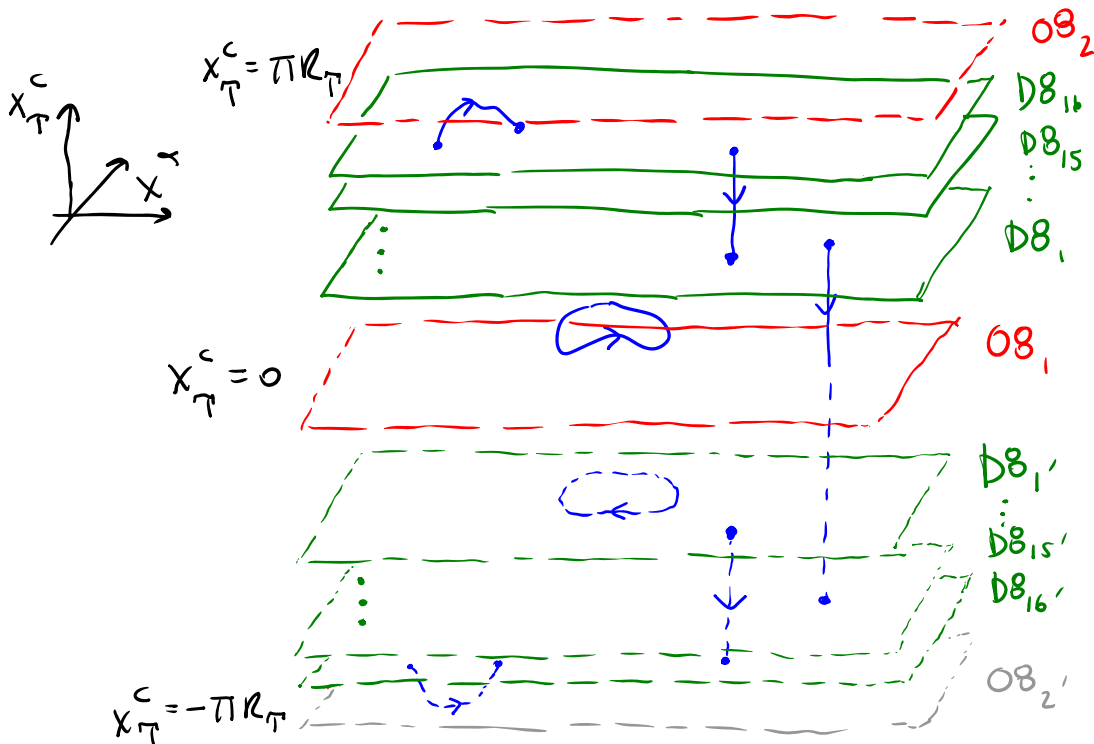


En descripción T -dual, tenemos 32 D8-branas en $x_{\tau}^c = \pm \theta_n R_{\tau}$, es decir, 16 D-branas entre los 2 O8-planos, más sus 16 imágenes:



Las cuerdas aquí son orientadas, a menos que estén inmersas en uno de los O8-planos. En el caso de cuerdas abiertas, esto solo es posible si la(s) D-brana(s) involucrada(s) coincide(n) con el O8-plan.

Con θ_n 's genéricas, el grupo de norma (tanto en I como en I') está roto a $U(1)^{16}$.

Si $1 \leq n \leq 16$ D8-branas coinciden fuera de los O8-planes, la simetría se ensancha a $U(n) \times U(1)^{16-n}$: hay $n^2 - n$ nuevos estados sin masa que provienen de las cuerdas que conectan D-branas distintas en este bunched.

Si $1 \leq n \leq 16$ D8-branas coinciden sobre uno de los O8-planes, aparecen estados sin masa adicionales, que provienen de las cuerdas que conectan una de las n D-branas y alguna de sus n imágenes. Todas las cuerdas involucradas son ahora no orientadas, y obtenemos \therefore grupo de norma ensanchado $SO(2n) \times U(1)^{16-n}$.

Cuando $n=16$ (p.ej. $\theta_c^h = 0 \forall h$) recuperamos $SO(32)$.

Ahora, ¿qué tipo de cuerdas cerradas tenemos en I' ?

En I , tendríamos cuerdas IIB truncado bajo Ω

(p.ej., $\varphi, \cancel{B}_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}, \dots$). En I' , proyección no

elimina ya estados localmente, sino que elimina la mitad del espacio que está detrás de los 08's, por lo que, fuera de los 08-planos tenemos cuerdas cerradas IIA (p.ej., ahora sí retenemos $B_{\mu\nu}$).

En resumen,

$$I \xleftrightarrow{T_c} I' \equiv \text{IIA con 2 08's y 16 D8's} \equiv \text{IIA}.$$

Pero esto implica que

$$I = \text{IIB con 1 09 y 16 D9's} \equiv \text{IIB}$$

Es decir, I es solo una clase particular de estados de IIB. Si empezamos con I, compactificamos (con posibles lazos de Wilson y/o campos magnéticos y/o eléctricos), T-dualizamos y después descompactificamos, podemos obtener IIA ó IIB en $9+1$ dimensiones no compactas, con o sin Dp-branas (y con o sin Op-planos), donde p es par en IIA e impar en IIB.

Recordar que en las teorías tipo II existen 2 gravitinos $\chi, \tilde{\chi}$ (que provienen del sector R-NS y NS-R, respectivamente), y \therefore 2 supercargas

$$\begin{cases} Q_s, \tilde{Q}_{s'} & \in \underline{16} + \underline{16}' & \text{en IIA} \\ Q_s, \tilde{Q}_s & \in \underline{16} + \underline{16} & \text{en IIB} \end{cases}$$

(Recordar que $s \equiv (s_0, s_1, \dots, s_4)$ con $s_\alpha = \pm 1/2$ y un número par de $-1/2$'s, mientras que $s' \equiv (s'_0, \dots, s'_4)$ tiene un número impar de $-1/2$'s.)

Esto se manifiesta en el hecho de que los estados forman supermultipletes (p.ej., obtenemos $2^{32/2} = 256$ estados no masivos, y un cierto múltiplo de $2^{32/2} = 256^2$ estados en cada nivel masivo), y las amplitudes son invariantes bajo **32**

Supersimetrías:

$$Q_s = \oint dz J_s(z), \quad \text{con } J_s(z) \propto e^{-\phi/2} e^{i s_\alpha \varphi^\alpha}$$

\swarrow "bosonización" de β, γ
 \nwarrow bosonización de ψ^m

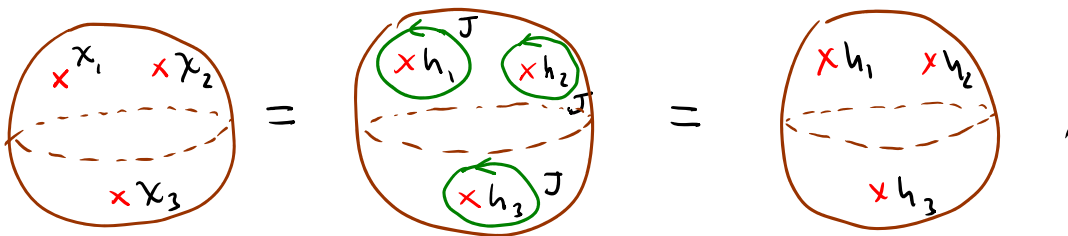
el operador de vértice para $|S\rangle_R$,

por lo que si $Q_s |h\rangle = |\chi\rangle$

(p.ej., $\mathcal{L}_{\text{gravitón}}$ $\mathcal{L}_{\text{gravitino}}$)

$$\longleftrightarrow V_\chi(z, \bar{z}) = \oint \mathcal{L}_{z'} J_s(z') V_h(z', \bar{z}'),$$

entonces encontramos que



y un número infinito de relaciones similares,
en cualquier hoja de mundo sin bordes.

Esto implica en particular que la acción efectiva
es invariante bajo estas 32 supersimetrías.

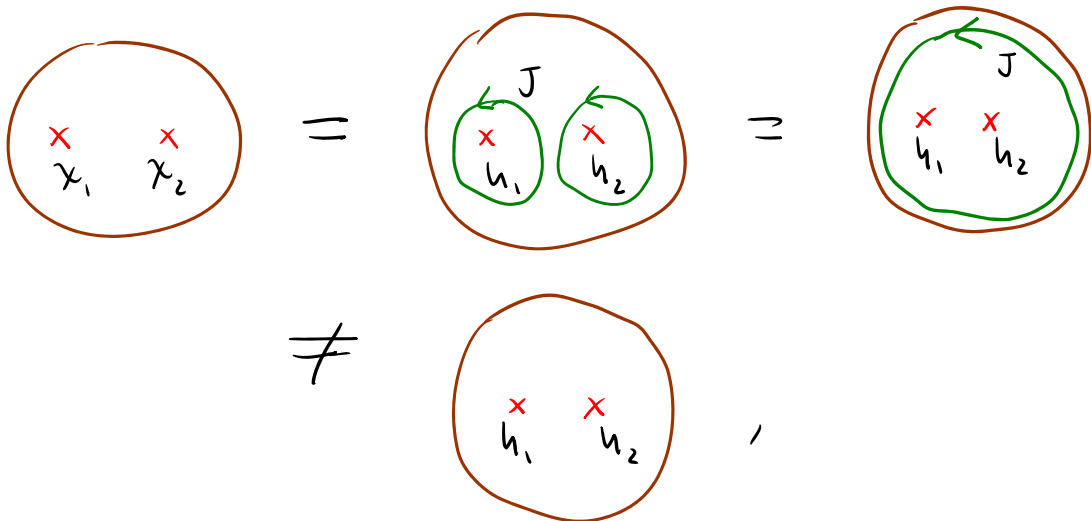
En la teoría tipo I, en cambio, la proyección
bajo Ω (=presencia de $O9$) retiene solo

1 gravitino $\chi + \tilde{\chi}$, y tenemos \therefore solo

1 supercarga $Q_s + \tilde{Q}_s \in \underline{16}$.

Esta es la misma SUSY preservada por las condiciones
de borde $(N \vee \mu)$ de cuerda abierta (=presencia de $D9$),

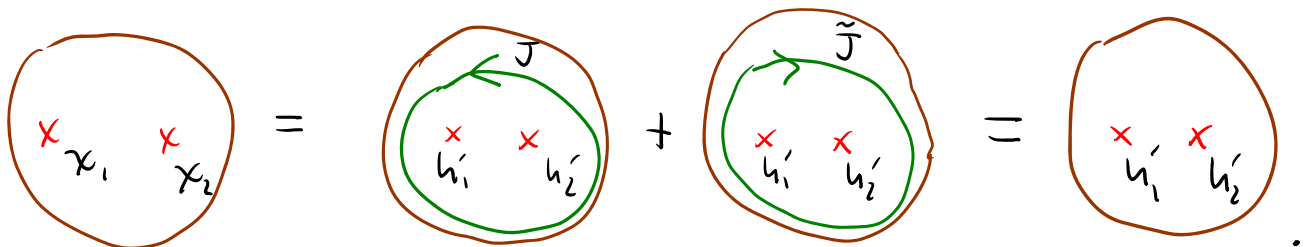
que igualan modos izquierdos con derechos. El punto aquí es que, en presencia de D9-brana(s), tenemos amplitudes No invariantes bajo Q_s ó \tilde{Q}_s por separado:



pero, dado que las condiciones de borde implican que $J_s(z) \Big|_{z=\bar{z}} = \tilde{J}_s(\bar{z}) \Big|_{z=\bar{z}}$, las amplitudes

sí son invariantes bajo las 16 supersimetrías $Q_s + \tilde{Q}_s$:

$$|\chi\rangle = (Q_s + \tilde{Q}_s) |h'\rangle \Rightarrow$$



Sabemos que $T_c: Q, \tilde{Q} \rightarrow Q, \Pi^c \tilde{Q}$, con $\Pi^c \equiv \Gamma^c \Gamma$,
 por lo que las condiciones de borde asociadas a una
Dp-brana (N para $\alpha=0, \dots, p$; D para $i=p+1, \dots, 9$)
 preservan las **16 supersimetrías**

$$\boxed{Q_s + (\Pi^\perp \tilde{Q})_s}, \text{ con } \Pi^\perp \equiv \underbrace{\Pi^{p+1} \dots \Pi^9}_k$$

$k \equiv 9-p$ impar/par en IIA/B ,
 $\therefore \Pi^\perp$ tiene índice ss'/ss ✓

Notar que

$$\boxed{\Pi^\perp = \pm \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^p}$$

El signo de Π^\perp en cualquier caso depende del orden
 en que se realizan las k transformaciones de dualidad T .

Existen \therefore 2 tipos distintos de D-branas p -dimensionales,
 que llamamos Dp-brana ($\equiv D_p$) y anti-Dp-brana ($\equiv \bar{D}_p$).

Cada uno de estos objetos preserva un conjunto de
 16 supersimetrías, pero se trata de conjuntos con
 intersección vacía, por lo que sistema $D_p + \bar{D}_p$ no
 preserva ninguna supersimetría.

Resumiendo:

- El estado $|\Omega\rangle \in \text{IIA/B}$ que corresponde al vacío en segunda cuantización (no estado fundamental de 1 cuerda, sino estado sin cuerdas), es decir, el espacio Minkowski $(9+1)$ -dimensional, es invariante bajo una transformación general

$$\eta_s Q_s + \tilde{\eta}_{\tilde{s}} \tilde{Q}_{\tilde{s}} \quad \text{con } \eta_s, \tilde{\eta}_{\tilde{s}} \text{ arbitrarios}$$

(32 parámetros independientes):

$$|\Omega'\rangle = \exp[i(\eta_s Q_s + \tilde{\eta}_{\tilde{s}} \tilde{Q}_{\tilde{s}})] |\Omega\rangle = |\Omega\rangle$$

$$\iff \boxed{Q_s |\Omega\rangle = 0 = \tilde{Q}_{\tilde{s}} |\Omega\rangle} \quad \forall s, \tilde{s}.$$

- El estado con 1 Dp-brana $|Dp\rangle \in \text{IIA/B}$ (fondo solitónico sin cuerdas), en cambio, es invariante solo bajo transformaciones $\eta_s Q_s + \tilde{\eta}_{\tilde{s}} \tilde{Q}_{\tilde{s}}$ con

$$\tilde{\eta}_{\tilde{s}} = \pm (\Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^p)_{\tilde{s}s} \eta_s \quad (\text{16 parámetros independientes})$$

↑ signo dado

$$\Leftrightarrow (Q_{\pm} \Gamma^{01 \dots p} \tilde{Q})_s |D_p\rangle = 0$$

Las otras 16 supersimetrías $(Q_{\mp} \Gamma^{01 \dots p} \tilde{Q})_s$ están rotas espontáneamente. Esto no es extraño: esperamos justamente que un estado arbitrario rompa la supersimetría (p.ej. $Q_s |2\text{ gravitón}\rangle \neq 0$), y que solo $|D_p\rangle$ sea invariante bajo todas las 32 supersimetrías. Que la presencia de la Dp-brana rompa SUSY es análogo al hecho de que rompe la invariancia bajo traslaciones. (Y, justo como los escalares $\psi_{-1/2}^i |0; k\rangle_{NS}$ son los bosones de Goldstone asociados a la ruptura de la invariancia traslacional, los fermiones $|s; k\rangle_R$ son los 'goldstinos' asociados a la ruptura de la supersimetría.)

Lo que sí es inesperado es que $|D_p\rangle$ preserva parte (la mitad) de las supersimetrías: es un estado BPS (Bogomolnyi-Prasad-Sommerfield).

Consideremos, p.ej., la D0-brana: $(Q_s - \Gamma_{ss'}^\circ \tilde{Q}_{s'}) |D0\rangle = 0$

$$\Rightarrow 0 = \langle D0 | \{ Q_s - \Gamma_{ss'}^\circ \tilde{Q}_{s'}, (Q_t - \Gamma_{tt'}^\circ \tilde{Q}_{t'})^\dagger \} | D0 \rangle \quad \forall_{s,t},$$

$$Q_t^\dagger - \tilde{Q}_{t'}^\dagger (\Gamma_{tt'}^\circ)^\dagger$$

$$- \Gamma_{t't}^\circ \quad \left(\text{porque } \Gamma^\circ = b_9^\dagger - b_0 \right)$$

Utilizando el álgebra de supersimetría

$$\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\} = -p_\mu \Gamma_{ss'}^\mu, \quad \{\tilde{Q}_{s'}, \bar{Q}_s\} = -p_\mu \Gamma_{s's}^\mu$$

$$\{Q_s, \bar{Q}_t\} = -g \delta_{st} + \dots, \quad \{\tilde{Q}_{s'}, \bar{Q}_{t'}\} = +g \delta_{s't'} + \dots,$$

\uparrow carga central (conservada)

$$0 = \langle D0 | \left(\underbrace{\{Q_s, Q_t^\dagger\}}_{- \{Q_s, \bar{Q}_{t'}\} \Gamma_{t't}^\circ} - \Gamma_{ss'}^\circ \underbrace{\{\tilde{Q}_{s'}, \tilde{Q}_{t'}^\dagger\}}_{- p_\mu \Gamma_{s't}^\mu} \Gamma_{tt'}^\circ - \Gamma_{ss'}^\circ \underbrace{\{\tilde{Q}_{s'}, Q_t^\dagger\}}_{-g \Gamma_{s't}^\circ} + \underbrace{\{Q_s, \tilde{Q}_{t'}^\dagger\}}_{+g \Gamma_{st'}^\circ} \Gamma_{t't}^\circ \right) | D0 \rangle.$$

$$\underbrace{-p_\mu \Gamma_{st'}^\mu}_{+m_{D0} \delta_{st}} \quad \underbrace{-p_\mu \Gamma_{s't}^\mu}_{+m_{D0} \delta_{st}} \quad \underbrace{-g \Gamma_{s't}^\circ}_{-g \delta_{st}} \quad \underbrace{+g \Gamma_{st'}^\circ}_{-g \delta_{st}}$$

$+m_{D0} \delta_{st}$ en marco en reposo

$$p^\mu |D0\rangle = (m_{D0}, 0, 0, \dots) |D0\rangle$$

Concluimos entonces que

$$0 = 2 \int_{st} (m_{D0} - g_{D0}) \Rightarrow m_{D0} = +g_{D0},$$

donde vemos que un estado BPS masivo debe portar carga. Notar que en el caso de la anti-D0-brana

hubiéramos obtenido $m_{\overline{D0}} = -g_{\overline{D0}}$; como esperaríamos, $m_{D0} = m_{\overline{D0}} > 0$ y $g_{D0} = -g_{\overline{D0}} > 0$.

Repetiendo el mismo cálculo actuando con

$Q_s \pm \Gamma_{ss}^0 \tilde{Q}_s$, sobre un estado $|X\rangle$ arbitrario y

tomando el término $s=t$ obtenemos

$$0 \leq |(\tilde{Q}_s \pm \Gamma_{ss}^0 Q_s)|X\rangle|^2 + |(Q_s \pm \Gamma_{ss}^0 \tilde{Q}_s)|X\rangle|^2 \\ = 2(m_X \pm g_X),$$

es decir,

$$m_X \geq |g_X| \quad \text{Desigualdad BPS [Witten, Olive 1978]}$$

(Bautizada así por analogía con una cota similar descubierta por BPS para el monopolo 't Hooft-Polyakov.)

los estados BPS, que son aniquilados por alguna fracción de las supercargas (en este caso, la mitad), son aquellos que saturan esta desigualdad: portan la mínima masa posible para la carga dada. Esto implica en particular que son estables.

Notar que, en el caso de la D0-brana, con $m_{D0} = \frac{1}{f_{D0}}$, las 16 supercargas $Q_s + \Gamma_{ss'}^0 \tilde{Q}_s$, que no aniquilan $|D0\rangle$ satisfacen el álgebra

$$\{Q_s + \Gamma_{ss'}^0 \tilde{Q}_s, (Q_t + \Gamma_{tt'}^0 \tilde{Q}_t)^\dagger\} |D0\rangle = 4m_{D0} \delta_{st} |D0\rangle.$$

Recordando que los espinores Q, \tilde{Q} son, además de Weyl, Majorana ($\bar{Q}_s \equiv Q_s^\dagger \Gamma_{ss'}^0 = Q_s^T C_{ss'}$, con $C \equiv \Gamma^0 \Gamma^3 \Gamma^5 \Gamma^7 \Gamma^9$), esto significa que tenemos 8 pares de operadores de creación/aniquilación fermiónicos. Actuando con ellos sobre $|D0\rangle$, obtenemos un supermultiplete $2^8 = 256$ -dimensional.

Es decir, cuando hablamos de 1 D-brana, estamos en realidad considerando uno de 128 estados bosónicos + 128 estados fermiónicos, que tienen toda la misma masa y la misma carga. Este es el mismo número de estados que encontramos en el supermultiplete no masivo (que ahora entendemos como un caso particular de estados BPS, que tienen $q=0$).

En cambio, a partir de un estado masivo no BPS $|X\rangle$, con $m_x > |q_x|$, obtendríamos un supermultiplete $2^{32/2} = 2^{16} = 256^2$ -dimensional.

Hemos aprendido \therefore que los estados BPS tienen otra propiedad especial: forman parte de supermultipletes cortos.

De la misma manera, las Dp-branas con otros valores de p son masivas y BPS solo porque portan una carga conservada que aparece en el álgebra de supersimetría, cuya forma general involucra

$$\left\{ \underbrace{\tilde{Q}_{\tilde{s}}, \bar{Q}_{t'}}_{\substack{Q_t^+ \Gamma_{tt'}^0}} \right\} = \sum_p \frac{1}{p!} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Carga Central} \\ \text{(solo con respecto a } Q, \tilde{Q}, P_w)}}}{\mathcal{F}^{\mu_1 \dots \mu_p}} (\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_p})_{\tilde{s} t'}$$

con $p \begin{cases} \text{par} \\ \text{impar} \end{cases}$ (y $\tilde{s} = \begin{pmatrix} s' \\ s \end{pmatrix}$) en $\begin{matrix} \text{IIA} \\ \text{IIB} \end{matrix}$.

¿Qué significa $\mathcal{F}^{\mu_1 \dots \mu_p}$? El punto aquí es que la carga que naturalmente porta un objeto extendido no es una carga escalar convencional.

Sabemos que la línea de mundo asociada a una partícula (0-brana) se acopla de manera natural a un campo de forma convencional A_w

(o, lo que es lo mismo a una **1-forma** $A_{(1)} \equiv A_w dx^w$):

$$S_0 \supset \int_{M_1} q A_{(1)} \equiv \int_{M_1} d\tau \underbrace{\partial_\tau X^\mu A_\mu(X(\tau))}_{\equiv A_\tau(\tau)} \quad ,$$

carga \nearrow
 M_1 \nearrow línea de mundo
retracción de A_μ a la línea de mundo

que podemos reescribir como

$$\int d^D x J^\mu(x) A_\mu(x) \quad ,$$

donde la **corriente** está definida por

$$J^\mu(x) \equiv \int_{M_1} d\tau \partial_\tau X^\mu \delta^{(D)}(x - X(\tau)) \quad .$$

Notar que, como esperaríamos,

$$\int d^{D-1} x J^0(x) = \int_{M_1} d\tau \partial_\tau X^0 \delta^{(D)}(x^0 - X^0(\tau)) = \int_{M_1} d\tau$$

\nearrow densidad de carga escalar \nearrow carga escalar total

Conocemos también la generalización al caso de una 1-brana — se trata simplemente de la manera en que la hoja de mundo de la cuerda se

acoplamiento naturalmente al campo de norma generalizado

$B_{\mu\nu}$ (o, lo que es lo mismo, a la **2-forma**

$$B_{(2)} \equiv \frac{1}{2} B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu :$$

$$S_2 \supset \rho_2 \int_{M_2} B_{(2)} \equiv \rho_2 \int_{M_2} d\tau d\sigma \underbrace{\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X^\nu B_{\mu\nu}(X(\tau, \sigma))}_{\equiv B_{\tau\sigma}(\tau, \sigma) \text{ retracción a } M_2}$$

↑ **densidad de carga**
(q/L)

$$= \frac{1}{2} \int d^D x J^{\mu\nu}(x) B_{\mu\nu}(x)$$

con corriente generalizada

$$J^{\mu\nu}(x) \equiv \rho_2 \int d\tau d\sigma \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \epsilon^{ab} \delta^{(D)}(x - X(\tau, \sigma)).$$

Notar que esta corriente se conserva,

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^{\mu\nu}(x) &= \rho_2 \int d\tau d\sigma \partial_b X^\nu \epsilon^{ab} \underbrace{\partial_a X^\mu \partial_\mu \delta^{(D)}(x - X(\tau, \sigma))}_{\partial_a \delta^{(D)}(x - X(\tau, \sigma))} \\ &\quad - \underbrace{\partial_a \partial_b X^\nu \epsilon^{ab} \delta^{(D)}(x - X(\tau, \sigma))}_{= 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(como es necesario para que su acoplamiento a $B_{\mu\nu}$ sea invariante de norma), por lo que resulta natural definir una **carga conservada generalizada**

$$q^{\mu} \equiv \int \mathcal{D}^{D-1} x \, J^{0\mu}(x) = \rho_2 \int_{M_2} d\tau d\sigma \, \partial_a X^0 \partial_b X^{\mu} \epsilon^{ab} \delta^{(D)}(x - X(\tau, \sigma))$$

que en la norma $\tau = X^0$ se reduce a

$$q^{\mu} = \rho_2 \int d\sigma \, \partial_{\sigma} X^{\mu} = \rho_2 \int \mathcal{D} X^{\mu}$$

densidad de carga
↑
extensión total de la cuerda en dirección μ

} carga vectorial total

Este vector claramente contiene información no solo sobre la magnitud de la carga neta, sino también sobre la orientación de la cuerda.

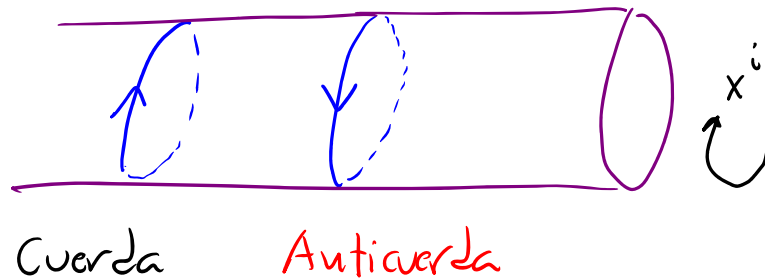
En esencia, q^{μ} codifica $D-1$ 'tipos de carga' asociados a ' $D-1$ campos de norma' $B_{\mu\nu}$.

P.ej., para una cuerda cerrada definida sobre T^{D-1} ,

$$q^i = \rho_i \int dX^i = \rho_i e^i 2\pi R_i \quad (\text{sin suma})$$

↑
número de enrollamiento

Notar que, de acuerdo con esto, el signo de la carga depende de la orientación de la cuerda:



Todo esto tiene una generalización obvia al caso de una p-brana: su **volumen de mundo** se acopla de manera natural a un campo de norma generalizado $C_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}$ (\leftrightarrow **(p+1)-forma**)

$$C_{(p+1)} \equiv \frac{1}{(p+1)!} C_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{p+1}},$$

$$\int_{\Sigma_p} \rho_p \int_{M_{p+1}} C_{(p+1)} \equiv \rho_p \int_{M_{p+1}} d\sigma \underbrace{\partial_0 X^{\mu_1} \dots \partial_p X^{\mu_{p+1}} C_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}(X(\sigma))}_{\equiv C_{0_1 \dots p}(\sigma) \text{ retracción}}$$

↑
densidad de carga (q/p -volumen)

$$= \frac{1}{(p+1)!} \int \mathcal{D}^D x \, J^{\omega_1 \dots \omega_{p+1}}(x) C_{\omega_1 \dots \omega_{p+1}}(x),$$

donde la corriente generalizada

$$J^{\omega_1 \dots \omega_{p+1}}(x) \equiv \rho_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} \mathcal{D}^{p+1} \sigma \, \partial_{a_1} X^{\omega_1} \dots \partial_{a_{p+1}} X^{\omega_{p+1}} \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \delta^{(D)}(x - X(\sigma))$$

da lugar a **carga conservada generalizada**

$$\begin{aligned} q^{\omega_1 \dots \omega_p} &\equiv \rho_p \int \mathcal{D}^{D-1} x \, J^{\omega_1 \dots \omega_p}(x) \\ &= \rho_p \int \mathcal{D}^{p+1} \sigma \, \partial_{a_1} X^{\omega_1} \partial_{a_2} X^{\omega_2} \dots \partial_{a_{p+1}} X^{\omega_{p+1}} \epsilon^{a_1 \dots a_{p+1}} \delta^{(D)}(x^\circ - X^\circ(\sigma)) \end{aligned}$$

$$q^{\omega_1 \dots \omega_p} = \rho_p \int \mathcal{D} X^{\omega_1} \wedge \dots \wedge \mathcal{D} X^{\omega_{p+1}}$$

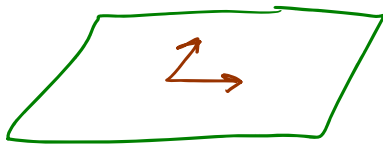
↑
Carga tensorial
total

volumen total y orientación

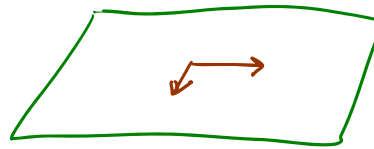
De acuerdo con esto, una p -brana enrollada 1 vez sobre p -toro recto en direcciones $123 \dots p$ tiene carga

$$q^{123 \dots p} = \rho_p (2\pi R_1) \dots (2\pi R_p) = \rho_p V_p$$

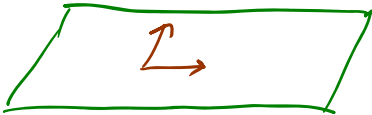
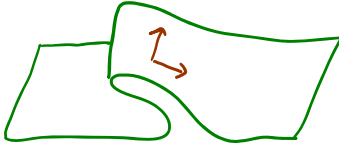
Podemos considerar en particular el límite de descompactificación $R_i \rightarrow \infty$, en cuyo caso obtenemos una brana infinita (con densidad de carga ρ_p finita). Vemos también nuevamente que el signo de la carga depende de la orientación de la brana (elección de un orden canónico para base en espacio tangente):



brana



antibrana

(y  y  tienen cargas iguales).

Ahora, habiendo entendido la naturaleza de la carga generalizada que porta un objeto p -dimensional,

nos preguntamos ¿a qué campo de norma se acopla una D_p -brana? Hemos visto que $g^{\mu_1 \dots \mu_p}$

aparece en $\{\tilde{Q}, \bar{Q}\} \leftrightarrow (NS, R) \times (R, NS) = (R, R)$,

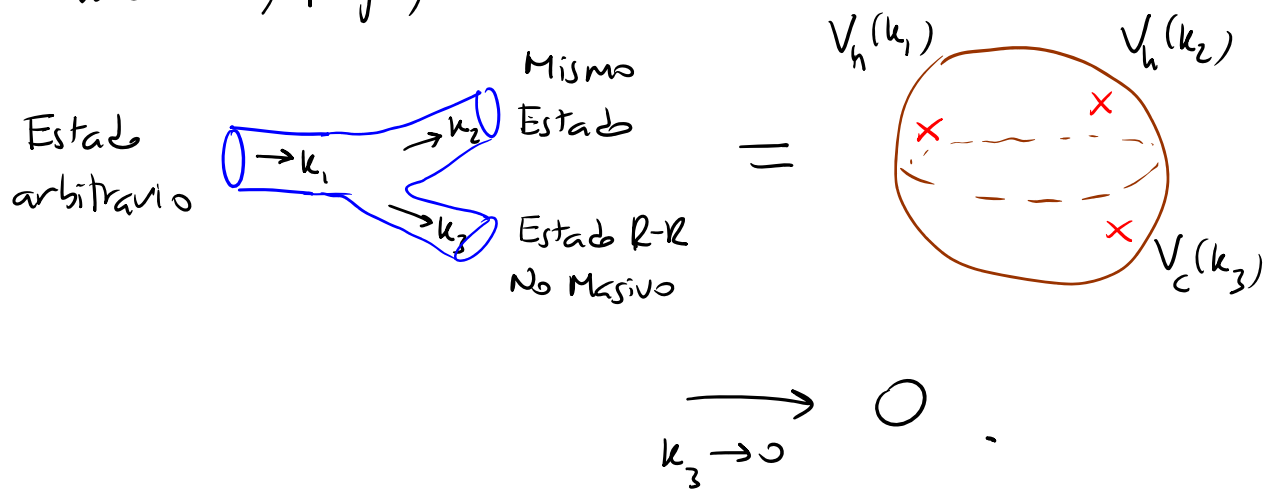
y debe ser por lo tanto una **carga Ramond-Ramond**.

Recordar que los vértices R-R no masivos involucran no directamente al campo de norma

$C_{(p+1)}$ sino a la **intensidad de campo** $G_{(p+2)} \equiv dC_{(p+1)}$

(cuyas componentes son por definición $g_{[m_1 m_2 \dots m_{p+2}]}$).

Esto implica en particular que las amplitudes en vértices R-R se anulan cuando el momento correspondiente se hace cero, p.ej.,



Vemos aquí que no existen en el lagrangiano efectivo términos $\sim g_{RR} h^2 C$ (como sí los hay $\sim g_{NSNS} h^2 B$), lo cual indica que ningún estado de oscilación de la cuerda porta carga R-R!

Las D-branas, en cambio, sí portan carga R-R (y no carga NS-NS); con ellas tendremos de hecho una fuente para cada campo de norma.

Para ver esto, recordemos primero que la intensidad de campo R-R $G_{(p+2)} = dC_{(p+1)}$, que estaría naturalmente asociada a Dp-brana, satisface en ausencia de fuentes la ec. de mov. $d * G_{(p+2)} = 0$

(generalización de la ec. de Maxwell $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$)

y la identidad de Bianchi $dG_{(p+2)} = 0$ (generalización de $\partial^\mu * F_{\mu\nu} = 0$).

Podemos describir la misma física usando la

intensidad de campo dual $G_{(8-p)} \equiv * G_{(p+2)}$

(análoga a $\tilde{F}_{\mu\nu} \equiv \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho}$, que intercambia

$(\vec{E}, \vec{B}) \leftrightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$), con campo de norma

asociado $C_{(7-p)}$ (definido tal que $G_{(8-p)} = dC_{(7-p)}$),

que se acoplaría naturalmente a D(6-p)-brana.

En estas variables, lo que antes era la identidad de Bianchi se reconoce ahora como la ec. de mov.

$\mathcal{D} * G_{(8-p)} = 0$, y la anterior ec. de mov. es ahora la identidad de Bianchi $\mathcal{D} G_{(8-p)} = 0$.

En presencia de una Dp-brana tenemos

$$\mathcal{D} * G_{(p+2)} \propto \rho_p \delta^{(9-p)}(x) \iff \text{Dp-brana es una fuente 'el\u00e9ctrica' para } C_{(p+1)}$$

o, de manera equivalente,

$$\mathcal{D} G_{(8-p)} \propto \rho_p \delta^{(9-p)}(x) \iff \text{Dp-brana es una fuente 'magn\u00e9tica' para } C_{(7-p)}$$

(El hecho de que la identidad de Bianchi para $G_{(8-p)}$ no se cumpla significa que $C_{(7-p)}$ no se puede definir globalmente, que es justo la situaci\u00f3n que tenemos para el campo de Maxwell A_μ en presencia de un monopolo magn\u00e9tico.)

A la inversa, D(6-p)-brana es una fuente el\u00e9ctrica para $C_{(7-p)}$ y magn\u00e9tica para $C_{(p+1)}$.

Tenemos entonces

• En teoría IIA :	D0	D2	D4	D6	D8
Fuente eléctrica de :	$C_{(1)}$	$C_{(3)}$	$C_{(5)}$	$C_{(7)}$	$C_{(9)}$
Fuente magnética de :	$C_{(7)}$	$C_{(5)}$	$C_{(3)}$	$C_{(1)}$	" $C_{(-1)}$ "

(Notar que $G_{(10)} = dC_{(9)}$ satisface $d * G_{(10)} \equiv dG_{(10)} = 0$

$\Rightarrow G_{(10)} = \text{cte}$, $\therefore \nexists$ fluctuaciones

— análogo a $F_{\mu\nu}$ en 2 dimensiones.

$G_{(10)}$ toma valores distintos en lados opuestos de D8.)

• En teoría IIB :	D(-1)	D1	D3	D5	D7	D9
Fuente eléctrica de	$C_{(0)}$	$C_{(2)}$	$C_{(4)}^+$	$C_{(6)}$	$C_{(8)}$	$C_{(10)}$
Fuente magnética de:	$C_{(8)}$	$C_{(6)}$	$C_{(4)}^+$	$C_{(2)}$	$C_{(0)}$	" $C_{(-2)}$ "

D(-1)-brana denota "objeto" asociado a cuerdas
 abiertas con condiciones de borde $D \forall \mu=0, \dots, 9$,
 objeto que existe entonces solo un instante: instantón

(Notar que $G_{(11)} = \downarrow C_{(10)} = 0 \Rightarrow C_{(10)} = de.$

$\therefore \nexists$ fluctuaciones — análogo a A_m en 1 dim.)

Vemos entonces que el hecho de que de que las teorías IIA/B incluyan en su espectro **no perturbativo** Dp-branas con p par/impar (implica que contienen una fuente (eléctrica y magnética) para c/u de los campos de norma Ramond-Ramond!

Para que $C_{(p+1)}$ tuviera normalización canónica escribiríamos como término cinético

$$- \int d^{10}x \sqrt{-g} \frac{1}{2(p+1)!} g^{\omega_1 \nu_1} \dots g^{\omega_{p+2} \nu_{p+2}} G_{\omega_1 \dots \omega_{p+2}} G_{\nu_1 \dots \nu_{p+2}}$$

\uparrow métrica en espaciotiempo \uparrow intensidad de campo R-R

$$\left(\Rightarrow [G] = M^5, [C] = M^4 \right),$$

pero en vez de esto usaremos la normalización habitual para los campos de supergravedad:

$$-\frac{1}{2K^2} \int d^{10}x \sqrt{-g} \frac{1}{2(p+2)!} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_{p+2} \nu_{p+2}} G_{\mu_1 \dots \mu_{p+2}} G_{\nu_1 \dots \nu_{p+2}} \equiv 16\pi G_N \underbrace{\quad}_{\equiv G_{(p+2)}^2}$$

$$([K^2] = M^{-8} \Rightarrow [G] = M^1, [C] = M^0).$$

Con esta normalización, el término de acoplamiento entre $C_{(p+1)}$ y Dp -branas es

$$\rho_{Dp} \int d^{p+1}\sigma \partial_{\sigma^0} X^{\mu_1} \dots \partial_{\sigma^{p+1}} X^{\mu_{p+1}} C_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}(X),$$

↖ densidad de carga

$$\text{con } [\rho_p] = M^{p+1} \Rightarrow [g_p] = M^p,$$

justamente como usamos en la desigualdad BPS:

$$m_x \geq g_{px} \quad , \quad \boxed{m_{Dp} = g_{Dp}} \quad (\text{para } Dp\text{-branas sin excitación}),$$

o, definiendo la **tensión** $\tau \equiv \frac{\text{masa}}{p\text{-volumen}}$,

$$\boxed{\tau_{Dp} = \rho_{Dp}}$$

Notar que para la cuerda usamos este mismo tipo de normalización, puesto que escribimos el término de acoplamiento al campo de norma $B_{\alpha\beta}$ en la forma

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'}}_{\equiv \rho_{F_1}} \int d^2\sigma \partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X^\nu B_{\mu\nu}(X), \quad \leftarrow [B] = M^0$$

lo cual dice que la densidad de carga de la **cuerda fundamental** ($\equiv F_1$) es igual a su tensión:

$$\tau_{F_1} = \rho_{F_1}$$

Esto pareciera nuevamente provenir de una desigualdad BPS, y en efecto es así: el punto es que, al calcular $\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\}$ a través de EPO, lo que obtenemos es en realidad

$$V_s(z) \cdot V_{s'}(0) \sim -\frac{1}{2} \Gamma_{ss'}^{\mu\nu} \partial X_\mu^{(0)},$$

de donde

$$\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\} = - P_I^\omega (\Gamma_\omega)_{ss'}$$

$$\equiv p^\omega + \underbrace{q_{NS}^\omega}$$

← Carga central proporcional al enrollamiento de F1:

$$(N, NS) \times (N, NS) = (NS, NS)$$

$$q_{NS}^\omega = \frac{1}{2\pi\alpha'} [X^\omega(\sigma=2\pi) - X^\omega(\sigma=0)] \equiv \Delta X^\omega$$

(para dirección compacta $\omega=i$, $P_I^i \equiv p^i + q_{NS}^i = \frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'}$).

De manera similar, $\{\tilde{Q}_{\tilde{s}}, \tilde{Q}_{\tilde{s}'}\} = - P_D^\omega (\Gamma_\omega)_{\tilde{s}\tilde{s}'}$

$$\equiv p^\omega - \underbrace{q_{NS}^\omega}$$

A partir de estas relaciones de anticonmutación, podemos concluir que un estado $|F1\rangle$ donde la cuerda sin excitar está extendida únicamente en la dirección $+x^i$, y tiene $\therefore q_{NS}^i > 0$, es BPS:

$$\begin{aligned} [Q_s - (\Gamma^0 \Gamma^i)_{st} Q_t] |F1\rangle &= (1 - \Gamma^0 \Gamma^i)_{st} Q_t |F1\rangle = 0 \\ [\tilde{Q}_{\tilde{s}} + (\Gamma^0 \Gamma^i)_{\tilde{s}\tilde{t}} \tilde{Q}_{\tilde{t}}] |F1\rangle &= (1 + \Gamma^0 \Gamma^i)_{\tilde{s}\tilde{t}} \tilde{Q}_{\tilde{t}} |F1\rangle = 0 \end{aligned}$$

$$(\Gamma^0 \Gamma^1)^2 = \mathbb{1}, \quad \sum_s (\Gamma^0 \Gamma^1)_{ss} = \sum_s (2b_0^+ b_0^- - 1)_{ss} = \sum_s (2(s_0 + \frac{1}{2}) - 1) = 0$$

$\Rightarrow (\Gamma^0 \Gamma^1)_{st}$ tiene 8 autovalores +1 y 8 autovalores -1

$\therefore |F1\rangle$ preserva **16 supersimetrías**. La 'anticuerda' $|\bar{F}1\rangle$, que tiene $q_{NS}^i < 0$, preserva las otras 16. Ambas satisfacen

$$m_{F1} = \pm q_{F1}^i = |q_{F1}^i| \quad \leftrightarrow \quad \tau_{F1} |\Delta X^i| = \rho_{F1} |\Delta X^i|.$$

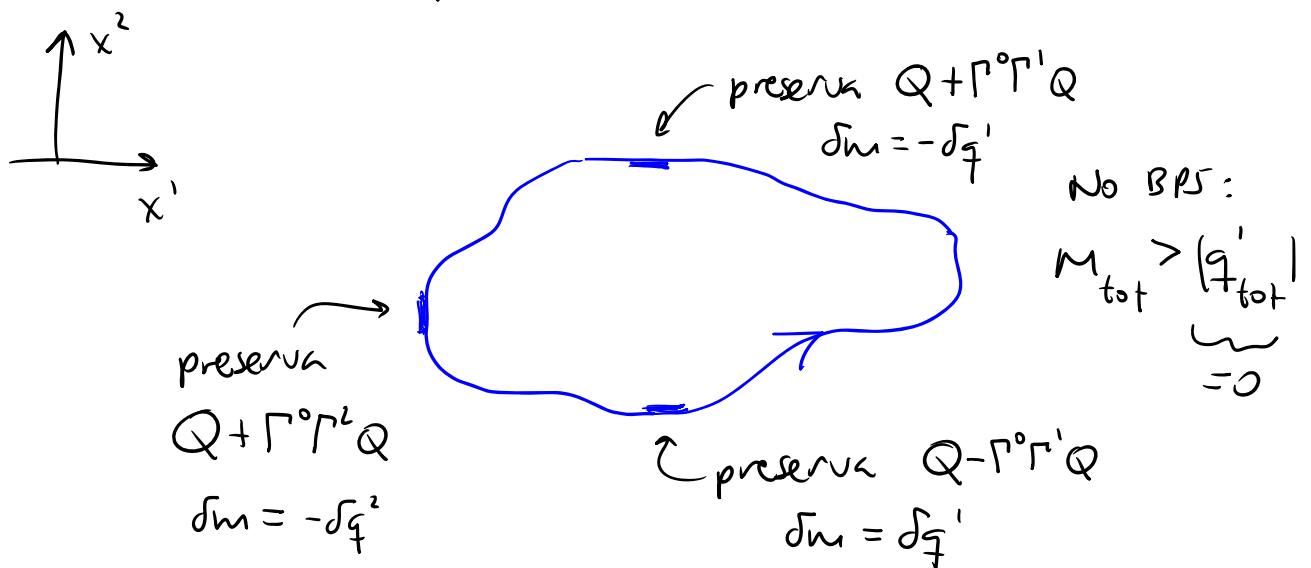
Esto implica en particular que $\tau_{F1} = \rho_{F1}$, relación

que, más en general, expresa el hecho de que

cada trozo de una cuerda sin excitar es 'localmente'

BPS (porta tanto carga como masa), aún cuando

la cuerda en su conjunto pudiera no serlo:



Incluyendo las cargas que portan la F1 y las Dp, hemos visto que tenemos el álgebra de supersimetría

$$\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\} = -(p^\mu + q_{\mu s}^\nu)(\Gamma_\mu)_{ss'}$$

$$\{\tilde{Q}_s, \bar{\tilde{Q}}_{s'}\} = -(p^\mu - q_{\mu s}^\nu)(\Gamma_\mu)$$

$$\{\tilde{Q}_{s'}^{\sim}, \bar{Q}_{t'}\} = + \sum_p \frac{1}{p!} q_{R}^{\mu_1 \dots \mu_p} (\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_p})_{s't'}$$

← par/impar en IIA/B

En esta última expresión, debemos incluir en la suma las cargas R-R portadas por todos los distintos tipos de D-branas presentes en IIA/B.

Recordando que $q_{R}^{\mu_1 \dots \mu_p} \equiv \int d^10x J_R^{\mu_1 \dots \mu_p}(x)$

es $\neq 0$ solo para índices espaciales, una opción sería incluir

$$\sum_{p=\begin{cases} 0, 2, 4, 6, 8 \\ 1, 3, 5, 7, 9 \end{cases}} \frac{1}{p!} q_{R}^{\mu_1 \dots \mu_p} (\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_p})_{s't'}$$

Pero, recordando que nuestras supercargas tienen
 quiralidad definida, una segunda opción es reescribir los
 términos con $p \geq 5$ multiplicando por Γ para
 reemplazar

$$\mathbb{F}_R^{i_1 \dots i_p} \Gamma_{i_1 \dots i_p} \rightarrow \pm \mathbb{F}_R^{i_1 \dots i_p} \underbrace{\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_{10-p}} \epsilon_{i_1 \dots i_p \mu_1 \dots \mu_{10-p}}}_{\Gamma^{j_1 \dots j_p} \text{ con } j_l \neq i_k}$$

$$\equiv \mathbb{F}_R^{\mu_1 \dots \mu_{10-p}} \Gamma_{\mu_1 \dots \mu_{10-p}},$$

↑ tiene siempre un índice temporal

después de lo cual tenemos

$$\{\tilde{Q}_s, \bar{Q}_{t'}\} = + \sum_{p=\{0,2,4,1,3,5\}} \frac{1}{p!} \mathbb{F}_R^{\mu_1 \dots \mu_p} \left(\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_p} \right)_s^{t'}$$

con $\mu_k = 0, \dots, 9$ (y $\mathbb{F}_R^{\mu_1 \dots \mu_5}$ autodual o anti-autodual).

Notar que, en el lado izquierdo, tenemos $16 \times 16 = 256$
 anticomutadores independientes. ¿Cuántas cargas
 independientes tenemos en el lado derecho?

$$\text{IIA: } 1 + \frac{10 \cdot 9}{2} + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 1 + 45 + 210 = 256$$

$p=0$ $p=2$ $p=4$

$$\text{IIB: } 10 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2} \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 10 + 120 + 126 = 256$$

$p=1$ $p=3$

En lo que se refiere al anticommutador $\{\tilde{Q}, \bar{Q}\}$, no podrían existir \therefore términos adicionales del lado derecho: tenemos un álgebra 'máximamente extendida'. Así que no más objetos R-R BPS.

Examinemos ahora los anticommutadores restantes desde esta misma perspectiva:

$$\{Q_s, \bar{Q}_{s'}\} = -(\rho^m + \gamma_{ns}^m) (\Gamma_m)_{ss'}$$

$$\{\tilde{Q}_{s'}, \bar{\tilde{Q}}_s\} = -(\rho^m - \gamma_{ns}^m) (\Gamma_m)_{s's}$$

Sabemos que γ_{ns}^i ($\leftrightarrow B_{ni}$) es parada por F_1 , que puede ser entonces BPS. Y, de manera similar a lo que dijimos para los Dp-branas, γ_{ns}^0 puede

interpretarse como la carga asociada a una brana extendida en $10-1=9$ dimensiones: una **NS5-brana** [ver hep-th/9705162, 0410185].

El campo de norma asociado, $B_{(10)}$, claramente no tendría fluctuaciones (justo como $C_{(10)}$ que se acopla a $D9$).

Obviamente sabemos también el significado de las cargas p^m ($\leftrightarrow g_{\mu\nu}$). Los estados BPS correspondientes son simplemente estados no masivos.

Claramente, tanto en los anticommutadores $Q-\bar{Q}$ como en los $\tilde{Q}-\tilde{\bar{Q}}$, tenemos más anticómutadores independientes en el lado izquierdo que en el derecho: recordando que las supercargas son Majorana (y $\therefore \bar{Q}$ no es independiente de Q),

$$\frac{16 \times 17}{2} = 136 \text{ anticommutadores vs. } 10 \text{ cargas}$$

En ambos casos podrían existir entonces objetos BPS adicionales que porten $136-10=126$ nuevas cargas.

Y hemos visto más arriba que 126 es precisamente el número de cargas en un tensor $g^{\mu_1 \dots \mu_5}$ autodual o anti-autodual.

Esto sugiere \therefore la posible existencia de 5-branas BPS tanto en IIA como en IIB.

Y estos objetos de hecho existen:

$$\{Q_s, \bar{Q}_s\} \text{ incluye } -\frac{1}{5!} g_{NS+}^{\mu_1 \dots \mu_5} (\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_5})_{ss'}$$

↖ autodual

y

$$\{\tilde{Q}_s, \tilde{\bar{Q}}_s\} \text{ incluye } -\frac{1}{5!} g_{NS-}^{\mu_1 \dots \mu_5} (\Gamma_{\mu_1 \dots \mu_5})_{s's'}$$

↖ anti-autodual

de manera tal que las cargas

$$\frac{1}{2} (g_{NS+} \pm g_{NS-})^{\mu_1 \dots \mu_5} \text{ son los } \underline{\text{duals magnéticos}}$$

de la carga de F1 (enrollamiento) g_{NS}^{μ}

y del momento (número de KK) p^{μ} , respectivamente,

y los objetos que las portan son

NSS-brana, fuente magnética de $B_{(2)}$

KK5-brana, fuente magnética de vector KK $A_{(1)}$

$$(A_{\mu} \equiv g_{\mu c})^{\uparrow}$$

Como veremos más adelante, ambas se pueden describir como configuraciones solitónicas de los campos de supergravedad.

En base a las propiedades de transformación de las supercargas bajo dualidad T se puede mostrar

que

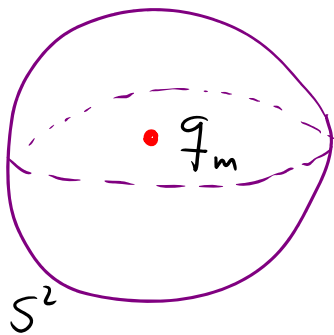
$$\begin{array}{ccc} \text{NSS en IIA/B} & \xleftrightarrow{T_{\alpha}} & \text{NSS en IIB/A} \\ \text{NSS en IIA/B} & \xleftrightarrow{T_i} & \text{KK5 en IIB/A} \end{array}$$

(donde α, i denotan respectivamente direcciones paralelas y perpendiculares a las 5-branas)

[Ver hep-th/9708086].

Habiendo visto ya que la teoría 'de cuerdas' incluye fuentes tanto eléctricas como magnéticas para diversos campos de norma, debemos recordar que Dirac mostró que en tales circunstancias las cargas eléctricas y magnéticas deben satisfacer una cierta **regla de cuantización**.

Su argumento original se refería a un monopolo magnético en $3+1$ dimensiones,



en cuya presencia la identidad de Bianchi se modifica a

$$dF_{(2)} = g_m \delta^{(3)}(\vec{x})$$

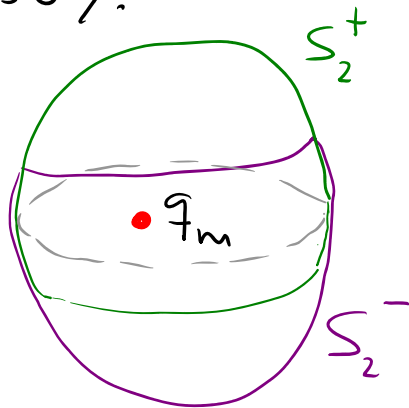
$$\Rightarrow \int_{B_3} dF_{(2)} = \int_{S_2 \equiv \partial B_3} F_{(2)} = g_m$$

(Justo del mismo modo que la ec. de mov.

$$d * F_{(2)} = j_e \Rightarrow \int_{S^2} * F_{(2)} = g_e .)$$

$q_m \neq 0$ claramente implica que No es posible encontrar $A_{(1)}$ definido globalmente que satisfaga $F_{(2)} = \mathcal{D}A_{(1)}$ (porque en ese caso tendríamos necesariamente $\mathcal{D}F_{(2)} = 0$).

Lo que sí resulta posible es definir por separado $A_{(1)}^+$ y $A_{(1)}^-$ en los "hemisferios" norte y sur S_2^+ y S_2^- , respectivamente, con $A_{(1)}^+ = A_{(1)}^- + \mathcal{D}\lambda$



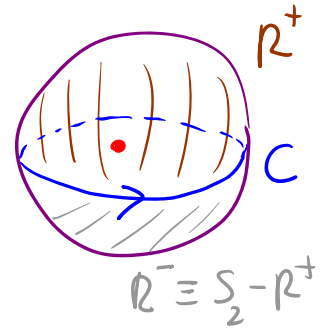
en la franja ecuatorial $S_2^+ \cap S_2^-$ (lo cual es necesario para garantizar que ambos campos de norma definan la misma intensidad de campo en el traslape,

$$\mathcal{D}A_{(1)}^+ = F_{(2)} = \mathcal{D}A_{(1)}^-).$$

Una carga eléctrica que se mueva a lo largo de una curva C en la franja ecuatorial se acopla directamente a $A_{(1)}^+$ ó $A_{(1)}^-$, adquiriendo \therefore una fase

$$\exp(iq_e \oint_C A_{(1)}^+) = \exp(iq_e \int_{R^+} F_{(2)}) \equiv \Phi^+$$

$\leftarrow C = \partial R^+ \rightarrow$



$$\exp(iq_e \oint_C A_{(1)}^-) = \exp(-iq_e \int_{R^-} F_{(2)}) \equiv \Phi^-$$

$\leftarrow C = -\partial R^- \rightarrow$

Por consistencia debemos tener entonces $\Phi^+ = \Phi^-$,
es decir,

$$1 = \exp\left[iq_e \left(\int_{R^+} F_{(2)} + \int_{R^-} F_{(2)}\right)\right] = \exp\left[iq_e \int_{S_2} F_{(2)}\right]$$

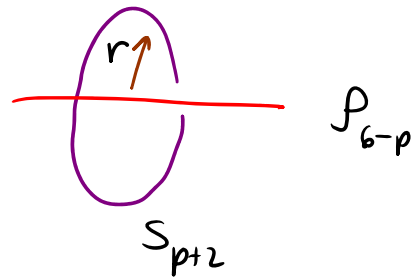
$$= \exp[iq_e q_m]$$

$$\Rightarrow q_e q_m = 2\pi n \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

Este argumento se generaliza directamente al caso en D dimensiones donde p -brana es una fuente eléctrica para campo de norma $C_{(p+1)}$ y $(D-4-p)$ -brana es su contraparte magnética

[Nepomechie (1985); Teitelboim (1986)].

A nosotros nos interesa el caso $D=9+1$, donde el monopolo magnético no es en general una cero-brana como consideró Dirac, sino una $(6-p)$ -brana. Semejante objeto tiene $3+p$ dimensiones transversales, que podemos separar en una dirección radial y una esfera $(p+2)$ -dimensional.



Con la normalización (propia de supergravedad) que adoptamos para el campo de norma $A_{(p+1)}$, la identidad de Bianchi es ahora

$$\downarrow F_{(p+2)} = 2K^2 \rho_{6-p} \delta^{(3+p)}(\vec{x}) \Rightarrow \frac{1}{2K^2} \int_{S_{p+2}} F_{(p+2)} = \rho_{6-p}$$

(mientras que la ec. de mov. es

$$\downarrow *F_{(p+2)} = 2K^2 \rho_p \delta^{(9-p)}(\vec{x}) \Rightarrow \frac{1}{2K^2} \int_{S_{8-p}} *F_{(p+2)} = \rho_p).$$

Definiendo como antes $A_{(p+1)}^{\pm}$ en "hemisferios" S_{p+2}^{\pm} , y considerando una p -brana que se mueve en

La franja ecuatorial $S_{p+2}^+ \wedge S_{p+2}^-$, acoplándose al campo de norma a través de $\rho \int_{M_{p+1}} A_{(p+1)}^+$, obtenemos la condición de cuantización

$$2k^2 \rho_p \rho_{6-p} = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Para branas 'localmente' BPS, como lo son todas las que hemos visto hasta ahora, esto implica

$$2k^2 \tau_p \tau_{6-p} = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Tomemos p.ej. el caso de la cuerda fundamental, que está cargada eléctricamente bajo $B_{(2)}$, y tiene

$$\tau_{F1} \equiv \frac{1}{2\pi l_c^2}.$$

Si dual magnético, la NS5-brana, debe tener una tensión que es un múltiplo de $\frac{2\pi}{2k^2 \tau_{F1}}$. Si suponemos que porta el cantidad mínima de carga magnética,

y fijamos la normalización de la constante de acoplamiento de cuerdas g_c definiendo

$$2\kappa^2 \equiv 16\pi G_N \equiv (2\pi)^7 g_c^2 l_c^8,$$

concluiríamos que

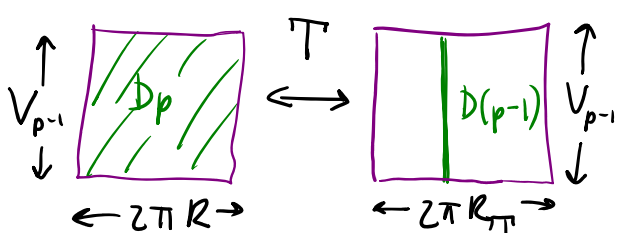
$$\tau_{NS5} = \frac{1}{(2\pi)^5 g_c^2 l_c^6}$$

De manera similar, si suponemos que las D_p -branas y $D(6-p)$ -branas portan el cuanto mínimo de carga (respectivamente eléctrica y magnética) asociada a $C_{(p+1)}$, tendríamos

$$\tau_{D_p} \tau_{D(6-p)} = \frac{1}{(2\pi)^6 g_c^2 l_c^8}$$

$$\Rightarrow \tau_{D_p} = \frac{1}{(2\pi)^{a_p} g_c^{b_p} l_c^{p+1}} \quad \text{con } a_p + a_{6-p} = 6, \quad b_p + b_{6-p} = 2 \quad \forall p.$$

Recordando además que $D_p \xleftrightarrow{T} D(p-1)$, debemos tener

$$\tau_{D_p} \sqrt{V_{p-1}} 2\pi R = \tau_{D(p-1)}^T \sqrt{V_{p-1}},$$


es decir,

$$\frac{1}{(2\pi)^{a_p} g_c^{b_p} l_c^{p+1}} 2\pi R = \frac{1}{(2\pi)^{a_{p-1}} \underbrace{g_c^{b_{p-1}}}_{\left(g_c \frac{l_c}{R}\right)^{b_{p-1}}} l_c^p}$$

$$\Rightarrow a_{p-1} = a_p - 1, \quad b_{p-1} = 1 \quad \forall p.$$

Junto con la condición de cuantización, esto implicaría

$$\tau_{Dp} = \frac{1}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}}.$$

Más adelante calcularemos explícitamente la tensión de las D-branas, verificando este resultado.

Notar que, cuando $g_c \ll 1$ tenemos

$$\tau_{F1} l_c^2 \sim \mathcal{O}(g_c^0) \ll \tau_{Dp} l_c^{p+1} \sim \mathcal{O}(g_c^{-1}) \ll \tau_{NS5} l_c^6 \sim \mathcal{O}(g_c^{-2})$$

lo cual pone de manifiesto el carácter no perturbativo de Dp-branas y NS5-branas.

Notar también que $\frac{\tau_{F1}}{\tau_{D1}} = g_c$ nos da una manera más 'operacional' de entender nuestra definición de g_c .

Como habíamos dicho antes, las interacciones de las excitaciones de una D-brana (cuerdas abiertas) entre sí y con su entorno (cuerdas cerradas) se pueden determinar a partir de cálculos de amplitudes de dispersión. Y como siempre, los resultados se pueden resumir en una acción efectiva para los modos no masivos.

Es relativamente fácil deducir la forma de la parte bosónica de esta acción.

Parametrizando el volumen de mundo M_{p+1} con coords. σ^a , $a=0, \dots, p$, la trayectoria de la Dp-brana en el espaciotiempo puede ser descrita de manera covariante a través de \mathcal{D} funciones $X^\mu(\sigma^a)$.

Anteriormente habíamos considerado la cuantización de cuerdas abiertas asociadas a una Dp-brana plana en el espacio tiempo de Minkowski.

Para tal brana resulta natural escoger la norma estática $\sigma^a = x^a$ $a=0, \dots, p$,



en cuyo caso la D_p -brana sin excitar corresponde a

$$X^\alpha(x) = x^\alpha \quad \alpha=0, \dots, p, \quad X^i(x) = x_0^i \quad i=p+1, \dots, 9$$

y una trayectoria más general se describe a través de

$$X^\alpha(x) = x^\alpha, \quad X^i(x^\alpha) = x_0^i + \Phi^i(x^\alpha),$$

donde Φ^i son precisamente los campos escalares que se obtienen como modos no masivos de las cuerdas abiertas. En un espaciotiempo de Minkowski, por invariancia bajo translaciones la acción solo puede depender de $\partial_\alpha \Phi^i$. De hecho, la propuesta natural al orden más bajo en derivadas es generalización de Nambu-Goto:

$$-T_{p+1} \int_{M_{p+1}} \sqrt{-\det(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu})} \quad \text{Divac,}$$

tensión
volumen

que es invariante tanto bajo diffeos en el volumen de mundo como bajo Poincaré en el espaciotiempo.

Recordando que dualidad T_i convierte al campo escalar Φ^i en el campo de normas $A^i \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \Phi^i$, vemos que la acción debe involucrar a la intensidad de campo $F_{\alpha\beta}$ de una manera específica:

$$-T_p \int_{M_{p+1}} d^{p+1} \sigma \sqrt{-\det(\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{ab})}$$

Si los escalares no están excitados (o consideramos D9-brana), esto se reduce a

$$-T_p \int_{M_{p+1}} d^{p+1} \sigma \sqrt{-\det(\eta_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} \quad \text{Born-Infeld}$$

¡Notar que esta acción incluye una serie infinita de correcciones en α' ! A través del cálculo de la anomalía de Weyl (\leftrightarrow función β), es posible mostrar que esta es la acción exacta para F constante [Fradkin, Tseytlin ; Abouelsaood, Callan, Nappi, Yost]

Pero le hacen falta correcciones que involucren derivadas de F (\leftrightarrow la acción de Dirac recibirá también correcciones con derivadas segundas o más altas de los campos escalares).

Consideremos ahora la manera en que la D-brana se acopla a un fondo no trivial de cuerdas cerradas.

Para la métrica $g_{\mu\nu}$, obviamente habrá que reemplazar $\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$ con la nueva métrica inducida

$$g_{ab}(\sigma) \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^a} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^b} g_{\mu\nu}(X(\sigma))$$

Trabajando en el marco de cuerdas (no de Einstein), el campo dilatónico debería aparecer a través de un factor $e^{-\varphi}$ en el disco \leftrightarrow nivel árbol.

Y recordando que $F_{\mu\nu}$ cambia bajo una transformación de norma de $B_{\mu\nu}$,

(cuerda abierta se acopla a $B_{\mu\nu}$ y A_μ a través de

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{M_2} d^2\sigma \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu} + \int_{\partial M_2} d\tau \partial_\tau X^\mu A_\mu,$$

que es invariante bajo la transformación simultánea

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{\Lambda_\mu}{2\pi\alpha'} \quad \Rightarrow \quad F_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} - \frac{1}{2\pi\alpha'} (\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu)$$

Vemos que la acción de la D-brana debe involucrar no a $F_{(2)}$ ó a $B_{(2)}$ por separado, sino a la combinación invariante de normas $B_{(2)} + 2\pi\alpha' F_{(2)} \equiv \tilde{F}_{(2)}$.

En conjunto tenemos \therefore la acción **Dirac-Born-Infeld**

$$S_{\text{DBI}} \equiv -\tau_p \int d^{p+1}\sigma e^{-\varphi} \sqrt{-\det(g_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})}$$

$$\text{con } g_{ab} \equiv \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}, \quad B_{ab} \equiv \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu},$$

que en efecto se obtiene a partir de función β [Leigh].

Sabemos además que \mathbb{D}_p se acopla a campo
Ramond-Ramond $C_{(p+1)}$ a través de término

$$\pm \tau_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} C_{(p+1)} \equiv \pm \tau_p \underbrace{\int d\sigma^0 \dots d\sigma^p}_{\text{densidad de carga } \rho_p} \underbrace{\partial_{\sigma^0} X^{\mu_0} \dots \partial_{\sigma^p} X^{\mu_p}}_{\text{retracción } C_{\sigma^0 \dots \sigma^p}(\sigma)} C_{\mu_0 \dots \mu_p}(X(\sigma))$$

Por dualidad T , deben existir términos adicionales
que acoplen campos R-R con $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$, y \dots ,
por invariancia bajo transformaciones de norma de $B_{(2)}$,
con $\tilde{F}_{(2)} \equiv B_{(2)} + 2\pi\alpha' F_{(2)}$.

El resultado se puede resumir en la acción tipo

Cheern-Simons ó **Wess-Zumino** [Douglas]

$$S_{WZ} = \pm \tau_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} e^{\tilde{F}_{(2)}} \wedge \sum_{\mathbb{Z}} C_{(q)}$$

$$\equiv \pm \tau_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} C_{(p+1)} \pm \tau_p \int_{\mathcal{M}_{p+1}} \tilde{F}_{(2)} \wedge C_{(p-1)} \pm \dots$$

$$\text{donde } (T_{(n)} \wedge T'_{(n')})_{a_1 \dots a_{n+n'}} \equiv \frac{1}{n!n'!} T_{[a_1 \dots a_n} T'_{a_{n+1} \dots a_{n+n}]}$$

Los términos más allá del primero muestran que D_p se puede acoplar también a $C_{(q)}$ con $q=p-1, p-3, \dots$
 P.ej., si consideramos una D_p -brana que porta un campo magnético $F_{12} \neq 0$ (ó $B_{12} \neq 0$), el segundo término es (en norma estática $\sigma^a = x^a$)

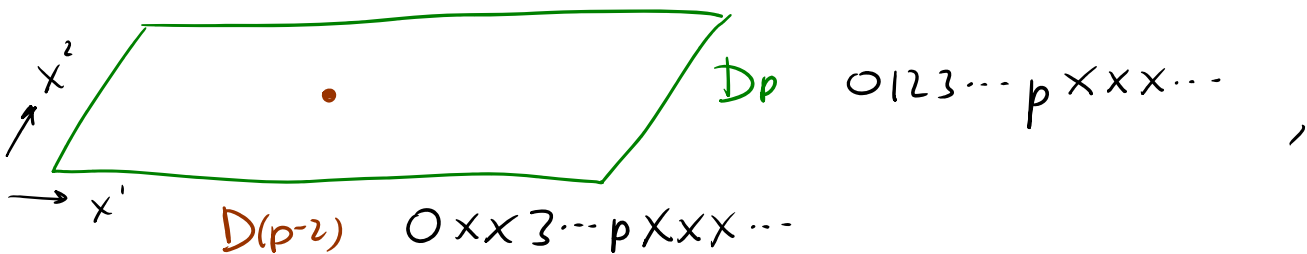
$$\pm \tau_p \int dx^0 \dots dx^p 2\pi\alpha' F_{12} C_{03\dots p} \quad ,$$

M_{p+1}

es decir, esta D_p porta (además de carga bajo $C_{(p+1)}$) carga de $D(p-2)$ -brana

$$q^{3\dots p} = \underbrace{\pm \tau_p 2\pi\alpha' F_{12} V_{12}}_{P_{p-2}} \int dx^3 \dots dx^p$$

Para entender la interpretación física de esto, notemos primero que un estado con D_p y $D(p-2)$ superpuestas,



No preservaría ninguna supersimetría:

$$Dp \text{ preserva } \tilde{\eta} = \Gamma^{012 \dots p} \eta \quad (16 \text{ supersimetrías})$$

$$D(p-2) \text{ preserva } \tilde{\eta} = \pm \Gamma^{03 \dots p} \eta \quad (16 \text{ supersimetrías})$$

\Rightarrow superpuestas preservarían sdo η tal que

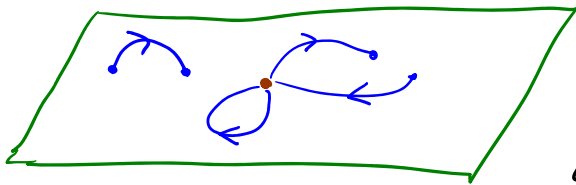
$$\Gamma^{012 \dots p} \eta = \pm \Gamma^{03 \dots p} \eta \Rightarrow \Gamma^{12} \eta = \pm \eta,$$

lo cual es imposible porque

$$(\Gamma^{12})^2 = -1 \Rightarrow \Gamma^{12} \text{ tiene autovalores } \pm i$$



Dado que esta configuración No es BPS, su estabilidad no está garantizada. De hecho, el sistema tiene excitaciones taquiónicas, y es \therefore perturbativamente inestable.



Sus excitaciones están descritas por cuerdas fundamentales de 4 tipos distintos:

$p-p, (p-2)-(p-2),$
 asociadas a branas
 individuales

$(p-2)-p, p-(p-2)$
 asociadas a sistema conjunto

Para los últimos 2 tipos, $X^{0,3,\dots,p}(z, \bar{z})$ satisfacen condiciones de borde Neumann en ambos extremos, y $X^{p+1,\dots,q}(z, \bar{z})$ satisfacen condiciones Dirichlet en ambos extremos, pero $X^{1,2}(z, \bar{z})$ son D en $\sigma=0$ y N en $\sigma=\pi$, o viceversa. La expansión en modos correspondiente es entonces antiperiódica,

$$X^{1,2}(z, \bar{z}) = i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} \frac{\alpha_r^{1,2}}{r} (z^{-r} + \bar{z}^{-r}) \quad \begin{array}{l} \text{para D-N} \\ \text{N-D} \end{array}$$

\uparrow
 $z \equiv e^{\sigma^2 + i\sigma'}$

$$\Rightarrow z = \begin{cases} \bar{z} & \text{en } \sigma=0 \\ e^{2\pi i} \bar{z} & \text{en } \sigma=\pi \end{cases}$$

Recordando que, en el plano $w \equiv \sigma^2 + i\sigma'$, el campo fermiónico ψ^w en el sector R tiene (por definición) la misma periodicidad que X^w , y en el sector NS tiene la periodicidad opuesta a X^w , vemos que la constante de orden para L_0 (energía de punto cero) en el caso de cuerdas $p-(p-2)$ ó $(p-2)-p$ es

$A_R = 0$ (por supersimetría en hoja de mundo) y

$$A_{NS} = \underbrace{(8-2)}_{\substack{\text{bosón} \\ \text{periódico}}} \underbrace{\left(-\frac{1}{24}\right)}_{X^{1,2}} + \underbrace{(8-2)}_{\substack{\text{fermión} \\ \text{antiperiódico}}} \underbrace{\left(-\frac{1}{48}\right)}_{\substack{\psi_{\beta,\gamma} \\ \psi^{1,2}}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{bosón} \\ \text{antiperiódico}}} \underbrace{\left(+\frac{1}{48}\right)}_{X^{1,2}} + \underbrace{2}_{\substack{\text{fermión} \\ \text{periódico}}} \underbrace{\left(+\frac{1}{24}\right)}_{\psi^{1,2}}$$

$$= -\frac{4}{24} - \frac{4}{48} = -\frac{1}{4} < 0$$

(Más en general, $A_{NS} = -\frac{1}{2} + \frac{\#_{ND}}{4}$, así que los sectores NS y R solo podrían ser degenerados si $\#_{ND} = 0, 4, 8$.)

El estado más bajo $|0, s_1\rangle_{NS}$ es \therefore un taquión,
 $\psi_r^{0,3,\dots,9}$ $\psi_r^{1,2}$
 $r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ $r \in \mathbb{Z}$

y la contribución adicional de s_1 al número fermiónico (en la hoja de mundo) F hace que este estado

(fermiónico en el espaciotiempo) sobreviva la proyección GSO $(-1)^F = \pm 1$.

El sistema $D_p - D(p-2)$ quiere \therefore decaer. El resultado final de este decaimiento debe portar las mismas cargas y tener menos energía, es decir, debe ser un estado ligado $D_p - D(p-2)$.

A partir del álgebra supersimétrica en marco en reposo,

$$\left\{ \begin{bmatrix} Q \\ \tilde{Q} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q^\dagger & \tilde{Q}^\dagger \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \mathbb{1} + \begin{bmatrix} 0 & g^{3\dots p} \\ \mp g_{RR}^{3\dots p} & 0 \end{bmatrix} \Gamma^{03\dots p} \\ + \begin{bmatrix} 0 & g^{1\dots p} \\ \pm g_{RR}^{1\dots p} & 0 \end{bmatrix} \Gamma^{01\dots p} \quad \begin{matrix} (\Gamma^{03\dots p})^2 = \mp 1 \\ (\Gamma^{01\dots p})^2 = \pm 1 \end{matrix}$$

para $\frac{p(p+1)}{2}$ impar,
par,

deducimos que los autovalores de la matriz hermítica

$$\begin{bmatrix} m & \pm i g_{D(p-2)} \pm g_{Dp} \\ \mp i g_{D(p-2)} \pm g_{Dp} & m \end{bmatrix} \text{ deben ser no negativos,}$$

por lo que la determinante $m^2 - (g_{D(p-2)}^2 + g_{Dp}^2) \geq 0$,

es decir, cualquier estado con ambos tipos de carga debe

satisface la desigualdad BPS

$$m \geq \sqrt{g_{D(p-2)}^2 + g_{Dp}^2}$$

Con esto confirmamos que el estado no ligero,
con $m = g_{D(p-2)} + g_{Dp}$, No es BPS.

Podemos notar además que Dp plana con
 $\vec{F}_{12} = 2\pi\alpha' F_{12}$ constante tiene justamente

$$m = \tau_p \int dx^1 \dots dx^p \sqrt{-\det \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & 1 & F_{12} & 0 \\ & -F_{12} & 1 & \\ 0 & & & \dots, 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \tau_p V_{12} \sqrt{1 + (2\pi\alpha' F_{12})^2} \int dx^3 \dots dx^p$$

$$= \underbrace{\sqrt{(\tau_p V_{12})^2}}_{\mathcal{P}_p} + \underbrace{(\tau_p V_{12} 2\pi\alpha' F_{12})^2}_{\mathcal{P}_{p-2}} \underbrace{V_{3 \dots p}}$$

$$= \sqrt{g_{Dp}^2 + g_{D(p-2)}^2} \quad | \text{ y es } \therefore \text{ BPS!}$$

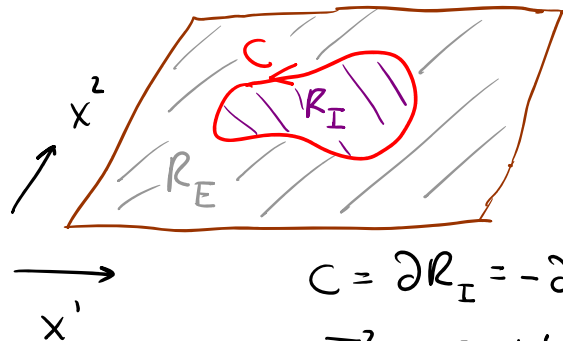
(preserva $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} 32 = 8$ supersimetrías)

En base a este resultado, interpretamos al sistema $Dp + F_{12}$ constante como un estado ligado de 1 Dp -brana y n_{p-2} $D(p-2)$ -branas, donde

$$n_{p-2} = \frac{q_{D(p-2)}}{\tau_{p-2} V_{3\dots p}} = \frac{\tau_p V_{12} 2\pi\alpha' F_{12} \cancel{V_{3\dots p}}}{\tau_{p-2} \cancel{V_{3\dots p}}} = \frac{1}{2\pi} V_{12} F_{12}$$

Esto solo tiene sentido si $\frac{1}{2\pi} V_{12} F_{12} \in \mathbb{Z}$, y en un T^2 tenemos justamente

$$\begin{aligned} \exp(i \oint_C A_{(1)}) &= \exp\left(i \int_{R_I} F_{(2)}\right) \\ &= \exp\left(-i \int_{R_E} F_{(2)}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} C &= \partial R_I = -\partial R_E \\ T^2 &= R_I \cup R_E \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exp\left(i \int_{T^2} F_{(2)}\right) = 1,$$

es decir, el flujo magnético debe estar cuantizado,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{T^2} F_{(2)} = n \in \mathbb{Z}. \quad \checkmark$$

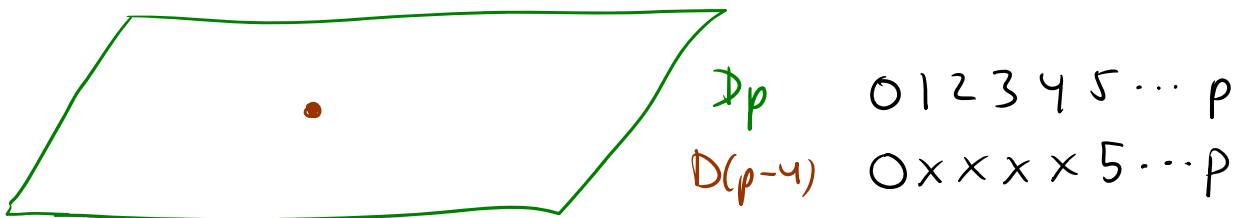
$$\underbrace{V_{12} F_{12}}_{\text{si } F_{12} = \text{cte.}}$$

Al formarse el estado ligado, las $D(p-2)$ -branas se disuelven en Dp y se convierten en campo magnético constante.

De manera similar, los términos adicionales en S_{wb} que acoplan $F \wedge F$, $F \wedge F \wedge F$, ...

a $C_{(p-3)}$, $C_{(p-5)}$, ..., implican que la Dp -brana puede portar carga de $D(p-4)$, $D(p-6)$, etc.

El primer caso es curioso, porque



superpuestas preservarían supersimetrías tales que

$$\tilde{\eta} = \Gamma^{01\dots p} \eta = \pm \Gamma^{05\dots p} \eta \iff \underbrace{\Gamma^{1234}} \eta = \pm \eta,$$

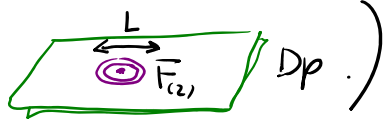
$$(\Gamma^{1234})^2 = +1$$

$$\text{Tr}(\Gamma^{1234}) = 0$$

es decir, un total de 8 supersimetrías. (Las $32-8=24$ supercargas rotas generan un multiplete 2^{12} -dimensional.)

Para una cuerda $D_p - D_{(p-4)}$ ó $D_{(p-4)} - D_p$ obtenemos las constantes de orden $A_{rr} = 0$ y $A_{rr} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{8} = 0$, lo cual indica que, como era de esperarse, no existe taquión (y el espectro es de hecho supersimétrico). La desigualdad BPS en este caso resulta ser

$$m \geq |q_{D_p}| + |q_{D_{(p-4)}}|,$$

así que, de existir un estado ligado, debe ser 'marginal' (o 'en umbral'). Estos de hecho existen y son descritos por D_p con $(F \wedge F)_{1234} \sim F_{12} F_{34} \neq 0$ [ver Sen, hep-th/9511026]. (Para sistemas con 2 o más D_p 's, el estado ligado está descrito por un instantón [Witten, 9511030; Vafa 9512078]  D_p .)

Para N D_p -branas paralelas sabemos que A_a y X^i se convierten en matrices $N \times N$, y la teoría efectiva es entonces no abeliana, con grupo de norma $U(N)$.

Parte de ella se puede deducir usando dualidad T, a partir de la acción no abeliana para N D1-branas.

P.ej.,

$$S_{\text{DBI/NA}} = -T_1 \int d^{10}x \text{TrS} \left[e^{-\varphi} \sqrt{-\det(g_{ab} + B_{ab} + 2\pi\alpha' F_{ab})} \right]$$

retracciones usando
 $D_a X^i = \partial_a X^i + i[A_a, X^i]$

y campos $g_{\mu\nu}(X), B_{\mu\nu}(X), \varphi(X)$
 matriz

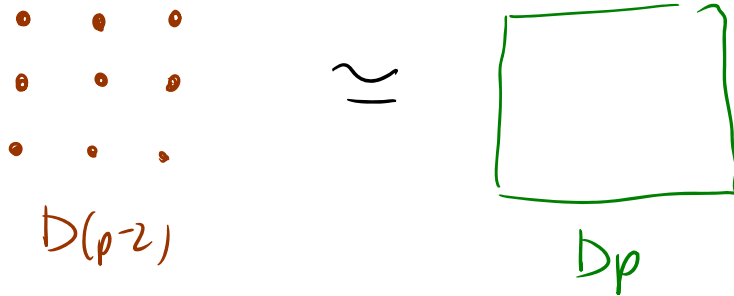
Traza sobre índices $U(N)$,

considerando solo productos simétricos de F 's y DX 's
 (dejando fuera así términos con derivadas covariantes de F) [Tseytlin, hep-th/9701125]

Al T-dualizar $D9 \rightarrow Dp$, aparecen términos con conmutadores $[X^i, X^j]$ [Myers, hep-th/9910053]

Procedimiento similar para $S_{\text{WZ/NA}}$ produce acoplamientos de Dp -branas con $C_{(p+2)}, C_{(p+4)}, \text{etc.}$ Es decir, una colección de Dp 's puede portar carga de $D(p+2), D(p+4), \text{etc.}$

Este es el llamado 'efecto dieléctrico' [Myers] :



Hasta aquí discutimos solo la parte básica de la acción. La extensión supersimétrica para el caso abeliano ha sido analizada en un foro plano en [Asanagic, Popescu, Schwarz, hep-th/9610249, 9612080] y para un foro general en

[Cederwall, von Gussich, Nilsson, Westerberg, 9610148, " + Sundell, 9611159].

Para el caso no abeliano, ver

[Collinucci, de Roo, Eerink, hep-th/0205150

Bergshoeff, de Roo, Sevrin, 0011264].

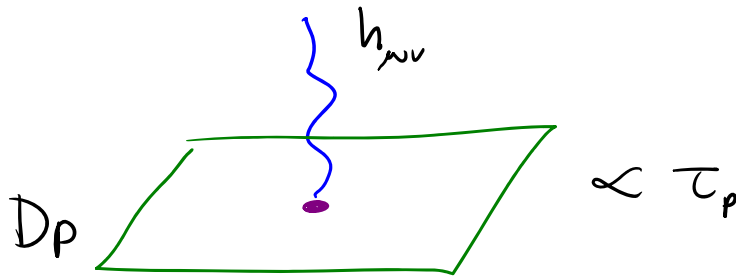
Ahora, ¿cómo podemos calcular la tensión de D_p ?

Evidentemente $\tau_p = \frac{\text{energía}}{p\text{-volumen}}$ controla la intensidad

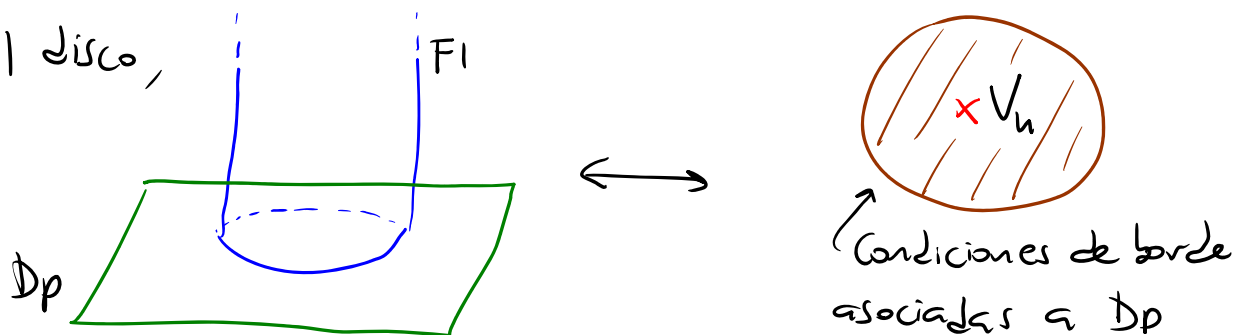
con que la D-brana se acopla al campo gravitacional.

En efecto, S_{DBI} implica que D_p es fuente de

$h_{\mu\nu}(x) \equiv g_{\mu\nu}(x) - \eta_{\mu\nu}$, con 'constante de acoplamiento' τ_p . En particular, el término de $\mathcal{O}(h)$ en S_{DBI} corresponde al vértice de 1 pata (renacuajo)

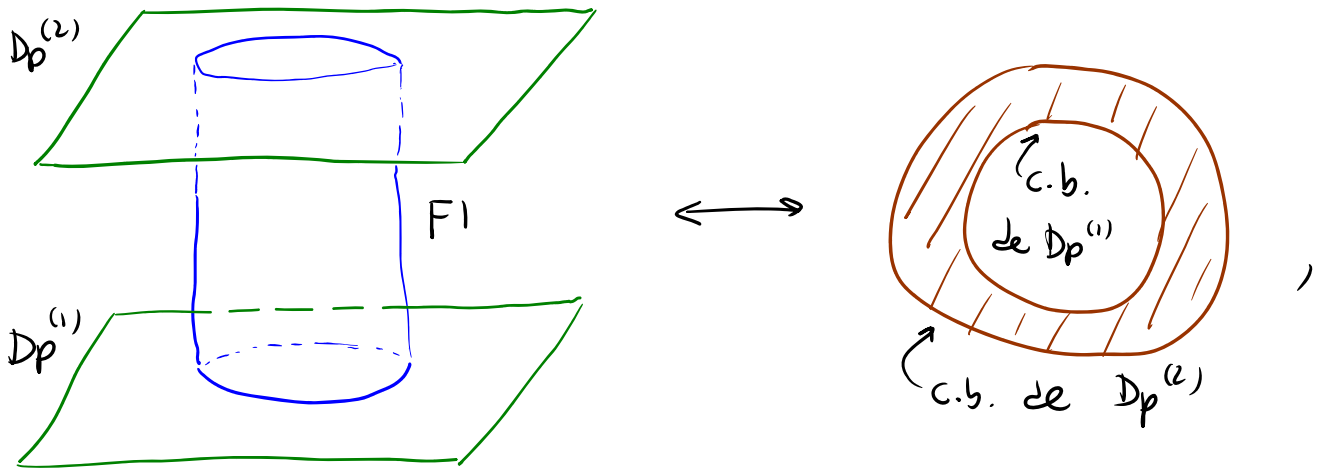


Este vértice se deduce a partir de amplitud de 1 cuerda en el disco,

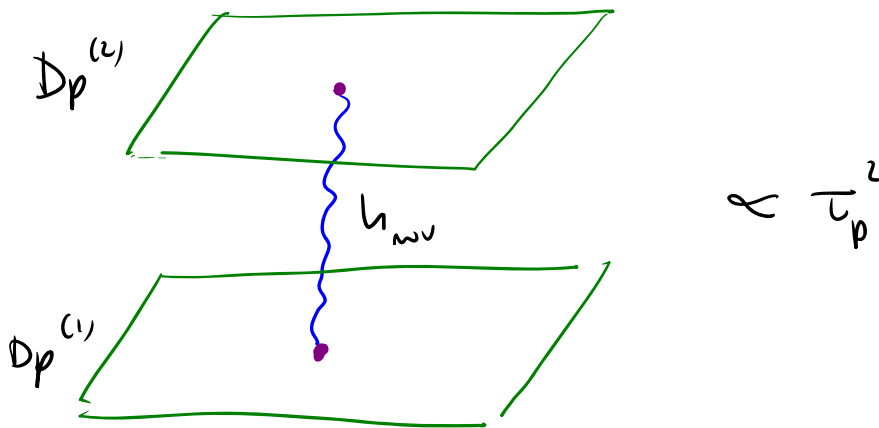


Pero es un poco difícil determinar la normalización correcta de esta amplitud.

Nos resultará más fácil calcular la amplitud que describe la interacción entre 2 Dp-branas paralelas,



que se puede comparar con el diagrama de campos



Calcularemos primero este último diagrama. En realidad nos interesan también los diagramas análogos donde las Dp's intercambian un φ o $B_{\mu\nu}$, porque, como veremos más adelante, la amplitud

de cuerdas incluye a todos los campos NS-NS no masivos en un mismo paquete.

Necesitamos determinar la forma explícita de los vértices y propagadores, a partir de la acción efectiva $S_S + S_{DBI}$, donde

$$S_S = \frac{1}{2K^2} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\varphi} \left[R + 4(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{12} H^2 \right]$$

+ R-R + fermiones

$K^2 \equiv 8\pi G_N$ incluye $e^{2\varphi}$
(parte de de $\Phi(x) = \varphi_0 + \varphi(x)$)

$g_{\mu\nu}(x)$ métrica en marco de cuerdas

$$= \frac{1}{2K^2} \int d^D x \sqrt{-g_E} \left[R_E - \frac{4}{D-2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{12} e^{-\frac{8\varphi}{D-2}} H_E^2 \right] + \dots,$$

$$g_{E\mu\nu} \equiv e^{-\frac{4\varphi(x)}{D-2}} g_{\mu\nu}(x) \stackrel{D=10}{=} e^{-\varphi/2} g_{\mu\nu}(x)$$

incluye $e^{-\varphi_0}$

métrica en marco de Einstein

$$S_{DBI} = -\tau_p \int d^{p+1} x e^{-\varphi} \sqrt{-\det(g_{ab} + B_{ab})}$$

$$= -\tau_p \int d^{p+1} x e^{-\left(\frac{p-3}{4}\right)\varphi} \sqrt{-\det(g_{Eab} + e^{-\varphi/2} B_{ab})}$$

Para obtener los vértices, desarrollamos S_{DBI} a orden lineal en φ , $B_{\mu\nu}$ y $h_{\mu\nu} \equiv g_{E\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ (campos d -dimensionales, no canónicamente normalizados):

$$S_{\text{DBI}} = -\tau_p V_{p+1} - \tau_p \int d^{p+1}x \left[\left(\frac{p-3}{4}\right)\varphi + \frac{1}{2}h_{\alpha}^{\alpha} + \mathcal{O}(h^2) \right]$$

$$= \text{cte.} - \int d^Dx \left[J_{\varphi}(x)\varphi(x) + \frac{1}{2}T^{\mu\nu}(x)h_{\mu\nu}(x) + J_B^{\mu\nu}(x)B_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(h^2) \right]$$

$$\text{con } \begin{cases} J_{\varphi}(x) \equiv \tau_p \left(\frac{p-3}{4}\right) \delta^{(9-p)}(x^i) \\ T^{\mu\nu}(x) \equiv \tau_p \hat{\eta}^{\mu\nu} \delta^{(9-p)}(x^i) \\ J_B^{\mu\nu}(x) \equiv 0 \end{cases}, \quad \hat{\eta}^{\mu\nu} \equiv \begin{cases} \eta^{\mu\nu} & \text{si } \mu=\alpha, \nu=\beta \\ 0 & \text{si } \mu \text{ ó } \nu = i \end{cases}$$

Para obtener los propagadores, desarrollamos S_s a orden cuadrático en los mismos campos:

$$S_s = \frac{1}{2k^2} \int d^Dx \left[\frac{1}{4}h_{\mu\nu} \partial^2 \underbrace{\left(h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h \right)}_{\equiv \bar{h}^{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\varphi \partial^2 \varphi + \dots \right]$$

en norma $\partial_{\mu}\bar{h}^{\mu\nu} = 0$ (de Doder = harmónica = Lorenz)

$$\left(\Rightarrow \text{ec. de mov. } \partial^2 \bar{h}^{\mu\nu} = k^2 T^{\mu\nu} \quad \checkmark \right)$$

Para el dilatón tenemos entonces el propagador

$$\langle \varphi(k) \varphi(-k) \rangle = -2K^2 \frac{1}{k^2} \equiv \text{---} \varphi$$

Para el gravitón, escribiremos el término cinético como

$$\frac{1}{2k^2} \frac{1}{2} h_{\mu\nu} M^{\mu\nu\lambda\rho} \partial^2 h_{\lambda\rho}$$

$$\text{con } M^{\mu\nu\lambda\rho} \equiv \frac{1}{4} (\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\lambda} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho}),$$

tenemos el propagador

$$\langle h_{\mu\nu}(k) h_{\lambda\rho}(-k) \rangle = -2K^2 \frac{1}{k^2} D_{\mu\nu\lambda\rho} \equiv \text{---} h$$

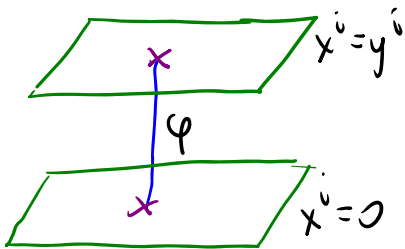
donde

$$D_{\mu\nu\lambda\rho} \equiv \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda} - \frac{2}{D-2} \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho}$$

$$\text{satisface } M^{\mu\nu\lambda\rho} D_{\lambda\rho\sigma\tau} = \frac{1}{2} (\delta_{\sigma}^{\mu} \delta_{\tau}^{\nu} + \delta_{\tau}^{\mu} \delta_{\sigma}^{\nu}).$$

Con estos ingredientes podemos finalmente calcular

los 2 diagramas que nos interesan,



$$= \int d^{10}_x d^{10}_{x'} J_\varphi(x) \left(2K^2 \int \frac{d^{10}k}{(2\pi)^{10}} \frac{e^{ik \cdot (x-x')}}{k^2} \right) J_\varphi(x')$$

$$= 2K^2 \tau_p^2 \left(\frac{p-3}{4}\right)^2 \int d^{p+1}_x d^{p+1}_{x'} \int \frac{d^{10}k}{(2\pi)^{10}} \frac{e^{ik_{||} \cdot (x-x')} e^{ik_{\perp} \cdot (y-0)}}{k_{||}^2 + k_{\perp}^2}$$

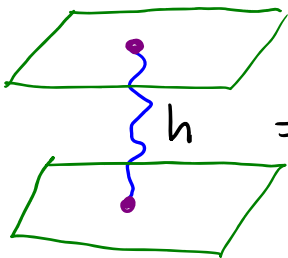
$$\int \frac{d^{p+1}(x+x')}{2^{p+1}} \int d^{p+1}(x-x') \leftarrow (2\pi)^{p+1} \delta^{(p+1)}(k_{||})$$

$$= 2K^2 \tau_p^2 \left(\frac{p-3}{4}\right)^2 V_{p+1} \int \frac{d^{9-p}k_{\perp}}{(2\pi)^{9-p}} \frac{e^{ik_{\perp} \cdot y}}{k_{\perp}^2}$$

$\equiv \Delta_{9-p}(y)$ propagador escalar en direcciones transversales

$$= \text{cte} \cdot (y^2)^{-\left(\frac{7-p}{2}\right)}$$

y de manera similar



$$= 2K^2 \tau_p^2 V_{p+1} \frac{1}{2} \hat{\eta}^{\mu\nu} \left(\eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\lambda} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} \right) \frac{1}{2} \hat{\eta}^{\lambda\rho} \Delta_{9-p}(y)$$

$$\frac{1}{4} \left[(p+1) + (p+1) - \frac{1}{4} (p+1)^2 \right]$$

La amplitud total de interacción entre las 2 Dp-branas a través de campos NS-NS sin masa es entonces

$$M_{NS-NS}^{m^2=0}(y) = 2K^2 \tau_p^2 V_{p+1} \Delta_{p+1}^2(y) \left[\left(\frac{p-3}{4}\right)^2 + \frac{p+1}{2} - \left(\frac{p+1}{4}\right)^2 \right]$$

$$\frac{p^2 - 6p + 9 + 8p + 8 - p^2 - 2p - 1}{16} = 1$$

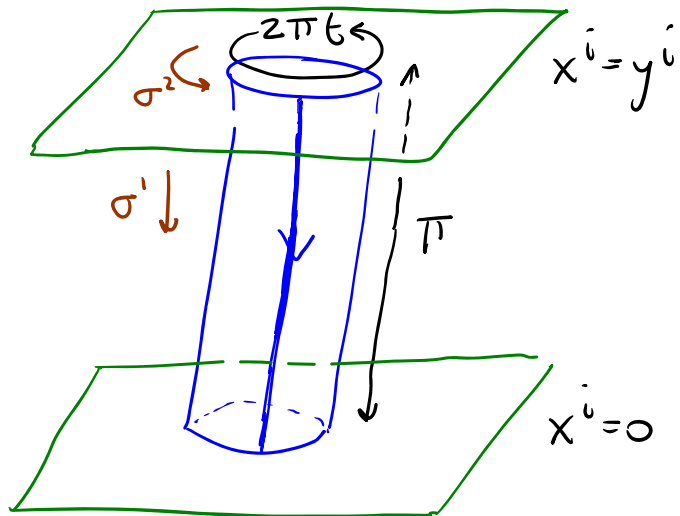
Pasemos ahora al cálculo en cuerdas, donde nos interesa determinar la amplitud de cero puntos en el

anillo / cilindro,

que podemos interpretar como un lazo de cuerda abierta.

Como vimos antes, en el formalismo

canónico la normalización de este lazo está completamente definida:



$$\mathcal{M}_{c^2}^{(0)} = \int_0^\infty \frac{dt}{2t} \text{Tr}_{H_1} \left[e^{-2\pi t \hat{H}} \right]$$

\leftarrow ignorar $b, c, \beta, \gamma, \chi^i, \psi^i, \tau$

$$\text{con } \hat{H} = \hat{L}_0^{\text{TOT}} = \underbrace{\alpha' \hat{p}^2 + \alpha' \left(\frac{y-0}{2\pi\alpha'} \right)^2}_{\equiv \hat{H}_0} + \underbrace{\hat{N} + A_\Delta}_{\hat{H}_\psi + \hat{H}_\chi} + \underbrace{\alpha' \hat{m}^2}_{\text{cte. de orden}}$$

$$\hat{H}_\chi \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i - \frac{1}{24} \right)$$

$$\hat{H}_\psi \equiv \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{r>0} r \psi_{-r}^i \psi_r^i - \frac{1}{48} \right) \quad \begin{matrix} \text{NS} \\ \text{R} \end{matrix}$$

(Recordar que $\mathcal{M}_{c^2}^{(0)}$ se puede interpretar como suma de lazos de partícula,

$$\text{Diagrama} \stackrel{T}{=} \int_0^\infty \frac{dT}{2T} \int \frac{d^p k}{(2\pi)^{p+1}} e^{-\frac{T}{2}(k^2 + m^2)} = -\frac{1}{2} \ln[\det(-\partial^2 + m^2)]$$

sobre espectro de cuerda abierta (con -1 para fermiones).

Como es usual, la amplitud se factoriza,

$$M_{c^2} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{2t} \text{Tr}_0(e^{-2\pi t \hat{H}_0}) \text{Tr}_x(e^{-2\pi t \hat{H}_x}) \left[\text{Tr}_{NS}^{6p} (e^{-2\pi t \hat{H}_\psi}) - \text{Tr}_R^{6p} (e^{-2\pi t \hat{H}_\psi}) \right]$$

bosones fermiones

donde $\text{Tr}_{NS}^{6p}(\dots) = \frac{1}{2} \text{Tr}_{NS}(\dots) + \frac{1}{2} \text{Tr}_{NS}((-1)^{\hat{F}} \dots)$,

y tenemos

2 orientaciones

$$\text{Tr}_0(e^{-2\pi t \hat{H}_0}) = 2 V_{p+1} \int \frac{d^p k}{(2\pi)^p} e^{-2\pi t \alpha' k^2 - \frac{ty^2}{2\pi\alpha'}}$$

$\langle k|k \rangle = (2\pi)^{p+1} \delta^{(p+1)}(k-k) = V_{p+1}$

$$= 2 V_{p+1} (8\pi^2 \alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{ty^2}{2\pi\alpha'}}$$

$$\text{Tr}_x(e^{-2\pi t \hat{H}_x}) = \left(e^{\frac{2\pi t}{24}} \frac{1}{\pi} \sum_{N_n=0}^{\infty} e^{-2\pi t n N_n} \right)^8$$

$\underbrace{\frac{1}{\pi}}_{q^{-1/24}} \underbrace{\sum_{N_n=0}^{\infty} e^{-2\pi t n N_n}}_{(1-q^n)^{-1}} \quad q \equiv e^{-2\pi t}$

$$\equiv \eta(it)^{-8} \quad \leftarrow \text{función eta de Dedekind}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{Tr}_{NS} \left(e^{-2\pi t \hat{H}_\psi} \right) &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{2\pi t}{48}} \prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} (1 + e^{-2\pi t r}) \right)^8 \\
&= \frac{1}{2} q^{-1/6} \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2}) \right]^8 \\
&= \frac{1}{2} \left[q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \right]^{-4} \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) (1 + q^{n-1/2})^2 \right]^4 \\
&\equiv \frac{1}{2} \frac{\Theta_3(0|it)^4}{\eta(it)^4} \quad \leftarrow \text{función teta de Jacobi} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{Tr}_{NS} \left((-1)^{\hat{F}} e^{-2\pi t \hat{H}_\psi} \right) &= -\frac{1}{2} \left(e^{\frac{2\pi t}{48}} \prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} (1 - e^{-2\pi t r}) \right)^8 \\
&= -\frac{1}{2} q^{-1/6} \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-1/2}) \right]^8 \\
&\equiv -\frac{1}{2} \frac{\Theta_4(0|it)^4}{\eta(it)^4} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{Tr}_R \left(e^{-2\pi t \hat{H}_\Psi} \right) &= \frac{1}{2} (8+8) \left(e^{-\frac{2\pi t}{24}} \prod_{r=1}^{\infty} (1+e^{-2\pi t r}) \right)^8 \\
&= \frac{1}{2} q^{1/3} \left[\sqrt{2} \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n) \right]^8 \\
&\equiv \frac{1}{2} \frac{\Theta_2(0|it)^4}{\eta(it)^4} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{Tr}_R \left((-1)^{\hat{F}} e^{-2\pi t \hat{H}_\Psi} \right) &= \frac{1}{2} (8-8) \left(e^{-\frac{2\pi t}{24}} \prod_{r=1}^{\infty} (1-e^{-2\pi t r}) \right)^8 \\
&\equiv \frac{1}{2} \frac{\Theta_1(0|it)^4}{\eta(it)^4} = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Juntándolo todo concluimos que

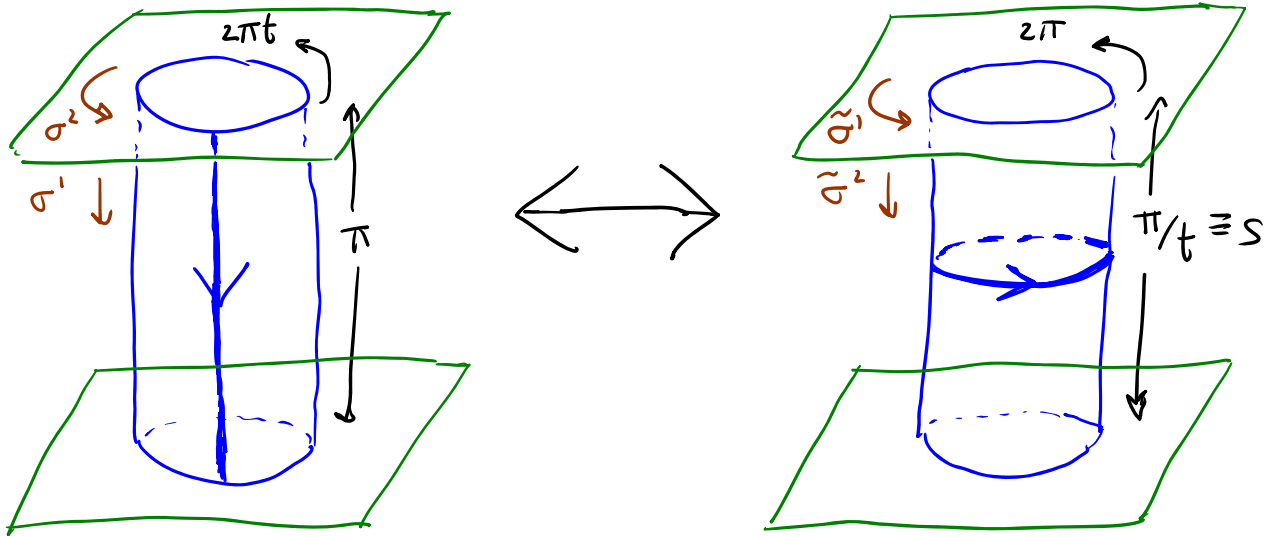
$$\mathcal{M}_{\zeta^2}(y) = Z V_{p+1} \int_0^{\infty} \frac{dt}{2t} (8\pi^2 \alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-t \frac{y^2}{2\pi \alpha'}} \eta(it)^{-8} \frac{1}{2} \left[\frac{\Theta_3(it)^4 - \Theta_4(it)^4 - \Theta_2(it)^4}{\eta(it)^4} \right]$$

$$= 0 \quad \text{porque} \quad \Theta_3(0|\tau)^4 = \Theta_4(0|\tau)^4 + \Theta_2(0|\tau)^4$$

identidad abstrusa de Jacobi

Este resultado es consecuencia del espectro supersimétrico de la cuerda abierto.

Pero vos interesa reinterpretar esta amplitud en términos de una cuerda cerrada:



Al hacer esta traducción, los estados de cuerda cerrada en el sector NS-NS (ψ^i antiperiódico en $\tilde{\sigma}^1 = \sigma^2/t$) corresponden a los términos sin $(-1)^F$ en la traza sobre estados de cuerda abierta, mientras que las cuerdas cerradas R-R (ψ^i periódico en $\tilde{\sigma}^1 = \sigma^2/t$) corresponden a los términos con $(-1)^F$ en la traza de cuerdas abierta.

Esperaríamos en particular una **repulsión** R-R por el hecho de que las 2 Dp's tienen cargas del

mismo signo bajo $C_{01\dots p}$, y una **atracción** NS-NS debido a la interacción gravitacional/dilatónica.

El hecho de que $M_{c^2}^{(0)} = 0$ indica que la repulsión R-R se cancela (incluso para estados masivos) con la atracción NS-NS, de modo que las Dp-branas paralelas NO ejercen ninguna fuerza neta una sobre la otra. Esto es consecuencia de la condición BPS: $M_{TOT} = Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 = M_1 + M_2$, por lo que no puede existir una energía potencial.

(Para un sistema $Dp-\bar{D}p$, donde no se presenta ninguna simetría, la contribución del sector R-R tiene el signo contrario, y se suma \therefore al sector NS-NS para dar una atracción neta.)

De hecho $M_2(y)$ diverge cuando $y \rightarrow l_c$, porque aparece un taquión en el espectro de cuerdas abiertas.

Ver [Banker, Susskind, hep-th/9511194].)

Quedámonos solo con las trazas sin $(-1)^F$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{2t} \text{Tr}_0(e^{-2\pi t \hat{H}_0}) \text{Tr}_x(e^{-2\pi t \hat{H}_x}) \left[\frac{1}{2} \text{Tr}_{NS} (e^{-2\pi t \hat{H}_\psi}) - \frac{1}{2} \text{Tr}_K (e^{-2\pi t \hat{H}_\psi}) \right] \\ &= 2 \sqrt{V_{p+1}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{2t} (8\pi^2 \alpha' t)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{ty^2}{2\pi \alpha'}} \eta(it)^{-d} \left[\frac{1}{2} \frac{\Theta_3(0|it)^4}{\eta(it)^4} - \frac{1}{2} \frac{\Theta_2(0|it)^4}{\eta(it)^4} \right] \end{aligned}$$

Esto incluye todavía la contribución de todos los modos de cuerdas cerradas (= todos los modos de cuerdas abiertas).

Para aislar la contribución de los modos no masivos, recordemos que dan la contribución dominante en el límite $s \equiv \frac{\pi}{t} \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow 0$), que corresponde propagación de la cuerda cerrada a través de una gran distancia. (Todos los modos de cuerdas abiertas contribuyen a este límite. Los modos no masivos de cuerdas abiertas dan la contribución dominante en el límite opuesto $t \rightarrow \infty$ ($s \rightarrow 0$).)

Usando

$$\eta(it) = t^{-1/2} \eta(i/t), \quad \Theta_3(0|it) = t^{-1/2} \Theta_3(0|i/t),$$

$$\Theta_2(it) = t^{-1/2} \Theta_4(i/t), \quad \Theta_4(0|it) = t^{-1/2} \Theta_2(0|i/t),$$

y cambiando la variable de integración $t \rightarrow s = \pi/t$,

$$M = \int_{NS-NR} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \left(\frac{8\pi^3}{s} \right)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\alpha s}} \left(\frac{\pi}{s} \right)^4 \eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^{-8} \frac{1}{2} \left[\frac{\Theta_3(0|\frac{is}{\pi})^4}{\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^4} - \frac{\Theta_4(0|\frac{is}{\pi})^4}{\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^4} \right].$$

Cuando $s \rightarrow \infty$ tenemos $q \equiv e^{-2s} \ll 1$ y \therefore

$$\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^{-8} = \left[q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \right]^{-8} = q^{-1/3} [1 + 8q + \mathcal{O}(q^2)],$$

$$\frac{\Theta_3(0|\frac{is}{\pi})^4}{\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^4} = q^{-1/6} \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{n-1/2}) \right]^8 = q^{-1/6} [1 + 8q^{1/2} + \mathcal{O}(q)],$$

$$\frac{\Theta_4(0|\frac{is}{\pi})^4}{\eta\left(\frac{is}{\pi}\right)^4} = q^{-1/6} \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n-1/2}) \right]^8 = q^{-1/6} [1 - 8q^{1/2} + \mathcal{O}(q)],$$

así que

$$\eta^{-8} \left(\frac{\Theta_3^4}{\eta^4} - \frac{\Theta_4^4}{\eta^4} \right) = q^{-1/3} [1 + \mathcal{O}(q)] \underbrace{q^{-1/6} [1 + 8q^{1/2} - 1 + 8q^{1/2} + \mathcal{O}(q)]}_{16q^{1/2}}$$

$$= 16 + \mathcal{O}(q),$$

de modo que

$$M_{NS-NS} = V_{p+1} \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left(\frac{8\pi^3}{s} \right)^{-\frac{p+1}{2}} e^{-\frac{y^2}{2s}} \left(\frac{\pi}{s} \right)^4 \left[0 \cdot e^s + \delta + \delta(e^{-s}) \right]$$

taquión \nearrow \uparrow modos no masivos \nwarrow modos con $m^2 = 2/\alpha'$

Separando la contribución de los modos no masivos, y reescribiendo la integral usando $T \equiv \alpha' s$, tenemos

$$M_{NS-NS}^{m^2=0} = V_{p+1} \delta(8\pi^2 \alpha')^{-\frac{p+1}{2}} (\pi \alpha')^4 \int_0^\infty dT T^{-\left(\frac{q-p}{2}\right)} e^{-y^2/2T}$$

} completar
cuadrado

$$\int_0^\infty dT \int \frac{d^{q-p} k}{(2\pi)^{\frac{q-p}{2}}} e^{-\frac{T}{2} k^2 + ik \cdot y}$$

$$(2\pi)^{\frac{q-p}{2}} 2 \int \frac{d^{q-p} k}{(2\pi)^{q-p}} \frac{e^{ik \cdot y}}{k^2},$$

} $\Delta_{q-p}(y)$

es decir,

$$M_{NS-NS}^{m^2=0}(y) = V_{p+1} (2\pi)^{7-2p} \alpha'^{3p} \Delta_{q-p}(y).$$

Igualando a resultados en campos, $2\kappa^2 \tau_p^2 V_{p+1} \Delta_{q-p}(y)$,

concluimos finalmente que

$$\tau_p = \frac{\sqrt{\pi}}{k} (2\pi l_c)^{3-p},$$

o, recordando nuestra convención

$$g_c \equiv \frac{\tau_{F1}}{\tau_{D1}} = \frac{1/2\pi l_c^2}{\sqrt{\pi}(2\pi)^2 l_c^2 / k} = \frac{k}{\sqrt{\pi}(2\pi)^3 l_c^4}$$

(es decir, $2k^2 \equiv (2\pi)^7 g_c^2 l_c^8$),

$$\tau_p = \frac{1}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}}$$

Este es justamente el valor que habíamos deducido antes, con lo cual verificamos la consistencia con dualidad T y el hecho de que una D_p -brana porta el cuanto mínimo de carga. ✓

Ya que estamos en el tema de la normalización de los acoplamientos, conviene notar que, con este valor para τ_p , la acción efectiva para N Dp-branas (S_{DBIN_A}) se reduce a bajar energías a super-Yang-Mills (con 16 supersimetrías) en $p+1$ dimensiones (que se puede entender como la reducción dimensional de SYM $N=1$ en $9+1$ dim),

$$S_{\text{SYM}} = \frac{1}{4g_{\text{YM}}^2} \int d^{p+1}x \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \text{fermiones},$$

↑ incluye A_μ, Φ_i

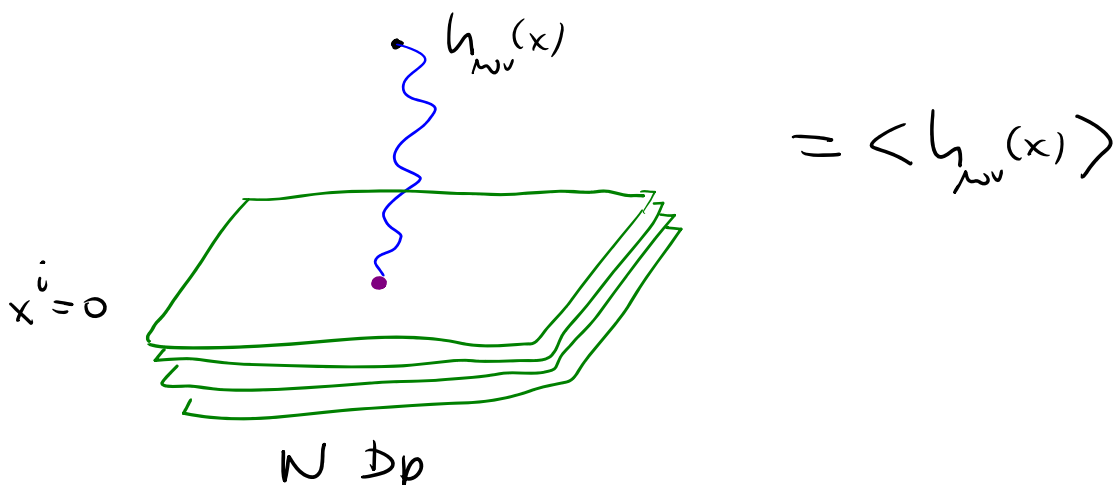
con $g_{\text{YM}}^2 = (2\pi)^{p-2} g_c^2 l_c^{p-3}$

El caso más familiar (p.ej. por QCD) es $p=3$, donde $[g_{\text{YM}}^2] = M^0$. Esta teoría (SYM $N=4$ $U(N)$ en $3+1$ dim) resulta ser invariante conforme aún a nivel cuántico ($\beta_{g_{\text{YM}}} = 0$, a diferencia de QCD). Para $p \leq 3$ acoplamiento dimensional $g_{\text{YM}}^2 E^{p-3} \rightarrow \infty$ en $E \rightarrow \infty$ super-renormalizable no renormalizable.

Puesto que sabemos que una Dp-brana es fuente del campo gravitacional (+ dilatónico + R-R), esperaríamos que una colección de $N \gg 1$ Dp-branas deforme el espacio de manera apreciable (notar que por ser BPS, podemos simplemente apilar un número arbitrario de Dp-branas paralelas).

Bajo condiciones apropiadas (que detallaremos más adelante), deberíamos entonces poder describir este fondo curvo como una solución de las eqs. de movimiento de supergravedad.

Podemos deducir la forma asintótica de los campos a partir de nuestra cuenta previa:



Tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle h_{\alpha\beta}(x) \rangle &= - \int d^D x' \frac{1}{2} T^{\mu\nu}(x') \left[2K^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik \cdot (x-x')}}{k^2} \mathcal{D}_{\mu\nu\alpha\beta} \right] \\
 &= - \frac{1}{2} 2K^2 N \tau_p \int d^D x' \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik_{\parallel} \cdot (x-x')} e^{ik_{\perp} \cdot (x-0)}}{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2} \hat{\eta}^{\mu\nu} \mathcal{D}_{\mu\nu\alpha\beta} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\Delta_{q-p}(x_{\perp})} \underbrace{\hspace{10em}}_{\hat{\eta}^{\mu\nu} \left(2\eta_{\mu\alpha}\eta_{\nu\beta} - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\eta_{\alpha\beta} \right)} \\
 &\hspace{15em} [2 - \frac{1}{4}(p+1)] \eta_{\alpha\beta}
 \end{aligned}$$

así que

$$\langle h_{\alpha\beta}(x) \rangle = 2K^2 N \tau_p \left(\frac{p-7}{8} \right) \Delta_{q-p}(x_{\perp}) .$$

Usando

$$\Delta_D(x) \equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2} = 2^{-2} \pi^{-D/2} \Gamma\left(\frac{D-2}{2}\right) \frac{1}{x^{D-2}} ,$$

$$2K^2 = (2\pi)^7 g_c^2 l_c^8 \quad \text{y} \quad \tau_p = \frac{1}{(2\pi)^p g_c l_c^{p+1}} , \text{ esto es}$$

$$\begin{aligned}
 \langle h_{\alpha\beta}(x) \rangle &= \left(\frac{p-7}{8} \right) \underbrace{(4\pi)^{\frac{5-p}{2}} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right) N g_c l_c^{7-p}}_{\equiv C_p} \underbrace{\frac{1}{x_{\perp}^{7-p}}}_{\equiv \frac{1}{r^{7-p}}} \eta_{\alpha\beta} . \\
 &\hspace{10em} \underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv R^{7-p}}
 \end{aligned}$$

De manera similar

$$\begin{aligned} \langle h_{ij}(x) \rangle &= -\frac{1}{2} 2K^2 N \tau_p \Delta_{9-p}(x_\perp) \underbrace{\hat{\eta}^{\mu\nu} \left[2\eta_{\mu i} \eta_{\nu j} - \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} \eta_{ij} \right]}_{O - \frac{1}{4}(p+1)} \\ &= \left(\frac{p+1}{8}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x) \rangle &= -2K^2 \tau_p \left(\frac{p-3}{4}\right) \Delta_{9-p}(x_\perp) \\ &= \left(\frac{3-p}{4}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p} \end{aligned}$$

Para $r \gg R$ tenemos entonces

$$\begin{aligned} ds_E^2 &= \left[1 + \left(\frac{p-7}{8}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p} \right] \underbrace{(-dx_0^2 + \dots + dx_p^2)}_{\equiv dx_{||}^2} \\ &\quad + \left[1 + \left(\frac{p+1}{8}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p} \right] \underbrace{(dx_{p+1}^2 + \dots + dx_9^2)}_{\equiv dx_\perp^2} \\ &= dx_{||}^2 + r^2 dx_\perp^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2 \end{aligned}$$

y

$$\Phi(r) = \underbrace{\Phi_0}_{\ln g_c} + \underbrace{\left(\frac{3-p}{4}\right) \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p}}_{\equiv \varphi(r)}$$

La solución correspondiente de las ecs. de supergravedad
 $\forall r$ resulta ser

$$ds_E^2 = A(r)^{\frac{p-7}{3}} dx_{||}^2 + A(r)^{\frac{p+1}{3}} dx_{\perp}^2$$

$$e^{\frac{\Phi}{\alpha}} = g_c A(r)^{\frac{3-p}{4}}$$

$$C_{01\dots p} = | - A(r)^{-1} |$$

p-brana negra extrema
 (con carga R^{-2})

[Hobowitz, Strominger '91]

$$\text{con } A(r) \equiv 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^{7-p}$$

función armónica en
 espacio transversal

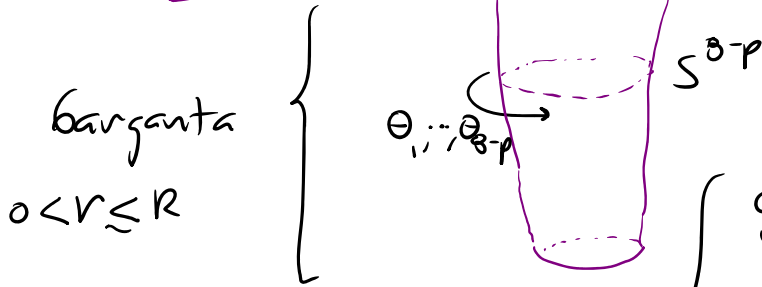
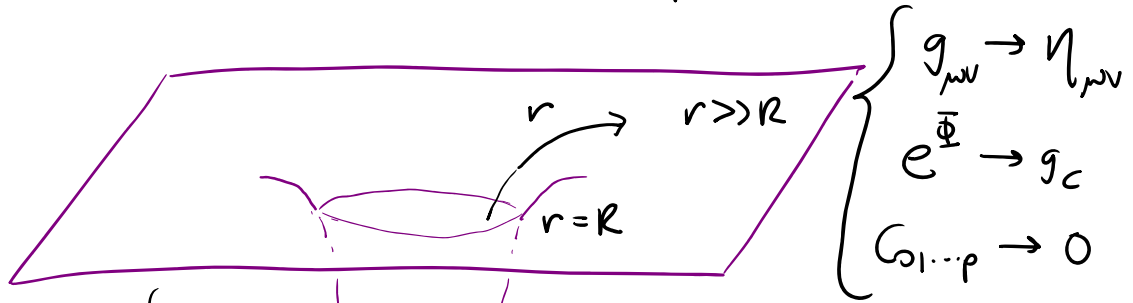
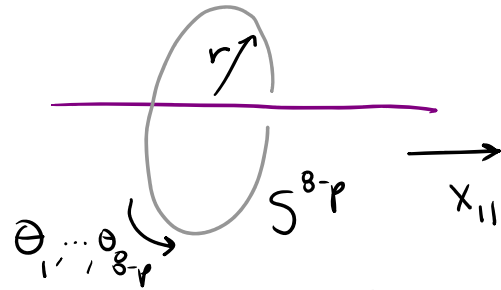
Es más habitual dar la métrica en el marco de cuerdas:

$$ds_c^2 = e^{\frac{\Phi}{2}} ds_E^2 = A^{-1/2} dx_{||}^2 + A^{1/2} dx_{\perp}^2$$

Como esperaríamos, esta solución es BPS, y preserva 16
 supersimetrías globales (Y de hecho, resulta más fácil
 determinarla a partir de las condiciones BPS

$$\left. \begin{aligned} \delta \chi_m &= (\mathbb{D}_m + \dots) \epsilon(r) = 0 \\ \delta \lambda &= (\dots) \epsilon(r) = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \epsilon(r) &= f(r) \begin{pmatrix} \eta \\ \tilde{\eta} \end{pmatrix} \\ \tilde{\eta} &= \Gamma^{0\dots p} \eta \end{aligned} .$$

La geometría es estática, y análoga a un agujero negro cargado asintóticamente plano:



$$\begin{cases}
 g^{rr} \rightarrow 0 : \text{horizonte (área=0)} \\
 g_{tt} \rightarrow 0 : \text{superficie de límite estacionario} \\
 R \sim r^{\frac{3-p}{2}} \rightarrow \begin{cases} \infty & p > 3 \\ \text{cte.} & p = 3 \\ 0 & p < 3 \end{cases} \\
 \leftarrow \text{Ricci} \\
 e^{\Phi} \sim g_c r^{-\frac{(7-p)(3-p)}{4}} \rightarrow \begin{cases} 0 & p > 3 \\ \text{cte} & p = 3 \\ \infty & p < 3 \end{cases}
 \end{cases}$$

Recordar que supergravedad es apenas una aproximación a la acción efectiva de cuerdas, válida cuando

- 1) la curvatura es pequeña (para suprimir correcciones del tipo $\alpha' R^2$) y

2) la constante de acoplamiento $g_c e^{\varphi} \ll 1$ (para suprimir correcciones debidas a hojas de mundo con género $m \geq 1$)

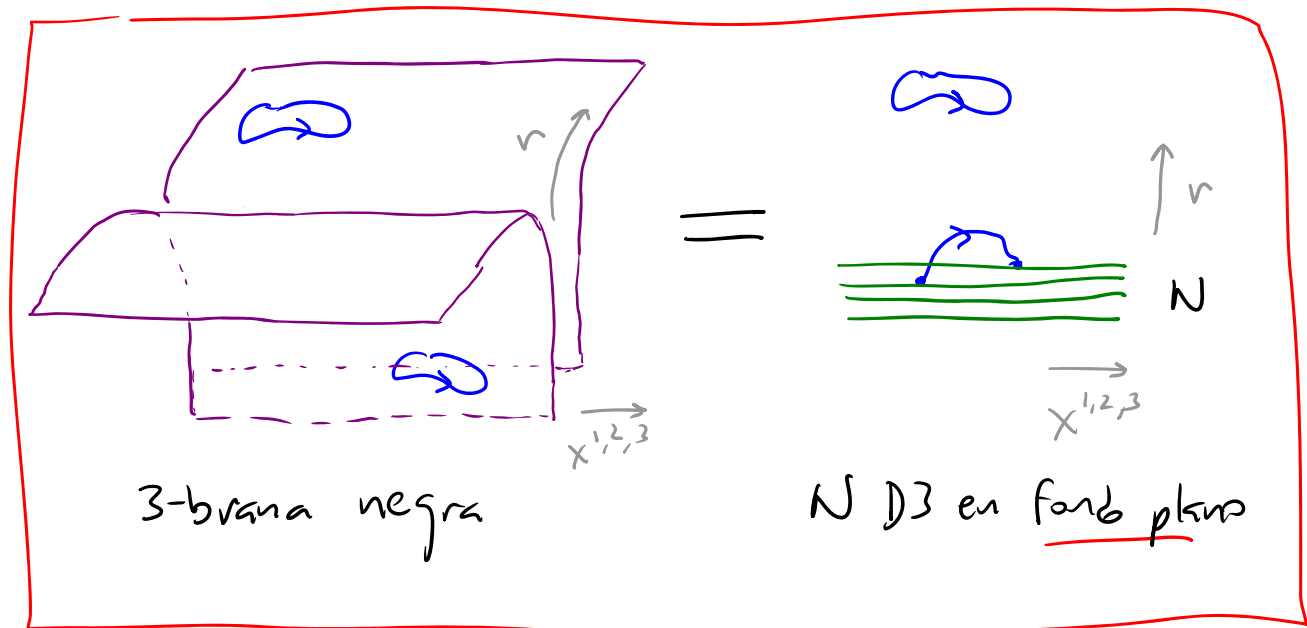
La p -brana negra extrema cumple con el primer requisito $\forall r$ si $p \leq 3$ y $R \gg l_c \iff g_c N \gg 1$ y satisface el segundo requisito $\forall r$ si $p \geq 3$ y $g_c \ll 1$.

Vemos entonces que solo la solución con $p=3$ es completamente confiable $\forall r$ si $g_c N \gg 1$, $g_c \ll 1$ (los casos con $p \neq 3$ sufren algún tipo de corrección en $r \rightarrow \infty$ ó en $r \rightarrow 0$ aún cuando $g_c N \gg 1$, $g_c \ll 1$).

Y notemos ahora algo muy curioso: en esta solución confiable $\forall r$, la 3-brana negra extrema, la geometría es completamente suave (si $g_c N \gg 1$), y se puede extender en la región detrás del horizonte para obtener un espaciotiempo geodésicamente completo [ver hep-th/9405124].
 ¡¡ No queda \therefore rastro alguno de la fuerza de los campos !!

¿cómo queda entonces la pila de N D3-branas??

La interpretación moderna es que la 3-brana negra extremal y la pila de D3-branas sin excitar dan descripciones alternativas del mismo sistema físico, es decir, tenemos una **dualidad** (cuya forma precisa e incluso existencia es algo controvertida):



Esta dualidad se puede poner a prueba comparando cantidades calculadas en las 2 descripciones; pero existe una limitación importante: del lado izquierdo, la descripción con el modelo sigma no lineal es perturbativa solo si $g_c N \gg 1$ (de otra manera habría que sumar todas las

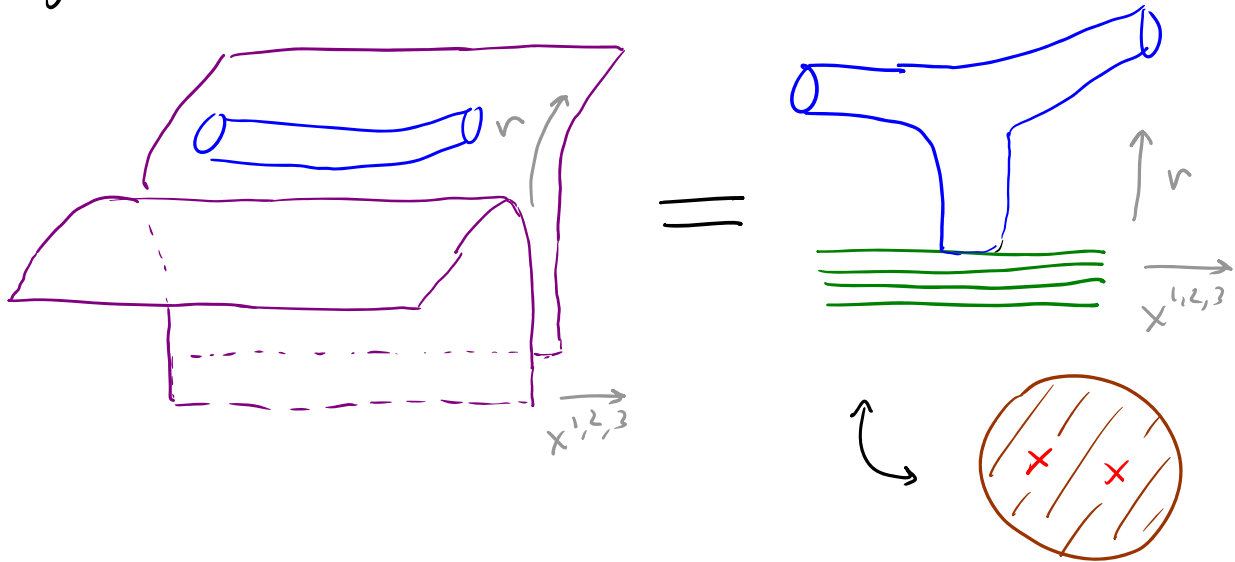
correcciones en α'), mientras que la descripción en el lado derecho es perturbativa solo si $g_c N \ll 1$ (de otra manera habría que sumar sobre hojas de mundo con un número arbitrario de agujeros).

Así que, de entrada, solo tenemos control cuantitativo sobre estas 2 descripciones en regímenes mutuamente excluyentes. (Existe un problema técnico adicional: incluso cuando $g_c N \gg 1$, del lado izquierdo no tenemos una buena descripción perturbativa, por el hecho de que el fondo incluye un campo $R-R$, cuyo operador de vértice $R-R$ crea un gongte en la hoja de mundo, ocasionando que el modelo sigma no lineal no esté bien definido en el formalismo RNS [ver sin embargo hep-th/9904104, 0307032 para RNS, hep-th/9805028 para GS, hep-th/0411170 para B].)

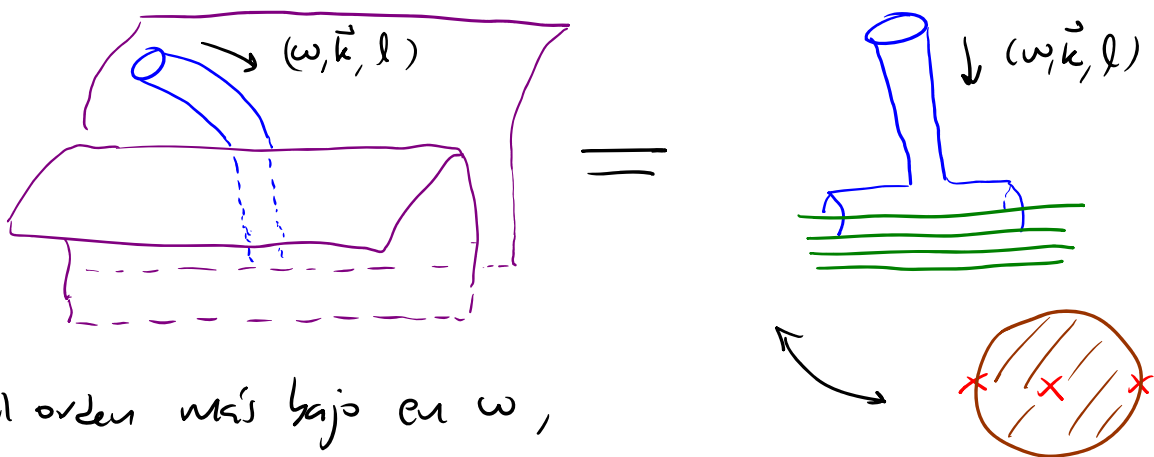
En general resulta difícil entonces comparar cálculos realizados en los 2 lenguajes.

A pesar de esto, algunas comparaciones funcionan.

P.ej., la amplitud de dispersión de cuerda cerrada



en el límite de baja transferencia de momento
(es decir, $r \gg R$) [ver hep-th/9510200, 9601057, 9603194],
y la amplitud de absorción para ondas parciales de dilatación

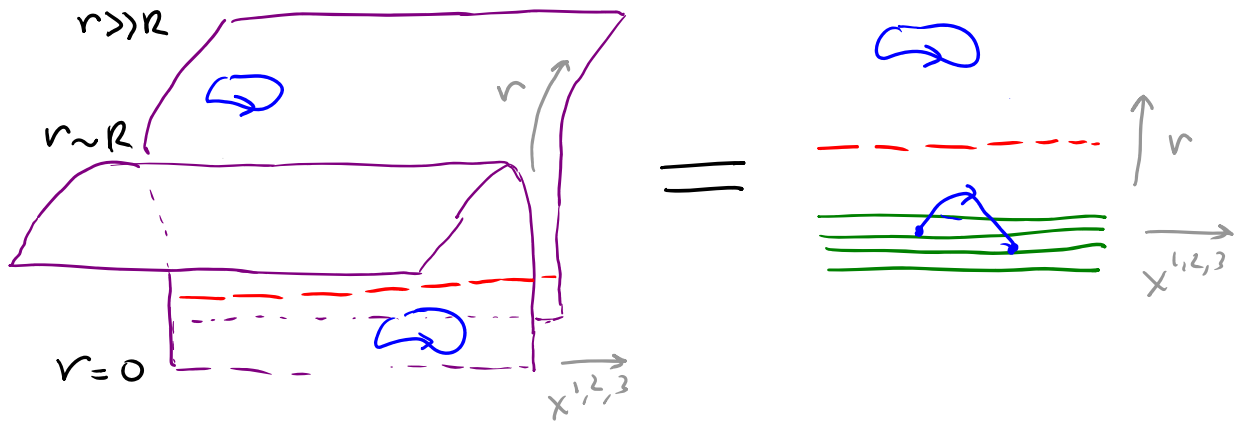


al orden más bajo en ω ,

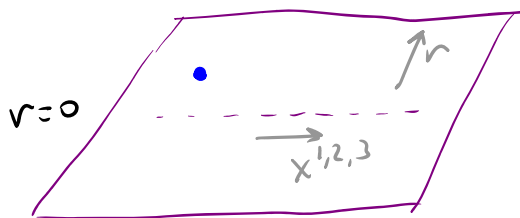
$$\sigma_{\varphi}^{(l)} = \frac{\pi^4}{24} \frac{(l+3)(l+1)}{[(l+1)!]^4} \left(\frac{\omega R}{2}\right)^{4l} \omega^3 R^8$$

[ver hep-th/9611214, 9702076, 9905174].

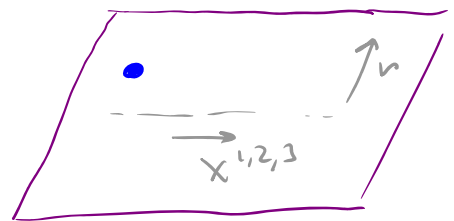
Notar que a bajas energías, $\omega \ll \frac{1}{R}$, en ambas descripciones las branas se desacoplan del "bulto":



Y de hecho, si $g_c N \gg 1$ tenemos $R \gg l_c$ así que estamos en el régimen $\omega \ll \frac{1}{R} \ll \frac{1}{l_c}$ (límite de Maldacena: $\omega R \rightarrow 0$ con $g_c N \gg 1$ fijo), donde las 2 descripciones se simplifican a



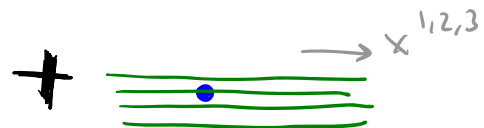
Supergravedad IIB en Fondo Plano (9+1 dim)



Supergravedad IIB en Fondo Plano (9+1 dim)



Cuerdas IIB en Fondo Cercano al Horizonte (9+1 dim)



Super-Yang-Mills $N=4$ (SU(N)) (3+1 dim)

El fondo cercano al horizonte resulta de reemplazar

$$A(r) = 1 + \left(\frac{R}{r}\right)^4 \xrightarrow{r \ll R} \left(\frac{R}{r}\right)^4 .$$

La geometría es

$$ds_c^2 = ds_E^2 = \underbrace{\frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2)}_{\text{anti-de Sitter } 4+1 \text{ dim}} + \underbrace{\frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2}_{\text{esfera 5-dim}} \\ \text{con radio de curvatura } R \quad \text{con radio } R$$

(espaciotiempo máximamente simétrico

con constante cosmológica negativa $\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2}$)

el dilatación es constante, y tenemos N unidades de flujo Ramond-Ramond a través de la 5-esfera.

La conclusión es entonces que, como un caso límite de la dualidad entre la 3-brana negra y una pila de D3-branas, tenemos la equivalencia aún más sorprendente

$$\text{ii } \left[\begin{array}{l} \text{Teoría de Cuerdas IIB} \\ \text{en } \text{AdS}_5 \times S^5 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Super-Yang-Mills } N=4 \\ \text{SU(N) en } 3+1 \text{ dim} \end{array} \right] \text{ !!}$$

[Maldacena '97, ver peq. compendio hep-th/9905111]

Dado que en el lado derecho tenemos una teoría cuántica de campos completamente convencional (y en particular, no gravitacional), que está bien definida a cualquier escala energética (es incluso invariante conforme), esta dualidad norma/gravedad o correspondencia AdS/CFT nos presenta por primera vez con una definición no perturbativa de la teoría de cuerdas IIB! Notar que los distintos estados que podemos considerar del lado izquierdo no están restringidos a pequeñas fluctuaciones del fondo — podemos considerar, p.ej. un agujero negro dentro de AdS_5 , y a través de la dualidad tendremos una descripción alternativa en términos de la teoría de norma. La única restricción que nos impone la elección de SYM $N=4$ como teoría de norma específica es que los fondos accesibles deben ser asintóticamente $AdS_5 \times S^5$.

Es posible argumentar de manera similar para obtener una dualidad en el caso de Dp-branas con $p \neq 3$, aunque la situación ahí es más complicada por el hecho de que el fondo de branas negras correspondiente no es confiable para toda r [ver hep-th/9802042, 9807137].

Regresando a la discusión general de las soluciones de brana negra, vale la pena señalar que se conoce también solución que describe a una pila de N Dp-branas excitadas, con una densidad de energía (adicional a su tensión) distribuida uniformemente en las direcciones longitudinales, la **p-brana negra no extrema**!

$$ds_c^2 = A^{-1/2} [-f dx_0^2 + dx_1^2 + \dots + dx_p^2] + A^{1/2} \left[\frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega_{8-p}^2 \right]$$

$$e^{\Phi} = g_c A^{\frac{3-p}{4}} \quad C_{0\dots p} = \coth \gamma [1 - A^{-1}]$$

$$\text{con } A = 1 + \tanh \gamma \left(\frac{R}{r} \right)^{7-p}$$

$$R^{7-p} \equiv c_p N g_c l_c^{7-p}$$

$$f = 1 - \left(\frac{r_h}{r} \right)^{7-p}$$

$$\sinh^2 \gamma \equiv \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{R}{r_h} \right)^{2(7-p)}} - \frac{1}{2}$$

Esta geometría tiene 2 horizontes, en $r=r_h$ y $r=0$ (similar al agujero negro Reissner-Nordström, es decir, Schwarzschild + carga eléctrica).

Sabemos que el álgebra de supersimetría implica la cota BPS $M \geq Q$ (que en términos de la brana negra se relaciona con la ausencia de una singularidad desnuda — 'censura cósmica').

Dado que la geometría es asintóticamente plana, existe una definición natural de su masa (= energía total, ya que el sistema está en reposo), a partir del comportamiento asintótico de la métrica:

$$g_{\infty}^E \xrightarrow{r \rightarrow \infty} -1 + \frac{2k^2}{(d-2)\Omega_{d-2-p}} \frac{M}{V_p r^{d-3-p}} \quad \text{ADM} \\ \text{(Arnowitt, Deser, Misner)}$$

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \quad \text{volumen de } S^d$$

$$\Rightarrow M = \frac{\tau_p V_p}{c_p g_c} \left(\frac{r_h}{l_c}\right)^{7-p} \left[\cosh^2 \gamma + \frac{1}{7-p} \right]$$

$$c_p \equiv (2\sqrt{\pi})^{5-p} \Gamma\left(\frac{7-p}{2}\right)$$

La carga R-R, por otro lado, puede calcularse usando la ley de Gauss como habíamos visto antes:

$$\frac{Q}{V_p} = \frac{1}{2K^2} \int_{S^{d-p}} *G_{(p+2)}$$

← resultado es independiente del radio de S^{d-p}

$$\Rightarrow Q = \frac{\tau_p V_p}{c_p g_c} \left(\frac{r_h}{l_c} \right)^{7-p} \sinh \gamma \cosh \gamma$$

(es precisamente a partir de este resultado y la condición de cuantización $Q = N \tau_p V_p$ que hemos

identificado $N = \frac{1}{c_p g_c} \left(\frac{r_h}{l_c} \right)^{7-p} \sinh \gamma \cosh \gamma$

$$\longleftrightarrow \sinh^2 \gamma = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{R}{r_h} \right)^{2(7-p)} - \frac{1}{2}}.$$

Es fácil verificar que $\cosh^2 \gamma + \frac{1}{7-p} \geq \sinh \gamma \cosh \gamma$, así que efectivamente tenemos $M \geq Q$. Para lograr saturar la desigualdad BPS debemos tomar $\gamma \rightarrow \infty$, $r_h \rightarrow 0$ con $r_h^{7-p} \sinh^2 \gamma = R^{7-p}$ fijo, en cuyo caso recuperamos

La solución extremal, con $M = N \tau_p V_p$, justo como una pila de N Dp-branas. El límite opuesto $\gamma \rightarrow 0$ con r_h fija resulta en una p-brana negra neutra, que equivale a un agujero negro de Schwarzschild en $10-p$ dim ($\times T^p$). Es importante resaltar que, justo como un agujero negro, las branas negras tienen propiedades termodinámicas.

Concretamente, poseen una entropía de Bekenstein-Hawking

$$S_{BH} \equiv \frac{A_h^E}{4G_N} = \frac{\Omega_{8-p}}{4G_N} V_p r_h^{8-p} \cosh \gamma$$

y una temperatura de Hawking [ver p.ej. Birrell, Davies]

$$T_H \equiv \frac{\text{Gravedad superficial}}{2\pi} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial g_{tt}/\partial r}{\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}} \right) \Big|_{r=r_h} = \frac{7-p}{4\pi r_h \cosh \gamma}$$

Vemos que $T_H \rightarrow 0$ en el límite extremal, como esperaríamos dado que la solución BPS es estable y no puede radiar. Y en este límite tenemos también $S_{BH} \rightarrow 0$, como esperaríamos en base a la descripción alternativa en términos de Dp-branas, dado que existe 1 solo estado de las N D-branas sin excitar.

Por cierto que, para el caso extremal, el requisito $\partial_{\perp}^2 A = 0$ permite también una solución multicentrada

$$A(\vec{x}_{\perp}) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{C_p g_c N_k l_c^{7-p}}{|\vec{x}_{\perp} - \vec{y}_k|^{7-p}},$$

que corresponde a un sistema con n pilas de D_p -branas, con N_k de ellas en $\vec{x}_{\perp} = \vec{y}_k$. La razón física por la cual esto es posible es por supuesto el hecho de que no existe fuerza entre objetos BPS del mismo tipo.

Otra generalización es considerar soluciones con más de un tipo de carga. Para ello curiosamente basta con 'superponer' las funciones armónicas correspondientes. P.ej., para el sistema $D_p - D_{(p+4)}$,

$$ds_c^2 = A_p^{-1/2} A_{p+4}^{-1/2} (-dx_0^2 + \dots + dx_p^2) + A_p^{1/2} A_{p+4}^{-1/2} (dx_{p+1}^2 + \dots + dx_{p+4}^2) \\ + A_p^{1/2} A_{p+4}^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_{4-p}^2)$$

$$e^{\Phi} = g_c A_p^{\frac{3-p}{4}} A_{p+4}^{-\frac{p+1}{4}}, \quad C_{01\dots p} = 1 - A_p^{-1}, \quad C_{01\dots p+4} = 1 - A_{p+4}^{-1}$$

Notar que en este caso ambas funciones armónicas dependen solo de la coordenada radial en el espacio $(5-p)$ -dimensional ortogonal a las $D(p+4)$ -branas, es decir, las Dp 's no están localizadas, sino esparcidas uniformemente en x^{p+1}, \dots, x^{p+4} .

Un caso particularmente interesante es el sistema D1-D5, donde si compactificamos la dirección x^1 y agregamos N_{KK} unidades de momento p_1 como una tercera carga, obtenemos una 5-brana negra cuya masa

$$M = N_1 \tau_1 V_1 + N_5 \tau_5 V_{12345} + \frac{N_{KK}}{(V_1/2\pi)}$$

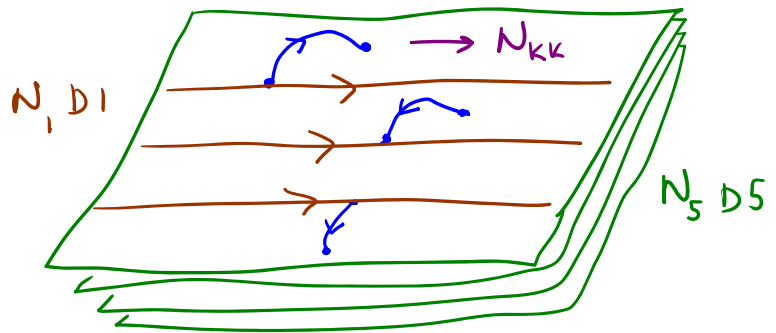
satura la desigualdad BPS correspondiente y es por tanto extremal, a pesar de lo cual tiene un área de horizonte finita, que se traduce en una entropía

$$S_{BH} = 2\pi \sqrt{N_1 N_5 N_{KK}}$$

Este resultado es confiable si $g_c N_1, g_c N_5, g_c N_{KK} \gg 1$ (y $V_1, (V_{12345})^{1/5} \gg l_c$). Pero debe que $\exp(S_{BH})$ cuenta el número total de estados que tienen las

Cargas dadas, y los estados en cuestión son BPS y por tanto absolutamente estables, debe ser posible reproducir este mismo resultado aún en el régimen $g_c N_1, g_c N_5, g_c N_{KK} \ll 1$, donde la descripción en términos de N_1 D1-branas, N_5 D5-branas, y un cierto número de cuerdas D1-D5 que portan momento $p_1^{(2)} = \frac{n_2}{(V_1/2\pi)} > 0$ es perturbativa.

Y efectivamente, al hacer el conteo de estados microscópicos en la teoría de cuerdas correspondiente se encuentran



$$S_{\text{micro}} = 2\pi \sqrt{N_1 N_5 N_{KK}} \quad \checkmark$$

[Strominger, Vafa '96; ver hep-th/9607235, 0203048].

En algunos casos casi-extremales, los resultados posibles también obtener un acuerdo perfecto $S_{\text{micro}}(g_c N \ll 1) = S_{\text{BH}}(g N \gg 1)$. Más en general, aún cuando el cálculo microscópico no esté completamente bajo control, se puede verificar

que existe un acuerdo cualitativo del tipo (esquemático)

$$S_{\text{micro}}(\int_c N \sim 1) \sim S_{\text{BH}}(\int_c N \sim 1),$$

conocido como principio de correspondencia

[Hornowitz, Polchinski '96; ver hep-th/9712253, 0008241].

Regresando a la discusión general, para completar nuestro repertorio de branas negras básicas [ver 9412184, 9611203, 9701088], es importante señalar que se conoce también la solución que corresponde a una pila de cuerdas fundamentales extendidas a lo largo de la dirección x^1 ,

$$ds_c^2 = A_{F1}^{-1} [-dx_0^2 + dx_1^2] + dr^2 + r^2 d\Omega_7^2$$

$$e^{\Phi} = g_c A_{F1}^{-1/2}, \quad B_{01} = 1 - A_{F1}^{-1}$$

Cuerda Negra

[Dabholkar,
Harvey '89]

$$\text{con } A_{F1}(r) = 1 + \left(\frac{R_{F1}}{r}\right)^6, \quad R_{F1}^6 \equiv 32\pi^2 N g_c^2 l_c^6$$

que es BPS y tiene $M = N T_{F1} V_1$ con $T_{F1} = \frac{1}{2\pi l_c^2}$.

En este caso hay una singularidad en $r=0$: las ecu. de mov. se satisfacen con una $\delta(r)$ como fuente.

Y se conoce también la contraparte magnética, que describe a un conjunto de NS5-branas apiladas,

$$ds_c^2 = -dx_0^2 + \dots + dx_5^2 + A_{NS5} [dr^2 + r^2 d\Omega_3^2]$$

$$e^{\Phi} = g_c A_{NS5}^{1/2}$$

$$B_{012345} = 1 - A_{NS5}^{-1}$$

5-brana Negra

[Calkin, Harvey,

Strominger;

Duff, Lu 191]

con $A_{NS5}(r) = 1 + \left(\frac{R_{NS5}}{r}\right)^2$, $R_{NS5}^2 \equiv N l_c^2$.

Esta solución también es BPS, y tiene

$$M = N T_{NS5} V_5, \quad \text{con} \quad T_{NS5} = \frac{1}{(2\pi)^5 g_c^2 l_c^6}.$$

Esta solución tiene una garganta infinita (medida con ds_c^2) cuya sección transversal es una S^3 con radio $\xrightarrow{r \rightarrow 0} R$, y a lo largo de la cual $g_c e^{\Phi} \propto r^{-1} \rightarrow \infty$.

A partir de un análisis de fluctuaciones (modos normalizados) alrededor de la 5-brana negra, se pueden deducir los grados de libertad que residen en el volumen de mundo de NS5:

$$\begin{cases} X^i(x^\alpha), A_\alpha(x^\alpha) + \text{superparejas} & \text{en IIB} \\ X^i(x^\alpha), A_{\alpha\beta}^+(x^\alpha) + \text{superparejas} & \text{en IIA} \end{cases}.$$

2. Dualidad y Teoría M

Dualidad \equiv equivalencia no trivial entre 2 teorías

Hasta ahora hemos visto 2 ejemplos:

- Dualidad T, donde es posible tener

$g_c \ll 1 \xleftrightarrow{T} g_{c_T} \ll 1$, lo cual permite verificar la dualidad directamente en la expansión perturbativa.

- Dualidad Norma/Gravedad, donde si bien

$$g_c \ll 1 \longleftrightarrow g_{YM}^2 \ll 1, \text{ sabemos que los}$$

los regímenes perturbativos son mutuamente excluyentes:

$$g_c N \ll 1 \Rightarrow \text{acoplamiento fuerte en hoja de mundo de la cuerda}$$

$$g_c N \gg 1 \Rightarrow \text{acoplamiento fuerte en teoría de normas.}$$

En lo que resta del curso argumentaremos que existen también dualidades tales que

$$g_c \ll 1 \xleftrightarrow{S} g'_c \gg 1$$

Dualidad S

(de 'strong coupling')

Claramente estas dualidades resultan (como ADS/CFT) más difíciles de verificar, pero de existir serían extremadamente útiles, puesto que nos permitirían entender el comportamiento de una teoría fuertemente acoplada empleando una descripción alternativa que es débilmente acoplada!

Analizaremos esta posibilidad para cada una de las 5 teorías de supercuerdas en $\mathcal{D}+1$ dimensiones. ¿Cómo proceder? La observación clave es que estas teorías preservan tantas supersimetrías (≥ 16) que la acción efectiva para sus campos no masivos está determinada de manera única por la supersimetría (y el contenido de campos). La acción efectiva calculada a nivel árbol es por tanto exacta — no puede recibir correcciones cuánticas. Cualquier posible dualidad del tipo antes mencionado debe ser entonces visible en las propias acciones efectivas.

Consideremos primero la acción efectiva de cuerdas IIB
(\rightarrow supergravedad IIB). La parte bosónica es

$$S_{\text{IIB}} = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^{10}x \left\{ \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left[R + 4(\partial_{\mu}\Phi)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} H_{(3)}^2 \right] \quad \text{NS-NS} \right. \\ \left. + \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} G_{(1)}^2 - \frac{1}{2 \cdot 3!} \overset{\vee}{G}_{(3)}^2 - \frac{1}{2 \cdot 5!} \overset{\vee}{G}_{(5)}^2 \right] \quad \text{R-R} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} C_{(4)} \wedge H_{(3)} \wedge G_{(3)} \right\} \quad \text{'Chern-Simons'}$$

donde

$$\overset{\vee}{G}_{(3)} \equiv G_{(3)} - C_{(0)} \wedge H_{(3)}$$

$$\overset{\vee}{G}_{(5)} \equiv G_{(5)} - \frac{1}{2} C_{(2)} \wedge H_{(3)} + \frac{1}{2} B_{(2)} \wedge G_{(3)} \quad (\text{con } G_{(p+2)} \equiv dG_{(p+1)})$$

son intensidades de campo invariantes bajo las diversas transformaciones de norma (análogas a $\tilde{F}_{(2)} \equiv F_{(2)} + B_{(2)}$ en la acción de Born-Infeld), y debemos recordar

imponer a mano la restricción de auto dualidad

$$*\overset{\vee}{G}_{(5)} = \overset{\vee}{G}_{(5)} \quad \text{a nivel de las ecs. de mov.}$$

Esta acción es invariante bajo un grupo de transformaciones

$SL(2, \mathbb{R})$ que mezclan Φ con $C_{(0)}$, $H_{(3)}$ con $G_{(3)}$, y

dejan invariante a $\check{G}_{(5)}$ y a $\check{g}_{E,\mu\nu} \equiv e^{-\Phi/2} g_{\mu\nu}$.

Agrupando

$$\lambda \equiv C_{(0)} + i e^{-\Phi}, \quad F_{(3)} \equiv \begin{bmatrix} H_{(3)} \\ G_{(3)} \end{bmatrix},$$

y definimos $\Lambda \equiv \frac{1}{\text{Im} \lambda} \begin{bmatrix} |\lambda|^2 & -\text{Re} \lambda \\ -\text{Re} \lambda & 1 \end{bmatrix}$,

podemos reescribir

$$S_{\text{IIB}} = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^10x \left\{ \sqrt{-g_E} \left[R_E - \frac{\partial_\mu \bar{\lambda} \partial^\mu \lambda}{2(\text{Im} \lambda)^2} - \frac{1}{2 \cdot 3!} F_{(3)}^i \Lambda_{ij} F_{(3)}^j \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4 \cdot 5!} \check{G}_{(5)}^2 - \frac{1}{4} \epsilon_{ij} C_{(4)} \wedge F_{(3)}^i \wedge F_{(3)}^j \right] \right\},$$

donde encontramos invariancia bajo

$$\lambda' = \frac{a\lambda + b}{c\lambda + d} \iff \Lambda' = (M^{-1})^T \Lambda M^{-1} \text{ con } M \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}),$$

$$F'_{(3)} = M F_{(3)},$$

$$\check{G}'_{(5)} = \check{G}_{(5)}, \quad \check{g}'_{E,\mu\nu} = \check{g}_{E,\mu\nu}$$

¿Será entonces $SL(2, \mathbb{R})$ una simetría de la teoría de cuerdas IIB?

Recordar que la cuerda fundamental porta carga

bajo $B_{(2)}$: número de enrollamiento $e \in \mathbb{Z}$.

Actuando con $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, una cuerda con $e=1$

se convertirá en un objeto con cargas (a, c) bajo $(B_{(2)}, C_{(2)})$,

\therefore debemos tener $a, c \in \mathbb{Z}$.

El grupo máximo que pudiera ser simetría de la teoría de cuerdas II B es entonces $SL(2, \mathbb{Z}) \subset SL(2, \mathbb{R})$

[Hull, Townsend '94]. Este grupo incluye en particular

a $S \equiv \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, cuyo efecto es

$$\lambda' = -\frac{1}{\lambda}, \quad H'_{(3)} = -G_{(3)}, \quad G'_{(3)} = H_{(3)}$$

si $C_{(0)} = 0$,
esto es $\Phi' = -\Phi$

$$\Rightarrow \boxed{g'_c = 1/g_c}$$

$$\Rightarrow B_{(2)} \leftrightarrow C_{(2)} \Rightarrow \boxed{F1 \leftrightarrow D1}$$

Notar que $T_{F1} = \frac{1}{2\pi\alpha_c^2}$ y $T_{D1} = \frac{1}{2\pi g_c \alpha_c^2}$

medidas en el marco de Einstein son

$$T_{F1}^{(E)} = \frac{\sqrt{g_c}}{2\pi\alpha_c^2} \xleftrightarrow{S} T_{D1}^{(E)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{g_c}\alpha_c^2} \quad \checkmark$$

Cuando $g_c \ll 1$ tenemos $T_{FI} \ll T_{DI}$, pero

para $g_c \gg 1$, $T_{DI} \ll T_{FI}$.

Si S es en verdad una simetría (autodualidad)

de la teoría IIB completa, entonces al cuantizar

a la D1-brana cuando $g_c \gg 1$ obtendríamos exactamente

el mismo espectro que dedujimos al cuantizar a la FI

débilmente acoplada (y a la inversa, el espectro de FI

para $g_c \gg 1$ coincidiría con el espectro de DI para $g_c \ll 1$).

Más en general, si el grupo $SL(2, \mathbb{Z})$ completo es una

simetría, obtendremos una familia infinita de predicciones

para el espectro no perturbativo de la teoría IIB.

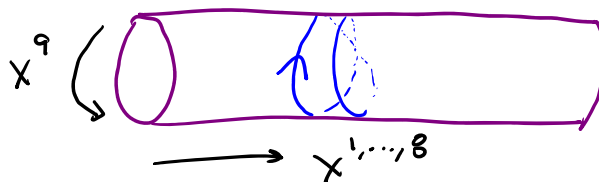
No podemos verificarlas para el espectro completo

(no sabemos calcular cuando $g_c \gg 1$); pero sí para los

estados que son BPS.

Consideremos una cuerda fundamental IIB en

$$M^{8,1} \times S^1_R$$



Definiendo $P_I^{\tilde{q}} = \frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'}$, $P_D^{\tilde{q}} = \frac{n}{R} - \frac{eR}{\alpha'}$,

Sabemos que cuando $g_c \ll 1$ el espectro está dado por

$$M^2 = P_I^2 + \frac{4}{\alpha'} (N + A)$$

podemos restringir al sector R_+
por supersimetría NS dando
los mismos resultados

$$= P_D^2 + \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} + \tilde{A})$$

con la condición de empataamiento de niveles

$$N + A - \tilde{N} - \tilde{A} = ne .$$

Si $N=0$, entonces $m = |P_I^{\tilde{q}}| = \left| \frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'} \right|$ (y $\tilde{N} = -ne$).

A partir de $\{Q, \bar{Q}\} = -P_I^m \Gamma_m$ podemos deducir

que estos estados son invariantes bajo $1/4$ de las

supersimetrías : aquellas descritas por $\eta = \pm \Gamma^{09} \eta$.

Análogamente , los estados en $\tilde{N}=0$ ← signados

tienen $m = |P_D^{\tilde{q}}| = \left| \frac{n}{R} - \frac{eR}{\alpha'} \right|$ (y $N = ne$),

y son invariantes bajo las 8 supersimetrías $\tilde{\eta} = \pm \Gamma^{09} \tilde{\eta}$.

En ambos casos los estados forman parte de **multipletes**

Grutas , con $2^{(32-8)/2} = 16 \cdot 256$ estados.

Por otro lado, si $N = \tilde{N} = 0$, entonces

$$m = \frac{|n|}{R}, \quad e = 0 \quad \text{ó} \quad m = \frac{|e|R}{\alpha'}, \quad n = 0,$$

y los estados son invariantes bajo $1/2$ de las supersimetrías, formando por tanto parte de multipletes ultracortos, con $2^{(32-16)/2} = 256$ estados.

Vimos antes que en la teoría IIB tenemos un total de

$$\begin{matrix} N_S & R & \tilde{N}_S & \tilde{R} \\ (8+8) & \times & (8+8) & = 256 \text{ estados físicos en } N = \tilde{N} = 0, \end{matrix}$$

es decir, un solo multiplete ultracorto para cada valor de e (con $n=0$), o cada valor de n (con $e=0$).

En particular, para $n=0, e=1$



tenemos 256 estados con

$$m = \frac{R}{\alpha'} \quad \longleftrightarrow \quad m_E = \frac{R\sqrt{g_c}}{\alpha'}, \quad \text{que portan carga}$$

$e_{F1} = 1$ bajo B_{NS} y $e_{D1} = 0$ bajo C_{NS} .

Una transformación arbitraria $\begin{pmatrix} p & r \\ \tilde{p} & \tilde{r} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$

modifica las cargas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} p \\ \tilde{p} \end{pmatrix}$, con $p\tilde{r} - \tilde{p}r = 1$,

y cambia

$$\lambda \equiv C_{(0)} + i e^{-\frac{\Phi}{f}} = 0 + \frac{i}{g_c} \rightarrow \lambda' = \frac{p\lambda + r}{f\lambda + s},$$

$$\text{es decir, } g_c' = \frac{f^2}{g_c} + s^2 g_c, \quad C_{(0)}' = \frac{p f + s r g_c^2}{f^2 + s^2 g_c^2}.$$

Los nuevos estados deben estar presentes en el espectro de la teoría cuando el acoplamiento y el escalar RR toman estos valores (notar que en general $g_c' \gg 1$), pero como en BPS, y \therefore estables, deben estar allí también para otros valores de los 'módulos' (parámetros) de la teoría, y en particular para $g_c \ll 1$, $C_{(0)} = 0$.
Tenemos entonces la siguiente

Predicción: $\forall p, f$ primos relativos, \exists un único multiplete ultracorto (256 estados) en carga $\begin{pmatrix} p \\ f \end{pmatrix}$ bajo $\begin{pmatrix} B_{\mu\nu} \\ C_{\mu\nu} \end{pmatrix}$, número de KK $n=0$ y masa $m_E = \frac{R}{\alpha' \sqrt{\text{Im} \lambda}} |p - f\lambda|$.

De manera similar, considerando los estados de la cuerda fundamental con $n > 0, e=1, \tilde{N}=0$ ($\Rightarrow N=n$)
 ó $n < 0, e=1, N=0$ ($\Rightarrow \tilde{N}=-n$)
 encontramos una segunda

Predicción: $\forall p, q, n$ con $n \neq 0$ y p, q primos relativos,
 $\exists d_n$ multipletes cortos (16·256 estados) con cargas

$\begin{pmatrix} p \\ q \\ n \end{pmatrix}$ bajo $\begin{pmatrix} B_{nq} \\ C_{nq} \\ g_{nq} \end{pmatrix}$, donde d_n está dado por

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n q^n = \frac{1}{16} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^n}{1-q^n} \right)^8 \quad (\text{p.ej.}, d_1=1, d_2=9, d_3=60).$$

se deduce a partir de función de partición

Para intentar verificar estas predicciones, consideremos primero los estados con $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $n=0$.

El candidato obvio es

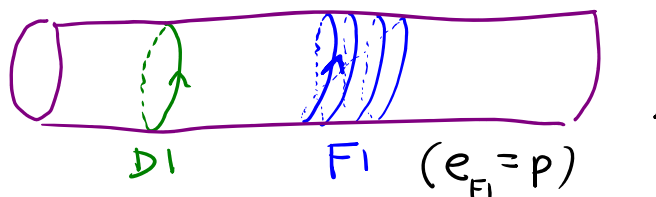
simplemente una D1-brana:



Sabemos que D1 sin excitar preserva 16 supersimetrías,

y da lugar por tanto precisamente a 1 multiplete ultracorto (256 estados). ✓

Ahora, ¿cómo podemos obtener estados con cargas $(p, 1)$? La configuración obvia sería



Tiene las cargas correctas, pero su masa total

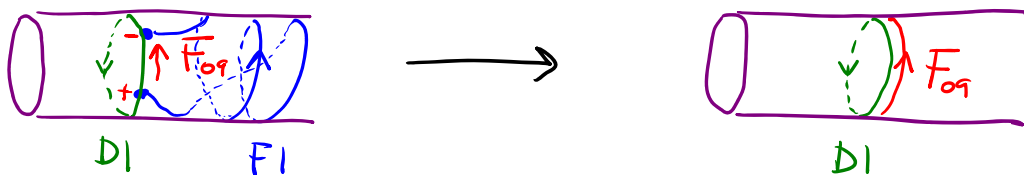
$$(p \tau_{F1} + \tau_{D1}) 2\pi R = (p + \frac{1}{g_c}) \frac{R}{\lambda_c^2}$$

no satura la desigualdad BPS correspondiente,

$$m_{p,1} \geq \sqrt{q_{F1}^2 + q_{D1}^2} = \sqrt{(p \tau_{F1})^2 + (1 \tau_{D1})^2} (2\pi R),$$

lo cual sugiere que este estado podría ser inestable.

Y efectivamente, el sistema reduce su energía cuando la cuerda fundamental se rompe y se desarrolla:



La configuración final es una D1 que porta flujo eléctrico, con $F_{09} = \text{cte.}$ por la ec. de mov.

¿Cómo es que este proceso no viola la conservación de la carga q_{F1} ? El punto es que a partir de

$$S_{\text{DBI}} = -T_{\text{D1}} \int dx^0 dx^9 \sqrt{1 - (B_{09} + 2\pi\alpha' F_{09})^2}$$

tenemos

$$\left. \frac{\delta S_{\text{DBI}}}{\delta B_{09}} \right|_{B_{09}=0} = \frac{1}{2\pi\alpha' g_c} \frac{2\pi\alpha' F_{09}}{\sqrt{1 - (2\pi\alpha' F_{09})^2}}$$

de modo que la D1 con $F_{09} \neq 0$ porta justamente esta densidad de carga bajo B_{09} . Notar que

esta expresión coincide con $\frac{1}{2\pi\alpha'} \Pi_{A_9} \equiv \frac{\delta S_{\text{DBI}}}{\delta (2\pi\alpha' F_{09})}$, que

obedece la regla de cuantización $\Pi_{A_9} 2\pi R = \frac{p}{\frac{1}{2\pi R}}$

con $p \in \mathbb{Z}$, debido a la periodicidad

$$A_9 \simeq A'_9 \equiv A_9 + \frac{1}{R} \iff \exp\left[i \int dx^9 A_9\right] = \exp\left[i \int dx^9 A'_9\right].$$

En conjunto tenemos entonces $p = \frac{1}{g_c} \frac{2\pi\alpha' F_{09}}{\sqrt{1 - (2\pi\alpha' F_{09})^2}}$,

y reconocemos que la DI con $F_{09} \neq 0$ representa un estado ligado $1 D1 + p F1$,
cuya energía

$$\begin{aligned}
 m &= T_{D1} \int dx^9 \left[\frac{(2\pi\alpha' F_{09})^2}{\sqrt{1 - (2\pi\alpha' F_{09})^2}} + \sqrt{1 - (2\pi\alpha' F_{09})^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\alpha' g_c} (2\pi R) \frac{1}{\sqrt{1 - (2\pi\alpha' F_{09})^2}} \\
 &= (2\pi R) \sqrt{\left(\frac{1}{2\pi\alpha' g_c}\right)^2 + \left(\frac{p}{2\pi\alpha'}\right)^2}
 \end{aligned}$$

satura la desigualdad BPS.

(Notar que esto es análogo al sistema

$D2$ con flujo magnético = estado ligado $D2 + D0$,

y de hecho, ambos sistemas son equivalentes si

en verdad la teoría IIB es S^1 -autódual:

$$\left(\begin{array}{ccc}
 D2: 012 & \xrightarrow{T_9} & D3: 0129 \\
 D0: 0xx & & D1: 0xx9
 \end{array} \xrightarrow{S^1} \begin{array}{ccc}
 D3: 0129 & \xrightarrow{T_{12}} & D1: 09 \\
 F1: 0xx9 & & F1: 09
 \end{array} \right)$$

Este estado ligado preserva 16 supersimetrías y por tanto forma parte de un múltiplete ultracorto. ✓

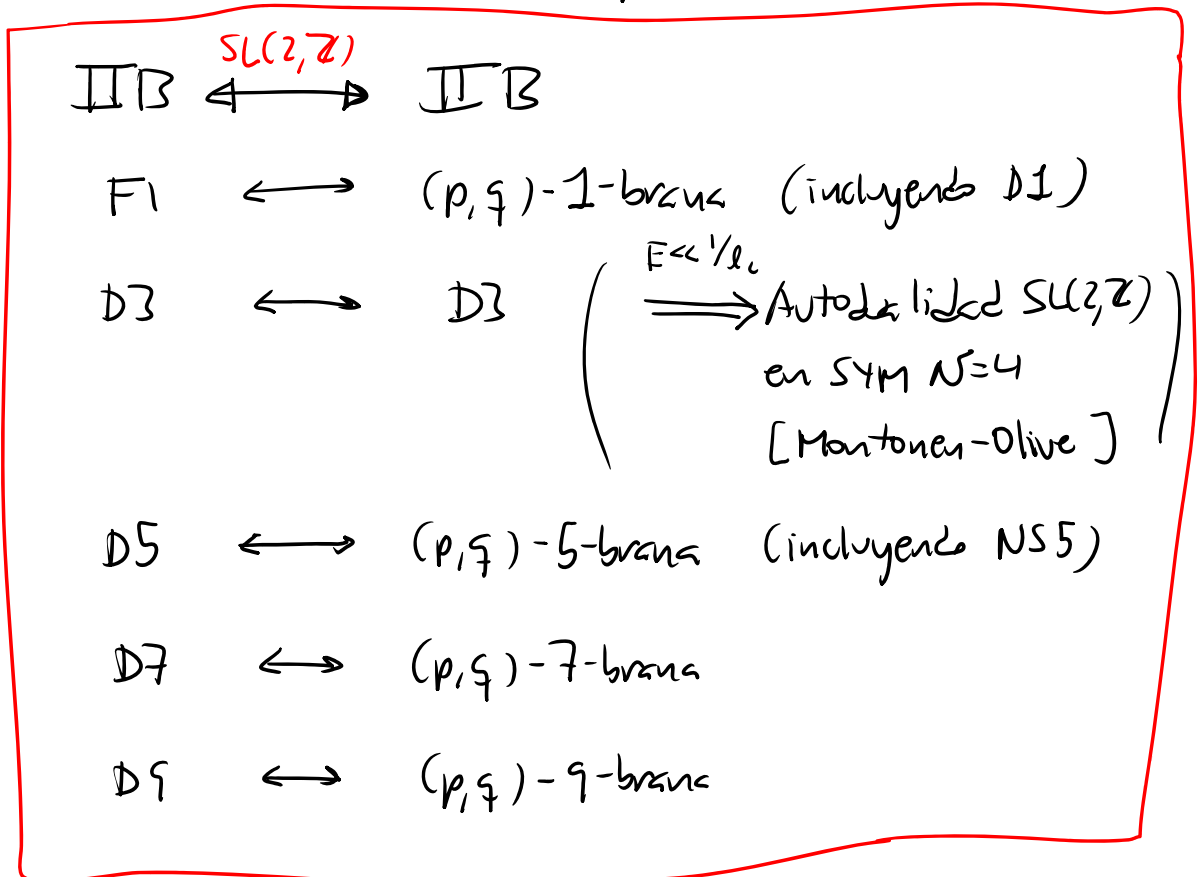
Para el caso $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ con $q > 1$, se requiere un análisis de la teoría $U(q) \simeq U(1) \times SU(q)$ en el sector con p unidades de flujo eléctrico.

La componente $U(1)$ tiene la información del centro de masa del sistema, mientras que la parte $SU(q)$ codifica los grados de libertad internos. Se puede mostrar que existe un estado ligado (\leftrightarrow vacío no degenerado de la teoría $SU(q)$, con una brecha de masa) ¡si y solo si p, q son primos relativos! [Witten '95] ✓

De manera similar, se puede verificar que existen múltipletes cortos para cada elección de $n \neq 0$, p, q primos relativos. Esto requiere un conteo de las distintas maneras de repartir las n unidades de momento entre los diversos modos de cuerdas abiertas que representan excitaciones del sistema de q D1 + p unidades

de flujo eléctrico. (Para obtener estados BPS, en el caso $n \geq 0$ nuevamente debemos excitar solo cuerdas con momento $p_q^{(l)} \geq 0$.) La respuesta resulta ser precisamente d_n . ✓

Tenemos entonces evidencia para la (auto-)dualidad



Y en particular, hemos aprendido con esto que

$$\text{II} \text{ IIB}(g_c) \xrightarrow{g_c \gg 1} \text{II} \text{ IIB}(g_c' \ll 1) !!$$

(Notar, sin embargo, que aún no entendemos $g_c \sim 1$.)

Al compactificar, se obtiene un grupo de dualidad más grande, $S + T \subset$ Dualidad U [Hull, Townsend '94]

¿Será posible encontrar un comportamiento análogo en otras teorías? Consideremos la teoría I, donde tenemos un grupo de norma $SO(32)$. La posibilidad más natural (aunque no única) sería que la hipotética descripción S -dual tuviera el mismo grupo de norma, en cuyo caso tenemos solo 2 candidatos:

$$I(g_c) \xrightarrow{g_c \gg 1} ? I(g_c \ll 1) \text{ ó } HO(g_c \ll 1)?$$

Y de hecho, se encuentra que las acciones efectivas de I y HO están relacionadas a través de la redefinición de campos

$$\Phi^{(I)} = -\Phi^{(HO)} \quad \Rightarrow \quad g_c^{(I)} = 1/g_c^{(HO)}$$

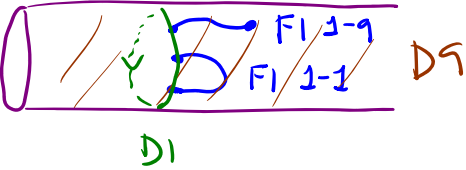
$$G_{(3)}^{(I)} = H_{(3)}^{(HO)} \quad \Rightarrow \quad D|_I \leftrightarrow F|_{HO}$$

$$g_{E\mu\nu}^{(I)} = g_{E\mu\nu}^{(HO)}, \quad A_{(1)}^{(I)} = A_{(1)}^{(HO)}.$$

Es natural entonces conjeturar que

$$I \xleftrightarrow{S'} HO \quad [\text{Witten, '95}]$$

En este caso nuevamente es posible mostrar que los estados BPS coinciden. En particular,

I:  tiene excitaciones no

masivas que coinciden exactamente con las de $F1_{HO}$.

Existe además evidencia de otros tipos.

Por ejemplo, notando que

$$\begin{array}{ccc} I \text{ en } M^{0,1} \times S^1 & \xleftrightarrow{S'} & HO \text{ en } M^{0,1} \times S^1 \\ \updownarrow T_9 & & \updownarrow T_9 \\ I' (=IA) \text{ en } M^{0,1} \times S^1 & & HE \text{ en } M^{0,1} \times S^1 \end{array}$$

y recordando que para ciertos valores de los módulos en HO/HE tenemos auto-dualidad T y ensanchamiento de la simetría de norma (aparición de vectores sin masa adicionales), esperaríamos observar estos mismos fenómenos en I/I' . Más aún, se puede mostrar

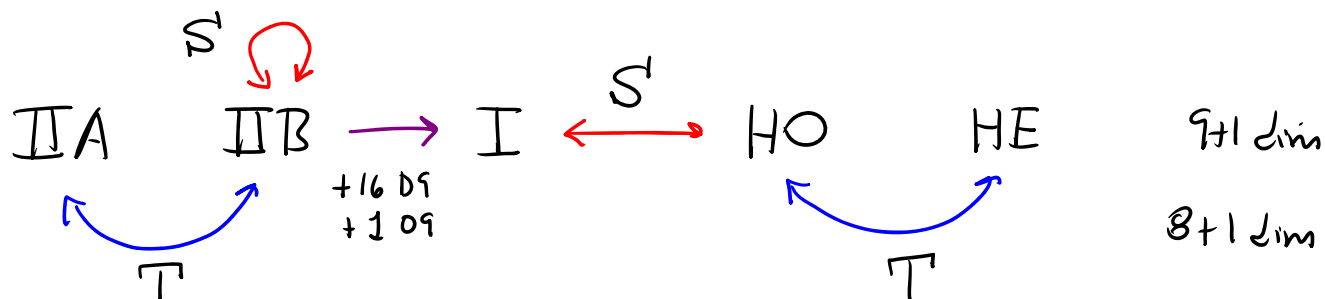
que esto sucede en particular en situaciones donde $g_c^{(I')} \ll 1$ y $R_9^{(I')} \gg l_c$, donde ingenuamente podríamos entender I' de manera perturbativa.

Pero en I/I' no encontramos estos fenómenos, ¡así que pareceríamos tener una contradicción seria!

El problema se evita milagrosamente: con un análisis más detallado, se encuentra que la expansión perturbativa no es válida en I' si $R^{(I')} > 1/g_c^{(I')}$, que es justo la región donde HO/HE tienen física exótica. Este milagro constituye entonces evidencia para la dualidad [Polchinski, Witten '95].

Otro ejemplo altamente no trivial es el hecho de que el estado espinorial bajo $SO(32)$ más ligero en el espectro de la cuerda fundamental Ho, que es estable a pesar de ser no BPS, aparece en I ¡como una D-brana no BPS! [Sen '98]

Con las dualidades que hemos descubierto hasta ahora, hemos conectado entre sí a las 5 teorías de supercuerdas:



(y ∞ un número infinito de nuevas "teorías", que se definen usando distintos arreglos de D-branas y/o Op-planos).

Hemos aprendido además como describir el comportamiento de IIB, I y HO cuando $g_c \gg 1$.

¿Qué podemos decir respecto a IIA y HE?

La acción efectiva de IIA es

$$S_{IIA} = \frac{1}{2\kappa_0^2} \int d^{10}x \left\{ \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left[R + 4\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2 \cdot 3!} H_{(3)}^2 \right] \right. \\ \left. + \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2 \cdot 2!} G_{(2)}^2 - \frac{1}{2 \cdot 4!} G_{(4)}^2 \right] - \frac{1}{2} B_{(2)} \wedge G_{(4)} \wedge G_{(4)} \right\} \quad \text{y } G_{(4)} \equiv G_{(4)} - C_{(1)} \wedge H_{(3)}$$

Esta acción no sugiere ninguna auto-dualidad ni conexión con alguna otra teoría de cuerdas.
 Lo que sí se sabe desde hace mucho es que se puede obtener como la reducción dimensional de una teoría de campos: **supergravedad en 10+1 dim.**

Esta teoría consiste de 3 campos no masivos

$$g_{MN}^{(11)}, A_{(3)} \leftrightarrow A_{MNP} \quad (F_{(4)} = dA_{(3)}), \quad \Psi_a^M \begin{matrix} \leftarrow (\mu, 10) \\ \leftarrow \text{espinor de } \text{so}(10,1) \end{matrix}$$

$$\text{rep } \text{so}(9): \underbrace{44 + 84}_{128 \text{ grados de libertad bosónicos}} \quad \underbrace{128}_{128 \text{ grados de libertad fermiónicos}}$$

tiene supersimetría $N=1$ en 10+1 dim (32 supercargas)

y está descrita por la acción (parte bosónica)

$$S_{11D} = \frac{1}{2\kappa_{11}^2} \int d^{11}x \left\{ \sqrt{-g^{(11)}} \left[R^{(11)} - \frac{1}{2 \cdot 4!} F_{(4)}^2 \right] - \frac{1}{3!} A_{(3)} \wedge F_{(4)} \wedge F_{(4)} \right\}$$

$$\equiv 16\pi G_N^{(11)} \equiv (2\pi)^9 \ell_p^{(11)9}$$

Compactificamos $x^{10} \simeq x^{10} + 2\pi R$ y haciendo la

reducción dimensional (\equiv tomando todos los campos independientes de x^{10} , lo cual se justifica dinámicamente para R pequeño), S_{11D} reproduce S_{IIA} si

identificamos $g_{MN}^{(11)} \rightarrow (g_{\mu\nu}, C_\nu, \Phi)$ a través de

$$ds^2 \equiv g_{MN}^{(11)} dx^M dx^N = e^{-\frac{2\Phi}{3}} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + e^{\frac{4\Phi}{3}} [dx^{10} + C_\nu dx^\nu]^2$$

y $A_{MNP} \rightarrow (C_{\mu\nu\rho}, B_{\mu\nu})$ a través de

$$C_{\mu\nu\rho} = A_{\mu\nu\rho 10}, \quad B_{\mu\nu} = A_{\mu\nu 10}$$

$$\frac{1}{2K^2} = \frac{2\pi R}{2K_{(11)}^2}$$