p} \left[\cosh^2\gamma + \frac{1}{7-p}\right]$$

$c_p \equiv (2\sqrt{\pi})^{5-p}\,\Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right)$

La carga R-R, por otro lado, puede calcularse usando la ley de Gauss como habíamos visto antes:

$$\frac{Q}{V_p} = \frac{1}{2K^2} \int_{S^{8-p}} * G_{(p+2)}$$

← resultado es independiente del radio de S^{8-p}

$$\Longrightarrow \quad Q = \frac{\tau_p V_p}{c_p g_c} \left(\frac{r_h}{l_c}\right)^{7-p} \operatorname{senh}\gamma \cosh\gamma$$

(es precisamente a partir de este resultado y la condición de cuantización $Q = N\tau_p V_p$ que hemos identificado $N = \frac{1}{c_p g_c}\left(\frac{r_h}{l_c}\right)^{7-p} \operatorname{senh}\gamma\cosh\gamma$

$$\longleftrightarrow \quad \operatorname{senh}^2\gamma = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{R}{r_h}\right)^{2(7-p)}} - \frac{1}{2} \quad).$$

Es fácil verificar que $\cosh^2\gamma + \frac{1}{7-p} \geq \operatorname{senh}\gamma\cosh\gamma$, así que efectivamente tenemos $M \geq Q$. Para lograr saturar la desigualdad BPS debemos tomar $\gamma \to \infty$, $r_h \to 0$ con $r_h^{7-p}\operatorname{senh}^2\gamma = R^{7-p}$ fijo, en cuyo caso recuperamos

la solución extremal, con $M = N\tau_p V_p$, justo como una pila de N Dp-branas. El límite opuesto $\gamma \to 0$ con r_h fija resulta en una p-brana negra neutra, que equivale a un agujero negro de Schwarzschild en 10-p dim ($\times T^p$).

Es importante resaltar que, justo como un agujero negro, las branas negras tienen propiedades termodinámicas. Concretamente, poseen una entropía de Bekenstein-Hawking

$$S_{BH} \equiv \frac{A_h^E}{4G_N} = \frac{\Omega_{8-p}}{4G_N} V_p \, r_h^{8-p} \cosh\gamma$$

y una temperatura de Hawking [ver p.ej. Birrell, Davies]

$$T_H \equiv \frac{\text{Gravedad Superficial}}{2\pi} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial g_{tt}/\partial r}{\sqrt{-g_{tt}\, g_{rr}}}\right)\Bigg|_{r=r_h} = \frac{7-p}{4\pi r_h \cosh\gamma}$$

Vemos que $T_H \to 0$ en el límite extremal, como esperaríamos dado que la solución BPS es estable y no puede radiar. Y en este límite tenemos también $S_{BH} \to 0$, como esperaríamos en base a la descripción alternativa en términos de Dp-branas, dado que existe 1 solo estado de las N D-branas sin excitar.

jueves, 07 de diciembre de 2006 12:32 a.m.

Por cierto que, para el caso extremal, el requisito $\partial_\perp^2 A = 0$ permite también una solución multicentrada

$$A(\vec{x}_\perp) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_p g_c N_k \ell_c^{7-p}}{|\vec{x}_\perp - \vec{y}_k|^{7-p}} ,$$

que corresponde a un sistema con n pilas de Dp-branes, con N_k de ellas en $\vec{x}_\perp = \vec{y}_k$. La razón física por la cual esto es posible es por supuesto el hecho de que no existe fuerza entre objetos BPS del mismo tipo.

Otra generalización es considerar soluciones con más de un tipo de carga. Para ello curiosamente basta con 'superponer' las funciones armónicas correspondientes. P.ej., para el sistema Dp - D(p+4),

$$ds_c^2 = A_p^{-1/2} A_{p+4}^{-1/2} (-dx_0^2 + \ldots + dx_p^2) + A_p^{1/2} A_{p+4}^{-1/2} (dx_{p+1}^2 + \ldots + dx_{p+4}^2)$$

$$+ A_p^{1/2} A_{p+4}^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_{4-p}^2)$$

$$e^{\Phi} = g_c A_p^{\frac{3-p}{4}} A_{p+4}^{-\frac{p+1}{4}} , \quad C_{01\cdots p} = 1 - A_p^{-1} , \quad C_{01\cdots p+4} = 1 - A_{p+4}^{-1}$$

jueves, 07 de diciembre de 2006 12:47 a.m.

Notar que en este caso ambas funciones armónicas dependen solo de la coordenada radial en el espacio (5-p)-dimensional ortogonal a las D(p+4)-branas, es decir, las Dp's NO están localizadas, sino esparcidas uniformemente en $x^{p+1}, \cdots, x^{p+4}$.

Un caso particularmente interesante es el sistema D1-D5, donde si compactificamos la dirección x^1 y agregamos N_{KK} unidades de momento p_1 como una tercera carga, obtenemos una 5-brana negra cuya masa

$$M = N_1 \tau_1 V_1 + N_5 \tau_5 V_{12345} + \frac{N_{KK}}{(V_1/2\pi)}$$

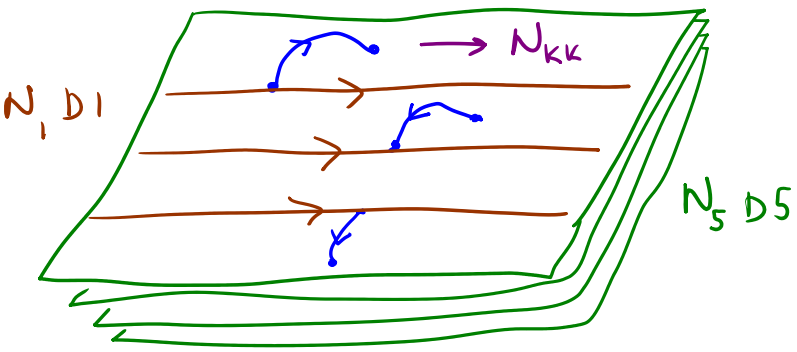
satura la desigualdad BPS correspondiente y es por tanto extremal, a pesar de lo cual tiene un área de horizonte finita, que se traduce en una entropía

$$S_{BH} = 2\pi \sqrt{N_1 N_5 N_{KK}}$$

Este resultado es confiable si $g_c N_1, g_c N_5, g_c N_{KK} \gg 1$ (y $V_1, (V_{12345})^{1/5} \gg \ell_c$). Pero dado que $\exp(S_{BH})$ cuenta el número total de estados que tienen las

jueves, 07 de diciembre de 2006 10:03 a.m.

cargas dadas, y los estados en cuestión son BPS y por tanto absolutamente estables, debe ser posible reproducir este mismo resultado aún en el régimen $g_c N_1, g_c N_5, g_c N_{KK} \ll 1$, donde la descripción en términos de N_1 D1-branas, N_5 D5-branas, y un cierto número de cuerdas D1-D5 que portan momento $p_1^{(l)} = \frac{n_l}{(V_1/2\pi)} > 0$ es perturbativa.



Y efectivamente, al hacer el conteo de estados microscópicos en la teoría de norma correspondiente se encuentra

$$S_{micro} = 2\pi\sqrt{N_1 N_5 N_{KK}} \quad \checkmark$$

[Strominger, Vafa '96; ver hep-th/9607235, 0203048].

En algunos casos cuasi-extremales, ha resultado posible también obtener un acuerdo perfecto $S_{micro}(g_c N \ll 1) = S_{BH}(g_c N \gg 1)$

Más en general, aún cuando el cálculo microscópico no esté completamente bajo control, se puede verificar

que existe un acuerdo cualitativo del tipo (esquemático)

$$S_{micro}(g_c N \sim 1) \sim S_{BH}(g_c N \sim 1),$$

conocido como principio de correspondencia

[Horowitz, Polchinski '96; ver hep-th/9712253, 0008241].

Regresando a la discusión general, para completar nuestro repertorio de branas negras básicas [ver 9412184, 9611203, 9701088], es importante señalar que se conoce también la solución que corresponde a una pila de cuerdas fundamentales extendidas a lo largo de la dirección x^1,

$$ds_c^2 = A_{F1}^{-1}[-dx_0^2 + dx_1^2] + dr^2 + r^2 d\Omega_7^2$$

$$e^{\Phi} = g_c A_{F1}^{-1/2}, \qquad B_{01} = 1 - A_{F1}^{-1}$$

Cuerda Negra [Dabholkar, Harvey '89]

con $A_{F1}(r) = 1 + \left(\frac{R_{F1}}{r}\right)^6$, $R_{F1}^6 \equiv 32\pi^2 N g_c^2 \ell_c^6$

que es BPS y tiene $M = N\tau_{F1} V_1$ con $\tau_{F1} = \frac{1}{2\pi\ell_c^2}$.

En este caso hay una singularidad en $r=0$: las ecs. de mov. se satisfacen con una $\delta(r)$ como fuente.

Y se conoce también la contraparte magnética, que describe a un conjunto de NS5-branas apiladas,

$$ds_c^2 = -dx_0^2 + \ldots + dx_5^2 + A_{NS5}\left[dr^2 + r^2 d\Omega_3^2\right]$$

$$e^{\Phi} = g_c A_{NS5}^{1/2} \qquad B_{012345} = 1 - A_{NS5}^{-1}$$

5-brana Negra [Callan, Harvey, Strominger; Duff, Lu '91]

con $A_{NS5}(r) = 1 + \left(\frac{R_{NS5}}{r}\right)^2$, $R_{NS5}^2 \equiv N l_c^2$.

Esta solución también es BPS, y tiene

$$M = N T_{NS5} V_5 \quad , \text{ con } \quad T_{NS5} = \frac{1}{(2\pi)^5 g_c^2 l_c^6}.$$

Esta solución tiene una garganta infinita (medida con ds_c^2) cuya sección transversal es una S^3 con radio $\xrightarrow[r\to 0]{} R$, y a lo largo de la cual $g_c e^{\Phi} \propto r^{-1} \to \infty$.

A partir de un análisis de fluctuaciones (modos normalizables) alrededor de la 5-brana negra, se pueden deducir los grados de libertad que residen en el volumen de mundo de NS5:

- $X^i(x^\alpha)$, $A_\alpha(x^\alpha)$ + superparejas en IIB
- $X^i(x^\alpha)$, $A^+_{\alpha\beta}(x^\alpha)$ + superparejas en IIA.

martes, 12 de diciembre de 2006 12:03 p.m.

2. Dualidad y Teoría M

Dualidad ≡ equivalencia no trivial entre 2 teorías

Hasta ahora hemos visto 2 ejemplos:

- Dualidad T, donde es posible tener

$g_c \ll 1 \overset{T}{\longleftrightarrow} g_{c_T} \ll 1$, lo cual permite verificar la dualidad directamente en la expansión perturbativa.

- Dualidad Norma/Gravedad, donde si bien

$g_c \ll 1 \longleftrightarrow g_{YM}^2 \ll 1$, sabemos que los los regímenes perturbativos son mutuamente excluyentes:

$g_c N \ll 1 \Rightarrow$ acoplamiento fuerte en hoja de mundo de la cuerda

$g_c N \gg 1 \Rightarrow$ acoplamiento fuerte en teoría de norma.

En lo que resta del curso argumentaremos que existen también dualidades tales que

$$g_c \ll 1 \overset{S}{\longleftrightarrow} g_c' \gg 1$$

Dualidad S

(de 'strong coupling')

Claramente estas dualidades resultan (como AdS/CFT) más difíciles de verificar, pero de existir serían extremadamente útiles, puesto que nos permitirían entender el comportamiento de una teoría fuertemente acoplada ¡empleando una descripción alternativa que es débilmente acoplada!

Analizaremos esta posibilidad para cada una de las 5 teorías de supercuerdas en 9+1 dimensiones. ¿Cómo proceder? La observación clave es que estas teorías preservan tantas supersimetrías (≥ 16) que la acción efectiva para sus campos no masivos está determinada de manera única por la supersimetría (y el contenido de campos). La acción efectiva calculada a nivel árbol es por tanto exacta — no puede recibir correcciones cuánticas. Cualquier posible dualidad del tipo antes mencionado debe ser entonces visible en las propias acciones efectivas.

martes, 12 de diciembre de 2006 01:13 p.m.

Consideremos primero la acción efectiva de cuerdas IIB (→ supergravedad IIB). La parte bosónica es

$$S_{IIB} = \frac{1}{2K_0^2}\int d^{10}x \Big\{ \sqrt{-g}\, e^{-2\Phi}\left[R + 4(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{2\cdot 3!} H_{(3)}^2\right] \quad \text{NS-NS}$$

$$+ \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2} G_{(1)}^2 - \frac{1}{2\cdot 3!}\overset{\vee}{G}_{(3)}^2 - \frac{1}{2\cdot 5!}\overset{\vee}{G}_{(5)}^2\right] \quad \text{R-R}$$

$$- \frac{1}{2} C_{(4)} \wedge H_{(3)} \wedge G_{(3)} \Big\} \quad \text{'Chern-Simons'}$$

$\frac{K^2}{e^{2\Phi_0}}$

donde

$$\overset{\vee}{G}_{(3)} \equiv G_{(3)} - C_{(0)} \wedge H_{(3)}$$

$$\overset{\vee}{G}_{(5)} \equiv G_{(5)} - \frac{1}{2} C_{(2)} \wedge H_{(3)} + \frac{1}{2} B_{(2)} \wedge G_{(3)} \qquad (\text{con } G_{(p+2)} \equiv d C_{(p+1)})$$

son intensidades de campo invariantes bajo las diversas transformaciones de norma (análogas a $F_{(2)} \equiv F_{(2)} + B_{(2)}$ en la acción de Born-Infeld), y debemos recordar imponer a mano la restricción de autodualidad $*\overset{\vee}{G}_{(5)} = \overset{\vee}{G}_{(5)}$ a nivel de las ecs. de mov.

Esta acción es invariante bajo un grupo de transformaciones $SL(2,\mathbb{R})$ que mezclan Φ con $C_{(0)}$, $H_{(3)}$ con $G_{(3)}$, y

dejan invariante a $\check{G}_{(5)}$ y a $g_{E\mu\nu} \equiv e^{-\Phi/2} g_{\mu\nu}$.

Agrupando

$$\lambda \equiv C_{(0)} + i e^{-\Phi} \quad , \quad F_{(3)} \equiv \begin{bmatrix} H_{(3)} \\ G_{(3)} \end{bmatrix} ,$$

y definiendo $\Lambda \equiv \frac{1}{\mathrm{Im}\,\lambda} \begin{bmatrix} |\lambda|^2 & -\mathrm{Re}\,\lambda \\ -\mathrm{Re}\,\lambda & 1 \end{bmatrix}$,

podemos reescribir

$$S_{IIB} = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^{10}x \left\{ \sqrt{-g_E} \left[R_E - \frac{\partial_\mu \bar{\lambda}\, \partial^\mu \lambda}{2(\mathrm{Im}\,\lambda)^2} - \frac{1}{2\cdot 3!} F_{(3)}^i \Lambda_{ij} F_{(3)}^j \right. \right.$$
$$\left. \left. - \frac{1}{4\cdot 5!} \check{G}_{(5)}^2 - \frac{1}{4} \epsilon_{ij} C_{(4)} \wedge F_{(3)}^i \wedge F_{(3)}^j \right] \right\} ,$$

donde encontramos invariancia bajo

$$\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \quad \longleftrightarrow \quad \Lambda' = (M^{-1})^T \Lambda M^{-1} \text{ con } M \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R}) ,$$

$$F'_{(3)} = M F_{(3)} ,$$

$$\check{G}'_{(5)} = \check{G}_{(5)} , \qquad g'_{E\mu\nu} = g_{E\mu\nu}$$

¿Será entonces $SL(2,\mathbb{R})$ una simetría de la teoría de cuerdas IIB?

martes, 12 de diciembre de 2006 09:51 p.m.

Recordar que la cuerda fundamental porta carga bajo $B_{(2)}$: número de enrollamiento $e \in \mathbb{Z}$.

Actuando con $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, una cuerda con $e = 1$ se convertiría en un objeto con cargas (a, c) bajo $(B_{(2)}, C_{(2)})$,

$\therefore$ debemos tener $a, c \in \mathbb{Z}$.

El grupo máximo que pudiera ser simetría de la teoría de cuerdas IIB es entonces $SL(2,\mathbb{Z}) \subset SL(2,\mathbb{R})$ [Hull, Townsend '94]. Este grupo incluye en particular a

$$S \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$ cuyo efecto es

$$\lambda' = -\frac{1}{\lambda}, \qquad H'_{(3)} = -G_{(3)}, \quad G'_{(3)} = H_{(3)}$$

Si $C_{(0)} = 0$, esto es $\Phi' = -\Phi$

$\Rightarrow$ $\boxed{g_c' = 1/g_c}$

$\Rightarrow B_{(2)} \leftrightarrow C_{(2)} \Rightarrow$ $\boxed{F1 \leftrightarrow D1}$

Notar que $T_{F1} = \frac{1}{2\pi \ell_c^2}$ y $T_{D1} = \frac{1}{2\pi g_c \ell_c^2}$

medidas en el marco de Einstein son

$$T_{F1}^{(E)} = \frac{\sqrt{g_c}}{2\pi \ell_c^2} \overset{S}{\longleftrightarrow} T_{D1}^{(E)} = \frac{1}{2\pi \sqrt{g_c} \ell_c^2} \quad \checkmark$$

miércoles, 13 de diciembre de 2006 09:47 a.m.

Cuando $g_c \ll 1$ tenemos $T_{F1} \ll T_{D1}$, pero para $g_c \gg 1$, $T_{D1} \ll T_{F1}$.

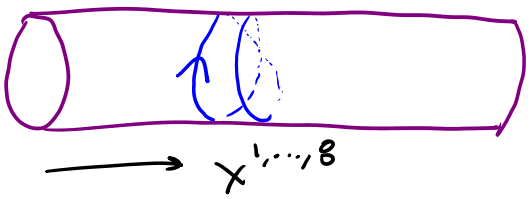
Si S es en verdad una simetría (autodualidad) de la teoría IIB completa, entonces al cuantizar a la D1-brana cuando $g_c \gg 1$ obtendríamos exactamente el mismo espectro que dedujimos al cuantizar a la F1 débilmente acoplada (y a la inversa, el espectro de F1 para $g_c \gg 1$ coincidiría con el espectro de D1 para $g_c \ll 1$).

Más en general, si el grupo $SL(2,\mathbb{Z})$ completo es una simetría, obtendremos una familia infinita de predicciones para el espectro no perturbativo de la teoría IIB.

No podemos verificarlas para el espectro completo (no sabemos calcular cuando $g_c \gg 1$); pero sí para los estados que son BPS.

Consideremos una cuerda fundamental IIB en

$M^{8,1} \times S^1_R$ $\quad x^9$



miércoles, 13 de diciembre de 2006 10:02 a.m.

Definiendo $p_I^9 = \frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'}$, $p_D^9 = \frac{n}{R} - \frac{eR}{\alpha'}$,

Sabemos que cuando $g_c \ll 1$ el espectro está dado por

$$m^2 = p_I^2 + \frac{4}{\alpha'}(N + \cancel{A}^{\,0})$$

$$= p_D^2 + \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N} + \cancel{\tilde{A}}^{\,0})$$

podemos restringir al sector R; por supersimetría NS daría los mismos resultados

con la condición de empatamiento de niveles

$$N + \cancel{A}^{\,0} - \tilde{N} - \cancel{\tilde{A}}^{\,0} = ne .$$

Si $N=0$, entonces $m = |p_I^9| = \left|\frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'}\right|$ $(y\ \tilde{N} = -ne)$.

A partir de $\{Q, \bar{Q}\} = -p_I^\mu \Gamma_\mu$ podemos deducir que estos estados son invariantes bajo 1/4 de las supersimetrías: aquellas descritas por $\eta = \pm \Gamma^{09}\eta$.

← signo dado

Análogamente, los estados con $\tilde{N}=0$ tienen $m = |p_D^9| = \left|\frac{n}{R} - \frac{eR}{\alpha'}\right|$ $(y\ N = ne)$, y son invariantes bajo las 8 supersimetrías $\tilde{\eta} = \pm \Gamma^{09}\tilde{\eta}$.

En ambos casos los estados forman parte de multipletes cortos, con $2^{(32-8)/2} = 16.256$ estados.

miércoles, 13 de diciembre de 2006 10:16 a.m.

Por otro lado, si $N=\tilde{N}=0$, entonces

$$m=\frac{|n|}{R},\ e=0 \qquad \text{ó} \qquad m=\frac{|e|R}{\alpha'},\ n=0,$$

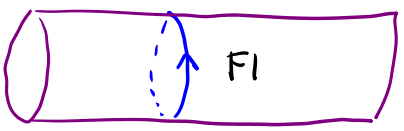
y los estados son invariantes bajo $\frac{1}{2}$ de las supersimetrías, formando por tanto parte de multipletes ultracortos, con $2^{(32-16)/2}=256$ estados.

Vimos antes que en la teoría IIB tenemos un total de

$$(8_{NS}+8_{R})\times(8_{\widetilde{NS}}+8_{\widetilde{R}})=256 \text{ estados físicos con } N=\tilde{N}=0,$$

es decir, un solo multiplete ultracorto para cada valor de e (con $n=0$), o cada valor de n (con $e=0$).

En particular, para $n=0$, $e=1$ tenemos 256 estados con



$$m=\frac{R}{\alpha'} \longleftrightarrow m_E=\frac{R\sqrt{g_c}}{\alpha'},$$ que portan carga

$e_{FI}=1$ bajo B_{NS} y $e_{DI}=0$ bajo C_{NS}.

Una transformación arbitraria $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})$ modifica las cargas $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$, con $ps-qr=1$,

y cambia

$$\lambda \equiv C_{(0)} + i e^{-\Phi} = 0 + \frac{i}{g_c} \longrightarrow \lambda' = \frac{p\lambda + r}{q\lambda + s} ,$$

es decir, $g_c' = \frac{g^2}{g_c} + s^2 g_c$, $C_{(0)}' = \frac{pq + sr g_c^2}{q^2 + s^2 g_c^2}$.

los nuevos estados deben estar presentes en el espectro de la teoría cuando el acoplamiento y el escalar RR toman estos valores (notar que en general $g_c' >> 1$), pero como en BPS, y ∴ estables, deben estar allí también para otros valores de los 'módulos' (parámetros) de la teoría, y en particular para $g_c << 1$, $C_{(0)} = 0$.
Tenemos entonces la siguiente

Predicción: $\forall$ p, q primos relativos, $\exists$ un único multiplete ultracorto (256 estados) en cargas $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ bajo $\begin{pmatrix} B_{mq} \\ C_{mq} \end{pmatrix}$, número de KK $n=0$

y masa $m_E = \frac{R}{\alpha' \sqrt{Im\lambda}} |p - q\lambda| .$

miércoles, 13 de diciembre de 2006 11:01 a.m.

De manera similar, considerando los estados de la cuerda fundamental con $n>0$, $e=1$, $\tilde{N}=0$ $(\Rightarrow N=n)$ ó $n<0$, $e=1$, $N=0$ $(\Rightarrow \tilde{N}=-n)$ encontramos una segunda

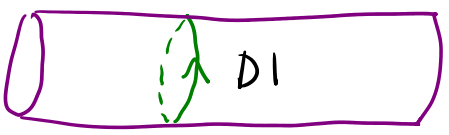
Predicción: $\forall\ p,q,n$ con $n\neq 0$ y p,q primos relativos, $\exists\ d_n$ multipletes cortos (16·256 estados) con cargas $\begin{pmatrix} p \\ q \\ n \end{pmatrix}$ bajo $\begin{pmatrix} B_{pq} \\ C_{pq} \\ g_{pq} \end{pmatrix}$, donde d_n está dado por

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n q^n = \frac{1}{16} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^n}{1-q^n}\right)^8 \quad (\text{p.ej., } d_1=1,\ d_2=9,\ d_3=60).$$

se deduce a partir de función de partición

Para intentar verificar estas predicciones, consideremos primero los estados con $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $n=0$.

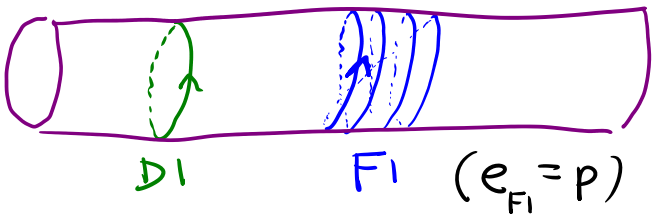
El candidato obvio es simplemente una D1-brana:



Sabemos que D1 sin excitar preserva 16 supersimetrías,

y da lugar por tanto precisamente a 1 multiplete ultracorto (256 estados). ✓

Ahora, ¿cómo podemos obtener estados con cargas $\binom{p}{1}$? La configuración obvia sería



Tiene las cargas correctas, pero su masa total

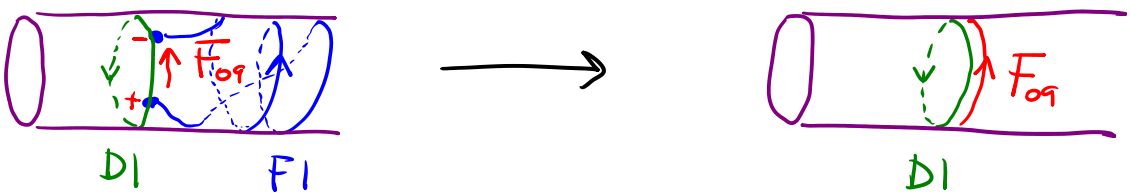
$$\left(p\tau_{F1} + \tau_{D1}\right) 2\pi R = \left(p + \frac{1}{g_c}\right)\frac{R}{l_c^2}$$

no satura la desigualdad BPS correspondiente,

$$m_{p,q} \geq \sqrt{q_{F1}^2 + q_{D1}^2} = \sqrt{(p\tau_{F1})^2 + (q\tau_{D1})^2}\,(2\pi R),$$

lo cual sugiere que este estado pudiera ser inestable.

Y efectivamente, el sistema reduce su energía cuando la cuerda fundamental se rompe y se desenrolla:



La configuración final es una D1 que porta flujo eléctrico, con F_{0q} = cte. por la ec. de mov.

¿Cómo es que este proceso no viola la conservación de la carga q_{F1}? El punto es que a partir de

$$S_{DBI} = -T_{D1} \int dx^0 dx^q \sqrt{1-(B_{0q}+2\pi\alpha' F_{0q})^2}$$

tenemos

$$\left.\frac{\delta S_{DBI}}{\delta B_{0q}}\right|_{B_{0q}=0} = \frac{1}{2\pi\alpha' g_c} \frac{2\pi\alpha' F_{0q}}{\sqrt{1-(2\pi\alpha' F_{0q})^2}} ,$$

de modo que la D1 con $F_{0q} \neq 0$ porta justamente esta densidad de carga bajo B_{0q}. Notar que esta expresión coincide con $\frac{1}{2\pi\alpha'} \Pi_{A_q} \equiv \frac{\delta S_{DBI}}{\delta(2\pi\alpha' F_{0q})}$, que obedece la regla de cuantización $\Pi_{A_q} 2\pi R = \frac{p}{1/2\pi R}$ con $p \in \mathbb{Z}$, debido a la periodicidad

$$A_q \simeq A_q' \equiv A_q + \frac{1}{R} \quad \longleftrightarrow \quad \exp\left[i\int dx^q A_q\right] = \exp\left[i\int dx^q A_q'\right].$$

En conjunto tenemos entonces $p = \frac{1}{g_c} \frac{2\pi\alpha' F_{09}}{\sqrt{1-(2\pi\alpha' F_{09})^2}}$,

y reconocemos que la D1 con $F_{09} \neq 0$

representa un estado ligado 1 D1 + p F1,

cuya energía

$$m = T_{D1} \int dx^9 \left[\frac{(2\pi\alpha' F_{09})^2}{\sqrt{1-(2\pi\alpha' F_{09})^2}} + \sqrt{1-(2\pi\alpha' F_{09})^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha' g_c} (2\pi R) \frac{1}{\sqrt{1-(2\pi\alpha' F_{09})^2}}$$

$$= (2\pi R) \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi\alpha' g_c}\right)^2 + \left(\frac{p}{2\pi\alpha'}\right)^2}$$

satura la desigualdad BPS.

(Notar que esto es análogo al sistema

D2 con flujo magnético = estado ligado D2+D0,

y de hecho, ambos sistemas son equivalentes si

en verdad la teoría IIB es S'-autodual:

D2: 012 $\xrightarrow{T_9}$ D3: 0129 $\xrightarrow{S'}$ D3: 0129 $\xrightarrow{T_{12}}$ D1: 09
D0: 0xx D1: 0xx9 F1: 0xx9 F1: 09 .)

Este estado ligado preserva 16 supersimetrías y por tanto forma parte de un múltiplete ultracorto. ✓

Para el caso $\binom{p}{q}$ con $q>1$, se requiere un análisis de la teoría $U(q) \simeq U(1) \times SU(q)$ en el sector con p unidades de flujo eléctrico.

La componente $U(1)$ tiene la información del centro de masa del sistema, mientras que la parte $SU(q)$ codifica los grados de libertad internos. Se puede mostrar que existe un estado ligado ($\leftrightarrow$ vacío no degenerado de la teoría $SU(q)$, con una brecha de masa) ¡si y solo si p,q son primos relativos! [Witten '95] ✓

De manera similar, se puede verificar que existen multipletes cortos para cada elección de $n \neq 0$, p,q primos relativos. Esto requiere un conteo de las distintas maneras de repartir las n unidades de momento entre los diversos modos de cuerdas abiertas que representan excitaciones del sistema de q D1 + p unidades

de flujo eléctrico. (Para obtener estados BPS, en el caso $n \gtrless 0$ nuevamente debemos excitar sólo cuerdas con momento $p_q^{(l)} \gtrless 0$.) La respuesta resulta ser precisamente d_n. ✓

Tenemos entonces evidencia para la (auto-)dualidad

$$IIB \overset{SL(2,\mathbb{Z})}{\longleftrightarrow} IIB$$

$$F1 \longleftrightarrow (p,q)\text{-1-brana (incluyendo D1)}$$

$$D3 \longleftrightarrow D3 \quad \left(\overset{E \ll 1/l_c}{\Longrightarrow} \text{Autodualidad } SL(2,\mathbb{Z}) \text{ en SYM } \mathcal{N}=4 \text{ [Montonen-Olive]} \right)$$

$$D5 \longleftrightarrow (p,q)\text{-5-brana (incluyendo NS5)}$$

$$D7 \longleftrightarrow (p,q)\text{-7-brana}$$

$$D9 \longleftrightarrow (p,q)\text{-9-brana}$$

Y en particular, hemos aprendido con esto que

$$!! \quad IIB(g_c) \xrightarrow{g_c \gg 1} IIB(g_c' \ll 1) \; !!$$

(Notar, sin embargo, que aún no entendemos $g_c \sim 1$.)

viernes, 15 de diciembre de 2006 01:36 a.m.

Al compactificar, se obtiene un grupo de dualidad más grande, $S + T \subset$ Dualidad U [Hull, Townsend '94]

¿será posible encontrar un comportamiento análogo en otras teorías? Consideremos la teoría I, donde tenemos un grupo de norma SO(32). La posibilidad más natural (aunque no única) sería que la hipotética descripción S-dual tuviera el mismo grupo de norma, en cuyo caso tenemos solo 2 candidatos:

$$I(g_c) \xrightarrow{g_c >> 1} \text{¿} I(g_c' << 1) \text{ ó } HO(g_c' << 1)?$$

Y de hecho, se encuentra que las acciones efectivas de I y HO están relacionadas a través de la redefinición de campos

$$\Phi^{(I)} = -\Phi^{(HO)} \Longrightarrow \boxed{g_c^{(I)} = 1/g_c^{(HO)}}$$

$$G^{V\,(I)}_{(3)} = H^{(HO)}_{(3)} \Longrightarrow D1_I \leftrightarrow F1_{HO}$$

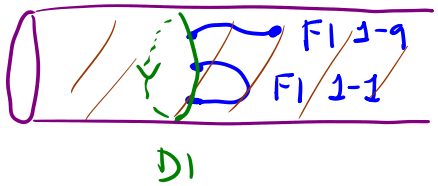
$$g^{(I)}_{E_{\mu\nu}} = g^{(HO)}_{E_{\mu\nu}}, \quad A^{(I)}_{(1)} = A^{(HO)}_{(1)}.$$

viernes, 15 de diciembre de 2006 01:51 a.m.

Es natural entonces conjeturar que

$$I \overset{S^1}{\longleftrightarrow} HO \qquad \text{[Witten, '95]}$$

En este caso nuevamente es posible mostrar que los estados BPS coinciden. En particular,

I: 

tiene excitaciones no masivas que coinciden exactamente con las de $F1_{HO}$. Existe además evidencia de otros tipos.

P.ej., notando que

$$\begin{array}{ccc} I \text{ en } M^{9,1}\times S^1 & \overset{S^1}{\longleftrightarrow} & HO \text{ en } M^{9,1}\times S^1 \\ \updownarrow T_9 & & \updownarrow T_9 \\ I'(=IA) \text{ en } M^{9,1}\times S^1 & & HE \text{ en } M^{9,1}\times S^1 \end{array}$$

y recordando que para ciertos valores de los módulos en HO/HE tenemos auto-dualidad T y ensanchamiento de la simetría de norma (aparición de vectores sin masa adicionales), esperaríamos observar estos mismos fenómenos en I/I'. Más aún, se puede mostrar

que esto sucede en particular en situaciones donde $g_c^{(I')} \ll 1$ y $R_9^{(I')} \gg l_c$, donde ingenuamente podríamos entender I' de manera perturbativa.

Pero en I/I' no encontramos estos fenómenos, ¡así que pareceríamos tener una contradicción seria!

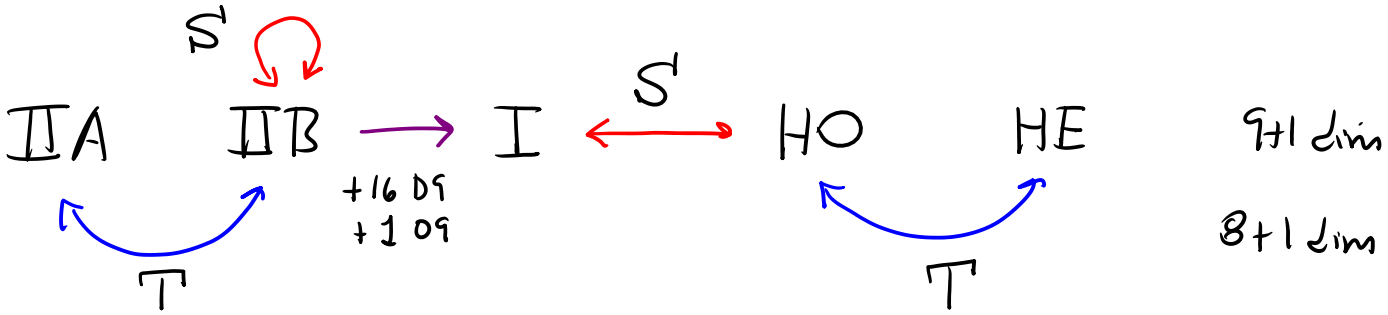
El problema se evita milagrosamente: con un análisis más detallado, se encuentra que la expansión perturbativa no es válida en I' si $R^{(I')} > 1/g_c^{(I')}$, que es justo la región donde HO/HE tienen física exótica.

Este milagro constituye entonces evidencia para la dualidad [Polchinski, Witten '95].

Otro ejemplo altamente no trivial es el hecho de que el estado espinorial bajo SO(32) más ligero en el espectro de la cuerda fundamental HO, que es estable a pesar de ser no BPS, aparece en I ¡como una D0-brana no BPS! [Sen '98]

viernes, 15 de diciembre de 2006 02:30 a.m.

Con las dualidades que hemos descubierto hasta ahora, hemos conectado entre sí a las 5 teorías de supercuerdas:



(y a un número infinito de nuevas "teorías", que se definen usando distintos arreglos de D-branas y/o Op-planos).

Hemos aprendido además cómo describir el comportamiento de IIB, I y HO cuando $g_c \gg 1$.

¿Qué podemos decir respecto a IIA y HE?

La acción efectiva de IIA es

$$S_{IIA} = \frac{1}{2K_0^2}\int d^{10}x \left\{ \sqrt{-g}\, e^{-2\Phi}\left[R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2\cdot 3!} H_{(3)}^2 \right] \right.$$
$$+ \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2\cdot 2!} G_{(2)}^2 - \frac{1}{2\cdot 4!} \tilde{G}_{(4)}^2 \right]$$
$$\left. - \frac{1}{2} B_{(2)} \wedge G_{(4)} \wedge G_{(4)} \right\} \quad \% \ \tilde{G}_{(4)} \equiv G_{(4)} - C_{(1)} \wedge H_{(3)}$$

Esta acción no sugiere ninguna auto-dualidad ni conexión con alguna otra teoría de cuerdas. Lo que sí se sabe desde hace mucho es que se puede obtener como la reducción dimensional de una teoría de campos: supergravedad en 10+1 dim.

Esta teoría consiste de 3 campos no masivos

$$g^{(11)}_{MN}\ ,\quad A_{(3)} \leftrightarrow A_{MNP}\ \left(F_{(4)} = dA_{(3)}\right),\quad \psi_\alpha^M$$

(M, 10) ← espinor de $so(10,1)$

rep $so(9)$: $44 + 84$ | 128

$44 + 84$: 128 grados de libertad bosónicos

128: 128 grados de libertad fermiónicos

tiene supersimetría $\mathcal{N}=1$ en 10+1 dim (32 supercargas) y está descrita por la acción (parte bosónica)

$$S_{11D} = \frac{1}{2\kappa_{11}^2}\int d^{11}x\left\{\sqrt{-g^{(11)}}\left[R^{(11)} - \frac{1}{2\cdot 4!}F_{(4)}^2\right] - \frac{1}{3!}A_{(3)}\wedge F_{(4)}\wedge F_{(4)}\right\}$$

$$\equiv 16\pi G_N^{(11)} \equiv (2\pi)^8 \ell_p^{(11)\,9}$$

Compactificando $x^{10} \simeq x^{10} + 2\pi R$ y haciendo la

reducción dimensional (≡ tomando todos los campos independientes de x^{10}, lo cual se justifica dinámicamente para R pequeño), S_{11D} reproduce S_{IIA} si identificamos $g^{(11)}_{MN} \to (g_{\mu\nu}, C_\nu, \Phi)$ a través de

$$ds^2 \equiv g^{(11)}_{MN} dx^M dx^N = e^{-\frac{2\Phi}{3}} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{\frac{4\Phi}{3}} \left[dx^{10} + C_\nu dx^\nu\right]^2$$

y $A_{MNP} \to (C_{\mu\nu\rho}, B_{\mu\nu})$ a través de

$$C_{\mu\nu\rho} = A_{\mu\nu\rho}, \quad B_{\mu\nu} = A_{\mu\nu 10}$$

$$\frac{1}{2\kappa^2} = \frac{2\pi R}{2\kappa^2_{(11)}}$$