

(Si implementamos supersimetría en 2dim geométricamente generalizando hoja de mundo  $\rightarrow$  super-hoja de mundo,  
 $(z, \bar{z}) \rightarrow (z, \bar{z}; \theta, \bar{\theta})$   
 coords. fermiónicas

entonces  $V_{NS}^{(-1)}$  y  $V_{NS}^{(0)}$  forman parte de un solo  
'super campo'

$$V(z, \theta) = V_{NS}^{(-1)}(z) + \theta V_{NS}^{(0)}(z),$$

de tal forma que  $V_{NS}^{(-1)}(z) = V(z, \theta=0)$  es vértice fijo,  
 mientras que  $V_{NS}^{(0)}(z) = \int d\theta V(z, \theta).$

De manera similar, a  $u_s |s; k\rangle_R$  puede asociársele

$$V_R^{(-1/2)}(z) = u_s : \int_S e^{ik \cdot X} e^{-\phi/2} : \quad \text{"wadro } -1/2 \text{" } \circ$$

$$V_R^{(+1/2)}(z) = u_s (\Gamma_\mu)_{ss'} : \int_S (i\partial X^\mu + \frac{\alpha'}{2} k \cdot \psi \psi^\mu) e^{ik \cdot X} e^{+\phi/2} : ,$$

"wadro + 1/2"

que (si  $k_\mu \Gamma^\mu u = 0$ ) tiene también  $h=1$ .

Más en general, a partir de  $V^{(n_f)}$  se puede obtener  $V^{(n_f+1)}_{(0)} \equiv [Q_{\text{BRST}}, \xi V^{(n_f)}_{(0)}] = \{Q_{\text{BRST}}, \xi(0)\} V^{(n_f)}_{(0)}$

$\{Q_{\text{BRST}}, \xi(z)\}$  es el operador de cambio de retrato.

[Ver Polchinski Sec. 12.5 ; Friedan, Martinec, Shenker NPB 271 (1986), 93.]

La existencia de vértices en diferentes cuadros se vuelve importante al calcular amplitudes de dispersión, porque

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]} V_1^{(n_1)} V_2^{(n_2)} \dots \propto \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{D}\phi_0 e^{\phi_0 \chi} e^{n_1 \phi_0} e^{n_2 \phi_0} \dots$$

incluye  $-\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} Q\phi$

$\Rightarrow$  amplitud bien definida solo si

$$\sum_i n_i = n_1 + n_2 + \dots = -\chi = -2 + 2g + b + c \quad (= \sum_i \tilde{n}_i).$$

P.ej., en esfera ( $\chi=2$ ), para amplitud de 4 puntos

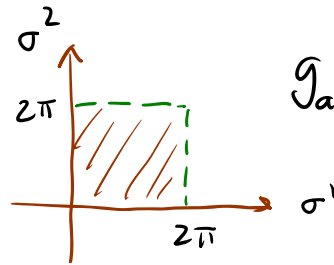
usamos vértices izquierdos  $V_{NS}^{(-1)} V_{NS}^{(-1)} V_{NS}^{(0)} V_{NS}^{(0)}$ ,

$V_R^{(-1/2)} V_R^{(-1/2)} V_{NS}^{(-1)} V_{NS}^{(0)}$ , etc.

11/05/06

## Invariancia Modular

Recordar que en toro  $T^2$



$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 + \tau_2^2 \end{pmatrix}$$

$\exists$  difeos grandes (no conectados a la identidad) que forman grupo modular  $SL(2, \mathbb{Z})$ , generado por

$$T: \left\{ \begin{array}{l} \sigma^1 \rightarrow \tilde{\sigma}^1 = \sigma^1 - \sigma^2 \\ \sigma^2 \rightarrow \tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 \end{array} \right. \Rightarrow \tau \simeq \tau + 1$$

$$S: \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma}^1 = \sigma^2 \\ \tilde{\sigma}^2 = -\sigma^1 \end{array} \right. \Rightarrow \tau \simeq -\frac{1}{\tau}$$

$$\left. \begin{array}{l} \tau \simeq \tilde{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \end{array} \right\}$$

Invariancia modular juega un papel clave en finitud UV y, más importante aún, unitariedad de la teoría.

Al calcular amplitudes de supercuerdas en  $T^2$ , debemos elegir "condiciones de borde" para  $\psi^w(\sigma^1, \sigma^2)$  a lo largo de  $\sigma^1$  y  $\sigma^2$ .

(Más en general, en variedad  $M$  debemos especificar estructura de espín:

relación entre  $\psi_{(\lambda)}^{(\sigma)}$  en distintas regiones  $A$ .

[Ver GSW Vol. II, Sec. 12.1 ] )



$\exists$  4 opciones :  $(\overset{\sigma^1}{+} \overset{\sigma^2}{+})$ ,  $(+-)$ ,  $(--)$ ,  $(-+)$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_R \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{NS}$

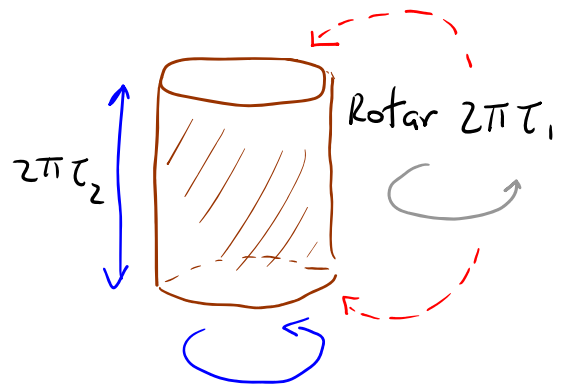
Bajo transformaciones modulares,

$$\begin{aligned}
 S, T : \quad & (++) \rightarrow (++) & (--) \rightarrow (--), (-+) \\
 & (+-) \rightarrow (-+), (+-) & (-+) \rightarrow (+-), (--)
 \end{aligned}$$

Así que, p.ej., si incluimos  $(+-)$  entonces debemos incluir también  $(-+)$  y  $(--)$  para que amplitudes a 1 lazo tengan oportunidad de ser invariantes modulares. Notar en particular que necesariamente incluiremos al menos un sector R izquierda (y uno derecho).

Analizaremos ahora el requisito de invariancia modular más de cerca ...

Recordar que amplitud de cero puntos en  $T^2(\tau)$  se puede calcular a través de una traza en formalismo Hamiltoniano:



$$\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)} = \text{Tr}_{H_{\perp}} \left[ (\pm 1)^F e^{-2\pi\tau_2 \hat{H} + 2\pi\tau_1 i \hat{P}} \right] \equiv \mathcal{Z}(\tau)$$

↑ dependiendo de si campos fermiónicos son { antiperiódicos / periódicos } en dirección  $\sigma^2$

Usar solo  $D-2$  osciladores transversales  $X^i$  y  $\psi^i$  (los otros 2 se cancelan con  $b, c$  y  $\beta, \gamma$ )

$$= (q\bar{q})^{-D/24} \text{Tr}_{H_{\perp}} \left[ (\pm 1)^F q^{L_0} \bar{q}^{\tilde{L}_0} \right], \quad q \equiv e^{2\pi i \tau}$$

Contribución de  $\psi^i(\sigma)$  con distintas estructuras de espín es

$$\mathcal{Z}_{(++)}^{\psi}(\tau) = \text{Tr}_R \left[ (-1)^F q^{H^{\psi}} \right], \quad \mathcal{Z}_{(+-)}^{\psi}(\tau) = \text{Tr}_R \left[ q^{H^{\psi}} \right],$$

$$\mathcal{Z}_{(-+)}^{\psi}(\tau) = \text{Tr}_{NS} \left[ (-1)^F q^{H^{\psi}} \right], \quad \mathcal{Z}_{(--)}^{\psi}(\tau) = \text{Tr}_{NS} \left[ q^{H^{\psi}} \right],$$

donde  $H^{\psi} \equiv \sum_{r>0} r \psi_{-r}^i \psi_r^i$

$+1/3$	$R$	$\leftarrow (D-2) (+1/24)$
$-1/6$	$NS$	$\leftarrow (D-2) (-1/48)$

Tenemos entonces

$$Z_{(- -)}^{\psi} = q^{-1/6} \left[ \prod_{r=1/2}^{\infty} (1+q^r) \right]^8 = \underbrace{\left\{ q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) \right\}^{-4}}_{\equiv \eta(\tau)} \underbrace{\left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) (1+q^{n-1/2})^2 \right\}^4}_{\equiv \Theta_3(0|\tau)^4}$$

Eta de  
Dedekind

Función Teta  
de Jacobi

$$Z_{(- +)}^{\psi} = -q^{-1/6} \left[ \prod_{r=1/2}^{\infty} (1-q^r) \right]^8 = -\eta(\tau)^{-4} \underbrace{\left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) (1-q^{n-1/2})^2 \right\}^4}_{\equiv \Theta_4(0|\tau)^4}$$

par  $(-1)^F$

$$Z_{(+ -)}^{\psi} = q^{1/3} \left[ \prod_{r=0}^{\infty} (1+q^r) \right]^8 = \eta(\tau)^{-4} \underbrace{\left\{ q^{1/8} (1+i) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) (1+q^n)^2 \right\}^4}_{\equiv \Theta_2(0|\tau)^4}$$

$$Z_{(++)}^{\psi} = -q^{1/3} \left[ \prod_{r=0}^{\infty} (1-q^r) \right]^8 = -\eta(\tau)^{-4} \underbrace{\left\{ q^{1/8} (1-i) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) (1-q^n)^2 \right\}^4}_{\equiv \Theta_1(0|\tau)^4}$$

par  $(-1)^F$

¿Cómo combinar para obtener invariancia modular?

$$\text{Usando } \eta(\tau+1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau), \quad \eta(-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \eta(\tau),$$

$$\theta_3(0|\tau+1) = \theta_4(0|\tau), \quad \theta_3(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \theta_3(0|\tau),$$

$$\theta_4(0|\tau+1) = \theta_3(0|\tau), \quad \theta_4(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \theta_2(0|\tau),$$

$$\theta_2(0|\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \theta_2(0|\tau), \quad \theta_2(0|-1/\tau) = (-i\tau)^{1/2} \theta_4(0|\tau),$$

$$\theta_1(0|\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \theta_1(0|\tau), \quad \theta_1(0|-1/\tau) = -i(-i\tau)^{1/2} \theta_1(0|\tau),$$

se puede verificar que es invariante la combinación

$$\begin{aligned} Z_{\text{TOT}}^{\Psi}(\tau) &\equiv \frac{1}{2} \left( Z_{(-)}^{\Psi} + Z_{(-+)}^{\Psi} - Z_{(+)}^{\Psi} + Z_{(++)}^{\Psi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \eta(\tau)^{-4} \left( \theta_3(0|\tau)^4 - \theta_4(0|\tau)^4 - \theta_2(0|\tau)^4 + \theta_1(0|\tau)^4 \right) \end{aligned}$$

(En realidad

$$Z_{\text{TOT}}^{\Psi}(\tau+1) = e^{4\pi i/3} Z_{\text{TOT}}^{\Psi}(\tau), \quad Z_{\text{TOT}}^{\Psi}(-1/\tau) = Z_{\text{TOT}}^{\Psi}(\tau),$$

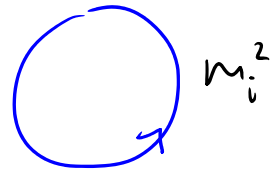
pero la fase se cancela al multiplicar por contribución

$$\text{de modos derechos } Z_{\text{TOT}}^{\Psi}(\bar{\tau}) = \left( Z_{\text{TOT}}^{\Psi}(\tau) \right)^* . )$$

Recordar que amplitud total es el toro

$$M_{T^2}^{(0)} \equiv \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_F \frac{d^2\tau}{4(\text{Im}\tau)^2} Z^X(\tau, \bar{\tau}) Z_{\text{TOT}}^\Psi(\tau) \tilde{Z}_{\text{TOT}}^\Psi(\bar{\tau})$$

se puede interpretar como suma sobre amplitud a un lazo para cada partícula en el espectro de la teoría libre:



$$M_{T^2}^{(0)} \sim \sum_i M_{S^1}^{(0)}(m_i^2) = \sum_i (-1)^{F_i} \int \frac{dT}{2T} (2\pi T)^{-5} e^{-m_i^2 T/2}$$

número fermiónico en el espaciotiempo

Vemos entonces que

$$Z_{\text{TOT}}^\Psi(\tau) = \frac{1}{2} (Z_{(-)}^\Psi + Z_{(-+)}^\Psi - Z_{(+)}^\Psi + Z_{(++)}^\Psi)$$

$$= \text{Tr}_{\text{NS}} \left[ \gamma^H \frac{1}{2} (1 + (-1)^F) \right] - \text{Tr}_{\text{R}} \left[ \gamma^H \frac{1}{2} (1 \pm (-1)^F) \right]$$

Proyección Gliozzi-Scherk-Olive (GSO)  $\Rightarrow$

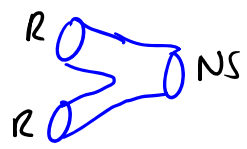
~~$$\text{NS}_\pm: |0; k\rangle_{\text{NS}}, \epsilon_{\mu\nu} \psi_{-\frac{1}{2}}^\mu |0; k\rangle_{\text{NS}}, (\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu + \epsilon_{\mu\nu} \psi_{-\frac{1}{2}}^\mu \psi_{-\frac{1}{2}}^\nu) |0; k\rangle_{\text{NS}}, \dots$$~~

$$\text{R}_\pm: u_s |s; k\rangle_{\text{R}} \text{ con } \Gamma u = \pm u, \dots$$



Si bien esto da invariancia modular, no es la única posibilidad. P.ej., también funciona

$$Z_{\text{tot}}^{\Psi}(\tau) = Z_{(++)}^{\Psi} = -\eta(\tau)^{-4} \Theta_1(0|\tau)^4 = \text{Tr}_R \left[ \eta^{H^{\Psi}} (-1)^F \right].$$

Pero la teoría No puede contener solo  $R_+$  y  $R_-$ , porque EPO  $V_R V_R \sim V_{NS} \Rightarrow$  interacción 

Una teoría de cuerdas consistente, además de ser invariante modular, debe poseer interacciones bien definidas: las EPOs deben

- Cerrar ( $\Delta: NS \times NS = NS = R \times R$ ,  $NS \times R = R = R \times NS$ ;  
 $(-1)^F: + \times + = + = - \times -$ ,  $+ \times - = - = - \times +$ )

y

- ser univaluadas (P.ej., en  $R_+ \times R_- = NS_-$  tenemos

$$\begin{aligned} &: e^{-\phi/2} e^{\frac{i}{2}\varphi_0} e^{\frac{i}{2}\varphi_1} \dots e^{\frac{i}{2}\varphi_4}(z) : e^{-\phi/2} e^{\frac{i}{2}\varphi_0} e^{\frac{i}{2}\varphi_1} \dots e^{\frac{i}{2}\varphi_3} e^{-\frac{i}{2}\varphi_4}(0) : \\ &= \underbrace{z^{-1/4} z^{1/4} z^{1/4} z^{1/4} z^{1/4} z^{-1/4}}_{\sqrt{z}} : e^{-\phi} e^{i\varphi_0} e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} e^{i\varphi_3}(0) : + \dots \end{aligned}$$

$\sqrt{z}$  corte que debe ser compensado por corte en modos derechos

Lo mismo sucede en  $R_+ \times NS_-$  y  $R_- \times NS_-$ , pero no en los demás productos. )

Las proyecciones GSO que encontramos arriba dan lugar a 2 teorías que satisfacen estos requisitos:

- II B: incluir sectores con  $(-1)^F = +1$ ,  $(-1)^{\tilde{F}} = +1$ ,  
 es decir,  $(NS_+, NS_+) \mid (R_+, R_+) \mid (R_+, NS_+) \mid (NS_+, R_+)$   
 $m^2=0$ :  $\varphi \ B_{(2)} \ h_{\mu\nu} \mid C_{(1)} \ C_{(2)} \ C_{(4)}^+ \mid \chi_{NS}^1 \ \lambda_S^1 \mid \chi_{NS}^2 \ \lambda_S^2$   
 rep de  $SO(8)$ :  $\underline{1} \ \underline{28} \ \underline{35} \mid \underline{1} \ \underline{28} \ \underline{35}_+ \mid \underline{56} \ \underline{8}' \mid \underline{56} \ \underline{8}'$

- II A: incluir sectores con  $(-1)^F = +1$ ,  $(-1)^{\tilde{F}} = \begin{cases} +1 & NS \\ -1 & R \end{cases}$ ,  
 es decir,  $(NS_+, NS_+) \mid (R_+, R_-) \mid (R_+, NS_+) \mid (NS_+, R_-)$   
 $m^2=0$ :  $\varphi \ B_{(2)} \ h_{\mu\nu} \mid C_{(1)} \ C_{(3)} \mid \chi_{NS}^1 \ \lambda_S^1 \mid \chi_{NS}^2 \ \lambda_S^2$   
 rep de  $SO(8)$ :  $\underline{1} \ \underline{28} \ \underline{35} \mid \underline{8}_V \ \underline{56}_6 \mid \underline{56} \ \underline{8}' \mid \underline{56}' \ \underline{8}$

! Ninguna de estas 2 teorías tiene tachibón! ✓

( $\Rightarrow$  Fondo  $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ,  $\Phi = \Phi_0$ ,  $B_{(2)} = \dots = 0$  es estable.)

Ambas teorías incluyen bosones y fermiones ✓

Notar que paridad en espaciotiempo

$$P: X^i \rightarrow -X^i, \quad \psi^i \rightarrow -\psi^i \quad \forall i=1, \dots, 9$$

$$\Rightarrow \Gamma^i \rightarrow -\Gamma^i, \quad \Gamma \rightarrow -\Gamma \quad \text{y} \quad \underline{8} \leftrightarrow \underline{8'}, \quad \underline{56} \leftrightarrow \underline{56'},$$

de modo que  $\text{IIA}$  es invariante bajo  $P$  (no quiral) y  $\text{IIB}$  es no invariante bajo  $P$  (quiral).

(Vemos también que la proyección  $G_{50}$

$$(-1)^F = (-1)^{\tilde{F}} = \begin{cases} +1 & \text{NS} \\ -1 & \text{R} \end{cases} \text{ da teoría equivalente a IIB,}$$

$$\text{y } (-1)^F = \begin{cases} +1 & \text{NS} \\ -1 & \text{R} \end{cases}, \quad (-1)^{\tilde{F}} = +1 \text{ es equivalente a IIA.}$$

11/8/05/06

Ambas teorías incluyen 2 gravitinos  $\chi^1, \chi^2$ ,

con sus correspondientes invariancias de norma

$$\chi^A(x) \simeq \chi^A(x) + \partial_\omega \tau^A(x) \quad A=1,2$$

↖ parámetro espinorial

que, por consistencia, deben reflejar simetrías de las teorías en conjunto.

↔ ¡ 2 supersimetrías locales en espaciotiempo!

Teorías con supersimetría  $N=2$  en  $D=10$

(por eso denominamos a estas teorías 'tipo II').

Las corrientes asociadas son

$$j_s(z) = e^{-\phi/2} j_s(z) \quad h = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1 \quad \checkmark$$

$$\text{y } \tilde{j}_s(\bar{z}) = e^{-\tilde{\phi}/2} \tilde{j}_s(\bar{z}) \quad \tilde{h} = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = 1, \quad \checkmark$$

y las cargas correspondientes

$$Q'_s \equiv Q_s \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} j_s(z), \quad Q^2_s \equiv \tilde{Q}_s \equiv \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \tilde{j}_s(\bar{z})$$

transforman como espinores bajo  $SO(9,1)$ :

son 32 **supercargas**  $\begin{cases} \underline{16} + \underline{16}' & \text{en IIA} \\ \underline{16} + \underline{16} & \text{en IIB} \end{cases}$

que satisfacen **superálgebra**  $\{Q, Q\} \sim P_\mu \Gamma^\mu$

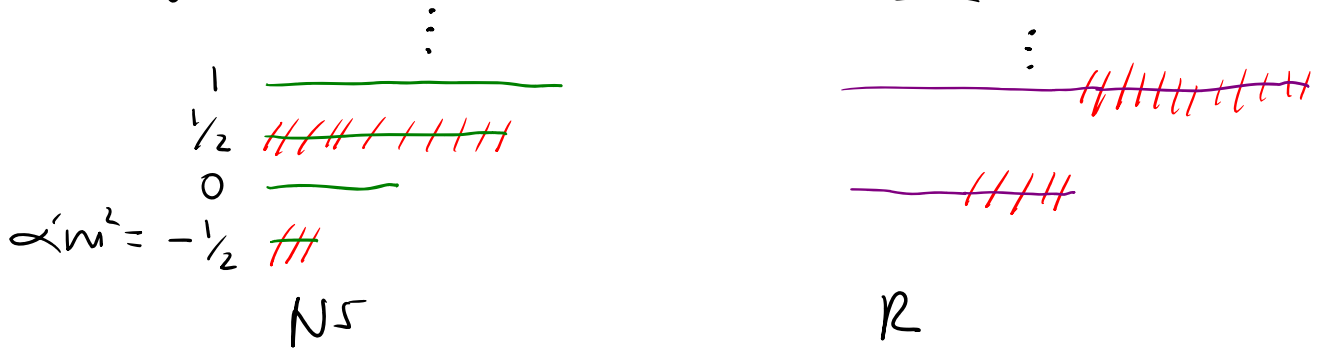
y convierten  $|bosón\rangle \leftrightarrow |fermión\rangle$

Se puede verificar que el espectro de ambas teorías es supersimétrico observando que

$$\chi_{\text{tot}}^{\psi}(\tau) = \frac{1}{2} \eta(\tau)^{-4} \left( \underbrace{\Theta_3(0|\tau)^4 - \Theta_4(0|\tau)^4 - \Theta_2(0|\tau)^4}_{= 0 \text{ por identidad 'abstrusa' de Jacobi}} \pm \underbrace{\Theta_1(0|\tau)^4}_{= 0 \text{ por modo cero } \int \psi_0 = 0} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{T^2}^{(\alpha)} = \sum_i \mathcal{M}_S^{(\alpha)}(m_i^2) = 0$$

Es decir, después de proyección GSO, por cada bosón con masa  $m_i^2$  existe un fermión con la misma masa:



P.ej., con  $m^2=0$  hay  $\left. \begin{array}{l} 128 \text{ estados bosónicos} \\ 128 \text{ estados fermiónicos} \end{array} \right\} \underline{256} = 2^8$ .

Multiplete de Supergravedad  $N=2$  en  $D=10$

Esto es justo como corresponde a representación no masiva de superálgebra  $N=2$  en  $D=10$ : yendo al marco donde  $k_\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$  se puede ver que la mitad de las 32 supercargas aniquilan a los estados, y la otra mitad forman 8 pares de operadores de creación/aniquilación fermiónicos.

(En general, con  $n$  supercargas se obtiene rep. no masiva con  $2^{n/4}$  estados, y rep. masiva con  $2^{n/2}$  estados. [Ver p.ej. Polchinski Vol. II Apéndice B])

Existe otra manera de lograr invariancia modular: pidiéndola no para los modos izquierdos y derechos por separado, sino para su producto.

Esto da lugar a otras 2 teorías 'consistentes', que resultan de una proyección GSO diagonal:

- OB: Sectores con  $\Delta = \tilde{\Delta}$ ,  $(-1)^F = (-1)^{\tilde{F}}$

es decir,  $(NS_+, NS_+) \mid (NS_-, NS_-) \mid (R_+, R_+) \mid (R_-, R_-)$

$m^2 \leq 0$ :  $\varphi, B_{(2)}, h_{\mu\nu} \mid \emptyset \mid C_{(0)}^-, C_{(2)}^-, C_{(4)}^+ \mid C_{(0)}^+, C_{(2)}^+, C_{(4)}^-$

rep de  $so(d)$ :  $\underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35} \mid \underline{1} \mid \underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35}_+ \mid \underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35}_-$   
( $d=8$  ó  $9$ )

- OA: Sectores con  $\Delta = \tilde{\Delta}$ ,  $(-1)^F = \begin{cases} (-1)^{\tilde{F}} NS \\ -(-1)^{\tilde{F}} R \end{cases}$

es decir,  $(NS_+, NS_+) \mid (NS_-, NS_-) \mid (R_+, R_-) \mid (R_-, R_+)$

$m^2 \leq 0$ :  $\varphi, B_{\mu\nu}, h_{\mu\nu} \mid \emptyset \mid C_{(1)}^-, C_{(3)}^- \mid C_{(1)}^+, C_{(3)}^+$

rep de  $so(d)$ :  $\underline{1} \quad \underline{28} \quad \underline{35} \mid \underline{1} \mid \underline{8}_v \quad \underline{56}_t \mid \underline{8}_v \quad \underline{56}_t$   
( $d=8$  ó  $9$ )

En estos casos la amplitud  $\tau$  en lazo involucra

$$\mathcal{Z}_{\text{TOT}}^{\psi, \tilde{\psi}}(\tau) = \frac{1}{2} |\eta(\tau)|^{-8} \left( |\theta_3(0|\tau)|^8 + |\theta_4(0|\tau)|^8 + |\theta_2(0|\tau)|^8 \pm |\theta_1(0|\tau)|^8 \right)$$

que es  $\neq 0$  (teoría evidentemente no es supersimétrica) pero invariante modular.

En estas teorías  $\cancel{Z}$  fermiones, y espectro incluye taquión,

$\therefore$  parecen tan poco interesantes como cuerda bosónica.

Quizás estas teorías se vuelven estables en ciertos fondos no triviales [ver p.ej. Klebanov-Tseytlin hep-th/9811035].

Es posible entenderlas como proyecciones de IIB/A bajo número fermiónico en espaciotiempo  $(-1)^{F}$  [Bergman, Gaberdiel 9906055].

se ha postulado además que OA es equivalente ('dual') a IIA en cierto fondo no supersimétrico

[Costa-Gutperle, 0012072], y que tal vez indica decaimiento OA en fondo plano  $\rightarrow$  IIA en fondo plano

[Gutperle-Ströminger, 0104136; Adams-Polchinski-Silverstein, 0108075]

¿Teorías con cuerdas abiertas? Recordar  $C \rightarrow D$  : teoría consistente incluye necesariamente cuerdas cerradas.

Hemos visto que invariancia modular requiere proyección GSO para sector de cuerdas cerradas.

Para tener interacciones bien definidas, sector de





$$\lambda_{s'} \equiv \lambda_{s'}^1 + \lambda_{s'}^2 \quad \chi_{\mu s} \equiv \chi_{\mu s}^1 + \chi_{\mu s}^2$$

En conjunto tenemos  $\underline{1}$   $\underline{35}$   $\underline{28}$   $\underline{56}$  y  $\underline{8}'$  de  $so(8)$ :

Multiplete de Supergravedad  $N=1$  en  $D=10$

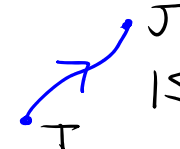
(64 bosones + 64 fermiones)

$$1 \text{ supercarga} \quad Q_s \equiv Q_s^1 + Q_s^2$$

Por consistencia cuerda abierta también debe ser no orientada

Recordar que en sector de cuerda abierta

$$\Omega: \begin{matrix} z \leftrightarrow -\bar{z} \\ \sigma \quad \pi - \sigma \end{matrix} \implies \begin{cases} \alpha_n^{\omega} \leftrightarrow (-1)^n \alpha_n^{\omega} \\ \psi_r^{\omega} \leftrightarrow (-1)^r \psi_r^{\omega} \end{cases}$$

y al agregar índices de Chan-Paton,   $1 \leq I, J \leq N$ ,  
tenemos  $\Omega: |IJ\rangle \leftrightarrow |JI\rangle$ , ó

$$\Omega: |IJ\rangle \leftrightarrow M_{JJ'} |J'I'\rangle M_{I'I}^{-1} \text{ con } M \equiv i \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{N/2} \\ -\mathbb{1}_{N/2} & 0 \end{pmatrix},$$

a partir de lo cual obtenemos grupo de norma

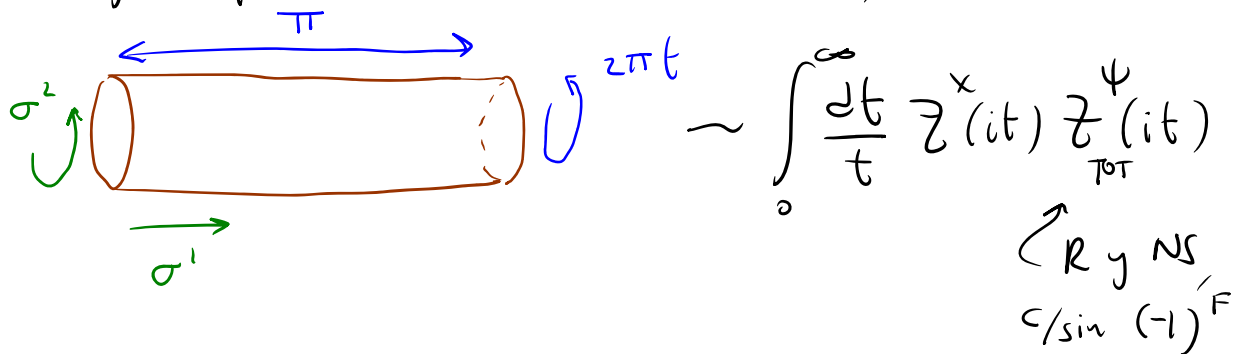
$SO(N)$  ó  $Sp(N/2)$ .

Pero de esta familia infinita de teorías

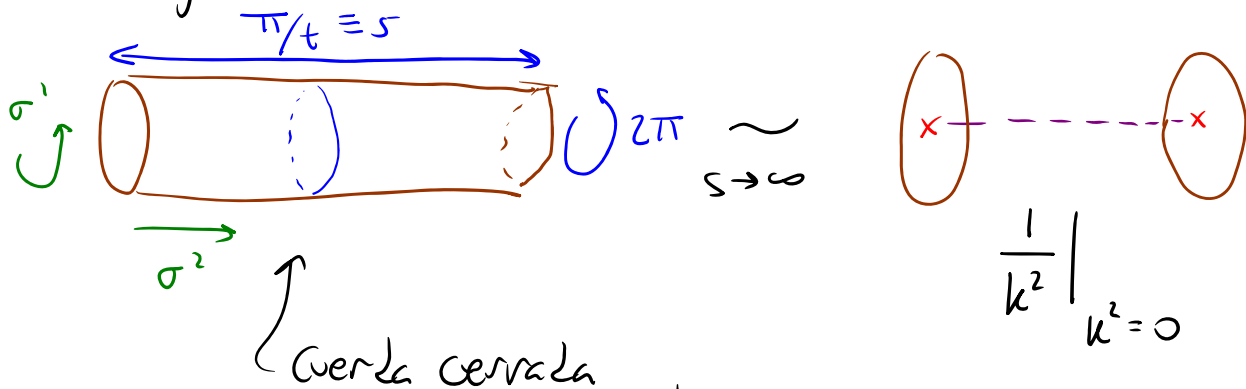
¡solo 1 resulta ser consistente!

Para cuerdas abiertas, el requisito de ausencia de renacuajos juega un papel análogo al de invariancia modular para cuerdas cerradas:

al igual que en la cuerda bosónica,



contiene divergencia en límite  $t \rightarrow 0$ , debido a renacuajo de estados no masivos de cuerda cerrada,



Cuerda cerrada  
 NS-NS : términos en  $Z_{TOT}^\Psi \underline{\underline{\sin}} (-1)^F$  en traza

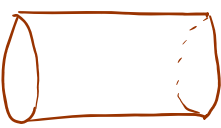
R-R : términos en  $Z_{TOT}^\Psi \underline{\underline{\cos}} (-1)^F$  en traza

Esta divergencia se traduce en anomalías tanto en inv. superconforme (2-dim) como en inv. de norma (10-dim).

Sabemos que la existencia de un renacuajo (vértice de 1 pata en la acción efectiva) es una señal de que el fondo no resuelve las ecs. de mov., por lo que corrección al fondo que logre satisfacer ecs. de mov. eliminará renacuajo y divergencia. Pero en este caso, ecs. de mov. son inconsistentes y no tienen solución (p.ej., renacuajo  $R_2$  se traduce en términos  $\mu \int d^{10}x C_{0,1,\dots,9}$  en acción efectiva, cuya variación  $\Rightarrow \mu=0$ ), así que el renacuajo debe simplemente estar ausente — es decir, debe cancelarse de alguna manera.

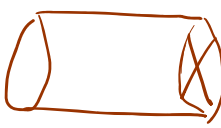
Sorprendentemente,

↙ 'cilindro' con  $\Omega$  en traza



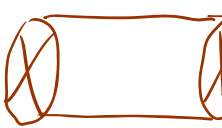
$C_2$

+  $\frac{1}{2}$



$M_2$

+  $\frac{1}{2}$



$K_2$

↘ 'toro' con  $\Omega$  en traza

NS-NS

$$= (N^2 \pm 2 \cdot 32N + 32^2) \frac{1}{8\pi (8\pi^2 \alpha')^5} \int_0^\infty ds [16 + \mathcal{O}(e^{-s})]$$

↗ para  $Sp(N/2)$   
 $so(N)$

[Ver Polchinski Vol. II, Sec. 10.8]

(El signo relativo aparece porque en el caso

$$SO(N) \text{ hay } \begin{cases} \frac{1}{2} N(N+1) \text{ estados con } \Omega = +1 \\ \frac{1}{2} N(N-1) \text{ estados con } \Omega = -1 \end{cases}$$

+N como factor total, mientras que en

$$Sp(N/2) \text{ hay } \begin{cases} \frac{1}{2} N(N-1) \text{ estados con } \Omega = +1 \\ \frac{1}{2} N(N+1) \text{ estados con } \Omega = -1 \end{cases}$$

-N como factor total.)

La contribución del sector R-R,

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ (cylinder)} + \frac{1}{2} \text{ (cylinder)} + \frac{1}{2} \text{ (cylinder)} \right]_{R-R}$$

tiene la misma magnitud pero el signo opuesto.

¡¡ Ambos renaquijos se cancelan solo para  $SO(32)$  !!

(En la cuerda bósónica ocurre cancelación

similar para  $SO(9,12)$ )

$\uparrow 2^5$

$\uparrow 2^{13}$

**Solo teoría  $SO(32)$  es consistente** : teoría tipo I

27/05/06

## Teorías Heteróticas

Aprovechando que los modos izquierdos y derechos de la cuerda cerrada son independientes, podemos usar

{ Modos Izquierdos de Cuerda Bosónica Orientada  
 { Modos Derechos de Supercuerda Orientada

para construir teoría superconforme  $(0,1)$ , con

Campos	$(c, \tilde{c})$		
{	$X^\mu(z); \tilde{X}^\mu(\bar{z}), \tilde{\Psi}^\mu(\bar{z})$	$\mu=0, \dots, 9 \Rightarrow$	$(10, 15)$
	espinores $\lambda^A(z)$	$A=1, \dots, 32 \Rightarrow$	$(16, 0)$
	$b(z), c(z); \tilde{b}(\bar{z}), \tilde{c}(\bar{z}), \hat{\beta}(\bar{z}), \tilde{\gamma}(\bar{z})$	$\Rightarrow$	$(-26, -15)$
			$(0, 0)$ ✓

donde  $\lambda^A(z) \xleftrightarrow{\text{Bosonización}} X^k(z) \quad k=10, \dots, 25.$

La acción y constricciones son

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left( \frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \lambda^A \bar{\partial} \lambda^A + \tilde{\Psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{\Psi}_\mu \right)$$

$$T = -\frac{1}{\alpha'} \partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2} \partial \lambda^A \partial \lambda_A$$

$$\tilde{T} = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} \tilde{X}^\mu \bar{\partial} \tilde{X}_\mu - \frac{1}{2} \bar{\partial} \tilde{\Psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{\Psi}_\mu$$

$$\tilde{J} = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\Psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{X}_\mu$$

(Notar que  $\lambda^A$  y  $\tilde{\Psi}^m$  tienen la misma acción, pero diferentes constricciones.)

Simetría global en hoja de mundo es  $SO(9,1) \times SO(32)$ .

Notar que, a diferencia de la cuerda abierta con factores de Chan-Paton, obtenemos aquí simetría interna no abeliana con carga esparcida por toda la cuerda, no únicamente en los extremos.

La 'condición de borde' más general para  $\lambda^A$  es

$$\lambda^A(\sigma+2\pi, \sigma^2) = M^{AB} \lambda^B(\sigma^1, \sigma^2)$$

↑ matriz  $O(32)$

Se conocen 9 elecciones distintas de  $M^{AB}$  y proyección GSO que dan lugar a teorías consistentes (con invariancia modular e interacciones bien definidas).

De estas, solo 2 son supersimétricas. Las 7 restantes son análogas a teorías Tipo 0, excepto por una que no tiene taquión y posee grupo de norma  $SO(16) \times SO(16)$ . [Ver Polchinski Vol. II, Cap. 11]

## ① Teoría Heterótica $SO(32)$

Para  $\tilde{\Psi}^{\omega}(\bar{z})$ , imponemos  $(-1)^{\tilde{F}} = +1$

$\tilde{NS}$	$\tilde{\Psi}_{-\frac{1}{2}}^{\omega}(0; k)_{\tilde{NS}}$	$\frac{8}{\alpha'}$
$\tilde{R}$	$ \tilde{S}; k\rangle_{\tilde{R}}$	$\frac{8}{\alpha'}$

estados con  $m^2 = 0$

Para  $\lambda^A(z)$  escogemos la misma periodicidad  $\forall A$ ,

encontrando  $\therefore$  2 sectores

—	NS :	$M = -1$
\	R :	$M = +1$

Definiendo un operador de número fermiónico  $F$  que incluya a todos los  $\lambda^A$ , imponemos  $(-1)^F = +1$

Las constantes de orden en  $L_0^{X, \lambda} + L_0^{b, c}$  son  $\therefore$

—	NS :	$8(-\frac{1}{24}) + 32(-\frac{1}{48}) = -1$
\	R :	$8(-\frac{1}{24}) + 32(+\frac{1}{24}) = +1$

Los niveles izquierdos más bajos son  $\therefore$

• Nivel  $N=0$  :  $|0; k\rangle_{NS}$   $m^2 = -\frac{4}{\alpha'}$  Taquión

Tiene  $(-1)^F = +1$  porque en este caso  $\nexists \beta, \gamma$

PERO no se puede empatar con ningún nivel derecho.



• Nivel  $N=1/2$  :  $\lambda_{-1/2}^A |0; k\rangle \quad m^2 = -2/\alpha'$

Tiene  $(-1)^F = -1$  y es  $\therefore$  eliminado por proyección GSO

• Nivel  $N=1$  :  $\alpha_{-1}^M |0; k\rangle_{NS} \quad \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B |0; k\rangle_{NS} \quad m^2 = 0$

rep  $SO(8) \times SO(32)$  :  $(\underline{8}_V, \underline{1}) \quad (\underline{1}, \underline{496})$  rep. adjunta

Tienen  $(-1)^F = +1$   $\checkmark$   $\left( \frac{32 \times 31}{2} \right)$  de  $SO(32)$

Es posible empatarlos con niveles derechos no masivos  $\checkmark$

Al combinar con los modos derechos, vemos entonces que los campos sin masa de esta teoría son

$[(\underline{8}_V, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{496})] \quad (\underline{8}_V + \underline{8})$

$\nwarrow \tilde{NS}_+ \quad \swarrow \tilde{R}_+$

$= (\underline{1}, \underline{1}) + (\underline{28}, \underline{1}) + (\underline{35}, \underline{1}) + (\underline{56}, \underline{1}) + (\underline{8}', \underline{1})$  Multiplete de  $SUBRA$   
 $N=1$

$+ (\underline{8}_V, \underline{496}) + (\underline{8}, \underline{496})$  Multiplete Vectorial (SYM) en rep. adjunta de  $SO(32)$



## ② Teoría Heterótica $E_8 \times E_8$

Dividimos  $\lambda^A(z)$  en 2 grupos  $\begin{cases} A = 1, \dots, 16 \\ A' = 17, \dots, 32 \end{cases}$

con 'condiciones de borde' independientes, y

consideramos 8 sectores  $(\begin{smallmatrix} NS & NS' & \tilde{NS} \\ R & R' & \tilde{R} \end{smallmatrix})$  con

proyección GSO  $(-1)^F = (-1)^{F'} = (-1)^{\tilde{F}} = 0$ .

Los niveles derechos son como antes:  $\underline{8}_v + \underline{8}$  con  $m^2 = 0$ .

Los niveles izquierdos son:

-  $NS - NS'$  (constante de orden  $-1$ , como antes)

• Nivel  $N=1$  es el primero que puede empastarse ( $m^2 = 0$ ):

$$\alpha_{-1}^N |0\rangle_{NS, NS'} \quad \lambda_{-1/2}^A \lambda_{-1/2}^B |0\rangle_{NS, NS'} \quad \lambda_{-1/2}^{A'} \lambda_{-1/2}^{B'} |0\rangle_{NS, NS'}$$

$$(\underline{8}_v, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{120}, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{1}, \underline{120}) \text{ de } SO(8) \times SO(16) \times SO(16)$$

$\uparrow$   $\frac{16 \times 15}{2}$  rep adjunta de  $SO(16)$

-  $R - R'$  (constante de orden  $+1$ , como antes)

No da estados sin masa

- R-NS' (Constante de orden  $8(-\frac{1}{24}) + 16(\frac{1}{24}) + 16(-\frac{1}{48}) = 0$ )

• Nivel  $N=0$  :  $m^2 = 0$

De manera similar a lo que sucedió para el vacío R en la supercuerda, la existencia de los modos cero  $\lambda_0^A$  implica que estados en este sector son

$|\sigma, 0; k\rangle_{R-NS'}$  con  $\sigma = \pm \frac{1}{2}$   $\alpha = 1, \dots, 8$

y que transforman como espinor de  $SO(16)$

De estos  $2^8 = 256$  estados, la mitad sobreviven

proyección GSO  $(-1)^F = +1$  :  $2^8 = \underline{128} + \cancel{128}'$

así que estados físicos pertenecen a  $(\underline{1}, \underline{128}, \underline{1})$ .

- NS-R' De manera similar,  $(\underline{1}, \underline{1}, \underline{128})$ .

Combinando con  $\underline{8}_V$  de modos derechos, se obtienen

campos de norma en  $\underline{120} + \underline{128}$  de cada  $SO(16)$

adjunta  $\uparrow$   $\uparrow$  espinorial

$\underbrace{\hspace{10em}}$   
 rep. adjunta  $\underline{248}$  de  $E_8$ !

$\therefore$  Grupo de Norma es  $E_8 \times E_8$

Solo el subgrupo  $SO(16) \times SO(16)$  es manifiesto en esta presentación de la teoría.

Los generadores adicionales que están en  $E_8$  pero no en  $SO(16)$  son espinores

$$\exp \left[ i \sum_{\alpha=1}^8 \sigma_{\alpha} X^{\alpha+9}(\tau) \right], \quad \exp \left[ i \sum_{\alpha=9}^{16} \sigma_{\alpha} X^{\alpha+9}(\tau) \right]$$

↑ bosonización de  $\lambda^{2\alpha-1}, \lambda^{2\alpha}$  ↑

con  $\sigma_{\alpha} = \pm 1/2$  (y número par de  $-1/2$ 's)

Los estados con  $m^2=0$  son:

$$(\underline{1}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{28}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{35}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{56}, \underline{1}, \underline{1}) + (\underline{8}, \underline{1}, \underline{1})$$

Multiplete de  $SU(6) \times U(1)$

$$+ (\underline{8}_V, \underline{248}, \underline{1}) + (\underline{8}, \underline{248}, \underline{1}) + (\underline{8}_V, \underline{1}, \underline{248}) + (\underline{8}, \underline{1}, \underline{248})$$

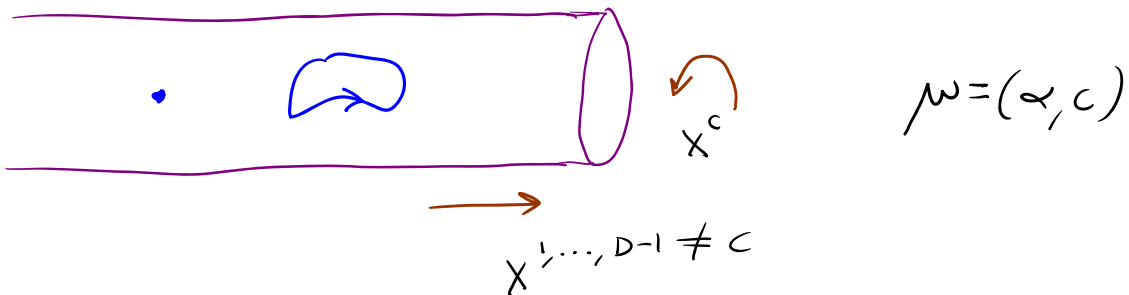
Multiplete Vectorial (SYM)  $E_8 \times E_8$

## 4. Dualidad T y D-branas

Si queremos eventualmente hacer contacto con el mundo real, necesitamos esconder 6 dimensiones.

La manera más obvia es postular que son compactas y pequeñas. Consideremos primero el caso más sencillo posible: una dimensión compactificada en un círculo:

$$x^c \simeq x^c + 2\pi R \quad (\text{p.ej.}, c=9)$$



La presencia de este círculo modifica la teoría en 3 aspectos:

1) El momento se discretiza,

$$p^c = \frac{n}{R} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{número de Kaluza-Klein}$$

(porque  $e^{i(2\pi R)\hat{p}^c} |\psi\rangle = |\psi\rangle$ ).

Esto sucede tanto para teorías de partículas como de cuerdas. Para cada campo asociado podemos hacer descomposición de Fourier

$$\phi(x^\mu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i \frac{n}{R} x^c} \phi_n(x^\alpha),$$

obteniendo una colección infinita de campos definidos en  $D-1$  dimensiones,  $\{\phi_n\}$ , con masas

$$m_n^2 \equiv -P_\alpha P^\alpha = P_c P^c - P_\mu P^\mu = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + M^2$$

↑ masa  $(D-1)$ -dimensional

← masa  $D$ -dimensional

Notar que para  $R$  pequeño  $m_n^2$  es grande a menos que  $n=0$ , de modo que

$R \rightarrow 0 \Rightarrow$  retener solo  $\phi_0(x^\alpha)$ , independiente de  $x^c$

Reducción Dimensional

2) Campos con Índices Espaciotemporales se descomponen en bloques, p.ej.,

$$G_{\mu\nu} \sim \begin{pmatrix} \begin{matrix} (D-1) \times (D-1) \\ g_{\alpha\beta} \end{matrix} & \begin{matrix} A_\alpha \\ \vdots \\ \sigma \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_\beta \\ \vdots \\ \sigma \end{matrix} & \end{pmatrix}$$

$D \times D$

Bajo reducción dimensional,

$$\frac{1}{2k^2} \int d^D x \sqrt{-G} R \rightarrow \frac{2\pi R}{2k^2} \int d^{D-1} x \left[ \sqrt{-g} R + F^2 + (\partial\sigma)^2 \right]$$

y la invariancia bajo difeos del tipo

$$x^c \rightarrow x'^c = x^c + \lambda(x^a)$$

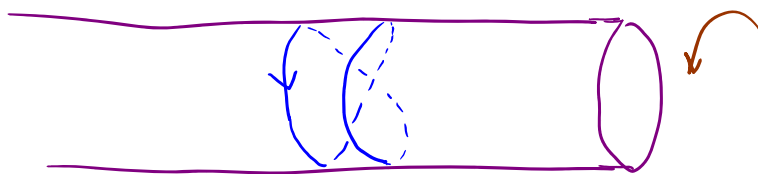
se convierte en invariancia de norma  $U(1)$

$$A_\alpha \rightarrow A'_\alpha = A_\alpha - \partial_\alpha \lambda$$

La carga asociada es número de  $k$  y  $n$

(de modo que en reducción dimensional retenemos solamente estados neutros).

3) Cuerdas cerradas pueden enrollarse alrededor del círculo,

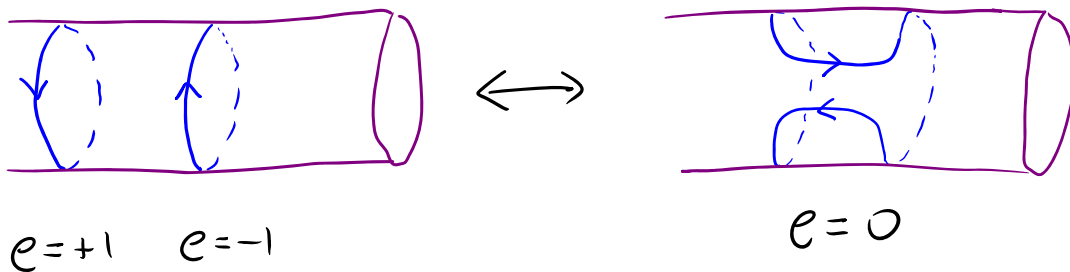


lo cual se expresa en cambio en condición de periodicidad

$$X^c(\sigma + 2\pi, \tau) = X^c(\sigma, \tau) + e \cdot 2\pi R \quad e \in \mathbb{Z} \quad \begin{array}{l} \text{número de} \\ \text{enrollamiento} \end{array}$$



El enrollamiento de una cuerda puede cambiar en teoría con interacciones, pero, por razones topológicas, el enrollamiento total se conserva en interacciones de cuerda cerrada:



Notar que esto nos obliga a incluir en teoría completa sectores con  $e$  arbitrarios.

En teoría en cuerdas abiertas,  $e_{\text{tot}}$  claramente

no se conserva en procesos .

¿Qué sucede en el caso de cuerdas cerradas

no orientadas? Recordar que en este caso espectro

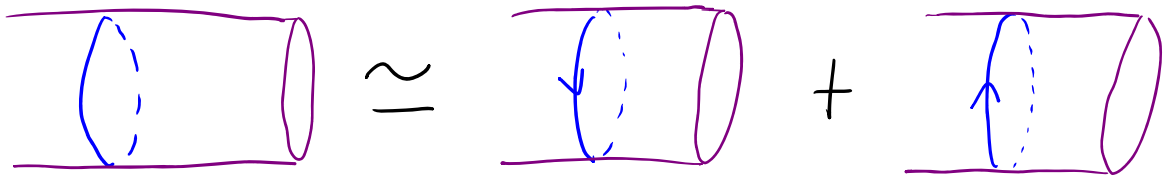
se trunca para retener solo estados invariantes bajo

$$\Omega : \alpha_n^M \longleftrightarrow \tilde{\alpha}_n^M, \quad e \longleftrightarrow -e,$$

p.ej.  $\tilde{\alpha}_{-1}^M |0,0; k_\alpha, 1, 1\rangle + \alpha_{-1}^M |0,0; k_\alpha, 1, -1\rangle$

$\begin{matrix} \nearrow n & \searrow e & \nearrow n & \searrow e \end{matrix}$

Es decir,



Debido a esto, las interacciones conservan solo el enrollamiento total módulo 2:

$$(V_{+1} + V_{-1})(V_{+1} + V_{-1}) \rightarrow (V_{+2} + V_{-2}) + V_0.$$

Regresando a cuerda orientada, si imponemos la nueva condición de periodicidad

$$X^c(e^{2\pi i} z, e^{-2\pi i} \bar{z}) = X^c(z, \bar{z}) + e \cdot 2\pi R$$

en expansión usual  $X^c(z, \bar{z}) = X^c(z) + \tilde{X}^c(\bar{z})$ ,

$$X^c(z) = X_I^c + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left( -\alpha_0^c \ln z + \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^c}{z^n} \right),$$

$$\tilde{X}^c(\bar{z}) = X_D^c + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left( -\tilde{\alpha}_0^c \ln \bar{z} + \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^c}{n \bar{z}^n} \right),$$

encontramos que  $\alpha_0^c$  y  $\tilde{\alpha}_0^c$  ya no tienen que ser iguales:

$$X^c(e^{2\pi i} z, e^{-2\pi i} \bar{z}) = X^c(z, \bar{z}) + \underbrace{i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} (-\alpha_0^c + \tilde{\alpha}_0^c) 2\pi i}_{= e \cdot 2\pi R}.$$

Recordando además que

$$\text{Noether} \Rightarrow P^c = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}}}_{\frac{n}{R}} (\alpha_0^c + \tilde{\alpha}_0^c) \equiv \frac{1}{2} (P_I^c + P_D^c),$$

podemos despejar

$$P_I^c \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^c = \frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'}$$

$$P_D^c \equiv \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\alpha}_0^c = \frac{n}{R} - \frac{eR}{\alpha'}$$

( $n$  y  $e$  son aquí operadores con autovalores enteros)

Notar que para direcciones no compactas,  $P^\alpha = P_I^\alpha = P_D^\alpha$ .

Con estas definiciones, las relaciones de conmutación para los modos cero son simplemente

$$[X_I^c, P_I^c] = i = [X_D^c, P_D^c], \quad [X_\pm^c, P_D^c] = 0 = [X_D^c, P_\pm^c].$$

Dado que

$$L_0 = \frac{\alpha'}{4} P_I^\omega P_{I\omega} + N, \quad \tilde{L}_0 = \frac{\alpha'}{4} P_D^\omega P_{D\omega} + \tilde{N},$$

el espectro de masas en  $D-1$  dimensiones que se obtiene a partir de condiciones de estado físico

$$L_0 + A = 0, \quad \tilde{L}_0 + \tilde{A} = 0 \quad \text{es}$$

$$m^2 \equiv -P^\alpha P_\alpha = \begin{cases} P_I^c P_{Ic} - P_I^{\tilde{c}} P_{I\tilde{c}} = \left(\frac{n}{R} + \frac{eR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{4}{\alpha'}(N+A) \\ P_D^c P_{Dc} - P_D^{\tilde{c}} P_{D\tilde{c}} = \left(\frac{n}{R} - \frac{eR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{4}{\alpha'}(\tilde{N} + \tilde{A}) \end{cases}$$

es decir,

$$m^2 = \left(\frac{n}{R}\right)^2 + \left(\frac{eR}{\alpha'}\right)^2 + \frac{2}{\alpha'}(N + \tilde{N} + A + \tilde{A})$$

$$\tilde{N} - N = ne + A - \tilde{A} \quad (\text{emparejamiento de niveles})$$

Pej., para cuerda bosónica  $(A^{x,b,c} = \tilde{A}^{\tilde{x},\tilde{b},\tilde{c}} = -\frac{24}{24} = -1)$ ,

estados sin masa son

$$\sum_{\alpha\beta} \alpha_{-1}^{\alpha} \tilde{\alpha}_{-1}^{\beta} |0,0; k^{\alpha}, 0,0\rangle \rightarrow \varphi, B_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta}$$

$$\alpha_{-1}^c \tilde{\alpha}_{-1}^c |0,0; k^{\alpha}, 0,0\rangle \rightarrow \sigma \equiv h_{cc}$$

$$\sum_{\alpha} (\alpha_{-1}^{\alpha} \tilde{\alpha}_{-1}^c \pm \alpha_{-1}^c \tilde{\alpha}_{-1}^{\alpha}) |0,0; k, 0,0\rangle \rightarrow A_{\alpha}^{(h)} \equiv h_{\alpha c}, A_{\alpha}^{(B)} \equiv B_{\alpha c}$$

Campo de norma  $U(1) \times U(1)$

con cargas asociadas  $n$  e

(Recordar que la cuerda se acopla a  $B_{\mu\nu}$  de manera análoga al modo en que partícula se acopla a  $A_{\mu}$ ).

En el caso de cuerda sin enrollar la carga neta bajo  $B_{\mu\nu}$  en cualquier dirección  $\nu$  es cero, pero para cuerda enrollada tenemos acoplamiento

$$\int d\tau d\sigma B_{c\alpha} \partial_a (\epsilon^{ab} X^c \partial_b X^\alpha) \rightarrow \int d\tau A_\alpha^{(B)} \partial_c X^\alpha (e \cdot 2\pi R),$$

es decir, cuerda porta carga neta  $\propto e$  bajo  $B_{c\alpha}$ .

Un hecho curioso es que existen 12 estados adicionales que se vuelven no masivos si ajustamos  $R = l_c \equiv \sqrt{\alpha'}$ :

$$\tilde{\alpha}_{-1}^{\tilde{\alpha}} |0, 0; k, \pm 1, \pm 1\rangle, \quad \tilde{\alpha}_{-1}^c |0, 0; k, \pm 1, \pm 1\rangle,$$

$$\alpha_{-1}^{\tilde{\alpha}} |0, 0; k, \pm 1, \mp 1\rangle, \quad \alpha_{-1}^c |0, 0; k, \pm 1, \mp 1\rangle,$$

$$|0, 0; k, \pm 2, 0\rangle, \quad |0, 0; k, 0, \pm 2\rangle.$$

En particular, tenemos aquí 4 nuevos bosones de norma (campos vectoriales no masivos), de modo que al ajustar  $R \rightarrow l_c$ , simetría se ensancha.

Portan carga bajo  $U(1) \times U(1)$  original, así que tenemos ahora un grupo de norma no abeliano.

En base a las EPOs de los operadores de vértice correspondientes, es posible deducir que el grupo en cuestión es  $SU(2) \times SU(2)$  (6 generadores). Y a partir de las interacciones (codificadas, peq., en la acción efectiva) uno puede entender que al pasar de  $R=l_c$  a  $R=l_c + \epsilon$  esta simetría se rompe espontáneamente:

$$SU(2) \times SU(2) \xrightarrow[\langle \sigma \rangle \neq 0]{\text{Higgs}} U(1) \times U(1).$$

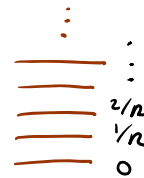
Regresaremos a esto más adelante...

Volviendo a análisis de espectro, consideremos ahora 2 límites:

1)  $R \rightarrow \infty$

Descompactificación

$$\Rightarrow \begin{cases} n/R \text{ se vuelve continuo} \\ e \neq 0 \Rightarrow m \sim \left| \frac{eR}{\alpha'} \right| \rightarrow \infty \end{cases}$$



$$\Rightarrow P_I^c = P_D^c = P^c \quad \text{Recuperamos teoría no compacta ✓}$$

2)  $R \rightarrow 0$  ¿Reducción Dimensional?

$$\Rightarrow \begin{cases} n \neq 0 \Rightarrow m \sim \left| \frac{n}{R} \right| \rightarrow \infty \\ i \frac{eR}{\alpha'} \text{ se vuelve continuo!} \end{cases} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ 2R/\alpha' \\ R/\alpha' \end{array}$$

$$\Rightarrow p_I^c = -p_D^c = p^c \quad \text{¡Dimensión compacta no desaparece!}$$

¡Vemos entonces que el efecto de 1) y 2) es esencialmente el mismo!

De hecho, espectro

$$m^2 = \left( \frac{n}{R} \right)^2 + \left( \frac{eR}{\alpha'} \right)^2 + \frac{2}{\alpha'} (N + \tilde{N} + A + \tilde{A})$$

$$ne = \tilde{N} - N + \tilde{A} - A$$

es invariante bajo transformación

$$\left. \begin{array}{l} R \leftrightarrow R_T \equiv \frac{\alpha'}{R} \\ (n, e) \leftrightarrow (n_T, e_T) \equiv (e, n) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} p_I^c \leftrightarrow (p_I^c)_T \equiv p_I^c \\ p_D^c \leftrightarrow (p_D^c)_T \equiv -p_D^c \end{cases}$$

Dualidad T  
(de 'target')

Kikkawa, Yamasaki (1984)  
Sakai, Serda (1985)  
Nair, Shapere, Strominger, Wilczek (1986)

La teoría con radio  $R_{\mathbb{T}}$  es idéntica a la teoría con radio  $R$ , pero reescrita en términos de

$$X_{\mathbb{T}}^c(z, \bar{z}) \equiv X^c(z) - \tilde{X}^c(\bar{z})$$

↳ incorpora  $P_D^c \rightarrow -P_D^c$ , pero preserva

$$T(z), \tilde{T}(\bar{z}) \text{ y EPO } X^c(z_1, \bar{z}_1) X^c(z_2, \bar{z}_2),$$

∴ espectro e interacciones son idénticas

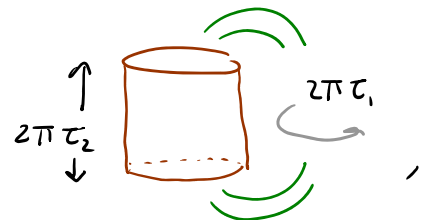
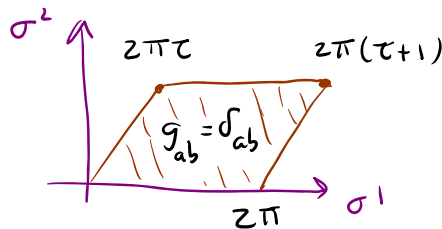
En resumen,  $\mathbb{T}$  = paridad en espacio, actuando

sólo sobre modos derechos

Se puede mostrar invariancia en cada orden de la expansión perturbativa.

Amplitud a un lazo es suma sobre espectro libre,

así que debe ser invariante: en toro,





la función de partición (contribución de  $X^c$ )

$$\mathcal{Z}^{X^c}(\tau) \equiv \int_{T^2(\tau)} \mathcal{D}X^c(\sigma', \sigma^2) e^{-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X^c \partial_a X^c}$$

se descompone en una suma sobre sectores con distintos números de enrollamiento:

$$X^c(\sigma' + 2\pi, \sigma^2) = X^c(\sigma', \sigma^2) + e \cdot 2\pi R \quad \forall e, f \in \mathbb{Z}$$

$$X^c(\sigma' + 2\pi\tau_1, \sigma^2 + 2\pi\tau_2) = X^c(\sigma', \sigma^2) + f \cdot 2\pi R$$

↑ necesario para preservar invariancia modular

La integral gaussiana se puede calcular escribiendo

$$X^c(\sigma', \sigma^2) = X_{cl}^c(\sigma', \sigma^2) + \eta(\sigma', \sigma^2),$$

donde

$$X_{cl}^c(\sigma', \sigma^2) = e \cdot \sigma' R + (f - e\tau_1) \frac{\sigma^2 R}{\tau_2}$$

es solución de ec. de mov. con enrollamiento  $(e, f)$ ,

y  $\eta(\sigma', \sigma^2)$  es una función periódica arbitraria.

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{X^c}(\tau) = \mathcal{Z}^\eta(\tau) 2\pi R \sum_{e, f \in \mathbb{Z}} \exp \left[ -\frac{\pi R^2}{\alpha' \tau_2} \underbrace{\left( (f - e\tau_1)^2 + e^2 \tau_2^2 \right)}_{|f - e\tau_1|^2} \right]$$

contribución usual de coordenada no compacta  $\int dx$

de integral sobre modos cero de  $X^c$

$$\underbrace{\left( (f - e\tau_1)^2 + e^2 \tau_2^2 \right)}_{|f - e\tau_1|^2}$$

Notar que la suma es invariante modular: no cambia bajo  $\tau \rightarrow \tau' = \tau + 1$ ,  $(e, f) \rightarrow (e', f') = (e, f - e)$   
 ni bajo  $\tau \rightarrow \tau' = -1/\tau$  ( $\Rightarrow \tau'_2 = \frac{\tau_2}{|\tau|^2}$ ),  
 $(e, f) \rightarrow (e', f') = (f, -e)$

Para mostrar que también es invariante bajo dualidad  $T$ , necesitamos "fórmula de resumación de Poisson" [ver GSW vol. 2, p. 71]:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi \frac{(m-b)^2}{a}\right] = \sqrt{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi a n^2 + 2\pi i b n\right].$$

Tomando  $m=f$ ,  $a = \frac{\alpha' \tau_2}{R^2}$ ,  $b = e\tau$ , podemos reescribir

$$\tilde{Z}^c(\tau) = Z^c(\tau) 2\pi \sqrt{\alpha' \tau_2} \sum_{n, e=-\infty}^{\infty} \exp\left[-\pi \tau_2 \left(\frac{\alpha' n^2}{R^2} + \frac{e^2 R^2}{\alpha'}\right) + 2\pi i \tau_1 n e\right],$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\frac{\alpha' (P_I^c)^2}{4} & \frac{1}{\alpha'} \frac{(P_D^c)^2}{4}}}$

$\underbrace{e}_{\tilde{q} \equiv e} \rightarrow \underbrace{q}_{\tilde{q} \equiv e} \quad \underbrace{1}_{\tilde{q} \equiv e} \rightarrow \underbrace{1}_{\tilde{q} \equiv e}$

donde invariancia bajo  $P_I^c \rightarrow P_I^c$ ,  $P_D^c \rightarrow -P_D^c$  es manifiesta.



Esta última expresión es de hecho la que resulta directamente de definición hamiltoniana

$$Z^X(\tau) = \text{Tr}_{X^c} \left[ \exp(-2\pi\tau_2 H + 2\pi i \tau_1 P) \right] = (\mathfrak{q} \bar{\mathfrak{q}})^{-\frac{c}{24}} \text{Tr} \left[ \mathfrak{q}^{L_0 + A} \bar{\mathfrak{q}}^{\tilde{L}_0 + \tilde{A}} \right]$$

(donde vemos también explícitamente invariancia

$$\text{bajo } \alpha_n^c \rightarrow \alpha_n^c, \quad \tilde{\alpha}_n^c \rightarrow -\tilde{\alpha}_n^c).$$

¿Qué sucede a orden más alto en la expansión perturbativa?

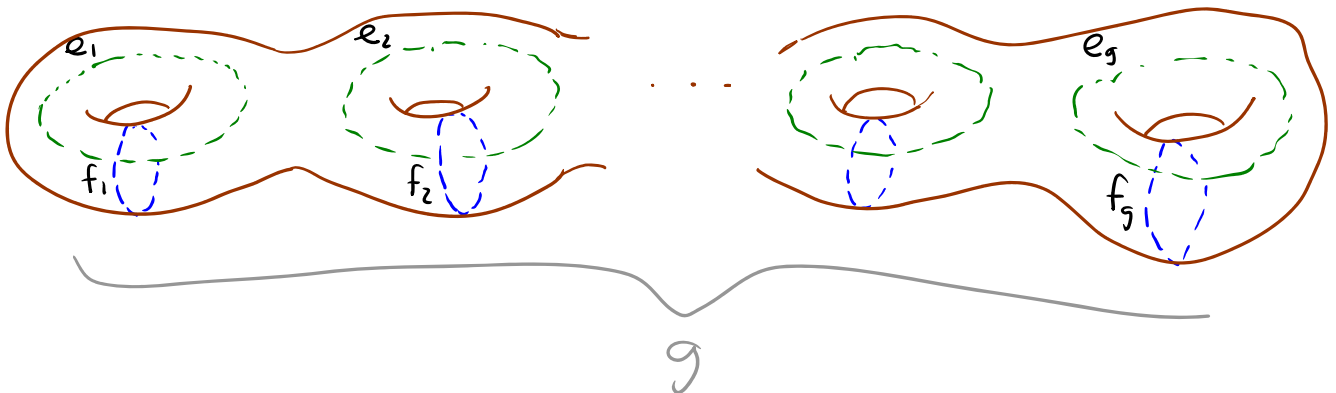
La superficie de género  $g > 1$  (es decir, con  $g$  manijas)

tiene módulos complejos  $\tau_M$ ,  $M=1, \dots, 3g-3$

(Riemann-Roch:  $k - m = 3\chi \Rightarrow 6(g-1)$  módulos reales)  
 $\uparrow$   $\leftarrow 2-2g$

Para definir  $X^c(\sigma_1, \sigma_2)$  sobre ella, debemos especificar

$2g$  números de enrollamiento  $(e_i, f_i)$   $i=1, \dots, g$



Se puede mostrar entonces que la función de partición toma la forma

$$Z_g^{X^c}(R; \tau_M) \propto R \sum_{e_i, f_i} \exp \left[ -\frac{\pi R^2}{\alpha'} (f_i - e_j \bar{\Omega}_{ji}) (\Omega_2^{-1})_{ik} (f_k - e_l \Omega_{lk}) \right],$$

donde  $\Omega_{ij}(\tau_M) \equiv (\Omega_1)_{ij} + i(\Omega_2)_{ij}$  es la "matriz de periodos"  
 $2_{g \times g}$ , simétrica

( $\Omega(\tau) = \tau$  en el caso  $g=1$ ) [ver Giverson, Porrati, Rabinovici, hep-th/9401139]

Después de usar la fórmula de Poisson para reemplazar  $f_i \rightarrow n_i$  se tiene entonces

$$Z_g^{X^c}(R; \tau_M) \propto R^{1-g} \sum_{n_i, e_i} \exp \left[ i \frac{\pi \alpha'}{2} (P_{I_i}^c \Omega_{ij} P_{I_j}^c - P_{D_i}^c \bar{\Omega}_{ij} P_{D_j}^c) \right],$$

donde  $P_{\pm i}^c \equiv \frac{n_i}{R} \pm \frac{e_i R}{\alpha'}$  son los momentos izquierdos

de las  $g$  cuerdas que circulan alrededor de los lazos.

Bajo dualidad  $T$  encontramos entonces

$$Z_g^{X_{\text{NT}}^c}(R_{\text{T}}; \tau_M) = \left( \frac{R}{l_c} \right)^{2g-2} \underbrace{Z_g^{X^c}(R; \tau_M)}_{-X_g}$$

Concluimos entonces que amplitud total

$$\mathcal{Z}[\Phi, R] = \sum_{g=0}^{\infty} e^{-\Phi \chi_g} \int_M d\tau \int \mathcal{F}_g(\tau) \mathcal{Z}_g^{\chi^c}(R; \tau)$$

es invariante bajo dualidad  $\Gamma$  siempre y cuando

$$\Phi_{\Gamma} = \Phi - \ln(R/l_c),$$

es decir,

$$g_{c\Gamma} = g_c \left( \frac{l_c}{R} \right)$$

Podemos verificar esta fórmula notando que las amplitudes de dispersión de gravitones con  $e=n=0$  (que son estas invariantes bajo  $\Gamma$ ) pueden leerse a partir de acción efectiva

$$S = \frac{1}{2K^2} \int d^d x^c d^{d-1} x^a \dots \stackrel{n=0}{=} \frac{2\pi R}{2K^2} \int d^{d-1} x^a \dots$$

$$\equiv \frac{1}{2K_{d-1}^2} = \frac{2\pi R_{\Gamma}}{2K_{\Gamma}^2} \quad (\text{porque amplitud es } \Gamma\text{-invariante})$$

$$\xrightarrow{K^2 \propto g_c^2} \frac{g_c^2}{R} = \frac{g_{c\Gamma}^2}{R_{\Gamma}} \Rightarrow g_{c\Gamma} = g_c \left( \frac{l_c}{R} \right) \quad \checkmark$$

Hemos visto entonces que dualidad  $T$  es una simetría de expansión perturbativa de la teoría de cuerdas bosónica, que relaciona entre sí 2 estados (fondos) a primera vista distintos.

Recordar ahora que si ajustamos el radio de  $x^c$  a su valor autodual  $R = l_c = R_T$ , la simetría de norma se ensancha de  $U(1) \times U(1)$  a  $SU(2) \times SU(2)$ , y que cerca de este punto, cambiar  $R$  significa encender  $\langle \sigma \rangle \neq 0$ , donde  $\sigma \equiv h_{cc}$  porta carga bajo 4 de las 6 transformaciones en  $SU(2) \times SU(2)$ .

Escogiendo de manera apropiada los 4 parámetros correspondientes, podemos de hecho rotar

$$\langle \sigma \rangle \leftrightarrow -\langle \sigma \rangle, \text{ que corresponde a } R = l_c \left(1 + \frac{\langle \sigma \rangle}{2}\right) \leftrightarrow R_T = \frac{l_c^2}{R} \approx l_c \left(1 - \frac{\langle \sigma \rangle}{2}\right).$$

$\Rightarrow$   $T$  es una simetría de norma!

Por consistencia de la teoría, debe  $\therefore$  preservarse incluso a nivel no perturbativo.

12/09/06

Con solo una dimensión compacta, hemos encontrado el grupo de dualidad discreto  $\mathbb{Z}_2$ .

Encontraremos un grupo mucho mayor al compactificar sobre toro  $d$ -dimensional  $T^d \equiv \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_d$ .

En este caso, conviene usar coords.

$$x^c \simeq x^c + 2\pi l_c, \quad c=1, \dots, d$$

$$\Leftrightarrow X^c(\sigma^1 + 2\pi, \sigma^2) = X^c(\sigma^1, \sigma^2) + e^c 2\pi l_c,$$

↑ número de enrollamiento

codificando el tamaño y la forma del toro en métrica constante  $G_{cc'}$ . Pej., toro recto:  $G_{cc'} = \frac{R_c^2}{\alpha'} \delta_{cc'}$ .

Recordar descripciones alternativas

vs.

para  $T^2$ . Aquí  $\sigma^a \rightarrow x^c$ .

Descripción con métrica plana se puede obtener en coords.

$$x^c \equiv e_c^c X^c, \quad \text{con } G_{cc'} \equiv e_c^c e_{c'}$$

↑ muchas-pata / vielbein /  $d$ -ada.

Sobre  $d \geq 2$  dimensiones compactas podemos encender, además de métrica, campo antisimétrico constante  $B_{cc'}$ . Nuestra compactificación estará caracterizada entonces por

$$G_{cc'} + B_{cc'} \iff \frac{d(d+1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} = d^2 \text{ parámetros.}$$

Notar que  $B_{cc'}$  constante es "pura norma"

( $H_{(3)} = d B_{(2)} = 0$ ), y el término correspondiente en la acción,  $\int d\sigma d\tau B_{cc'} \underbrace{\partial_\sigma X^c \partial_\tau X^{c'}}_{\partial_\sigma (X^c \partial_\tau X^{c'})}$ , es una derivada total.

Pero, debido a que dimensiones involucradas son compactas, su presencia sí cambia la física

(de manera análoga a lazo de Wilson  $\int d\tau A_c \partial_\tau X^c$ , que para su eliminación requiere una transformación de norma "grande":  $A_c \rightarrow A_c - \partial_c \lambda$  con  $\lambda(x_c)$  no periódica).

El término con  $B_{cc'}$  no afecta ec. de mov. y  $\therefore$  expansión en modos, pero sí cambia definición del momento conjugado a  $X^c$ , y modifica  $\therefore$  relación entre el





Dados  $G_{cc'}$  y  $B_{cc'}$ , los autovalores de  $P_{I_c}$  y  $P_{D_c}$ ,

$$K_r \equiv \frac{l_c}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} k_{I_c} \\ k_{D_c} \end{pmatrix} \quad \forall n_c, e^c \in \mathbb{Z} \text{ forman una red } \mathcal{R}$$

en espacio de momentos 2d-dimensional.

Cada punto en esta red representa un posible estado (para modos cero en las  $d$  dimensiones compactas).

Los operadores de vértice correspondientes,

$$V_{(n_c, e^c)}(z, \bar{z}) = : \exp [ik_{I_c} X^c(z) + ik_{D_c} \tilde{X}^c(\bar{z})] :,$$

tienen EPO

$$V(z, \bar{z}) V'(0, 0) \sim z^{\frac{\alpha'}{2} k_I \cdot k'_I} \bar{z}^{\frac{\alpha'}{2} k_D \cdot k'_D} V''(0, 0),$$

que solo es univaluada (permitiendo  $\therefore$  que interacciones estén bien definidas) si exigimos que

$$\frac{\alpha'}{2} k_I \cdot k'_I - \frac{\alpha'}{2} k_D \cdot k'_D \equiv K \cdot K' \in \mathbb{Z} \quad \forall K, K' \in \mathcal{R}$$

Conviene  $\therefore$  considerar a nuestra red  $\mathcal{R}$

como subespacio de  $\mathbb{R}^{d,d}$   $\leftarrow$  métrica  $\text{diag}(+1, +1, \dots, -1, -1, \dots)$

Para que teoría sea invariante modular, es necesario exigir que  $\mathcal{R}$  sea una red par y autodual, es decir,

$$K \circ K' \equiv K_I \cdot K'_I - K_D \cdot K'_D \in 2\mathbb{Z} \quad \forall K, K' \in \mathcal{R}$$

$$y \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}^* \equiv \{ K' \in \mathbb{R}^{d,d} \mid K \circ K' \in 2\mathbb{Z} \quad \forall K \in \mathcal{R} \}$$

↑ red dual a  $\mathcal{R}$

Esta descripción de posibles  $G_{cc'}$ ,  $B_{cc'}$  se conoce con el nombre de compactificación de Narain.

Aunque no es obvio, resulta que todas las redes pares autoduales en  $\mathbb{R}^{d,d}$  están conectadas entre sí a través de transformaciones  $O(d, d, \mathbb{R})$ : dada una compactificación de Narain  $\mathcal{R}_0$ , podemos obtener todas las demás rotándola de todas las maneras posibles. Las redes resultantes describen en general teorías/compactificaciones físicamente distintas. Pero no lo son si rotación en cuestión deja  $K_I \cdot K'_I$  y  $K_D \cdot K'_D$  invariantes,

porque en ese caso EPOs y espectro No cambian.

El espacio de redes que describen compactificaciones que en un principio parecerían físicamente distintas es entonces

$$\frac{O(d, d, \mathbb{R})}{O(d, \mathbb{R}) \times O(d, \mathbb{R})}, \text{ que según podemos verificar,}$$

tiene el número correcto de parámetros:

$$\frac{2d(2d-1)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} = d^2. \quad \checkmark$$

Para describir el efecto que una rotación  $O(d, d, \mathbb{R})$  tiene sobre los campos de fondo

$G_{cc'}$  y  $B_{cc'}$ , conviene cambiar de base para

convertir  $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix},$

y definir entonces

$$O(d, d, \mathbb{R}) \equiv \left\{ M = \left( \begin{array}{c|c} \underline{a} & \underline{b} \\ \hline \underline{c} & \underline{d} \end{array} \right) \mid M^T \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \text{ en nueva base}} M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$d \times d$   $\nearrow$   
con entradas reales

En esta nueva base, la red que corresponde al fondo  $G_{cc'} = \delta_{cc'}$ ,  $B_{cc'} = 0$  (es decir, un toro recto con radios propios autoduales, y sin tensor antisimétrico) es simplemente

$$\mathcal{R}_0 \equiv \left\{ \begin{pmatrix} e^c \\ n_{c'} \end{pmatrix} \mid e^c, n_{c'} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Y, empaquetando los campos de fondo (en el caso general) en una sola matriz constante

$$E_{cc'} \equiv G_{cc'} + B_{cc'},$$

el efecto de una rotación

$$M: \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}^{(M)} \equiv M \mathcal{R}, \quad M \in O(d, d, \mathbb{R}),$$

es transformar

$$M: E \mapsto E^{(M)} \equiv (aE + b)(cE + d)^{-1}$$

(de donde uno puede deducir  $G^{(M)}$  y  $B^{(M)}$ ).

Como habíamos visto antes, en general

$$M \in \frac{O(d, d, \mathbb{R})}{O(d, \mathbb{R}) \times O(d, \mathbb{R})} \quad \text{conecta compactificaciones}$$

$\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^{(M)}$  que dan lugar a espectros distintos,  
y son  $\therefore$  físicamente No equivalentes.

Pero notemos ahora que el subgrupo de rotaciones  
con componentes enteras,

$$O(d, d, \mathbb{Z}) = \left\{ Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid Z^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

deja invariante a la compactificación de referencia  
 $\mathbb{R}_0$  (aunque permuta los distintos puntos entre sí)  
lo cual implica que  $M\mathbb{R}_0$  y  $(MZ)\mathbb{R}_0$   
son físicamente equivalentes.

Este subgrupo discreto es entonces el grupo de  
dualidad  $\Gamma$  (simetría no trivial) para  $d$  dimensiones  
compactas, y tenemos

$$E_{\Gamma} = (aE + b)(cE + d)^{-1}$$

En general, estas transformaciones mezclan  
a la métrica  $G$  con el tensor antisimétrico  $B$ !

El grupo  $O(d, d, \mathbb{Z})$  es generado por:

1) Difeos grandes de  $T^d$

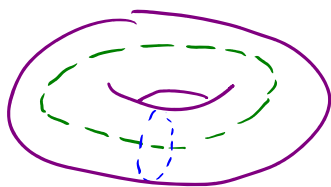
$$Z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (a^T)^{-1} \end{pmatrix} \quad a \in SL(d, \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow G \rightarrow a G a^T, \quad B \rightarrow a B a^T,$$

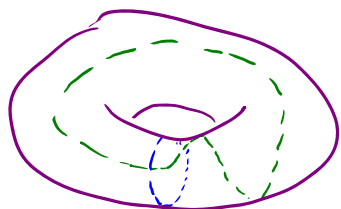
como corresponde a difeos  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = a^{-1} \vec{x}$ ,

en donde la matriz  $a$  debe tener entradas enteras para preservar la periodicidad.

P.ej., en  $d=2$



$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



y la transformación análoga para el otro ciclo generan el grupo  $SL(2, \mathbb{Z})$ .

2) Carrimientos Enteros de  $B$

$$Z = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & b \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad b = -b^T$$

$$\Rightarrow G \rightarrow G, \quad B \rightarrow B + b$$

Este tipo de transformaciones son claramente simetrías, puesto que solo permutan los distintos

$$k_{\frac{I}{D}c} = \frac{1}{\hbar^2} [n_c - B_{cc'} e^{c'} \pm G_{cc'} e^{c'}] \text{ entre sí.}$$

A nivel de la integral funcional, el punto es que la acción euclídeana cambia por un múltiplo de  $2\pi i$ .

3) Generalización de  $R \leftrightarrow \alpha/R$  sobre cada  $S^1$

$$Z_i = \begin{pmatrix} \mathbb{1} - U_i & U_i \\ U_i & \mathbb{1} - U_i \end{pmatrix}, \quad (U_i)_{cc'} \equiv \delta_{ic} \delta_{ic'}$$

si  $G_{cc'} = \frac{R_c^2}{\alpha'} \delta_{cc'}$  y  $B_{cc'} = 0$ , entonces

$Z_i$  solo cambia  $G_{ii} \rightarrow 1/G_{ii}$

(dejando invariantes a  $B_{cc'}$  y las componentes restantes de  $G_{cc'}$ ), lo cual corresponde

precisamente a  $R_i \rightarrow \alpha'/R_i$ .

En el caso general,  $Z_i$  mezcla  $G$  con  $B$ .



Una simetría discreta adicional, que no forma parte de  $O(d, d, \mathbb{Z})$ , es la paridad en la hoja de mundo,  $\Omega$ , que intercambia  $k_{I_c} \leftrightarrow k_{D_c}$ , lo cual equivale a modificar el fondo  $(G, B) \leftrightarrow (G, -B)$ .

Notar que en esta descripción, las relaciones de conmutación de los modos son

$$[X^c, P_{c'}] = \delta_{c'}^c,$$

$$[\alpha_m^c, \alpha_n^{c'}] = m G^{cc'} \delta_{m, -n} = [\tilde{\alpha}_m^c, \tilde{\alpha}_n^{c'}],$$

así que bajo dualidad  $T$  los estados de la cuerda  $\alpha_{-n}^c \dots \tilde{\alpha}_{-n'}^{c'} \dots |n_c, e^c\rangle$  cambian

$$\text{no solo porque } \begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e_\pi \\ n_\pi \end{pmatrix} = \mathbb{Z} \begin{pmatrix} e \\ n \end{pmatrix},$$

sino además porque los osciladores transforman de manera no trivial:

$$\alpha_n(E) \rightarrow (d - cE^T)^{-1} \alpha_n(E_\pi), \quad \tilde{\alpha}_n(E) \rightarrow (d + cE)^{-1} \tilde{\alpha}_n(E_\pi).$$

Se puede mostrar que  $O(d, d, \mathbb{Z})$  es una simetría de la expansión perturbativa, siempre y cuando el dilatón transforme de acuerdo con

$$\Phi \rightarrow \Phi_{\pi} = \Phi - \frac{1}{4} \ln \left( \frac{\det G}{\det G_{\pi}} \right),$$

es decir,

$$g_{c\pi} = g_c \left( \frac{\det G_{\pi}}{\det G} \right)^{1/4}$$

Notar que elemento de volumen  $\sqrt{\det G_{\pi}}$  solo cambia en las rotaciones que involucran transformaciones del tipo 3).

Es posible generalizar dualidad  $\mathbb{T}$  a fondos no triviales  $G_{\mu\nu}(x), B_{\mu\nu}(x), \Phi(x)$  independientes de una coordenada  $x^c$  (pero, en general, dependientes de coordenadas restantes  $x^{\alpha \neq c}$ ). [Ver p.ej. Giveon, Porrati, Rabinovici]

La transformación en este caso está dada por

$$G_{cc}^{\mathbb{T}} = \frac{1}{G_{cc}}, \quad G_{c\alpha}^{\mathbb{T}} = \frac{B_{c\alpha}}{G_{cc}}, \quad G_{\alpha\beta}^{\mathbb{T}} = G_{\alpha\beta} - \frac{G_{\alpha c} G_{\beta c} + B_{\alpha c} B_{\beta c}}{G_{cc}},$$

$$B_{cc}^{\mathbb{T}} = 0, \quad B_{c\alpha}^{\mathbb{T}} = \frac{G_{c\alpha}}{G_{cc}}, \quad B_{\alpha\beta}^{\mathbb{T}} = B_{\alpha\beta} - \frac{G_{\alpha c} B_{c\beta} + B_{\alpha c} G_{c\beta}}{G_{cc}},$$

$$\Phi^{\mathbb{T}} = \Phi - \frac{1}{4} \ln \left( \frac{\det G}{\det G^{\mathbb{T}}} \right)$$

Reglas de Buscher

¿Cuál es el efecto de  $T$  sobre fermiones en supercuerdas?

Consideremos IIA. Sabemos que

$$T_c : X^c(z) \rightarrow +X^c(z), \quad \tilde{X}^c(\bar{z}) \rightarrow -\tilde{X}^c(\bar{z});$$

por invariancia superconforme debemos tener entonces

$$T_c : \psi^c(z) \rightarrow +\psi^c(z), \quad \tilde{\psi}^c(\bar{z}) \rightarrow -\tilde{\psi}^c(\bar{z})$$

Esto implica en particular que, en sector  $R$ ,

$$\tilde{\psi}_0^c \rightarrow -\tilde{\psi}_0^c \Rightarrow \tilde{F} \rightarrow -\tilde{F},$$

es decir,  $(-1)^{\tilde{F}} \rightarrow -(-1)^{\tilde{F}}$ .

Dado que esto invierte la proyección GSO para modos derechos, concluimos que ¡teoría  $T$ -dual es IIB!

En efecto,

$$\text{IIA en círculo con radio } R_A \text{ y acoplamiento } g_{cA} \quad \stackrel{T}{=} \quad \text{IIB en círculo con radio } R_B = \frac{l_c^2}{R_A} \text{ y } g_{cB} = g_{cA} \left( \frac{l_c}{R_A} \right)$$

Notar en particular la relación entre los campos sin masa de ambas teorías:

- En sector NS-NS, campos de IIA y IIB coinciden:

$$\varphi, B_{\mu\nu}, h_{\mu\nu}$$

- En sector R-R, IIA tiene  $C_{(1)}, C_{(3)}$  y IIB tiene  $C_{(0)}, C_{(2)}, C_{(4)}^+$ . Sabemos que

$$\mathbb{T}_c: |s\rangle \rightarrow |s\rangle, |\tilde{s}\rangle \rightarrow (\mathbb{T}^c)_{\tilde{s}\tilde{s}'} |\tilde{s}'\rangle,$$

donde  $\mathbb{T}_c \equiv \Gamma^c \Gamma$  es la matriz de paridad en dirección de  $x^c$  (anticomuta con  $\Gamma^c$ , conmuta con  $\Gamma^a$ ). P.ej., si  $c=9$ , tenemos

$$\Gamma^9 \propto b_4^+ - b_4 \Rightarrow \mathbb{T}^9 |\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_3, \pm \frac{1}{2}\rangle \propto |\tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_3, \mp \frac{1}{2}\rangle$$

Tenemos por tanto

$$(C \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n})_{s\tilde{s}} |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R} \xrightarrow{\mathbb{T}_c} \pm (C \underbrace{\Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} \Gamma^c}_{(\Gamma^c)^2 = +1}) |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R}$$

$\Rightarrow$  si  $\Gamma^c$  estaba presente se cancela; si no, se agrega

Vemos entonces que

$$\begin{array}{ccc}
 \text{IIA} & \xrightarrow{\mathbb{T}_c} & \text{IIB} \\
 C_\alpha & \longleftrightarrow & C_{\alpha c} \\
 C_c & \longleftrightarrow & C \\
 C_{\alpha\beta\gamma} & \longleftrightarrow & C_{\alpha\beta\gamma c} \\
 C_{\alpha\beta c} & \longleftrightarrow & C_{\alpha\beta}
 \end{array}$$

De manera similar, las supercargas

$$Q, \tilde{Q} \xrightarrow{\mathbb{T}_c} Q, \pi_c \tilde{Q} .$$

Notar además que, en el caso de varias dimensiones compactas,

$$\mathbb{T}_{c_1 \dots c_d} : \text{IIA} \longrightarrow \begin{cases} \text{IIA} & \text{si } d \in 2\mathbb{Z} \\ \text{IIB} & \text{si } d \in 2\mathbb{Z} + 1 \end{cases}$$



Examinemos ahora el caso de la cuerda heterótica.  
 Conviene usar para modos izquierdos descripción puramente bosónica,

$$\lambda^A(z) \quad A=1, \dots, 32 \longrightarrow \chi^{9+h}(z) \quad h=1, \dots, 16$$

Tras compactificar en  $T^d$  imponemos

condición de periodicidad sobre  $x^c$ ,  $c=10-d, \dots, 9$

y  $\therefore$  obtenemos momentos

$$K^\nu \equiv \frac{l_c}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} k_{\mathbb{I}}^{9+h} \\ k_{\mathbb{I}}^c \\ k_{\mathbb{D}}^c \end{pmatrix} \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^{16+d, d},$$

con  $\mathcal{R}$  red par autodual con signatura  $(16+d, d)$

$$(K \cdot K \equiv \frac{l_c^2}{2} (k_{\mathbb{I}}^{9+h} \delta_{hh'} k_{\mathbb{I}}^{9+h'} + k_{\mathbb{I}}^c G_{cc'} k_{\mathbb{I}}^{c'} - k_{\mathbb{D}}^c G_{cc'} k_{\mathbb{D}}^{c'})).$$

Consideremos primero teoría sin compactificar ( $d=0$ ).

En este caso  $\mathcal{R}$  es una red euclídea (signatura

$(16, 0)$ ). Se sabe que, módulo rotaciones  $O(16)$ ,

$\exists$  exactamente 2 redes pares autoduales en  $\mathbb{R}^{16}$ :

$$\mathcal{R}_{16} \equiv \left\{ (n_1, \dots, n_{16}), (n_1 + \frac{1}{2}, \dots, n_{16} + \frac{1}{2}) \mid n_r \in \mathbb{Z}, \sum_{r=1}^{16} n_r \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

y  
 $\mathcal{R}_8 \times \mathcal{R}_8$ , donde

$$\mathcal{R}_8 \equiv \left\{ (n_1, \dots, n_8), (n_1 + \frac{1}{2}, \dots, n_8 + \frac{1}{2}) \mid n_r \in \mathbb{Z}, \sum_{r=1}^{\infty} n_r \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

Recordando que

$$m^2 = \underbrace{k_{I_{9+h}} k_{I_{9+h}}}_{\frac{2}{\alpha'}} + \frac{4}{\alpha'} (N-1) = \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - \tilde{\Delta})$$

↑ como en  
supercuerdas

$$\frac{2}{\alpha'} K_h K_h \equiv \frac{2}{\alpha'} \tilde{T}_h \tilde{T}_h \equiv \frac{2}{\alpha'} \tilde{T}^2$$

observamos que estados sin masa tienen

$$* \tilde{T}^2 = 0, N=1: \sum_{\mu} \alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\Psi}_{-1/2}^{\nu} |0,0; k_{\mu}, 0^{16}\rangle \leftrightarrow \varphi_{\mu\nu}^h$$

$$\sum_{\mu} \alpha_{-1}^{9+h} \tilde{\Psi}_{-1/2}^{\mu} |0,0; k_{\mu}, 0^{16}\rangle \leftrightarrow A_{\mu}^h$$

↑  $\tilde{T}$

bosones de norma en 16 direcciones  $t_h$   
 que conmutan ("subálgebra de Cartan")

Operadores de vértice  $i\partial X^{9+h}(z)$



$$\ast \quad \overset{\circ}{\mathfrak{g}^2=2, N=0} : \quad \sum_{\mu} \binom{\mathfrak{g}}{\mu} \Psi_{-1/2}^{\mu} |0,0, \mu; \mathfrak{g}\rangle \leftrightarrow A_{\mu}^{\mathfrak{g}}$$

bosones de norma en 480 direcciones  
de  $t_{\mathfrak{g}}$  con carga  $\mathfrak{g}_h$  bajo  $t_h$ :

Operadores de Vértice  $e^{ik_{Ih} X^h(z)}$  ;  
 $i\partial X^{\mathfrak{g}+h}(z) : e^{ik_{Ih} X^h(0)} : \sim \sum' \frac{k_{I\mathfrak{g}+h}}{z} : e^{ik_{Ih} X^h(z)} :$

$$\Rightarrow [t_h, t_{\mathfrak{g}}] = \mathfrak{g}_h t_{\mathfrak{g}}$$

•  $\mathcal{R}_{16}$  :  $\mathfrak{g} = (\pm 1, \pm 1, 0^{14})$  ó permutaciones

$$4 \binom{16}{2} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 15}{2} = 480$$

480 "Raíces" de  $so(32) \Rightarrow$  Grupo de Norma es  $SO(32)$

•  $\mathcal{R}_8 \times \mathcal{R}_8$  :  $\mathfrak{g} = (\pm 1, \pm 1, 0^6, 0^8)$  ó  $(0^8, \pm 1, \pm 1, 0^6)$

ó permutaciones  $4 \binom{8}{2} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 7}{2} = 112$  112

ó  $\mathfrak{g} = (\pm \frac{1}{2}^8, 0^8)$  ó  $(0^8, \pm \frac{1}{2}^8)$  ó permutaciones

% número par de  $-\frac{1}{2}$ 's

$$1 + \binom{8}{2} + \binom{8}{4} + \binom{8}{6} + 1 = 128$$

240+240 "Raíces" de  $E_8 \times E_8 \Rightarrow$  grupo de Norma  $E_8 \times E_8$

Recuperamos entonces las 2 teorías de cuerdas conocidas.

Para  $d \geq 1$ , se sabe que existe una sola red por autodual, es decir, todas las redes con estas características están conectadas entre sí por rotaciones  $O(16+d, d, \mathbb{R})$ .

Por analogía con cuerda bosónica, el espacio de compactificaciones que a primera vista parecerían dar teorías distintas es

$$\frac{O(16+d, d, \mathbb{R})}{O(16+d, \mathbb{R}) \times O(d, \mathbb{R})}, \text{ el cual tiene dimensión}$$

$$\frac{(16+2d)(15+2d)}{2} - \frac{(16+d)(15+d)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} = d^2 + 16d$$

En términos de los campos que definen la compactificación,

$$G_{cc'}, B_{cc'} \implies \frac{d(d+1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2} = d^2 \text{ parámetros}$$

$$+ A_c^h \quad h=1, \dots, 16 \implies \frac{16d \text{ parámetros}}{d^2 + 16d} \quad \checkmark$$

$\uparrow$  constante  
 Total

( $\therefore$  pura norma, como B)

Para los campos de norma vectoriales ( $\leftrightarrow$  líneas de Wilson), tenemos 16 parámetros porque este es el rango del grupo ( $so(32)$  ó  $E_8 \times E_8$ ).

El punto es que  $\mathcal{L}_{SYM} \sim \text{Tr}(F^2)$  incluye

potencial  $\propto \text{Tr}([A_c, A_{c'}]^2)$ , de modo que para tener solución estática a las ecs. de mpv.

debemos tomar  $A_c$ 's constantes y simultáneamente diagonalizables. Es decir, escribiendo

$$A_c = A_c^h t_h + A_c^{\tilde{q}} t_{\tilde{q}},$$

debemos poner  $A_c^{\tilde{q}} = 0$  y elegir valores de  $A_c^h$ .

En presencia de  $G_{cc'}$ ,  $B_{cc'}$ ,  $A_c^h$  (y en coords.

tales que  $x^c \simeq x^c + 2\pi l_c$ ), cuantización canónica da

$$k_{\pm}^c = \frac{n_c}{l_c} + (\pm G_{cc'} + B_{cc'}) \frac{e^{c'}}{l_c} - A_c^h \tilde{q}^h - A_c^h A_{c'}^h \frac{e^{c'} l_c}{2},$$

$$k_{\pm}^{\tilde{q}+h} = \frac{\sqrt{2}}{l_c} (\tilde{q}^h + A_c^h e^c l_c), \quad c/\tilde{q}^h \in \begin{cases} \mathbb{R}_{16} & \text{en HO} \\ \mathbb{R}_9 \times \mathbb{R}_8 & \text{en HE} \end{cases}$$

[ver Nair, Sarmadi, Witten, NPB 279 (1987), 369]

Como en el caso de la cuerda bosónica, las transformaciones discretas que dejan al espectro

$$m^2 = k_{I_c} G^{cc'} k_{I_{c'}} + k_{I_{q+h}} \delta^{hh'} k_{I_{q+h}'} + \frac{4}{\alpha'} (N-1)$$

invariante forman grupo de dualidad  $T$

$O(16+d, d, \mathbb{Z})$ , y es generado por difeos grandes, corrimientos enteros de  $B_{cc'}$  ó  $A_c^h$ , y transformaciones  $R \leftrightarrow 1/R$  sobre cada eje.

Un punto interesante es que, dado que (módulo  $O(16+d, d, \mathbb{R})$ ) existe una sola red para auto dual  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{16+d, d}$ , debemos obtener el mismo conjunto de redes (y  $\therefore$  teorías) al compactificar HO ó HE...

Es decir, ¡  $\boxed{HO \xleftrightarrow{T} HE}!$

Para ver esto un poco más de cerca, consideremos por simplicidad el caso  $d=1$ , donde, en presencia de  $A_{c=9}^h$ , tenemos

$$k_{\pm}^q = \frac{n}{R} \pm \frac{eR}{l_c^2} - \eta_h A_q^h - \frac{eR}{2} A_c^h A_c^h$$

$$k_{\pm}^{q+h} = \frac{\sqrt{2}}{l_c} (\eta_h + eR A_q^h) \quad \eta_h \in \begin{cases} \mathcal{R}_{16} & \text{en HO} \\ \mathcal{R}_8 \times \mathcal{R}_8 & \text{en HE} \end{cases}$$

donde ahora hemos usado  $\text{Gord } x^q \simeq x^q + 2\pi R \leftrightarrow \theta_{\eta} = 1$ .

$$\left( \text{se puede ver que } K \circ K = \frac{l_c^2}{2} (k_{\pm}^2 - k_{\pm}^2) = 2en + \eta^2 \in 2\mathbb{Z} \checkmark \right)$$

• Si elegimos ahora HO con radio  $R$  y línea de Wilson

$$A_q^h = \begin{cases} \frac{1}{2R} & h=1, \dots, 8 \\ 0 & h=9, \dots, 16 \end{cases} \quad \left( \Rightarrow A_q^h A_q^h = 8 \left( \frac{1}{2R} \right)^2 = \frac{2}{R^2} \right),$$

encontramos que

$$k_{\pm}^q = \frac{n - \frac{1}{2}(\eta_1 + \dots + \eta_8) - e}{R} \pm \frac{eR}{l_c^2}$$

$$k_{\pm}^{q+h} = \frac{\sqrt{2}}{l_c} \times \begin{cases} \eta_h + \frac{e}{2} & \text{si } h=1, \dots, 8 \\ \eta_h & \text{si } h=9, \dots, 16 \end{cases} \quad \forall \eta \in \mathcal{R}_{16}$$

$$\text{A partir de } m^2 = (k_{\pm}^q)^2 + k_{\pm}^{q+h} k_{\pm}^{q+h} + \frac{4}{\alpha'} (N-1)$$

vemos que para  $n=e=N=0$  solo los estados

con  $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_8 = 0$  (y  $\eta^2 = 2$ ) permanecen

sin masa, es decir,

$$\vec{\eta} = (\underbrace{\pm 1, \mp 1, 0^6, 0^8}_{\text{con signos coordinados}})$$

$$+ \text{permutaciones: } 2 \binom{8}{2} = 56$$

$$\text{ó } \vec{\eta} = (0^8, \underbrace{\pm 1, \pm 1, 0^6}_{\text{cualquier combinación de signos}})$$

$$+ \text{permutaciones: } 4 \binom{8}{2} = 112$$

El grupo de norma no roto por línea de Wilson resulta ser  $G = U(8) \times SO(16)$ .

- Si elegimos en cambio HE con radio  $R'$  y

$$A'_9{}^h = \begin{cases} \frac{1}{R'} & h=1,9 \\ 0 & h \neq 1,9 \end{cases} \quad (\Rightarrow A'_9{}^h A'_9{}^h = \frac{2}{R'^2})$$

encontramos que

$$k_{\text{I}}'^9 = \frac{n' - \eta'_1 - \eta'_9 - e'}{R'} \pm \frac{e'R'}{l_c^2}$$

$$k_{\text{I}}'^{9+h} = \frac{\sqrt{2}}{l_c} \times \begin{cases} \eta'_h + e' & \text{si } h=1,9 \\ \eta'_h & \text{si } h \neq 1,9 \end{cases} \quad \text{c/ } \eta' \in \Lambda_8 \times \Lambda_8$$

a partir de lo cual se puede deducir que el grupo de norma es  $G' = U(8) \times SO(16)$ .

Es posible mostrar que estas 2 redes están conectadas por dualidad  $T$ , con  $R' = \frac{l_c^2}{R}$ .

El mapeo del estado general  $(\bar{q}, n, e) \rightarrow (\bar{q}', n', e')$  es complicado [ver Ginsparg, PRD 35 (1987), 648]; pero resulta fácil de ver explícitamente en subsector con  $k_I^{q+n} = 0 = k_I'^{q'+n}$ .

Para estos estados tenemos

$$\bar{q}_h = \begin{cases} -e/2 & h=1, \dots, 8 \\ 0 & h=9, \dots, 16 \end{cases} \Rightarrow k_{\substack{I \\ D}}^{\bar{q}} = \frac{n+e}{R} \pm \frac{eR}{l_c^2},$$

$$y \quad \bar{q}'_h = \begin{cases} -e & h=1, 9 \\ 0 & h \neq 1, 9 \end{cases} \Rightarrow k_{\substack{I \\ D}}^{\bar{q}'} = \frac{n'+e'}{R'} \pm \frac{e'R'}{l_c^2},$$

que satisfacen  $k_I^{\bar{q}'} = k_I^{\bar{q}}$ ,  $k_D^{\bar{q}'} = -k_D^{\bar{q}}$  bajo

$$R' = \frac{l_c^2}{R}, \quad e' = n+e, \quad n' = -n \quad (\Rightarrow e+n' = e).$$

26/09/06

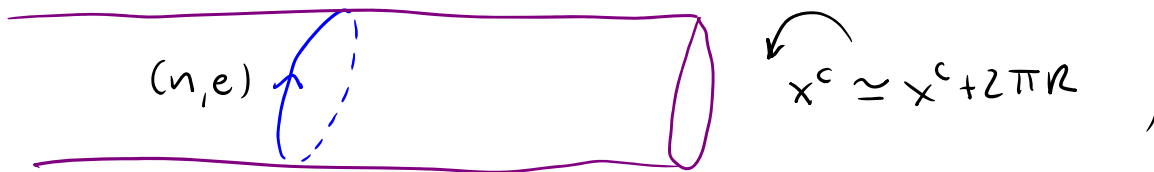
¿Qué pasa con teoría tipo I bajo  $T$ ?

2 novedades  $\left\{ \begin{array}{l} \text{cuerdas abiertas} \\ \text{cuerdas no orientadas} \end{array} \right.$

Estudiaremos cada una por separado.

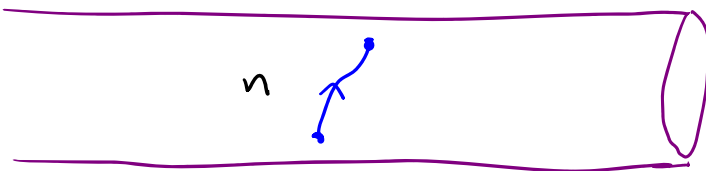
Consideremos primero teoría con cuerdas abiertas orientadas (pej., cuerda bosónica).

Incluye necesariamente cuerdas cerradas, y sabemos que al compactificar en  $S^1$ ,



$T$ :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{sector de cuerdas} \\ \text{cerradas con } (n, e) \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{sector de cuerdas cerradas} \\ \text{con } (n_T, e_T) = (e, n) \end{array} \right.$

¿Qué sucede con el sector de cuerdas abiertas?



Posee número KK pero no enrollamiento,  $\therefore$  No puede mapearse a sector de cuerdas abiertas q/mismas propiedades.



En particular, cuando  $R \rightarrow 0$  tenemos

$$m^2 \sim \left(\frac{n}{R}\right)^2 \rightarrow \infty \text{ si } n \neq 0 \Rightarrow \text{reducción dimensional!}$$

Es decir, las cuerdas abiertas en descripción T-dual se mueven no en  $D$  sino en solo  $D-1$  dimensiones...

¿Cómo es que esto no contradice el hecho de que tendremos cuerdas cerradas en  $D$  dimensiones?

Lo que distingue a las cuerdas abiertas de las cerradas son sus extremos, donde imponemos ciertas condiciones de borde.

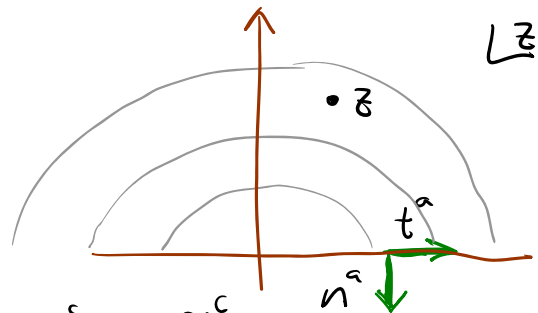
En la teoría original,

$$X^c(z, \bar{z}) = X^c(z) + \tilde{X}^c(\bar{z})$$

imponemos c.b. Neumann

(extremo libre):  $\partial_n X^c \Big|_{\partial M} = 0 \leftrightarrow \partial X^c \Big|_{z=\bar{z}} = \bar{\partial} \tilde{X}^c \Big|_{z=\bar{z}}$

$\underbrace{\partial_n}_{\equiv \tilde{n}^a \partial_a} = \partial_\sigma \quad \leftarrow \quad \partial_\sigma = i(z\partial_z - \bar{z}\partial_{\bar{z}})$



$$\Rightarrow X^c(\bar{z}) = \tilde{X}^c(\bar{z}) \text{ impuesto en } z = \bar{z};$$

truco de duplicación es usar  $\forall z$ , es decir,

$$X^c(z, \bar{z}) = X^c(z) + X^c(\bar{z}).$$

En teoría  $T$  dual tendremos entonces

$$X_{\mathbb{T}}^c(z, \bar{z}) = X_{\mathbb{T}}^c(z) + \tilde{X}_{\mathbb{T}}^c(\bar{z}) = X^c(z) - \tilde{X}^c(\bar{z}),$$

con condiciones de borde  $\partial X|_{z=\bar{z}} = \bar{\partial} \tilde{X}|_{z=\bar{z}}$

$$\Rightarrow \partial X_{\mathbb{T}}^c|_{z=\bar{z}} = -\bar{\partial} \tilde{X}_{\mathbb{T}}^c|_{z=\bar{z}} \iff \partial_t X_{\mathbb{T}}^c|_{\partial\mathcal{M}} = 0$$

$\uparrow$   $\partial_{\bar{z}} = i(z\partial_z + \bar{z}\partial_{\bar{z}})$   $\uparrow$   $\underbrace{\partial_t}_{\equiv t^a \partial_a} = \partial_c$

es decir, c.b. Dirichlet (extremo fijo).

Podemos satisfacerlas tomando

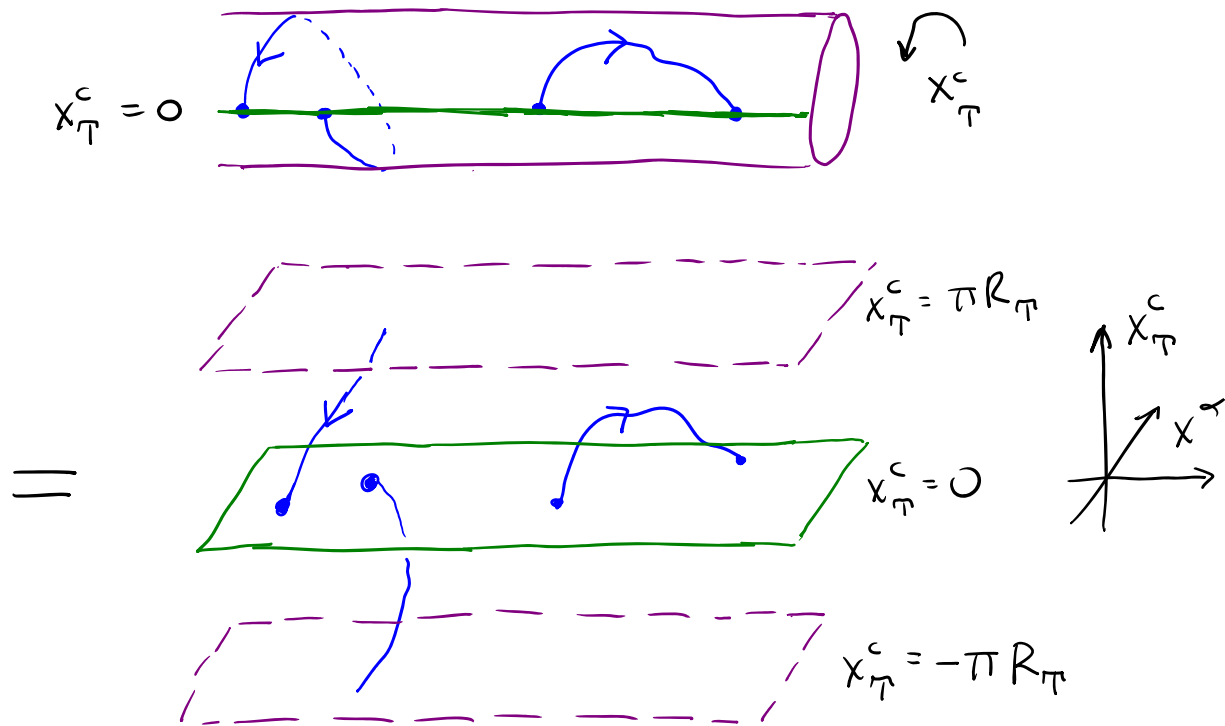
$$X_{\mathbb{T}}^c(\bar{z}) = -\tilde{X}_{\mathbb{T}}^c(\bar{z}) \quad \text{impuesto en } z=\bar{z};$$

truco de duplicación es usar  $\forall z$ , es decir,

$$X_{\mathbb{T}}^c(z, \bar{z}) = X_{\mathbb{T}}^c(z) - X_{\mathbb{T}}^c(\bar{z}).$$

En cualquier caso, tenemos  $X_{\mathbb{T}}^c(z, \bar{z}) = 0 \quad \forall z=\bar{z}$ ,

de donde vemos que ambos extremos de la cuerda abierta están fijos en  $x_{\mathbb{T}}^c = 0$  (aunque pueden moverse libremente a lo largo de  $x^{\alpha}$ ):



Semejante cuerda abierta no puede tener números KK  $n_\pi (=e=0)$ , pero sí enrollamiento  $e_\pi$ :

$$\begin{aligned}
 X_\pi^c(\sigma=\pi, \tau) - X_\pi^c(\sigma=0, \tau) &= \int_0^\pi d\sigma \underbrace{\partial_\sigma X_\pi^c(\sigma, \tau)}_{i(\bar{z}\partial X_\pi^c(z) - \bar{z}\bar{\partial} X_\pi^c(\bar{z}))} \\
 &= \int_0^\pi d\sigma \underbrace{\partial_\sigma X_\pi^c(\sigma, \tau)}_{i(\bar{z}\partial X_\pi^c(z) + \bar{z}\bar{\partial} X_\pi^c(\bar{z}))} \\
 &= 2\pi\alpha' \left(\frac{n}{R}\right) \equiv e_\pi 2\pi R_\pi
 \end{aligned}$$

con  $e_\pi = n$

Recordemos ahora que, en teoría original, espectro es

$$M^2 = \left(\frac{n}{\alpha'}\right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N-1),$$

y estados sin masa  $\alpha'^{M/2} |0; k_\alpha, 0\rangle$  representan fotón: fluctuación infinitesimal en campo de norma  $A_\mu(x)$  definido en  $D$  dimensiones.

El operador de vértice correspondiente es  $\partial_\tau X^\mu$

$$(\leftrightarrow \partial_\tau X^\mu \leftrightarrow \partial X^\mu + \bar{\partial} \tilde{X}^\mu = 2\partial X^\mu), \quad \text{y } \therefore$$

cuerda abierta en fondo  $A_\mu(x)$  no trivial se describe con

$$S \rightarrow S + \int d\tau A_\mu(X) \partial_\tau X^\mu$$

El término adicional modifica las condiciones de borde:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X_\mu \partial_a X^\mu + \int d\tau A_\mu \partial_\tau X^\mu$$

$$\begin{aligned} \delta X^\mu \implies \delta S &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial^2 X^\mu \delta X_\mu \\ &+ \int d\tau \left[ \frac{1}{2\pi\alpha'} \delta X_\mu \partial_\sigma X^\mu + \delta X^\nu \partial_\nu A_\mu \partial_\tau X^\mu + A_\mu \partial_\tau \delta X^\mu \right] \\ &\quad - \underbrace{\partial_\tau X^\mu \partial_\nu A_\mu \delta X^\nu} \end{aligned}$$

así que condiciones de borde son ahora

$$\partial_\sigma X^{\mu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu} \partial_\tau X^\nu = 0$$

(las cuales se reducen a Neumann usual cuando  $F_{\mu\nu} = 0$ ).

Recordemos también que no cualquier  $A_\mu(x)$  constituye un fondo consistente para la propagación de la cuerda:  $A_\mu(x)$  debe definir teoría 2-dim conforme, para lo cual es necesario que satisfaga ec. de mov.

Al orden más bajo en  $\alpha'$ , esta ecuación es simplemente la de Maxwell en el vacío:  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ .

Las soluciones más sencillas son aquellas con

$$F_{\mu\nu} = \text{constante} \iff A_\mu \text{ lineal.}$$

Para poder discutir dualidad T, tomemos

$$A_\mu = A_\mu(x^\alpha) = F_{\alpha\mu} x^\alpha \quad (\text{independiente de } x^c),$$

o, para ser más concretos,  $A_\alpha = 0$ ,  $A_c = f X^1$ .

En este caso, condiciones de borde para cuerda abierta son

$$\partial_\sigma X^1 + 2\pi\alpha' \partial_\tau X^c = 0, \quad \partial_\sigma X^c - 2\pi\alpha' f \partial_\tau X^1 = 0 \quad (\text{y } \partial_\sigma X^{\alpha \neq 1} = 0).$$

En descripción  $T$ -dual, estas se convierten en

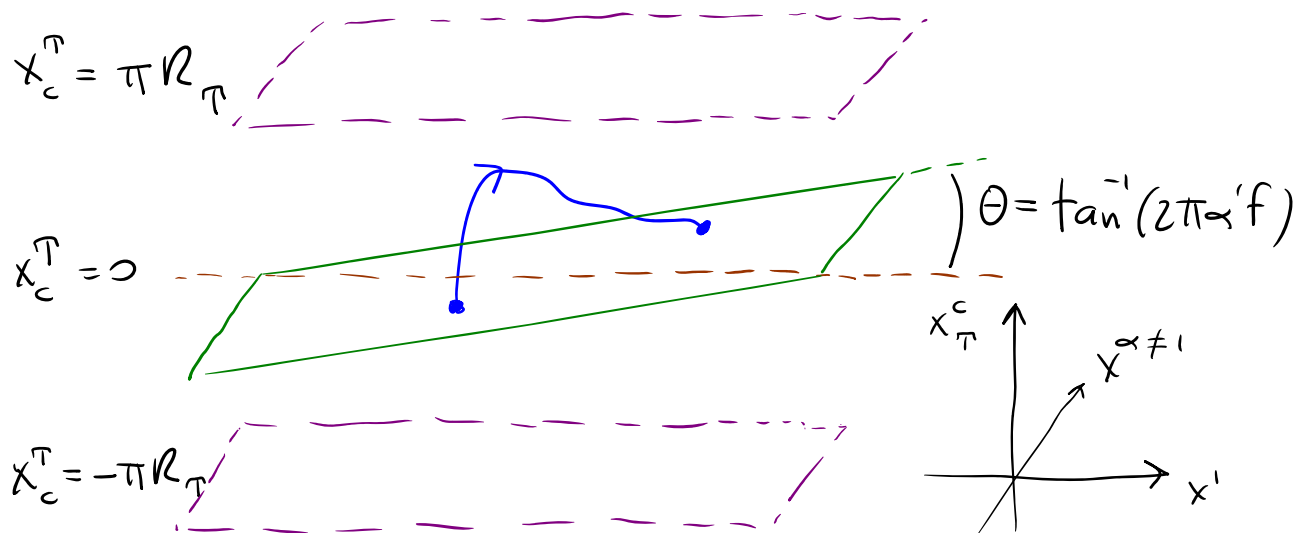
$$\partial_\sigma X' + 2\pi\alpha' f \partial_\sigma X_\tau^c = 0, \quad \partial_\tau X_\tau^c - 2\pi\alpha' f \partial_\tau X' = 0 \quad (\partial_\sigma X^{\alpha \neq 1} = 0)$$

es decir,

$$\partial_\sigma (X' + 2\pi\alpha' f X_\tau^c) = 0 \quad \text{Neumann}$$

$$\partial_\tau (X_\tau^c - \underbrace{2\pi\alpha' f}_{A_c} X') = 0 \quad \text{Dirichlet}$$

de donde vemos que ambos extremos de la cuerda están ahora fijos sobre un hiperplano inclinado:



La conclusión es entonces que, en teoría  $T$ -dual,

$\Phi_c(x^\alpha) \equiv 2\pi\alpha' A_c(x^\alpha)$  describe la posición del

hiperplano en la dirección  $X_\tau^c$ .

El ejemplo que hemos visto es

$$F_{ic}(x^\alpha) = f \iff A_c(x^\alpha) = f x^i \iff \underline{\Phi}_c(x^\alpha) = 2\pi\alpha' f x^i$$

Campo magnético

Hiperplano inclinado con  
pendiente cte.  $\tan\theta = 2\pi\alpha' f$

pero igualmente es posible ver que

$$F_{oc}(x^\alpha) = f \iff A_c(x^\alpha) = f x^o \iff \underline{\Phi}_c(x^\alpha) = 2\pi\alpha' f x^o$$

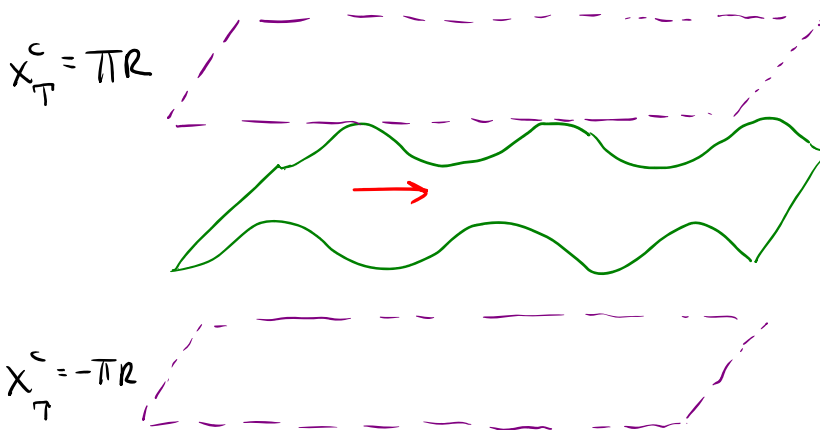
Campo eléctrico

Hiperplano moviéndose  
con velocidad cte.  $v = 2\pi\alpha' f$

Otro ejemplo es onda electromagnética plana,

$$A_c(x^\alpha) = \int dk e^{ik(x^i - x^o)} f(k), \text{ que también resuelve}$$

ec. de Maxwell, y corresponde a hiperplano ondulatorio:



$$\underline{\Phi}_c(x^\alpha) = \int dk e^{ik(x^i - x^o)} 2\pi\alpha' f(k)$$

[ver Callan y Klebanov,  
hep-th/9511173]

Vemos entonces que el hiperplano es un objeto dinámico, capaz de cambiar su orientación, moverse u oscilar: **D-brana**  $\left\{ \begin{array}{l} \text{"D" de Dirichlet} \\ \text{"brana" de membrana} \end{array} \right.$

Regresando al caso con fondo  $A_c = 0$  ( $\Leftrightarrow \Phi_c = 0$ ), espectro de cuerda abierta en descripción T-dual es

$$m^2 = \left( \frac{e_\pi R_\pi}{\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N-1)$$

Los estados sin masa son ahora de 2 tipos distintos:

$$\alpha_{-1}^\alpha |0; k, 0\rangle \xleftrightarrow{e_\pi} \text{Vértice } \partial_c X^\alpha$$

y

$$\alpha_{-1}^c |0; k, 0\rangle \xleftrightarrow{} \text{Vértice } \partial_r X^c$$

El primero representa una fluctuación infinitesimal en campo de norma  $A_\alpha(x^\alpha)$  que vive sobre hiperplano. El segundo representa una fluctuación infinitesimal en la posición del hiperplano ("coordenada colectiva") a lo largo de la única dirección transversal  $x_\pi^c$ ; es el bosón de Goldstone asociado a la ruptura espontánea de la invariancia translacional.



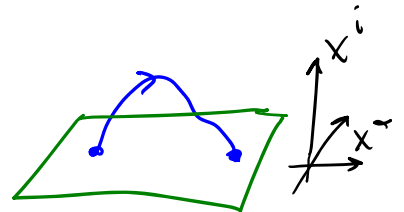
Nuestra conclusión es entonces que, justo como las cuerdas cerradas describen excitaciones de la generalización cuerdística del espaciotiempo, las cuerdas abiertas describen excitaciones de la D-brana en la cual se encuentran sus extremos.

[28/09/06]

Notar que podemos generalizar fácilmente al caso donde T-dualizamos más direcciones:

$$T_{\underbrace{D-1, D-2, \dots, p+1}_{l \equiv D-p-1 \text{ direcciones}}} \Rightarrow \text{c.b.} \begin{cases} \partial_n X^\alpha = 0 & \alpha = 0, \dots, p \text{ Neumann} \\ \partial_t X^i = 0 & i = p+1, \dots, D-1 \text{ Dirichlet} \end{cases}$$

donde lo que obtenemos es una **D<sub>p</sub>-brana** (hiperplano con p dimensiones espaciales),



cuyas excitaciones nuevamente son unidimensionales — están descritas por cuerdas abiertas que empiezan y terminan en la brana. La cuantización de estas cuerdas da lugar a una torre infinita de estados, asociados a campos que viven sobre el hiperplano.

En particular, tenemos campos sin masa

$A_\alpha(x^\alpha)$  : campo de norma sobre  $D_p$ -brana


$\Phi^i(x^\alpha)$  : Campos escalares sobre  $D_p$ -brana,  
que describen su posición en las  $D-p-1$   
direcciones transversales.

Hemos descubierto entonces una nueva serie de  
objetos extendidos en la teoría de cuerdas, conectados

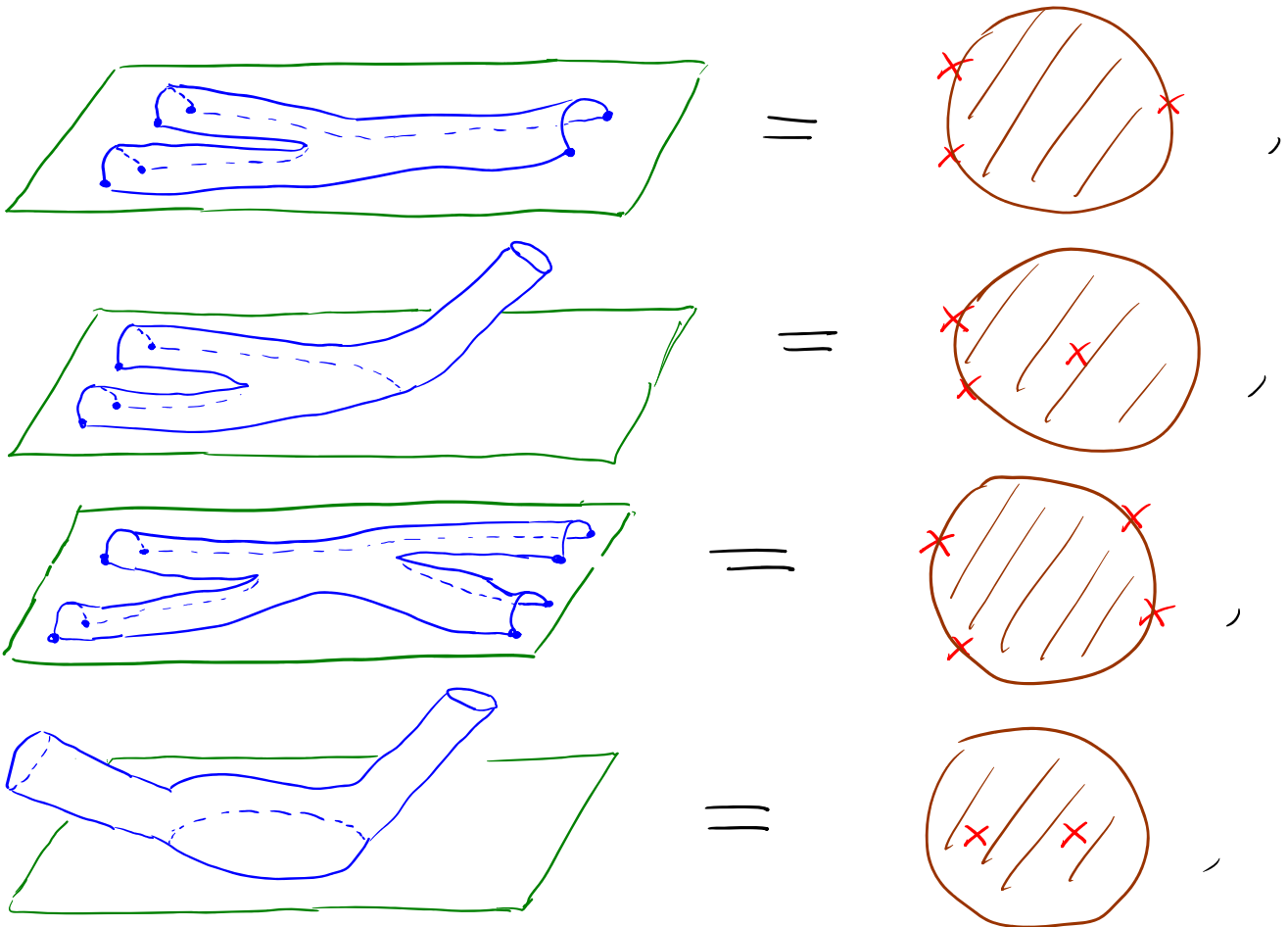
entre sí a través de  $D_p \xrightarrow{T_\mu} \begin{cases} D(p-1) & \text{si } \mu = \alpha \\ D(p+1) & \text{si } \mu = i \end{cases}$

Notar que antes de T-dualizar ( $l=0$ ) teníamos, sin  
saberlo, una  $D(D-1)$ -brana ( $D25$ -brana en el caso  
de la cuerda bosónica,  $D9$ -brana en supercuerda):

hiperplano que llena TODO el espacio, cuyas excitaciones  
son  $\therefore$  cuerdas abiertas que se mueven libremente en  
todas las direcciones.

En el extremo opuesto, si T-dualizamos todas las  
direcciones ( $l=D-1$ ), obtenemos una  $D0$ -brana,   
que es una partícula ¡con una torre infinita de excitaciones!

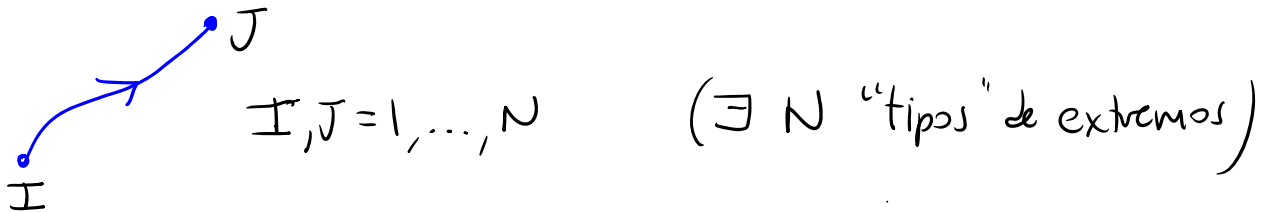
Notar que podemos determinar la manera en que interactúan entre sí (o con el entorno) las distintas excitaciones de la D-brana calculando amplitudes de dispersión de cuerdas abiertas (o abiertas y cerradas):



etc. [ver, p.ej., Hashimoto, Klebanov, hep-th/9611214]

Otra generalización: factores de Chan-Paton.

Recordar que, en teoría original donde cuerda abierta satisface c.b. puramente Neumann, es posible obtener campo de norma no abeliano postulando que en cada extremo existe un grado de libertad adicional, no dinámico, que puede estar en uno de  $N$  estados:



El estado general es entonces una combinación lineal

$$\Lambda_{IJ} |\dots; IJ\rangle \longleftrightarrow \phi_{\dots IJ}(x),$$

↖ factor de Chan-Paton

y las amplitudes incluyen factores  $\text{Tr}(\Lambda^{(1)} \Lambda^{(2)} \dots)$ .

Tanto el espectro como las amplitudes son evidentemente invariantes bajo transformaciones  $U(N)$

$$\Lambda \longrightarrow \Lambda' = U \Lambda U^{-1} = U \Lambda U^{\dagger},$$

(sólo  $SO(N)$  ó  $Sp(N)$  en cuerda no orientada).

Esto equivale a redefinir etiquetas para extremos:

$$|IJ\rangle \rightarrow |I'J'\rangle = U_{II'}^{-1} |IJ\rangle U_{J'J}$$

Es decir, extremo final/inicial transforma en representación fundamental/antifundamental de  $U(N)$ ;

mientras que el estado en conjunto transforma

en representación adjunta. En caso infinitesimal,

$$\Lambda \rightarrow \Lambda' = e^{i\epsilon^r t_r} \Lambda e^{-i\epsilon^r t_r} = \Lambda + i\epsilon^r [t_r, \Lambda] + \dots$$

Tomando  $U(1)_1 \times U(1)_2 \times \dots \times U(1)_N \subset U(N)$ ,

$N$  generadores simultáneamente diagonalizables

$$t_h = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{i.e., } (t_h)_{IJ} = \delta_{hI} \delta_{hJ})$$

$N^2 - N$  generadores restantes  $(t_q)_{IJ} = \delta_{iI} \delta_{jJ}$

$$[t_h, t_q] = q_h t_q \quad q_h = \begin{cases} +1 & h=i \\ -1 & h=j \\ 0 & h \neq i, j \end{cases}$$

vernos que estado  $|ij\rangle \leftrightarrow \Lambda_{IJ} = \delta_{iI} \delta_{iJ}$

porta carga  $q_i = +1$  bajo  $U(1)_i$  y  $q_j = -1$  bajo  $U(1)_j$ .

Consideremos ahora el efecto de encender un valor de fondo constante para el campo de norma,

$$A_c^h \equiv \frac{\theta_h}{2\pi R} \quad h=1, \dots, N$$

(con  $1 \leq \theta_h < 2\pi$ , porque  $k\alpha$  de Wilson

$$\exp\left[i\oint dx^c A_c^h t_h\right] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 0 & e^{i2\pi R A_c^h} & \\ & & \dots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

es invariante bajo  $A_c^h \rightarrow A_c^h + \frac{\lambda}{R} \quad \lambda \in \mathbb{Z}$ ).

En su presencia, acoplamiento  $\frac{1}{T_h} \int d\tau A_c^h \partial_\tau X^c$  corre la definición del momento conjugado a  $X^c$ ,

que ahora es

$$P_c = \frac{h}{R} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \partial_\tau X^c + \frac{\theta_i - \theta_j}{2\pi R}$$

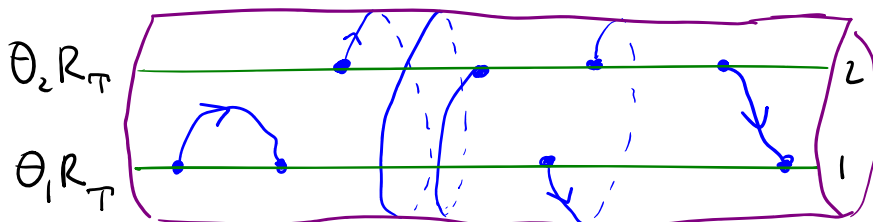
para estado  $|ij\rangle$ .

Pasemos ahora a la descripción T-dual, donde tendremos nuevamente  $N^2$  estados por cada modo de oscilación.

Encontramos que un estado de cuerda abierta del tipo  $|ij\rangle$  tiene número de enrollamiento

$$\begin{aligned} X_{\tau}^c(\sigma=\pi) - X_{\tau}^c(\sigma=0) &= \int_0^{\pi} d\sigma \partial_{\sigma} X_{\tau}^c \\ &= \int_0^{\pi} d\sigma \partial_{\sigma} X^c \\ &= 2\pi\alpha' \left( \frac{n}{R} - \frac{\theta_i - \theta_j}{2\pi R} \right) \\ &= e_{\tau} 2\pi R_{\tau} + \theta_j R_{\tau} - \theta_i R_{\tau} \end{aligned}$$

Dado que cada uno de los extremos de estas  $N^2$  tipos de cuerda abierta vive sobre una D-brana, vemos que tenemos ahora  **$N$  D-branas** en distintas posiciones  $X_{\tau}^c = \theta_1 R_{\tau}, \theta_2 R_{\tau}, \dots, \theta_N R_{\tau}$  :



$ ij\rangle :$	1-1	2-2	1-2	2-1
$e_{\tau} :$	0	+2	-1	0

Confirmamos aquí que  $\Phi_c^h(x^\tau) \equiv 2\pi\alpha' A_c^h(x^\tau)$  describe la posición de la D-brana número  $h$ .  
 Notar que aún en la teoría original teníamos  $N$  D-branas (todas coincidentes, puesto que  $D(D-1)$ -branas llenan todo el espacio), y el grado de libertad de Chan-Paton asociado a cada extremo de una cuerda abierta (simplemente denota a cual de las  $N$  D-branas está adherido!)  
 Y tanto en la descripción original como en la T-dual, la simetría  $U(N)$  se origina simplemente de la posibilidad de reetiquetar a las  $N$  D-branas.

Configuración con:

Lazo de Wilson $A_c^h$	$\Uparrow$ $\longleftrightarrow$	D-branas desplazadas
con $n_1$ $\theta_1/2\pi R$ 's		$n_1$ en $\theta_1 R_\pi$
$n_2$ $\theta_2/2\pi R$ 's		$n_2$ en $\theta_2 R_\pi$
$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$

rompe espontáneamente  $U(N) \rightarrow U(n_1) \times U(n_2) \times \dots$



En teoría T-dual, una cuerda abierta del tipo  $i$ - $j$  debe satisfacer condiciones de borde

$$\begin{cases} \text{en } \sigma=0: & X_{\tau}^c = \theta_i R_{\tau}, \quad \partial_{\sigma} X^{\tau} = 0 \quad \forall \tau \\ \text{en } \sigma=\pi: & X_{\tau}^c = \theta_j R_{\tau} + e_{\tau} 2\pi R_{\tau}, \quad \partial_{\sigma} X^{\tau} = 0 \quad \forall \tau \end{cases}$$

y tiene  $\therefore$  expansión en modos

$$X_{\tau}^c(z, \bar{z}) = \theta_i R_{\tau} + \frac{R_{\tau}}{2\pi i} (2\pi e_{\tau} - \theta_i + \theta_j) \ln\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{m \neq 0} \frac{\alpha_m^c}{m} \left(z^{-m} - \bar{z}^{-m}\right)$$

El espectro resultante es

$$m^2 = \left[ \frac{R_{\tau} (2\pi e_{\tau} + \theta_j - \theta_i)}{2\pi \alpha'} \right]^2 + \frac{1}{\alpha'} (N-1).$$

Si las  $N^2$  D-branas están en la misma posición

(p.ej.  $\theta_h = 0, h=1, \dots, N$ ), obtenemos  $N^2 \cdot D$  estados sin masa

$$(\mathcal{E}_{\alpha})_{IJ} \propto \langle 0, k^{\tau}, 0, IJ \rangle \quad (\mathcal{E}_{\alpha})_{IJ} \propto \langle 0, k^{\tau}, 0, IJ \rangle$$

que representan fluctuaciones en campos en  $D-1$  dimensiones

$$(A_{\alpha})_{IJ} = A_{\alpha}^{\nu}(t_{\nu})_{IJ} \quad \text{campo de norma } U(N)$$

$$(\Phi_c)_{IJ} = \Phi_c^{\nu}(t_{\nu})_{IJ} \quad \text{campo escalar en representación adjunta}$$

$\uparrow$   $N$  objetos  $\leftrightarrow N^2$  grados de libertad!

Si separamos  $\perp$  D-brana, tomando p.ej.

$$\langle \Phi'_c \rangle = \theta_1 R_\tau \neq 0,$$

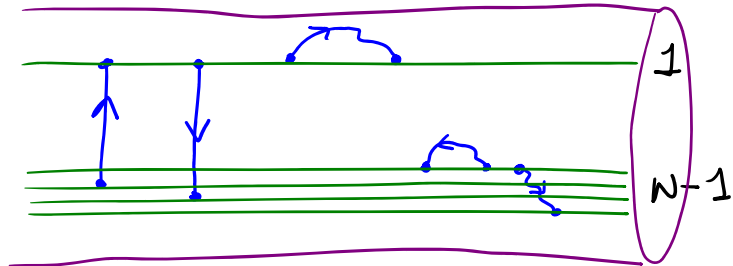
entonces los  $2(N-1) \cdot D$  estados  $|I1\rangle, |1J\rangle$   $I, J \neq 1$

adquieren masa:

$$m = \frac{R_\tau |\theta_1|}{2\pi \alpha'}$$

$$x_\tau^c = R_\tau \theta_1$$

$$x_\tau^c = 0$$



$\therefore$  Grupo de Norma  $U(N) \rightarrow U(N-1) \times U(1)$

En acción efectiva a bajas energías, esto es precisamente el mecanismo de Higgs:

$$\mathcal{L}_{\text{SYM}} \supset \text{Tr}([\Phi_c, A_\alpha]^2) = \text{Tr}(\underbrace{R_\tau^2 \theta_1^2}_{\substack{\varphi, t_\varphi}} [\underbrace{t_1, t_\varphi}_{\substack{\varphi, t_\varphi}}] A_\alpha^\varphi A_\alpha^{\varphi'} [\underbrace{t_1, t_{\varphi'}}_{\substack{\varphi', t_{\varphi'}}}])$$

$$\propto \underbrace{R_\tau^2 \theta_1^2}_{\propto m^2} \sum_{\varphi | \varphi' \neq 0} A_\alpha^\varphi A_\alpha^{\varphi'} \sim \text{bosones } W$$

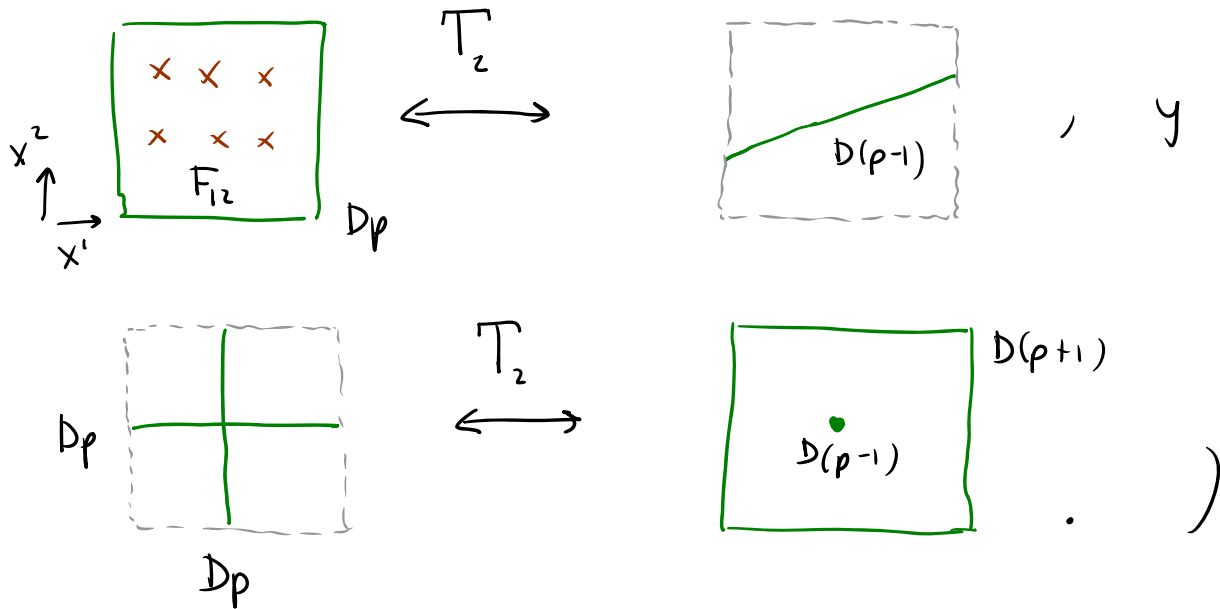
Vale la pena resaltar que el descubrimiento de las D-branas implica una unificación de las teorías con y sin cuerdas abiertas.

En particular, de los  $2 + 2 \times \infty$  tipos de teorías de cuerdas bosónicas (orientadas o no, con o sin cuerdas abiertas, con  $N \geq 1$  grados de libertad de Chan-Paton), podemos concluir directamente que las  $1 + 1 \times \infty$  teorías orientadas son parte de una sola.

En efecto, si comenzamos con la teoría  $U(N)$  con  $N$  arbitrariamente, compactificamos todas las dimensiones espaciales, y encendemos líneas de Wilson  $\Theta_c^h$  y/o campos magnéticos  $F_{cc}^h$ , y/o eléctricos  $F_{oc}^h$  entonces a través de distintas secuencias de dualidades T podemos obtener una teoría con cuerdas cerradas libres de moverse en  $25+1$  dimensiones y cuerdas abiertas con extremos adheridos a  $N$  D-branas de distinta dimensionalidad, ubicadas en

posiciones distintas y/o inclinadas a distintos ángulos  
y/o moviéndose a distintas velocidades.

(Recordar en particular que



Después de ello podemos descompactificar algunas o todas las dimensiones, ajustando los valores de  $\theta_c^h$  para retener solo  $n \in \mathbb{N}$  D-branas cerca del origen (con dimensiones, posiciones, orientaciones y velocidades arbitrarias).  
En nuestra concepción antigua, donde no "veíamos" a las D-branas y nos fijábamos solamente

en lo que hacían las cuerdas cerradas y abiertas, cada una de esta colección infinita de posibles configuraciones hubiera definido una teoría distinta (aunque no habíamos hablado de la mayor parte de ellas porque no poseen invariancia de Poincaré).

Pero ahora entendemos que se trata simplemente de distintos estados dentro de una misma teoría, que se diferencian uno de otro por el número y tipo de  $D_p$ -branas que contienen. Esto incluye en particular al estado con  $n=0$   $D$ -branas, que es precisamente la "teoría" con solo cuerdas cerradas.

---

Para intentar un razonamiento semejante en el caso de las teorías de cuerdas no orientadas (bosónicas o Tipo I), nos falta entender el efecto de la dualidad  $T$  en este contexto.

Consideremos primero cuerdas cerradas no orientadas.  
 Recordar que en este caso la acción de paridad  
 en la hoja de mundo ( $\sigma \leftrightarrow 2\pi - \sigma$ ) es

$$\Omega: \alpha_m^w \leftrightarrow \tilde{\alpha}_m^w, \quad (n, e) \leftrightarrow (n, -e)$$

$$\Rightarrow p_{\frac{I}{D}}^c \leftrightarrow p_{\frac{D}{I}}^c,$$

y que en teoría no orientada retenemos solo los  
 estados que son invariantes bajo esta transformación,

$$\text{como p.ej.}, \quad \alpha_{-1}^w |0, 0; k_\alpha, 1, -1\rangle + \tilde{\alpha}_{-1}^w |0, 0; k_\alpha, 1, 1\rangle.$$

Bajo  $T_c$ , la componente  $\mu=c$  se convierte en

$$\alpha_{-1}^c |0, 0; k_\alpha, -1, 1\rangle - \tilde{\alpha}_{-1}^c |0, 0; k_\alpha, 1, 1\rangle,$$

estado que es simétrico no bajo  $\Omega$ , sino bajo

$$\alpha_m^c \leftrightarrow -\tilde{\alpha}_m^c, \quad (n, e) \leftrightarrow (-n, e)$$

$$\Rightarrow p_{\frac{I}{D}}^c \leftrightarrow -p_{\frac{D}{I}}^c$$

Es decir, lo que en descripción original era

$$\Omega : X^c(z) \leftrightarrow \tilde{X}^c(\bar{z}) \Rightarrow X^c(z, \bar{z}) \leftrightarrow X^c(\bar{z}, z),$$

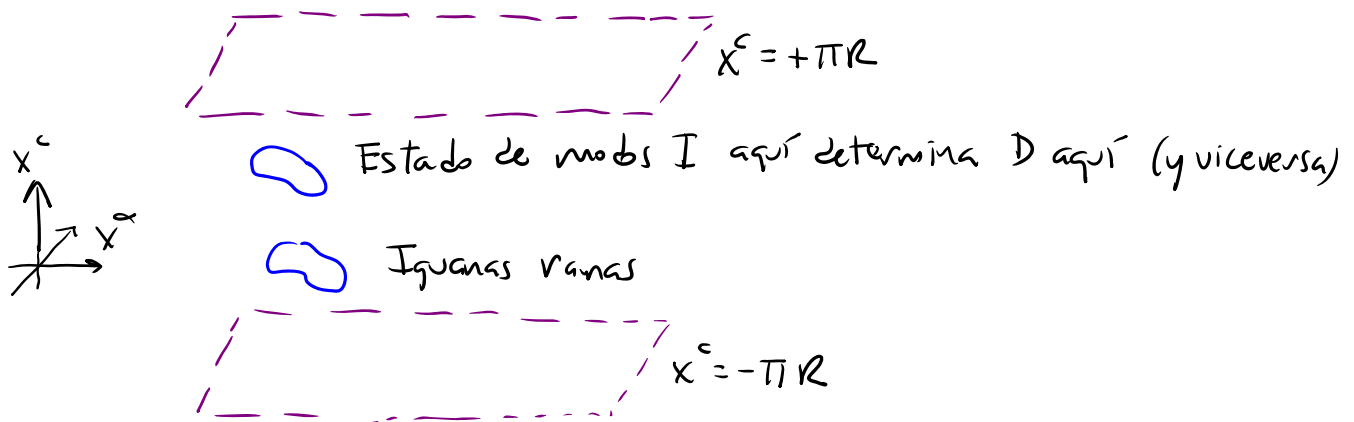
en descripción T-dual se convierte en

$$\Omega \Pi^c : X_{\uparrow}^c(z) \leftrightarrow -\tilde{X}_{\uparrow}^c(\bar{z}) \Rightarrow X_{\uparrow}^c(z, \bar{z}) \leftrightarrow -X_{\uparrow}^c(\bar{z}, z)$$

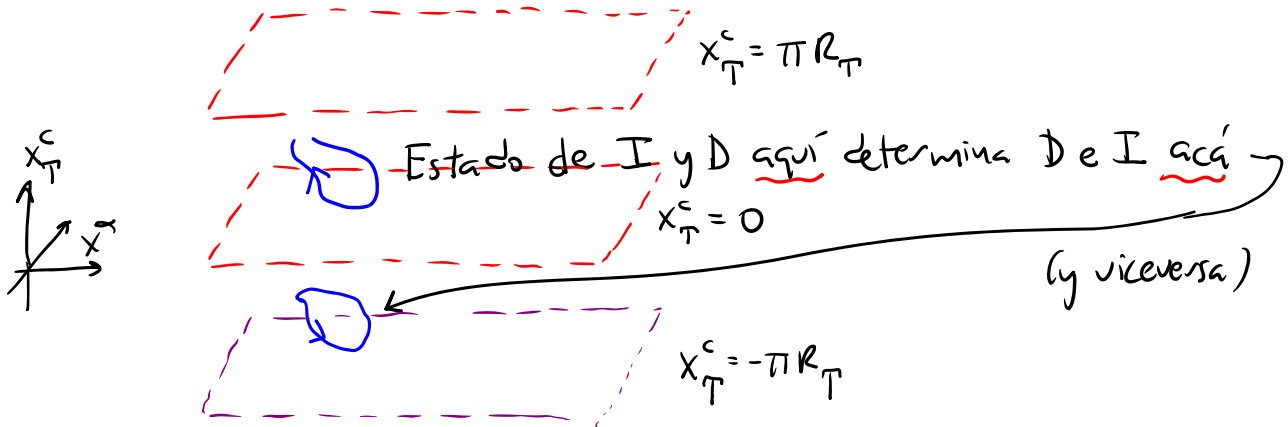
↑ paridad en espaciotiempo a lo largo de  $X_{\uparrow}^c$   
 ↑ paridad en hoja de mundo

y la teoría contiene entonces solo los estados que son simétricos bajo esta transformación.

Mientras que en la teoría original



después de T-dualizar encontramos



El espacio físico se reduce por lo tanto al intervalo

$$S^1/\mathbb{Z}_2 = \left\{ x_T^c \mid 0 \leq x_T^c \leq \pi R_T \right\}$$

←  $\{1, \Omega\pi^c\}$  Orientación (u Orientifolio)

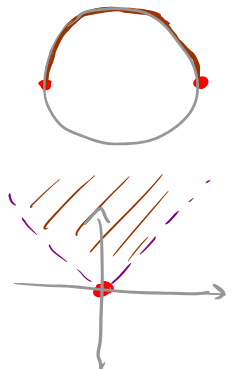
Esta es una generalización del concepto matemático, más conocido, de orbidad (u orbifoldo), abreviación de órbita-variedad, donde se identifican puntos de una variedad conectados por la acción de algún grupo  $G$  de simetrías puramente geométricas.

P.ej.  $S^1/\mathbb{Z}_2 = \left\{ x^c \in \mathbb{R} \mid x^c \simeq x^c + 2\pi R, x^c \simeq -x^c \right\}$

←  $\{1, \pi^c\}$

o  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}_3 = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid z \simeq e^{i2\pi/3} z \simeq e^{i4\pi/3} z \right\}$

←  $\{1, e^{i2\pi/3}, e^{i4\pi/3}\}$





En estos ejemplos vemos que, si  $G$  tiene puntos fijos, la órbita es singular (no es una variedad) ahí. A pesar de ello, la teoría de cuerdas está bien definida en órbitas (gracias a sectores 'torcidos') [Dixon, Harvey, Vafa, Witten, NPB 261 (1985) 678]. Las orientidades son una generalización cuerdística donde tomamos el cociente por  $\Omega G$  en vez de  $G$ . En el caso que estamos estudiando,  $\Omega G = \{1, \Omega\pi^c\}$ , el espacio termina en los hiperplanos  $(D-1)$ -dimensionales  $x_\pi^c = 0$  y  $x_\pi^c = \pi R_\pi$ , los cuales se distinguen precisamente porque quedan fijos bajo  $x_\pi^c \rightarrow -x_\pi^c$ . Notar que si una cuerda se mete a uno de estos 2 hiperplanos, coincide con su imagen, y  $\therefore$  se vuelve no orientada.

Es necesario resaltar también que no hay grados de libertad localizados en estos hiperplanos, por lo que, a diferencia de las D-branas, No son dinámicas.

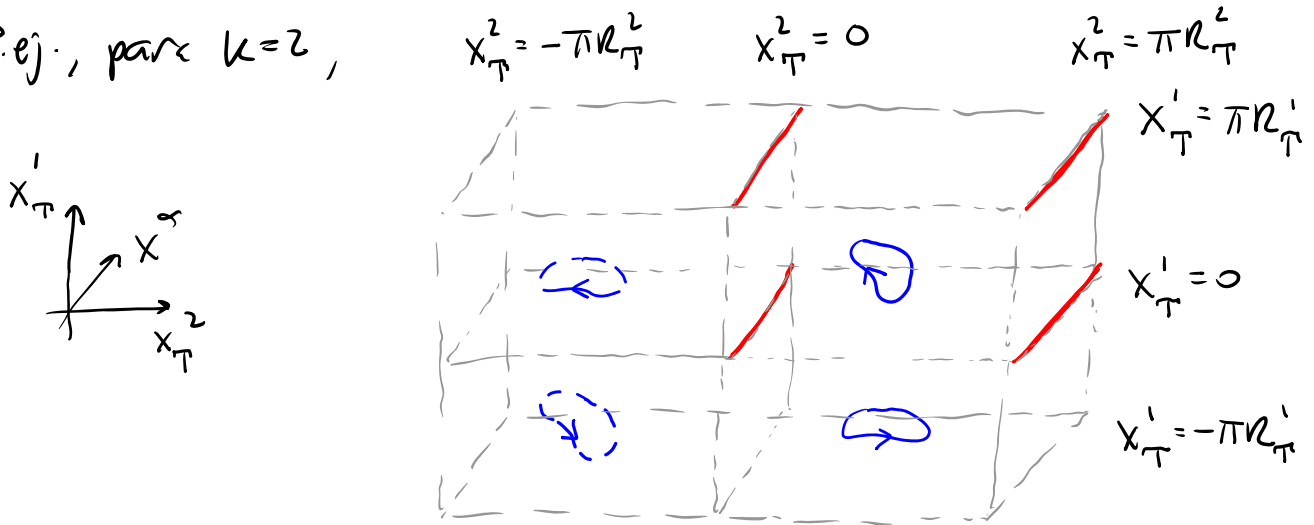
Si empezamos en teoría no orientada y T-dualizamos en  $k=D-1-p$  dimensiones, obtenemos una teoría donde los estados son simétricos bajo  $\Omega\pi^{c_1}\dots\pi^{c_k}$ .

El espacio físico nuevamente se reduce a la mitad,

$$T^k \equiv \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_k \rightarrow T^k / \mathbb{Z}_2 \leftarrow \{1, \Omega\pi^{c_1}\dots\pi^{c_k}\},$$

y obtenemos  $2^k$  hiperplanos fijos  $(p+1)$ -dimensionales que llamamos **Op-planos = orienti-p-planos**.

P.ej., para  $k=2$ ,



Espacio físico: Orientidad  $T^2/\mathbb{Z}_2$

Notar que para  $k \neq 1$ , Op-planos no son la frontera completa del espacio (no tienen dimensión  $D-1$ ).

La teoría original ( $k=0$ ) tenía 1  $O(D-1)$ -plano, que llenaba tod el espacio, por lo que cada punto era su propia imagen. En este caso, las cuerdas necesariamente están inmersas en el  $O$ -plano, y es por ello que son no orientadas.

Aprendemos entonces que las teorías de cuerdas no orientadas son simplemente las teorías orientadas definidas en un fondo distinto, que incluye un  $O(D-1)$ -plano

Podemos ahora finalmente entender lo que sucede con teorías tipo I bajo dualidad T.

El hecho de que las cuerdas en I sean no orientadas nos indica que viven sobre un  $O9$ -plano.

El hecho de que I incluya cuerdas abiertas con grado de libertad de Chan-Paton nos indica la presencia de varias  $D9$ -branas.

