

Por último, podemos determinar el volumen del GKC notando que los vectores de Killing conformes (ortonormales en el producto interno correspondiente) son los modos cero

$$C_{0,1}^a = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{0,2}^a = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow C_{0,1}^a = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{0,2}^a = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \begin{pmatrix} -\tau_1/\tau_2 \\ 1/\tau_2 \end{pmatrix},$$

de manera que

$$\frac{1}{\text{GKC}} \sim \left\langle C^1(\check{\sigma}) C^2(\check{\sigma}) \right\rangle_{T^2(z)}^{c-\underline{c}} \quad \leftarrow \text{solo parte de modo cero}$$

$$\sim \int dC_{0,1} dC_{0,2} \left[ C_{0,1} \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} + C_{0,2} \frac{(-\tau_1/\tau_2)}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \right] \left[ C_{0,1} \cdot 0 + C_{0,2} \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}\tau_2} \right]$$

$$\sim \frac{1}{\tau_2^2}$$

Juntándolo todo tenemos

$$\mathcal{M}_{T^2}^0 \sim \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2} \frac{1}{\text{Im}\tau} (\text{Im}\tau)^2 |\eta(\tau)|^4 (\text{Im}\tau)^{D/2} \text{Im}(\tau)^{-D} |\eta(\tau)|^{-2D}$$

$\uparrow$  GKZ       $\uparrow$   $\frac{2}{\pi} \left( b, \frac{\partial g}{\partial \tau_i} \right)_{i=1}^2$        $\uparrow$   $\uparrow$   $\langle 1 \rangle_{b,c}$        $\uparrow$   $\int d^D x_0$        $\uparrow$   $\uparrow$   $\langle 1 \rangle^X$

(omitendo  $V_D$ )

(notar que los fantasmas cancelan los 2 X's no físicos ✓), es decir,

$$\mathcal{M}_{T^2}^0 = (4\pi^2 \alpha')^{-13} \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{4(\text{Im}\tau)^2} (\text{Im}\tau)^{-12} |\eta(\tau)|^{-48} \quad (D=26)$$

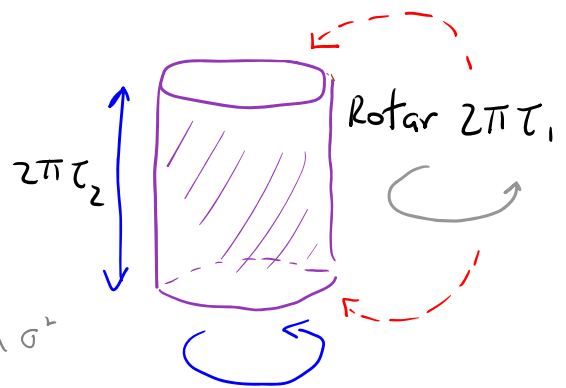
Es útil volver a obtener este resultado de otra manera, empleando cuantización canónica. Dado que para cualquier

sistema

$$\langle f | e^{-\hat{H}T} | i \rangle = \int_{\varphi(t=0)=\varphi_i}^{\varphi(t=T)=\varphi_f} \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(e^{-\hat{H}T}) = \int_{\varphi(t=0)=\varphi(t=T)} \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}$$

veamos que la integral funcional en el toro  $T^2(\tau)$  define la función de partición

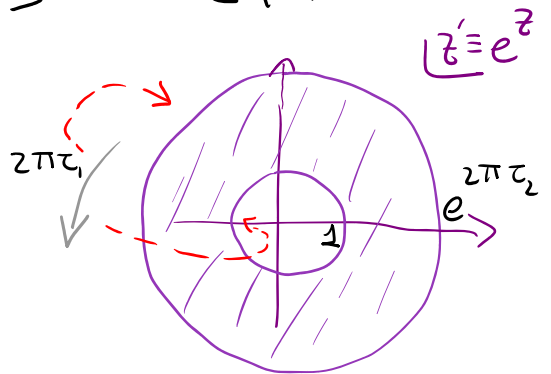


$$\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)}^x = \text{Tr}_x \left[ e^{-2\pi\tau_2 \hat{H} + 2\pi\tau_1 \hat{P}} \right] \equiv Z^x(\tau)$$

translación en  $\sigma^2$ 
translación en  $\sigma^1$

donde  $\hat{H} = \hat{L}_0 + \hat{\tilde{L}}_0 - \frac{1}{24}(c^x + \tilde{c}^x)$

$\hat{P} = \hat{L}_0 - \hat{\tilde{L}}_0$  p. 221



es decir,

$$Z^x(\tau) = \left( \frac{\eta}{\bar{\eta}} \right)^{-D/24} \text{Tr}_x \left( \frac{\eta}{\bar{\eta}} \hat{L}_0 \frac{\bar{\eta}}{\eta} \hat{\tilde{L}}_0 \right) \quad \text{con } \eta \equiv e^{2\pi i \tau}$$

$\tau = \tau_1 + i\tau_2$

Usando  $\hat{L}_0 = \frac{\alpha' \hat{p}^2}{4} + \sum_{n, \mu} \hat{\alpha}_{-n}^\mu \hat{\alpha}_{n, \mu}$  (similar para  $\hat{\tilde{L}}_0$ )

$\equiv n \hat{N}_{\mu n}$

↑ operadores de número

y

$$\text{Tr}_x(\hat{O}) \equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \sum_{N_{\mu n} = 0}^{\infty} \langle N_{\mu_1}, N_{\mu_2}, \dots, j_k | \hat{O} | N_{\mu_1}, N_{\mu_2}, \dots, j_k \rangle$$

↑  $\forall \mu, n$

tenemos

$$\text{Tr}_x \left( \hat{g} \hat{L}_0 \hat{g}^{-1} \right) = \underbrace{(2\pi)^D \delta^{(D)}(0)}_{V_D} \underbrace{\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-\pi \tau_2 \alpha' k^2}}_{\frac{1}{(2\pi)^D} \left( \frac{2\pi}{2\pi \tau_2 \alpha'} \right)^{D/2}} \prod_{\mu, n} \left[ \sum_{N_{\mu n}, \tilde{N}_{\mu n}=0}^{\infty} g^{N_{\mu n}} \bar{g}^{\tilde{N}_{\mu n}} \right]$$

$$\underbrace{\left[ \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-g^n} \right]^D \left[ \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\bar{g}^n} \right]^D}_{|\eta(\tau)|^{-2D} (g \bar{g})^{+D/24}}$$

así que

$$Z^x(\tau) = V_D (4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{-D/2} |\eta(\tau)|^{-2D},$$

lo cual coincide con el resultado de la integral funcional <sup>p.397</sup> (y verificamos por tanto el resultado para det  $\Delta_\sigma$ ). ✓

La misma idea aplica para los fantasmas, excepto que para un campo fermióni  $\psi$  [ver p.ej. Polchinski Vol 1, Apéndice A]

$$\int \mathcal{D}\psi e^{-S[\psi]} = \text{Tr} \left( (-1)^{\hat{F}} e^{-\hat{H}T} \right), \quad \int \mathcal{D}\psi e^{-S[\psi]} = \text{Tr} \left( e^{-\hat{H}T} \right)$$

$\psi(T) = \psi(0)$   $\psi(T) = -\psi(0)$

donde  $\hat{F} \equiv \sum_{n>0} (c_{-n} b_n + b_{-n} c_n) + c_0 b_0 + \text{modos derechos} \equiv \text{Número Fermiónico}$  :

$$(-1)^{\hat{F}} |\downarrow\rangle = +|\downarrow\rangle, \quad \{(-1)^{\hat{F}}, \hat{b}_{-n}\} = 0 = \{(-1)^{\hat{F}}, \hat{c}_{-n}\}$$

Para ver que esto funciona, calculemos

$$\text{Tr}_{b,c} \left( e^{-2\pi\tau_2 \hat{H} + 2\pi\tau_1 i \hat{P}} \right) = q^{-\frac{c^f}{24}} \bar{q}^{-\frac{\tilde{c}^f}{24}} \text{Tr}_{b,c} \left( \begin{matrix} \hat{L}_0^f & \hat{\tilde{L}}_0^f \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{matrix} \right)$$

Recordando que hay 4 estados base

$$|\downarrow\downarrow\rangle, \quad |\uparrow\downarrow\rangle \equiv c_0 |\downarrow\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\uparrow\rangle \equiv \tilde{c}_0 |\downarrow\downarrow\rangle,$$

$$|\uparrow\uparrow\rangle \equiv c_0 \tilde{c}_0 |\downarrow\downarrow\rangle$$

y usando  $c^f = -26 = \tilde{c}^f$ ,

$$\hat{L}_0^f = \sum_{n>0} n (\underbrace{\hat{c}_{-n} \hat{b}_n}_{\equiv \hat{N}_n^c} + \underbrace{\hat{b}_{-n} \hat{c}_n}_{\equiv \hat{N}_n^b}) - 1 \quad (\text{similar para } \hat{\tilde{L}}_0^f)$$

obtenemos

$$\text{Tr}_{b,c} \left( e^{-2\pi\tau_2 \hat{H} + 2\pi\tau_1 i \hat{P}} \right) = \underbrace{(1+1+1+1)}_{\text{estados base}} (q \bar{q})^{\frac{13}{12} - 1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+q^n)^2 (1+\bar{q}^n)^2}$$

$N_n^c=0$      $N_n^b=0$   
 $N_n^c=1$      $N_n^b=1$

Esto solo puede ser  $\langle 1 \rangle_{T^2(\mathbb{Z})}^{c,b}$  con condiciones de borde antiperiódicas en  $\sigma^2$ , porque así no existen modos cero.

Por otro lado,

$$\text{Tr}_{b,c} \left[ (-1)^{\hat{F}} e^{-2\pi\tau_2 \hat{H}^f + 2\pi\tau_1 i \hat{P}^f} \right] = (-1-1-1+1) (q\bar{q})^{\frac{13}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^2 (1-\bar{q}^n)^2 = 0$$

↑ ↑

Como esperamos para  $\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)}^{c,b}$  en condiciones de borde periódicas, para los axles sí existen modos cero.

Para obtener un resultado distinto de cero necesitamos una inserción por cada modo cero:

$$\begin{aligned} \langle b(z_1) c(z_2) \tilde{b}(\bar{z}_3) \tilde{c}(\bar{z}_4) \rangle_{T^2(\tau)}^{c,b} &= \text{Tr} \left[ (-1)^{\hat{F}} \hat{b}_0 \hat{c}_0 \hat{b}_0 \hat{c}_0 e^{-2\pi\tau_2 \hat{H}^f + 2\pi\tau_1 i \hat{P}^f} \right] \\ &= (1+0+0+0) (q\bar{q})^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^2 (1-\bar{q}^n)^2 \\ &= |\eta(\tau)|^4 \end{aligned}$$

↑ ↑ ↑



que nuevamente coincide con la integral funcional. ✓

$$\eta(\tau) \equiv q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad \text{con } q \equiv e^{2\pi i \tau}$$

En conjunto tenemos, como antes,

$$\mathcal{M}_{T^2}^0 = (4\pi^2 \alpha')^{-3} \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4(\text{Im}\tau)^2} (\text{Im}\tau)^{-12} |\eta(\tau)|^{-48}$$

(notar que  $d\tau d\bar{\tau} = 2d\tau_1 d\tau_2$ )

$\swarrow$   $SL(2, \mathbb{Z})$

La integral debe ser invariante modular (pp. 392-3), pues de otra manera habría una anomalía "gravitacional" global.

Es fácil verificar que bajo  $\tau \rightarrow \tilde{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$

$$\text{tenemos } d^2\tau \rightarrow d^2\tilde{\tau} = \frac{d^2\tau}{|c\tau + d|^4} \quad \text{y} \quad \text{Im}\tau \rightarrow \text{Im}\tilde{\tau} = \frac{\text{Im}\tau}{|c\tau + d|^2}$$

así que  $\frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2}$  es invariante.

$$\text{Además, } \eta(\tau+1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau), \quad \eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau),$$

$$\text{Im}(\tau+1) = \text{Im}(\tau), \quad \text{Im}(-1/\tau) = \frac{\text{Im}\tau}{|\tau|^2},$$

así que  $\text{Im}\tau |\eta(\tau)|^4$  es invariante modular.

Concluimos entonces que en  $D=26$ , y solo en  $D=26$ ,

$$M_{T^2}^0 \sim \int \frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2} (\text{Im}\tau |\eta(\tau)|^4)^{-12} \text{ es invariante modular. } \checkmark$$

$\implies$  inexistencia a un  $k_0$  si  $D \neq 26$



Para interpretar nuestros resultados, conviene regresar a la expresión antes de calcular la traza:

$$\begin{aligned} M_{T^2}^0 &= \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{4\tau_2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-\pi\tau_2 \alpha' k^2} \sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} q^{h_E^{-1}} \bar{q}^{\tilde{h}_E^{-1}} \\ &= \int \frac{d^2\tau}{4\tau_2} (4\pi\alpha'\tau_2)^{-D/2} \sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} q^{h_E^{-1}} \bar{q}^{\tilde{h}_E^{-1}} \end{aligned}$$


donde la suma es sobre los estados  $|E\rangle$  en el espacio de Hilbert 'transversal'  $H_{\perp}$ , que incluye solo a  $D-2$  conjuntos de osciladores  $\alpha_n^i, \tilde{\alpha}_n^i$  (y excluye entonces al modo cero  $k^{\mu}$ , los fantasmas  $C_n, b_n, \tilde{C}_n, \tilde{b}_n$ , y los 2 conjuntos de osciladores 'longitudinales'  $\alpha_n^0, \tilde{\alpha}_n^0$ ) y  $\hat{L}_0^{\perp} |E\rangle = h_E |E\rangle$ .

$\uparrow$



(en nuestro caso  $\hat{L}_0^\perp = \sum_{\substack{n>0 \\ i=2, \dots, D-1}} \hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i \equiv \hat{N}^\perp$  así que  $h_E = N_E^\perp$ ).

Para el caso de una partícula puntual de masa  $m$ , la amplitud a un lazo es (pp. 103, 111)

$$M_{S^1}^0 = \int_0^\infty \frac{dT}{2T} \int_{X^\mu(0)=X^\mu(1)} \mathcal{D}X^\mu(\tau) e^{-\frac{m}{2} \int_0^1 d\tau (\dot{X}^2 + T)}$$


volumen del grupo de Killing (no existía para  $\tau$ )

$$= V_D \int_0^\infty \frac{dT}{2T} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-\frac{T}{2}(k^2 + m^2)}$$

omitir  $\uparrow$

$$= \int_0^\infty \frac{dT}{2T} (2\pi T)^{-D/2} e^{-\frac{T}{2} m^2}$$

Para comparar con la teoría de cuerdas, donde cada  $|E\rangle \in H_\perp$  con  $h_E = \tilde{h}_E$  ( $\leftrightarrow N_E = \tilde{N}_E$ , la condición de emparejamiento de niveles) corresponde a una 'partícula' con masa

$$M_E^2 = \frac{2}{\alpha'} (h_E + \tilde{h}_E - 2),$$

Consideremos una suma sobre el resultado para la partícula puntual,


$$\sum_{\substack{|E\rangle \in H_{\perp} \\ h_E = \tilde{h}_E}} M_{S'}^0(m_E^2) = \int_0^{\infty} \frac{dT}{2T} (2\pi T)^{-D/2} \sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} e^{-\frac{T}{\alpha'}(h_E + \tilde{h}_E - 2)\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\theta}{2\pi} e^{i(h_E - \tilde{h}_E)\theta}}_{\delta_{h_E, \tilde{h}_E}}$$

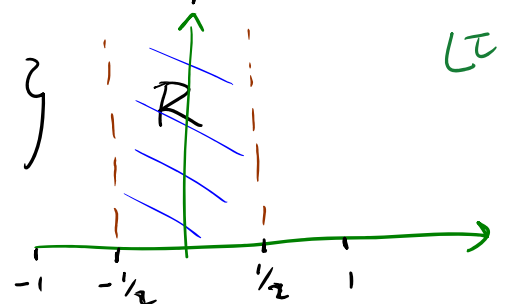
$(h_E - \tilde{h}_E \in \mathbb{Z})$  es necesario en cuerdas para asegurar la invariancia modular)

Definiendo  $\tau \equiv \frac{\theta}{2\pi} + \frac{iT}{2\pi\alpha'}$  y  $q \equiv e^{2\pi i\tau}$  esto es

$$\sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} M_{S'}^0(m_E^2) \delta_{h_E, \tilde{h}_E} = \int_{\mathbb{R}} \frac{d^2\tau}{4\tau_2} (4\pi\alpha'\tau_2)^{-D/2} \sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} q^{h_E-1} \bar{q}^{\tilde{h}_E-1},$$

que coincide exactamente con el resultado de cuerdas  $M_{T^2}^0$ , excepto por la región de integración

  $\mathbb{R} \equiv \left\{ \tau \mid \text{Im}\tau > 0, -\frac{1}{2} \leq \text{Re}\tau \leq \frac{1}{2} \right\} \neq \mathbb{F}$



En particular, la región  $\tau_2 = \text{Im} \tau \rightarrow 0$  ( $T \rightarrow 0$ ),  
 que en el caso de partículas da lugar a  
divergencias ultravioleta ( $|k^M| \rightarrow \infty$ ),

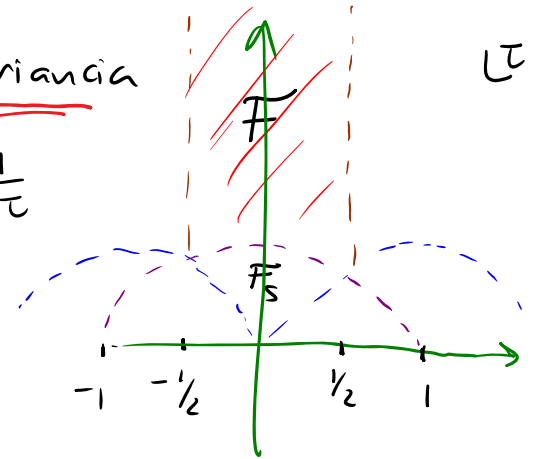


¡está ausente en la amplitud de cuerdas!!

La razón, como vimos, es la invariancia modular.  
 Usando  $S: \tau \rightarrow \tilde{\tau} = -\frac{1}{\tau}$

(que corresponde al difeo grande

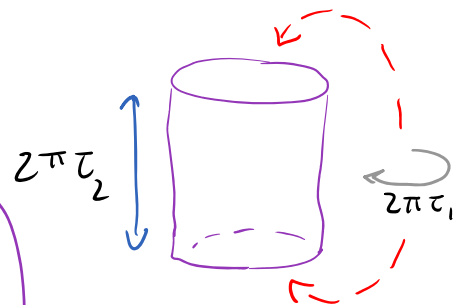
$(\sigma_1, \sigma_2) \leftrightarrow (\sigma_2, -\sigma_1)$ ) tenemos



que, p.ej.,  $\tau = i\tau_2 \rightarrow 0$  es equivalente

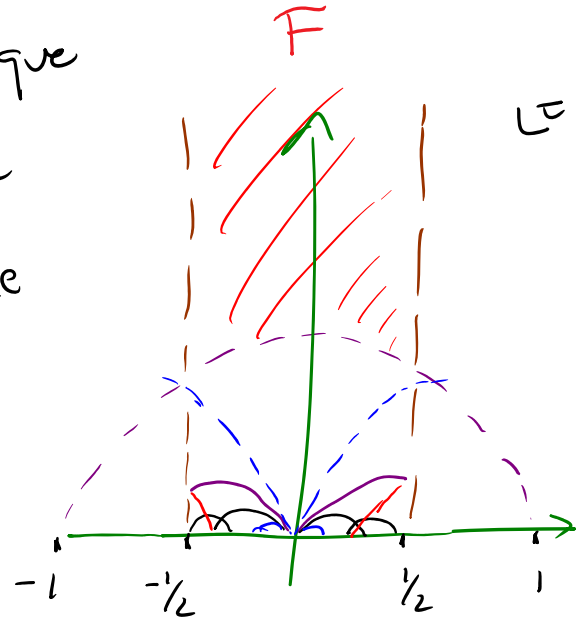
a  $\tilde{\tau} = -\frac{1}{i\tau_2} = i\tilde{\tau}_2 \rightarrow \infty$ ,

es decir





La región de integración  $R$  que es relevante para el caso de partículas de hecho contiene un número infinito de copias de la región  $F$  que cuerdas incorporan.



Vemos entonces que la estructura de la teoría de cuerdas impone automáticamente un corte UV (cota inferior para  $\tau_2 \sim$  cota superior para  $|k^\mu|$ ), invariante de Lorentz, de manera autoconsistente (lo cual no es trivial, dado que existen campos de norma).



El comportamiento en el límite opuesto,  $\mathbb{R}, \tau_2 \rightarrow \infty$  ( $\leftrightarrow T \rightarrow \infty \leftrightarrow |k^\mu| \rightarrow 0$ ), está dominado por los estados con masas más bajas, justamente como en el caso de partículas:

$$M_{T^2}^0 = \int_F \frac{d\tau_1 d\tau_2}{2\tau_2} (4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{-13} \sum_{|E\rangle \in H_1} \underbrace{\left( e^{-2\pi\tau_2 + 2\pi i\tau_1} \right)^{h_E - 1}}_{\bar{q}} \underbrace{\left( e^{-2\pi\tau_2 - 2\pi i\tau_1} \right)^{\tilde{h}_E - 1}}_{\bar{\tilde{q}}}$$

$$> \int \frac{d\tau_2}{2\tau_2} (4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{-13} \left[ 1 \cdot e^{4\pi\tau_2} + 24^2 e^0 + \mathcal{O}(e^{-4\pi\tau_2}) \right]$$

$h_E = \tilde{h}_E = 0$ : taquión

$h_E = \tilde{h}_E = 1$ : gravitón/dilatón/antisimetría

$\Rightarrow$  divergencia IR

convergente

En una teoría donde el vacío sea estable no habrá taquión, y  $M_{T^2}^0$  será una cantidad finita, que representa

la densidad de energía del vacío  $\rho_0$  ( $\leftrightarrow$  constante cosmológica  $\Lambda$ ) a un lazo:

$$e^{-\rho_0 V_D} = \langle 0 | e^{-\hat{H}T} | 0 \rangle$$

$\uparrow$  Hamiltoniano en segunda cuantización

que para una partícula con masa  $m$  se puede escribir en términos de la integral funcional sobre el campo  $\varphi(x)$  correspondiente:

$$\langle 0 | e^{-\hat{H}T} | 0 \rangle = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\int \mathcal{D}^D x \varphi (-\partial^2 + m^2) \varphi + \text{interacciones}}$$

de aquí vemos que

$$\rho_0 = -\ln \frac{1}{\sqrt{\text{Det}(-\partial^2 + m^2)}} + \text{interacciones}, \text{ y por tanto}$$

$$\rho_0^{(1)} = +\frac{1}{2} \ln [\text{Det}(-\partial^2 + m^2)] = \frac{1}{2} \text{Tr} [\ln(-\partial^2 + m^2)]$$

(signo sería - si la partícula fuera fermión)

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\mathcal{D}^D k}{(2\pi)^D} \ln(k^2 + m^2) = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\mathcal{D}^D k}{(2\pi)^D} e^{-\frac{T}{2}(k^2 + m^2)}$$

$$= \mathcal{M}_{S^1}^0(m^2) \quad \left( = \int \frac{\mathcal{D}^{D-1} k}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \right)$$

Energía de punto cero  
de osciladores armónicos

O, más fácil, en términos de diagramas:

$$e^{-\rho_0^{(1)} V_b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\bigcirc \bigcirc \dots \bigcirc}_n \Rightarrow \rho_0^{(1)} = \frac{1}{V_b} \bigcirc = \mathcal{M}_{S^1}^0(m^2)$$

Así que en cuerdas tenemos energía del vacío

$\rho_0^{(1)} = M_{T^2}^0$ , que en ausencia del tensión sería finito

y  $\sim l_c^{-D}$ , por análisis dimensional.

(= 0 si el espectro fuera supersimétrico, porque la contribución de cada bosón sería cancelada por su superpareja fermiónica;

$\sim m_{\text{susy}}^D$  si supersimetría está rota a escala  $m_{\text{susy}}$ .

En la naturaleza,  $0 < \Lambda \ll m_{\text{susy}}^D \leq l_c^{-D}$ . X ?

¿Otras amplitudes a 1 lazo?

$M_{T^2}^{(n)}$  se calcula usando el propagador

$$\Delta^{-1}(z, z') = -\frac{\alpha'}{2} \ln \left| \theta_1 \left( \frac{z-z'}{2\pi} \mid \tau \right) \right|^2 + \frac{[\text{Im}(z-z')]^2}{4\pi\tau_2} + \underbrace{f(\tau, \bar{z})}_{\text{no contribuye}}$$

(en coordenadas  $z = \sigma' + \tau\sigma^2$  donde  $g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}$ ,  $g_{zz} = 0 = g_{\bar{z}\bar{z}}$ )

con

$$\theta_1 \left( \frac{z}{2\pi} \mid \tau \right) \equiv i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{(n-1/2)^2}{2}} e^{i(n-1/2)z}$$

la función teta (zeta) de Jacobi,

o, lo que resulta ser equivalente,

$$\theta_1\left(\frac{z}{2\pi} \mid \tau\right) = 2 q^{1/8} \operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right) \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) (1 - e^{iz} q^m) (1 - e^{-iz} q^m).$$

$\Delta^{-1}(z, z')$  obedece las condiciones de periodicidad

$z \simeq z + 2\pi$ ,  $z \simeq z + 2\pi\tau$ , y satisface la ec. de Green

$$-\frac{2}{\tau'} \partial \bar{\partial} \Delta^{-1}(z, z') = 2\pi \delta^{(2)}(z - z') - \frac{1}{4\pi\tau_2}$$

↑ carga de fondo

(↔ omisión de modo cero)

(Recordando que el orden normal :: se define a través de

$$: X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \equiv X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') - \left(-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z - z'|^2\right)$$

vemos que la autocontracción

$$\left\langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z, \bar{z}) : \right\rangle_{T^2(\tau)}^x = -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \lim_{z \rightarrow z'} \left[ \ln \left| \theta_1\left(\frac{z-z'}{2\pi} \mid \tau\right) \right|^2 - \ln |z - z'|^2 \right]$$

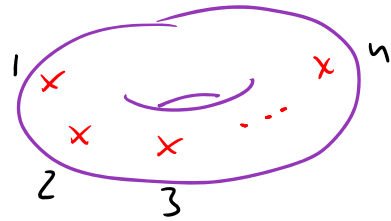
$\theta_1(0 \mid \tau) + (z-z') \partial_z \theta_1(0 \mid \tau) + \dots$

es finita pero distinta de cero.

Esto permite en particular que  $M_{T^2}^{(1)} \neq 0$ .

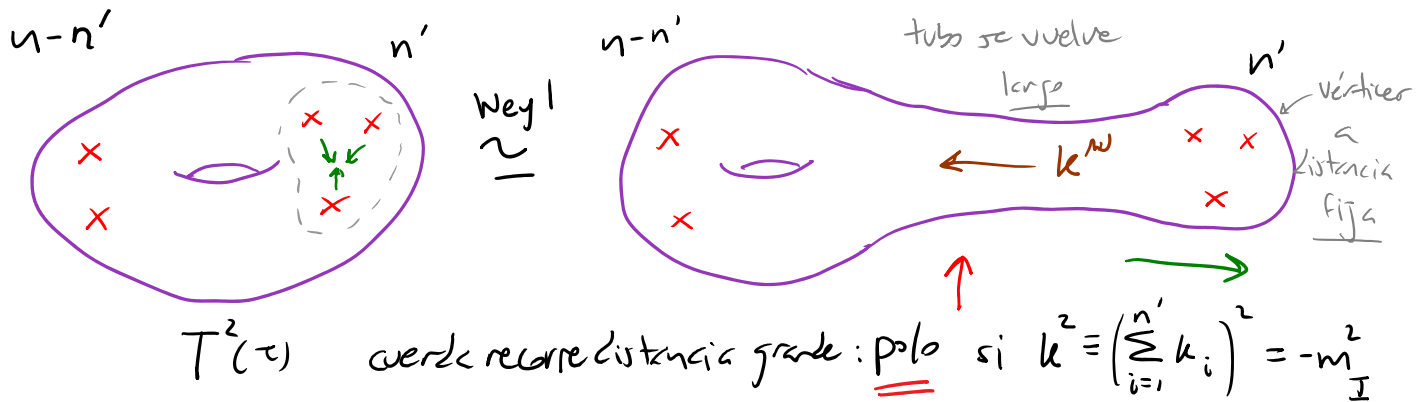


Al calcular amplitudes  $\mathcal{M}_{T^2}^{(n)}$ , se encuentra nuevamente que las divergencias (o posibles divergencias) provienen siempre de la frontera del espacio de módulos generalizado



$$\mathcal{M}_{T^2}^{(n)} \equiv \frac{\text{toros con } n \text{ puntos marcados}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}}$$

frontera que ahora incluye no solo  $\text{Im} \tau \rightarrow \infty$ , sino también los límites cuando  $n' \geq 2$  vértices se aproximan:



$$\sim \sum_I \mathcal{M}_{T^2}^{(n-n'+1)} \frac{1}{k^2 + m_I^2} \mathcal{M}_{S^2}^{(n'+1)}$$

(En las pp. 380-1 encontramos de manera idéntica a nivel árbol polos en  $M_{S^2}^{(n=4)}$  con  $n'=2$ , que entendimos también usando la EPO.)

Un punto importante es que el teorema óptico se satisface solo si  $D=26$ : la teoría con  $D < 26$  es consistente a nivel árbol, pero pierde unitariedad a 1 lazo.

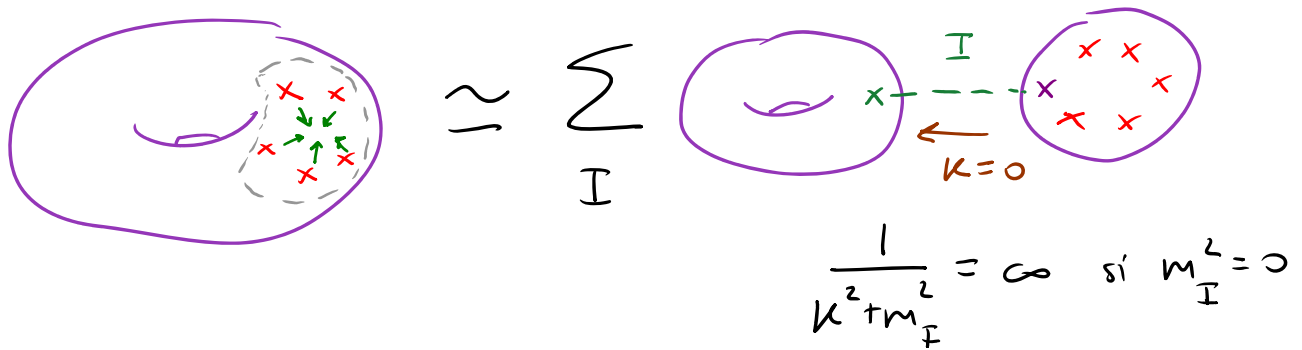
El caso  $n' = n-1$  es especial:

$$\text{Genus-1 surface with bubble} \approx \sum_I \text{Genus-0 surface with bubble and propagator } I$$

$\frac{1}{k^2 + m_I^2} = \infty$  si  $m_I^2 = m_1^2$   
 $\uparrow$   $= k_1^2$  por conservación de momento

Esta divergencia nuevamente es IR: como en una teoría de partículas/campos,  $\text{Genus-0 surface with bubble} \neq 0$  representa una corrección a la masa libre (generalmente compleja  $\leftrightarrow$  inestable).

El caso  $n'=n$  es también problemático, aunque por una razón distinta:



$\Rightarrow \mathcal{M}_{T^2}^{(n)}$  diverge si  $\mathcal{M}_{T^2}^{(1)} = \text{torus with puncture } x \neq 0$  para un

estado  $I$  no masivo, es decir, si existe un renacuajo: una cuerda emitida por el vacío (recuerdan que  $\mathcal{M}_{S^2}^{(1)} = 0$  automáticamente). Esto de hecho resulta ser el caso para el dilatón.

En la acción efectiva habría un término lineal en  $\Phi$ :

$$S_{ef}^+[\Phi] = S_{\text{árbol}} + \int d^D x \mathcal{J} \Phi + \dots$$

( de hecho,  $\frac{1}{2k^2} \int d^D x \sqrt{-G_E} e^{\frac{4D}{D-2} \Phi} \wedge$  )

Pero entonces  $\bar{\Phi} = 0$  no es una solución de la ecuación de movimiento  $\partial^2 \bar{\Phi} = J$ .

Si desarrollamos alrededor de una verdadera

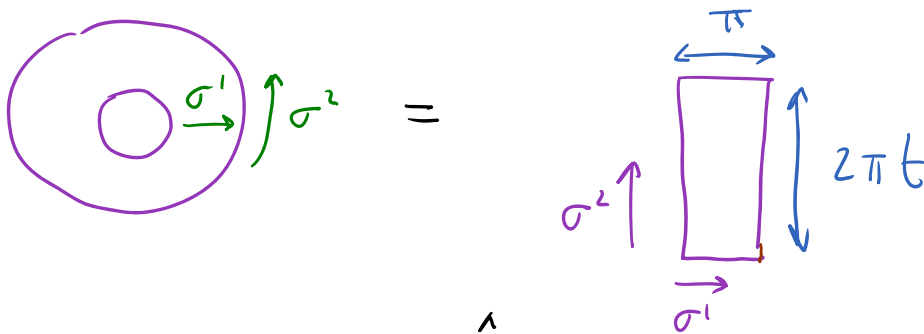
solución  $\Phi_{sol}(x)$ ,  $\Phi(x) = \Phi_{sol}(x) + \varphi(x)$ ,  
 eliminamos el renacuajo, y por tanto la divergencia.  
 ← condensado de dilatación

En resumen, en este caso

Divergencia IR  $\leftrightarrow$  Renacuajo de campo sin masa  $\leftrightarrow$  Corrección al fondo.

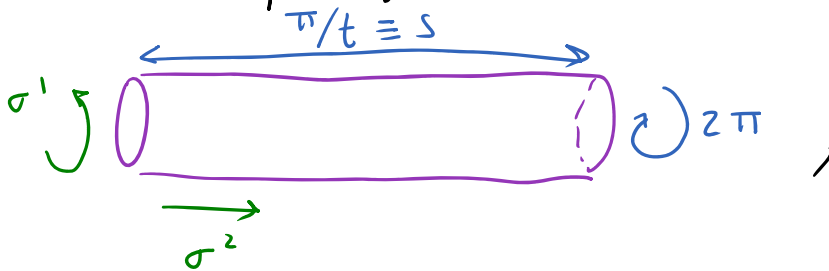
Ideas similares operan en otros diagramas.

P.ej., para el anillo (lazo de cuerda abierta):



$$\eta_{c^2}^{(0)} = \int_0^\infty \frac{dt}{2t} \text{Tr}_{\mathcal{H}_\perp} \left[ e^{-2\pi t \hat{L}_0} \right] = \int_0^\infty \frac{dt}{2t} (8\pi^2 \alpha' t)^{-D/2} \eta(it)^{-(D-2)}$$

$M_{c^2}^{(0)}$  es divergente en  $t \rightarrow \infty$  solo por el taquión de cuerdas abiertas. Es divergente también en  $t \rightarrow 0$ , y a diferencia de lo que pasó en  $T^2$ , aquí no hay un grupo modular para restringir la integración. Pero la idea básica en el toro era intercambiar  $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$ . Haciendo eso aquí y reescalando por  $1/t$  obtenemos



es decir, una cuerda cerrada que se propaga una distancia

grande (efecto IR):

$$M_{c^2}^{(0)} = (8\pi^2 \alpha')^{-13} \int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} \eta\left(\frac{is}{2\pi}\right)^{-24} = \sum_I \left( \text{diagram with two purple ovals and a dashed line between them} \right)$$

para  $s \rightarrow \infty$ :  $e^{2s} + 24 e^0 + O(e^{-2s})$

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 taquión              dilatón/gravitón



Veremos esta cuenta más adelante ( $\leftrightarrow$   $\mathbb{D}$ -branas)...

En amplitudes con más lazos (ver Polchinski Vol. I Cap. 9 ó D'Hoker y Phong, Rev. Mod. Phys. 60 (1988), 917) se encuentra una situación similar: posibles divergencias provienen solo de la frontera del espacio de módulos, y cuando existen, tienen una interpretación como efectos IR, es decir, de distancias grandes.

En resumen, las amplitudes de la cuerda bosónica **¡¡ No** tienen divergencias UV **!!** y son unitarias.

La situación en la supercuerda parece ser similar, pero es técnicamente más complicada (por la existencia de 'supermódulos'). NO hay divergencias a 1 lazo (Green, Schwarz '85; Gross, Martinec, Harvey, Rohm '87) ni a 2 lazos (D'Hoker, Phong '01-'05), y se espera que no las haya en general, pero no se han hecho cuentas explícitas. L16: 21/05/13

## Cuerdas en Fondos no Triviales

Hemos visto antes que el vértice del gravitón simétrico  
↓

$$V_h(\varepsilon; k) = -g_c N \frac{2}{\alpha'} \frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} : \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu e^{ik \cdot X} :_g \varepsilon_{\mu\nu},$$

$\frac{K}{2\pi}$

$= h_{\mu\nu}(X)$

donde, para garantizar la invariancia bajo difeos, el orden normal  $: :_g$  se define restando la contracción

$$\Delta^{-1}(\sigma, \sigma') = -\frac{\alpha'}{2} \ln [d^2(\sigma, \sigma')] ]$$

↑ distancia geodésica entre  $\sigma$  y  $\sigma'$

(que en la norma plana  $g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}$   $g_{zz} = 0 = g_{\bar{z}\bar{z}}$  se reduce

a  $-\frac{\alpha'}{2} \ln |z - z'|^2$ ), y la invariancia de Weyl

requiere que  $k^2 = 0$ ,  $k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0$ ,  $\varepsilon^\mu{}_\mu = 0$ ,

representa una fluctuación infinitesimal por encima de la métrica de fondo  $\eta_{\mu\nu}$ .

A partir de esto entendimos que el Espacio Curvo  $\leftrightarrow$  'Estado Coherente' de Gravitones es descrito entonces por

$$\int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_p[X]} e^{\mathcal{V}_h[X]}, \text{ es decir,}$$

$$\begin{aligned} S_p[X] &\rightarrow S_g[X] = S_p[X] - \mathcal{V}_h[X] \\ &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \underbrace{(\eta_{\mu\nu} + 2\kappa h_{\mu\nu}(X))}_{\equiv g_{\mu\nu}(X)}. \end{aligned}$$

La misma idea aplica para los otros modos de oscilación de la cuerda. En particular, el

vértice de la antisimetrización

$$\mathcal{V}_B(\varepsilon; k) = -\frac{\kappa}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma i \varepsilon^{ab} : \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu e^{ik \cdot X} : \underbrace{\varepsilon_{\mu\nu}}_{\substack{\text{antisimétrico} \\ \downarrow \\ \equiv B_{\mu\nu}(X)}} \underbrace{\varepsilon^{12} = +1}_{\substack{\text{densidad tensorial}}}$$

por rotación de Wick  $\uparrow$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ab} \text{ es tensor} \right)$$

$$\left( \text{con } k^2 = 0, \varepsilon_{\mu\nu} k^\nu = 0 \right),$$



y del dilatóon,

$$V_\varphi(k) = -\frac{K}{2\pi} \frac{1}{\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} : \left( g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} + \frac{26}{12} \alpha' R \right) e^{ik \cdot X} :_g$$

(con  $k^2=0$ ),

↓  
por invariancia  
de Weyl

≡  $\varphi(X)$

[ver p.ej. Polchinski 3.6]

se exponencian para dar lugar a la acción  
que describe a cuerdas en el formo más general de  
campos no masivos:

$$S_\sigma[X] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \left\{ \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X) \leftarrow \text{Campo gravitacional} \right. \\ \left. + i \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X) \leftarrow \text{Campo de Kalb-Ramond} \right. \\ \left. + \alpha' \sqrt{g} R \Phi(X) \right\} \leftarrow \text{Campo dilatónico}$$

"Modelo  $\sigma$   
no lineal"

Notar que un formo dilatónico constante  $\Phi(X) = \Phi_0$  contribuye

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} R \Phi_0 = \Phi_0 \chi, \text{ es decir (cf. p. 349)}$$

ii la constante de acoplamiento de cuerdas está determinada  
por valor de formo del dilatóon,  $g_c = e^{\Phi_0}$  !!

en general,  $x_0^\mu(\sigma)$

Desarrollando  $X^\mu(\sigma) = x_0^\mu + \underline{X}^\mu(\sigma)$ , tenemos infinitas interacciones:

$$\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X) = \partial_a \underline{X}^\mu \partial_b \underline{X}^\nu \left[ g_{\mu\nu}(x_0) + \overset{1 \text{ pto}}{\partial_\lambda g_{\mu\nu}(x_0)} \underline{X}^\lambda + \frac{1}{2} \overset{2 \text{ pto}}{\partial_{\lambda_1} \partial_{\lambda_2} g_{\mu\nu}(x_0)} \underline{X}^{\lambda_1} \underline{X}^{\lambda_2} + \dots \right]$$

↑ funciones de acoplamiento ↓

$S_0$  es, de hecho, la teoría (estrictamente) renormalizable más general para  $D$  campos escalares en 2 dimensiones: usando la unidad de longitud en la hoja de mundo  $[\sigma] = l$ , tenemos  $[\partial_a] = l^{-1}$ ,  $[g_{ab}] = l^0 = [X]$ , y por tanto los términos con 2 derivadas y un número arbitrario de  $X$ 's son estrictamente renormalizables o "marginales" ( $[ ] = l^{-2}$ ) por conteo de potencias. Es decir, las constantes de acoplamiento correspondientes, como  $\partial_{\lambda_1} \dots \partial_{\lambda_n} g_{\mu\nu}(x_0)$ , son adimensionales (tal como  $e$  en QED,  $g_{YM}$  en QCD, o  $\lambda$  en  $\varphi^4$  en 4 dim).

Los únicos otros términos renormalizables ( $\dim \leq 2$ ) serían

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g} \phi(X) \leftarrow \begin{array}{l} \text{campo} \\ \text{taquiónico} \end{array} \quad [\phi] = l^{-2} \therefore \begin{array}{l} \text{súper-renormalizable} \\ \text{o "relevante"} \end{array}$$

y, en teorías con cuerdas abiertas,

$\int_{\partial\mathcal{M}} d s \phi(X)$ ↑ taquión súper-renormalizable	y	$i \int_{\partial\mathcal{M}} d s t^a \partial_a X^\mu A_\mu(X)$ ↓ fotón renormalizable	(con $d s = d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}}$ $t^a \partial_a = \partial_\tau$ )
---	---	---	--

$S_0$  es invariante bajo

1) Difeos en el espaciotiempo  $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$ .

2) Transformación de norma de  $B_{\mu\nu}$ :

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$$

(porque  $\epsilon^{ab} \partial_a x^\mu \partial_b x^\nu \partial_\nu \Lambda_\mu = \epsilon^{ab} \partial_b (\partial_a x^\mu \Lambda_\mu)$  es una derivada total),  $\underbrace{\partial_b \Lambda_\mu}$

cuerta abierta  $\leftrightarrow$  D-brane

que, en presencia de  $\partial M \neq \emptyset$ , debe complementarse con

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{2\pi\alpha'} \Lambda_\mu \quad (\Rightarrow F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} - \frac{1}{2\pi\alpha'} (\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu)).$$

(esta no es una transf. de norma de  $A_\mu$ )

3) Transformación de norma usual  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda$ .

4) Difeos en la hoja de mundo  $\sigma^a \rightarrow \sigma'^a(\sigma)$ .

5) ¿Weyl?  $g_{ab}(\sigma) \rightarrow g'_{ab}(\sigma) = e^{w(\sigma)} g_{ab}(\sigma)$ .

Los términos de  $g_{\mu\nu}$  y  $B_{\mu\nu}$  son invariantes de Weyl


a nivel clásico. ¿Lo siguen siendo a nivel cuántico?? El

término de  $\Phi$  no es invariante de Weyl (ni siquiera

a nivel clásico! (Es invariante solo si  $\Phi$  es constante.)

Aun en un fondo plano ( $\leftrightarrow$  teoría libre en la hoja de mundo) vimos que las medidas  $D_g X^M$ ,  $D_g b_{ab}$ ,  $D_g c^a$  dependen de  $\omega(\sigma)$ , de tal manera que la invariancia de Weyl se preserva solo si  $c^{\text{Tot}} = 0$  ( $\leftrightarrow D=26$ ). En un fondo no trivial,

Interacciones en la hoja de mundo  $\Rightarrow$  Renormalización Adicional  $\Rightarrow$  Anomalía de Weyl en general

 Consideremos por simplicidad un fondo puramente gravitacional:

$$S_0[X] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^M \partial_b X^N g_{MN}(X)$$

y separemos

$$X^M(\sigma) = X_0^M(\sigma) + Y^M(\sigma),$$

$\uparrow$   
Valor de fondo que  
satisface ec. de mov.

$\uparrow$   
fluctuación  
cuántica:  $\int DX^M(\sigma) \rightarrow \int DY^M(\sigma)$

La descripción en términos de  $Y^M(\sigma)$  no es covariante

bajo difeos en el espaciotiempo, porque  $Y^M(\sigma)$  no es un vector.

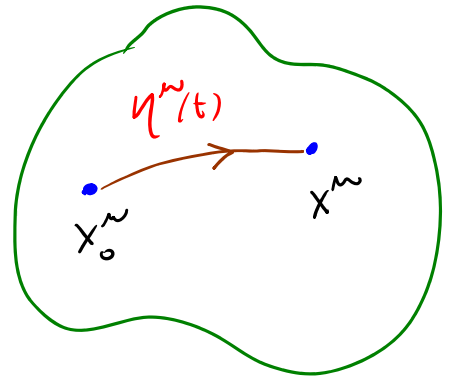
Mejores coordenadas: considerar una geodésica  $\eta^{\mu}(t)$   $t \in [0,1]$  tal que

$$\eta^{\mu}(0) = x_0^{\mu}, \quad \eta^{\mu}(1) = x^{\mu},$$

y usar como coordenada (local) a

$$\xi^{\mu} \equiv \dot{\eta}^{\mu}(0)$$

Coordenadas Normales de Riemann.



Usando la ec. de la geodésica se encuentra que

$$\eta^{\mu}(t) = x_0^{\mu} + \xi^{\mu} t - \frac{1}{2} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \xi^{\nu} \xi^{\rho} t^2 + \mathcal{O}(\xi^3)$$

$$\Rightarrow \eta^{\mu} = \xi^{\mu} - \frac{1}{2} \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} \xi^{\nu} \xi^{\rho} + \mathcal{O}(\xi^3),$$

$$\partial_a x^{\mu} = \partial_a x_0^{\mu} + \underbrace{\nabla_a \xi^{\mu}}_{\text{ver abajo}} + \frac{1}{3} R_{\lambda\sigma\nu}^{\mu}(x_0) \partial_a x_0^{\nu} \xi^{\lambda} \xi^{\sigma} + \mathcal{O}(\xi^3)$$

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x_0) + \frac{1}{3} R_{\mu\lambda\sigma\nu}(x_0) \xi^{\lambda} \xi^{\sigma} + \mathcal{O}(\xi^3),$$

de tal manera que

$$S_{\sigma}[x] = S_{\sigma}[x_0] \quad \leftarrow \text{No hay término lineal en } \xi$$

$$+ \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} \sqrt{g} g^{ab} \left\{ g_{\mu\nu}(x_0) \nabla_a \xi^{\mu} \nabla_b \xi^{\nu} + R_{\mu\lambda\rho\nu}(x_0) \partial_a x_0^{\mu} \partial_b x_0^{\nu} \xi^{\lambda} \xi^{\rho} + \mathcal{O}(\xi^3) \right\}$$

$$\equiv \partial_a \xi^{\mu} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu}(x_0) \partial_a x_0^{\lambda} \xi^{\sigma}$$

Para diagonalizar el término cinético  $g_{\mu\nu}(X_0) \nabla_a \zeta^{\mu} \nabla_b \zeta^{\nu}$ , conviene hacer un último cambio de variables, definiendo

$$\zeta^m \equiv e_{\mu}^m(X_0) \zeta^{\mu}, \text{ donde } e_{\mu}^m \text{ es la } \underline{\text{muchas-pata o vielbein}} \text{ (} \leftrightarrow \text{ tetrada o vierbein en 4dim)}$$

$$\text{tal que } e_{\mu}^m e_{\nu}^n \eta_{mn} = g_{\mu\nu} \leftrightarrow g^{\mu\nu} e_{\mu}^m e_{\nu}^n = \eta^{mn}.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(X_0) \nabla_a \zeta^{\mu} \nabla_b \zeta^{\nu} &= \eta_{mn} \nabla_a \zeta^m \nabla_b \zeta^n \quad \text{conexión de espín} \\ &\equiv \partial_a \zeta^m + \underbrace{\omega_{\mu}^{ml} \partial_a X_0^{\mu}}_{\text{campo de norma } \text{So}(D-1,1)} \zeta^l \\ &\equiv A_a^{ml} \zeta^l \end{aligned}$$

A orden cero en la curvatura del espaciotiempo, cada  $\zeta^m$  es un campo escalar sin masa (justo como lo era  $X^{\mu}$  en el fondo plano).

La expansión perturbativa en curvatura es válida si  $g_{\mu\nu}(x)$  varía lentamente en unidades de cuerdas. En esta expansión,  $\alpha'$  juega el papel de  $t_1$ : cuenta los lazos. El parámetro de expansión es  $\sim \alpha'/L^2 \leftarrow$  radio de curvatura.

Nos interesa determinar la manera en que la función

$$Z[g] \equiv e^{-W[g]} \equiv \int \mathcal{D}_g X^m e^{-S_\sigma[X,g]}$$

(donde la medida  $\mathcal{D}_g X^m$  se define a partir de la norma

$$\| \delta X \|^2 = \int d^2\sigma \sqrt{g} \delta X^m \delta X^{\nu} g_{m\nu}(X) )$$

depende del factor de Weyl.

Recordando la definición del tensor de energía-momento

clásico  $T_{ab}^{(cl)} = \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_\sigma}{\delta g^{ab}},$

conviene definir a nivel cuántico (como en la p. 286)

$$\langle T_{ab} \rangle \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta W}{\delta g^{ab}} = - \frac{1}{Z} \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta Z}{\delta g^{ab}},$$

que recibe una contribución tanto de la acción  $S_\sigma[X,g]$  como

de la medida  $\mathcal{D}_g X^m$ .

Igual que siempre, la invariancia de  $W[g]$  bajo difeos  $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \nabla_a J_b + \nabla_b J_a$

$$\Rightarrow 0 = \int d^2\sigma \sqrt{g} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W}{\delta g^{ab}} \right) (\nabla^a J^b + \nabla^b J^a),$$

que integrando por partes implica la ec. de conservación

$$\boxed{\nabla^a \langle T_{ab} \rangle = 0} \quad (1)$$

De manera similar, la invariancia (si la hay) bajo transformaciones de Weyl  $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta\omega g_{ab}$

$$\Rightarrow 0 = \int d^2\sigma \sqrt{g} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W}{\delta g^{ab}} \right) \delta\omega g_{ab} ,$$

es decir,  $\boxed{\langle T^a_a \rangle = 0} \quad (2)$

Como hemos visto, la invariancia de Weyl / conforme es necesaria para la consistencia de nuestra teoría de cuerdas, así que debemos exigir que se cumpla (2).

Pero, como veremos ahora (y como sucedió también en el fondo plano), (2) resulta ser incompatible con (1) a menos que el fondo satisfaga ciertos requisitos.



Conviene trabajar nuevamente en la norma

conforme  $g_{ab}(\sigma) = e^{w(\sigma)} \delta_{ab}$

$$\longleftrightarrow g_{zz} = 0 = g_{\bar{z}\bar{z}}, \quad g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} e^{w(z, \bar{z})}$$

(siempre accesible localmente, usando solo difeos).

Para calcular  $\langle T_{ab} \rangle$ , variamos esta métrica a

$$\begin{pmatrix} \delta g_{zz} & \delta g_{z\bar{z}} + \delta g_{\bar{z}z} \\ \delta g_{z\bar{z}} + \delta g_{\bar{z}z} & \delta g_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

Dado que la medida  $D_g X^w$  depende solo de la determinante  $\sqrt{g}$  de esta métrica, cuya variación con respecto a  $\delta g_{zz}$  ó  $\delta g_{\bar{z}\bar{z}}$  es cero (a primer orden),

concluimos que  $\frac{\delta W}{\delta g_{zz}}$  y  $\frac{\delta W}{\delta g_{\bar{z}\bar{z}}}$  reciben

contribución de  $S_\sigma$  pero no de  $D_g X^w$ , es decir,

$$\langle T_{zz} \rangle = \langle T_{zz}^{(cl)} \rangle, \quad \langle T_{\bar{z}\bar{z}} \rangle = \langle T_{\bar{z}\bar{z}}^{(cl)} \rangle.$$

Por el contrario,  $\langle T_{z\bar{z}} \rangle \neq \langle T_{z\bar{z}}^{(cl)} \rangle$ ,



que en espacio de momentos resulta en

$T_{zz}^{(cl)}(q)$        $R_{\mu\nu} \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu(-q)$  , es decir,

$$\langle T_{zz}(q) \rangle = \int \frac{d^2 p}{2\pi} \frac{p_z(p_z + q_z)}{p^2(p+q)^2} \{ R_{\mu\nu} \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu \}(-q) .$$

La integral resulta ser finita (sin necesidad de regularización),

$$\langle T_{zz}(q) \rangle = \frac{1}{4} \frac{q_z}{q_{\bar{z}}} \{ R_{\mu\nu} \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu \}(-q) .$$

Usando este resultado y la ec. de conservación (1),

$$\bar{\partial} \langle T_{z\bar{z}}(z) \rangle + \partial \langle T_{\bar{z}\bar{z}}(z) \rangle = 0 \iff q_{\bar{z}} \langle T_{z\bar{z}}(q) \rangle + q_z \langle T_{\bar{z}\bar{z}}(q) \rangle = 0 ,$$

concluimos que

$$\langle T_{\bar{z}\bar{z}}(q) \rangle = -\frac{1}{4} \{ R_{\mu\nu} \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu \}(-q) ,$$

es decir, existe una anomalía de Weyl a menos que

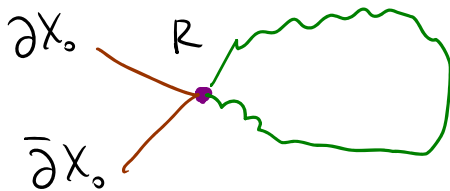
$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0} \iff \text{ec. de Einstein en el vacío!}$$

La existencia de esta anomalía está estrechamente relacionada con la aparición de una divergencia UV:

al calcular

$$\begin{aligned}
 e^{-W[g]} &\equiv \int \mathcal{D}_g X^\mu e^{-S_\sigma[X, g]} \\
 &= e^{-S_\sigma[X_0, g]} \int \mathcal{D}_g \xi^m e^{-\tilde{S}_\sigma[\xi, g]} \\
 &\quad \uparrow \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu g_{\mu\nu}(X_0)
 \end{aligned}$$

a un lazo, tenemos la contribución divergente



$$= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z R_{\mu\nu\mu\nu}(X_0) \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu (-\alpha' \eta^{\mu\nu} \ln \epsilon)$$

parámetro de corte UV  $\nearrow$

que se absorbe renormalizando la métrica:

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu}(X_0) &\equiv \underbrace{g_{\mu\nu}^{(d)}(X_0)}_{\text{métrica desnuda}} = \underbrace{g_{\mu\nu}^{(r)}(X_0)}_{\text{métrica renormalizada}} + \underbrace{\delta g_{\mu\nu}(X_0)}_{\text{contratérmino}} \\
 &= \alpha' R_{\mu\nu}(X_0) \ln \epsilon + \dots
 \end{aligned}$$

Esta renormalización elimina la divergencia de  $W[g]$ ; pero (como en QED o QCD) introduce dependencia de escala de distancia/momento en la hoja de mundo ( $\leftrightarrow$  la escala de renormalización), que se puede codificar en la funcional beta

$$\beta_{\mu\nu}^g \equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}^{(d)}}{\partial \ln \epsilon} = \alpha' R_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha'^2).$$

Si  $\beta_{\mu\nu}^g \neq 0$  (divergencias  $\Rightarrow$  no hay invariancia

bajo reescalamientos rígidos), entonces

  $W[g_{ab} = e^{w(\sigma)} \delta_{ab}]$  depende de  $w(\sigma)$ , y  $\therefore \langle T^a \rangle \neq 0$ .

El resultado para un fondo  $g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi$  general es:

$$\langle T^a \rangle = -\frac{1}{2\alpha'} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \beta_{\mu\nu}^g - \frac{i}{2\alpha'} \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \beta_{\mu\nu}^B - \frac{1}{2} R \beta^\Phi,$$

$\leftarrow$  cada funcional  
 $\leftarrow$  beta multiplica  
 $\leftarrow$  al operador de vértice correspondiente

donde (para campos que varían lentamente)

$$\beta_{\mu\nu}^g = \alpha' \left[ R_{\mu\nu} + 2 \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{4} H_{\mu\lambda\rho} H_\nu{}^{\lambda\rho} \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2),$$

derivate covariante ↗  
en el espaciotiempo
↖  $\partial_\mu B_{\lambda\rho} - \dots$

$$\beta_{\mu\nu}^B = \alpha' \left[ -\frac{1}{2} \nabla^\rho H_{\rho\mu\nu} + \nabla^\rho \Phi H_{\rho\mu\nu} \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2),$$

$$\beta^\Phi = \frac{D-26}{6} + \alpha' \left[ -\frac{1}{2} \nabla^2 \Phi + \nabla_\rho \Phi \nabla^\rho \Phi - \frac{1}{24} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2).$$

habíamos visto ya  
(p. 288) en fondo plano  
(incluye contribución  
de fantasmas)

contribución clásica  
(a través de  $S_\sigma[X_0]$ )

Tenemos entonces invariancia de Weyl solo si el fondo satisface las restricciones (ecs. de movimiento)

$$\beta_{\mu\nu}^g = 0$$

~ ¡Ecuación de Einstein!

$$\beta_{\mu\nu}^B = 0$$

~ ¡Ecuación de Maxwell generalizada!

$$\beta^\Phi = 0$$

~ ¡Ecuación de Klein-Gordon!

Concluimos entonces que, sorprendentemente,

!! INVARIANCIA CONFORME  $\Rightarrow$  DINÁMICA DE CUERDAS !!  
 (en hoja de mundo) (en espaciotiempo)

$D=26 = 17+1+2+1$

Una manera de entender el origen de este milagro es la siguiente. En una teoría de campos en el espaciotiempo, especificamos un vacío separando

$$\varphi^I(x) = \underbrace{\varphi_0^I(x)}_{\text{valor de fondo}} + \underbrace{\phi^I(x)}_{\text{fluctuación cuántica}} \quad I=1,2,\dots,\# \text{ de campos,}$$

para después calcular funciones de correlación

$$\langle \phi^{I_1}(x_1) \dots \phi^{I_n}(x_n) \rangle$$

En el caso  $n=1$  (renacuajo), obtenemos

$$\langle \phi^I(x) \rangle = 0 \quad \forall I \text{ solo si los valores de fondo}$$

$\varphi_0^I(x)$  son solución a las ecr. de mov. clásicas

(o, a nivel cuántico, un extremo del 'potencial efectivo').

De la misma manera, preguntar en cuerdas si el fondo satisface las ecs. de mov. es equivalente a pedir que las amplitudes de 2 pata se anulen,

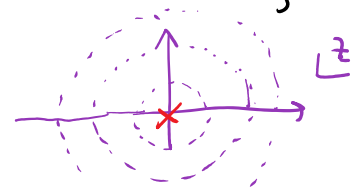
$$\langle V^{\text{F}}(z, \bar{z}) \rangle = 0 \quad \forall \text{ I.}$$

Pero, a nivel árbol (es decir, en la esfera), esto es consecuencia de la invariancia conforme:

colocando el vértice en el origen,  $z=0$ , la invariancia bajo el reescalamiento  $z \rightarrow z' = \lambda z$  implica que

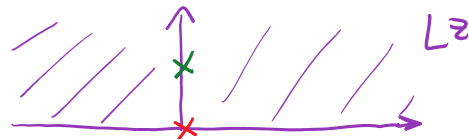
$$\langle V(0,0) \rangle_{S^2} = \underbrace{\left( \frac{\partial z}{\partial z'} \right)^h}_{|\lambda|^{-2}} \left( \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}'} \right)^{\tilde{h}} \langle V(0,0) \rangle_{S^2} \Rightarrow \langle V(0,0) \rangle_{S^2} = 0.$$

porque  $h = \tilde{h} = 1$   
para estado físico



Un argumento similar muestra que en el disco (la mitad superior del plano complejo) los renacuajos de cuerda abierto se anulan,  $\langle V(0,0) \rangle_{D^2} = 0$ ,


pero no necesariamente los de cuerda cerrada,  $\langle V(z, \bar{z}) \rangle_{D^2}$ .





Las superficies con topologías más complicadas no permiten la transformación  $z \rightarrow \lambda z$ .

Entendemos entonces que la **invariancia conforme**

 es equivalente a las ecs. de mov. de cuerdas a nivel árbol, es decir, clásicas.

Notar que una de estas ecuaciones es

$$\beta^{\Phi} = \frac{D-26}{6} + \begin{array}{l} \text{contribución de} \\ \text{fondo no trivial} \end{array} = 0$$

$\uparrow \sigma(\alpha')$

Así que fondo plano  $\Rightarrow D=26$ ; pero

fondo no trivial que varíe rápidamente  $\Rightarrow$  positivamente  $D \neq 26$ .

$\leftarrow$  en escala de  $\alpha'$

Pej., el fondo dilatónico lineal

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu}(x) = 0, \quad \Phi(x) = V_{\mu} X^{\mu}$$

(integral funcional gaussiana)

$$\uparrow \text{ con } V_{\mu} V^{\mu} = \frac{26-D}{6\alpha'}$$

resulta ser solución exacta de las condiciones de Weyl,

es decir, de las ec. de mov. clásicas: este fondo define una teoría de campo conforme en 2 dim, con carga central  $c^X = D + 6\alpha' V_\mu V^\mu = 26 \Rightarrow c^{\text{TOT}} = 0$ . ✓

Elijendo coords tales que  $V_\mu = \sqrt{\frac{26-D}{6\alpha'}} \delta_\mu^{D-1}$ , tenemos  $S_\sigma \supset -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} (g^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\mu} + \sqrt{\frac{26-D}{\alpha'}} R X^{D-1})$ , que coincide con la p. 291:  $S_L(\omega, \dot{\gamma}_{ab}) = -\frac{1}{96\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} (g^{ab} \partial_a \omega \partial_b \omega + 2\tilde{R}\omega)$ . Así que  $X^{D-1}(\sigma)$  se puede reinterpretar como el modo de Weyl  $\omega(\sigma)$

en una teoría de cuerdas no crítica en  $D-1$  dim!   
  $\curvearrowright$  en lugar de  $D$

El caso  $D \leq 2$  se ha resuelto usando un modelo matricial - ver p.ej. hep-th/9108019. Se aprendió en particular que

que en superficies de género  $m \gg 1$  las

amplitudes  $M_m \sim (2m)! g_c^{2m}$ , lo cual   
  $\leftarrow$  sería en  $g_c^2$

nos hace esperar que los efectos no perturbativos en

teoría de cuerdas sean de  $\mathcal{O}(e^{-1/g_c})$

- cf. teoría  $\lambda\phi^4$ , donde a orden  $\lambda^n$  hay

$\sim n!$  diagramas  $\Rightarrow$  efectos no perturbativos  $\mathcal{O}(e^{-1/\lambda})$ .

Las condiciones  $\beta^{\eta}_{\mu\nu} = \beta^{\rho}_{\mu\nu} = \beta^{\Phi} = 0$  son equivalentes a las ecs. de movimiento que provienen de la misma acción efectiva que dedujimos en la p. 389:

$$S_{\text{ef}} = \frac{1}{2K_0^2} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left\{ -\frac{2}{3\alpha'} (D-26) + R + 4 \partial_{\mu}\Phi \partial^{\mu}\Phi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2K^2} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\tilde{\Phi}}}$$

$$\text{con } \tilde{\Phi} \equiv \Phi - \Phi_0$$

$$2K^2 \equiv 2K_0^2 e^{2\Phi_0} = 16\pi G_N$$

$$\underbrace{(2\pi)^{D-3} \ell_c^{D-2} g_c^2}$$

Esta es la acción en el marco de cuerdas; por definición  $g_{\mu\nu}(x)$  es la métrica que la cuerda "siente". Como vimos en las pp. 388-9, es posible pasar al marco de Einstein a través de la redefinición de campos

$$g_{\mu\nu}^{\text{E}}(x) \equiv e^{\frac{4}{D-2}\tilde{\Phi}} g_{\mu\nu}(x), \text{ para obtener}$$

$$S_{\text{ef}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g^E} \left\{ -\frac{2(D-26)}{3\alpha'} e^{4\tilde{\Phi}/(D-2)} + R^E - \frac{4}{D-2} \partial_\mu \Phi (\partial^\mu \Phi)^E \right. \\ \left. - \frac{1}{12} e^{-8\tilde{\Phi}/(D-2)} H_{\mu\nu\lambda} (H^{\mu\nu\lambda})^E + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$

Esta (con  $D=26$ ) es precisamente la acción que obtuvimos antes a partir de las amplitudes de dispersión.


Notar que la acción efectiva completa incluye 2 tipos distintos de correcciones:

Correcciones de cuerdas (objetos no puntuales)  $\longleftrightarrow$  Expansión en  $\alpha'$  (correcciones cuánticas en teoría 2-dimensional)

p.ej.,  $\beta_{\mu\nu}^J = \alpha' R_{\mu\nu} + \frac{\alpha'^2}{2} R_{\mu\lambda\sigma\rho} R_{\nu}{}^{\lambda\sigma\rho} + \dots$

Correcciones cuánticas (superficies de género más alto)  $\longleftrightarrow$  Expansión en  $g_c = e^{\frac{\Phi_0}{c}}$ .


Ambos tipos de correcciones pueden ser relevantes para determinar cuáles son los fondos válidos ( $\leftrightarrow$  'vacíos' posibles) en la teoría de cuerdas completa.

 Sabemos cómo obtener correcciones cuánticas en  $S_{\text{eff}}$  a partir de cálculos de amplitudes de dispersión.

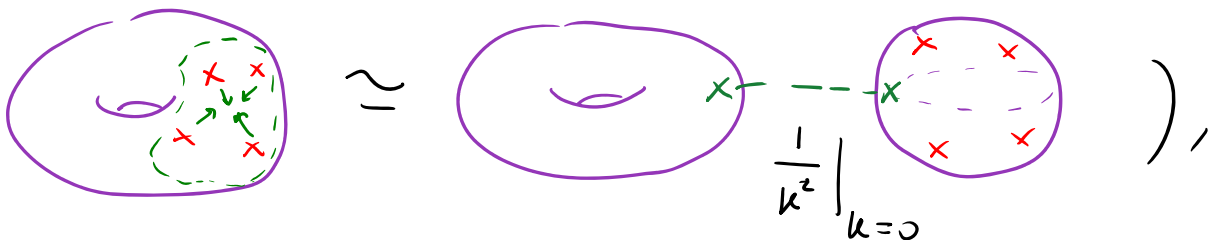
Y, de hecho, nuestros cálculos en el toro muestran que el fondo trivial  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ,  $B_{\mu\nu} = 0$ ,  $\Phi = \Phi_0$  (que clásicamente es consistente si  $D=26$ )

No es un fondo válido a nivel cuántico por al menos 2 razones:

- 1) A un lazo encontramos una constante cosmológica positiva (divergente por taquión)  $\Rightarrow$  ¿espaciotiempo de Sitter?
- 2) A un lazo encontramos un renacuajo para el

dilatación,   $\varphi \neq 0$  (que ocasionaba

divergencia en cualquier amplitud a 1 lazo,



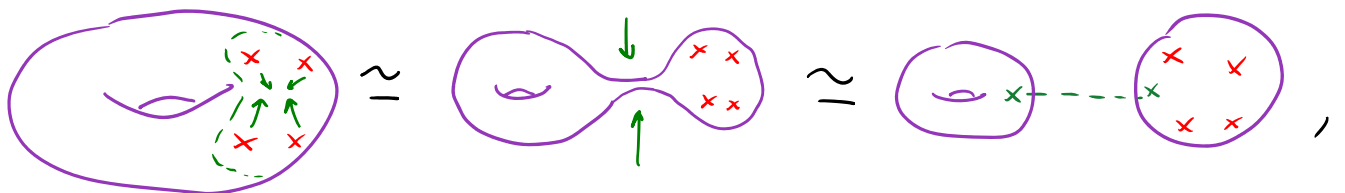
lo cual indicaba que la solución a las ecs. de mov. corregidas ( $\sim \nabla^2 \Phi = g_c^2 J$ ) involucra un  $\Phi(x)$  no trivial.

Pero ... ¿cómo podemos obtener correcciones cuánticas a las ecs. de movimiento de cuerdas a partir de la anomalía conforme ??

Arriba calculamos las  $\beta$ 's a nivel árbol (esfera); PERO ellas expresan divergencias UV, que dependen solo de la estructura local y son  $\therefore$  independientes de la topología. ¿De dónde provienen entonces las supuestas correcciones cuánticas?

El punto es que, como hemos visto, la integración sobre los módulos  $t_i, z_n$  puede dar lugar a divergencias adicionales, que representan nuevas contribuciones a la anomalía conforme.

P.ej., en



usando el mismo parámetro de corte  $\epsilon$ , la divergencia es  $\propto g_c^2 \Lambda \ln \epsilon \underbrace{\eta_{\mu\nu} \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu}_{\text{vértice del dilatón}}$ , insertado en la esfera.

Es posible entonces cancelar esta divergencia con 'renormalización' adicional (por encima de la renormalización 2-dim habitual):

$$g_{\mu\nu} \equiv \overset{(d)}{g}_{\mu\nu} = \overset{(r)}{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$$

$$\underbrace{\delta g_{\mu\nu}}_{\propto R_{\mu\nu} \ln \epsilon} + \underbrace{\delta g_{\mu\nu}}_{-g_c^2 \Lambda g_{\mu\nu} \ln \epsilon}$$

usual                      módulos

cuyo efecto es

$$e^{-S_\sigma} \rightarrow e^{-\left(S_\sigma - \underbrace{g_c^2 \Lambda \ln \epsilon V_\sigma}_{\text{inserción en la esfera}}\right)}$$

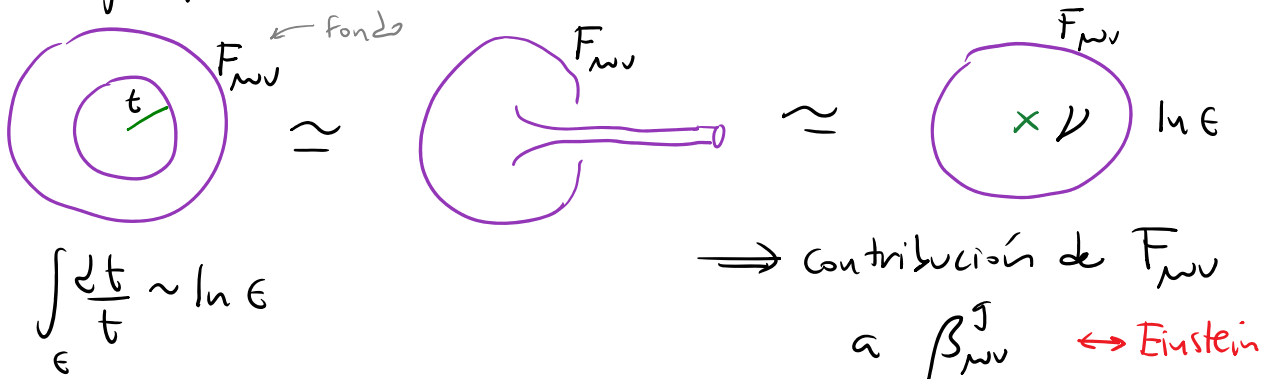
cancela divergencia en el toro

y que modifica la condición para ausencia de anomalía de Weyl

$$\alpha \beta_{\mu\nu}^g = \alpha' R_{\mu\nu} - \Lambda g_c^2 g_{\mu\nu} = 0$$

¡ ec. de Einstein con constante cosmológica !

Otro ejemplo: con cuerdas abiertas,




Esta idea aplica en general: las condiciones para la ausencia de la anomalía de Weyl son del tipo

$$\beta^{\text{TOTAL}} = \beta^{\text{usual}} + \beta^{\text{módulos}} = 0$$

Mecanismo de  
Fischler-Susskind

Esto implica que la teoría 2-dimensional es invariante conforme a nivel clásico, pero por correcciones cuánticas es no invariante conforme

en cada superficie (con módulos fijos) por separado,  
 aunque sí "conforme" en conjunto.

L17: 28/05/13



### 3. Supercuerdas

Las 4 teorías de cuerdas bosónicas (donde  $X^\mu(\sigma)$  son los únicos grados de libertad) tienen algunos problemas:

- Taquión  $\phi$  (¿Escoger otro vacío? ¿Tal vez fondo dilatónico en  $D=2$ ?)
- $D=26$  (¿Compactificar?)
- $\not\exists$  fermiones (¿Mecanismo no perturbativo?  
Ver p.ej. David, Minwalla, Núñez 0107165  
Englert, Haurt, Taronna 0106235)

La situación mejora si generalizamos a teorías de supercuerdas, que incorporen Bosones  $\longleftrightarrow$  Fermiones  
**Supersimetría**

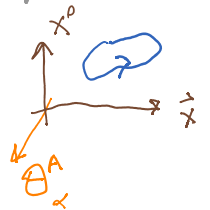
Es posible describir estas teorías a través de 3 formalismos distintos pero equivalentes:

① Green-Schwarz (Supercuerda) — Ver GSW cap. 5

Agregar  $\Theta_x^A(\sigma)$  — espinores en espaciotiempo  
— escalar en hoja de mundo

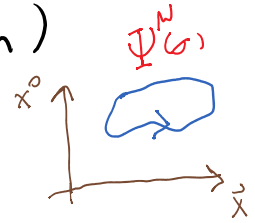
$\Rightarrow$  SUS1 en espaciotiempo manifiesta ✓

Solo puede cuantizarse en norma del cono de luz ✗



② Ramond-Neveu-Schwarz (Cuerda con espín)

Agregar  $\Psi^M(\sigma)$  — vector en espaciotiempo  
 — espinor en hoja de mundo



Se puede cuantizar de manera covariante bajo Poincaré ✓

SUS1 en espaciotiempo no manifiesta ✗

③ Berkovits (Espinor puro) — ver hep-th/0209059

0302.147  
 0902.1552  
 0910.2254

Combina lo mejor de ① y ②

Permite cuantización covariante bajo Súper-Poincaré ✓

Formalismo aún en etapa de desarrollo ✗

Estudiaremos solo RNS (más sencillo).

No basta con agregar  $\Psi^M(\sigma)$ : para desacoplar nuevos modos con norma negativa (asociados a  $\bar{\Psi}^0(\sigma)$ ), necesitamos invariancia local

mayor en hoja de mundo — supersimetría.

Como 'superparejas' de  $X^M(\sigma)$  y  $g_{ab}(\sigma)$ , agregamos entonces D espinores de Majorana  $\Psi^M(\sigma) = \begin{pmatrix} \psi_+(\sigma) \\ \psi_-(\sigma) \end{pmatrix}$

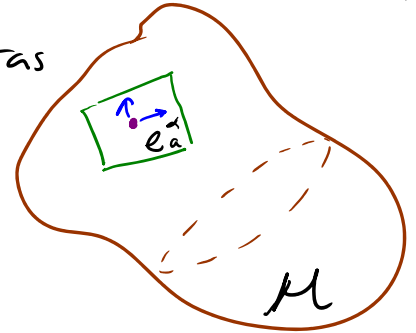
$$\uparrow \boxed{g_{ab}, \chi_a} + X^\mu, \Psi^m$$

y 1 gravitino (vector x espinor Majorana)  $\chi_a = \begin{pmatrix} \chi_a^+ \\ \chi_a^- \end{pmatrix}$

Recordar que para definir espinor en espacio curvo (en este caso, hoja de mundo  $M$  con métrica intrínseca  $g_{ab}(\sigma)$ ),

es necesario usar políada/vielbein/muchas-patas

(en 2 dim: diada/zweibein/2-patas)  
(en 4 dim: tétrada/vierbein/4-patas):



Una elección de base ortanormal para espacio tangente en cada punto de la variedad,

$e_a^\alpha(\sigma)$  ← etiqueta de vector  $\alpha=0,1$   
← índice vectorial  $a=0,1$

$$e_a^\alpha(\sigma) e_b^\beta(\sigma) g^{ab}(\sigma) = \eta^{\alpha\beta} \iff \eta_{\alpha\beta} e_a^\alpha(\sigma) e_b^\beta(\sigma) = g_{ab}(\sigma)$$

Podemos entonces considerar a  $e_a^\alpha$  en vez de  $g_{ab}$  como variable básica. La libertad de redefinir base localmente,

$$e_a^\alpha(\sigma) \rightarrow e'^\alpha_a(\sigma) = L^\alpha_\beta(\sigma) e_a^\beta(\sigma)$$

← matriz de Lorentz

constituye una simetría local adicional  $SO(d-1,1)$

( $d=2$  aquí) que garantiza que no hemos suñido grados de libertad a nuestra descripción.

$\Psi^{\mathcal{M}}(\sigma)$  y  $\chi_a(\sigma)$  son espinores precisamente bajo este grupo de Lorentz local: definiendo matrices de Dirac

$$\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = -2\eta^{\alpha\beta}, \text{ bajo transformaciones}$$

infinitesimales)  $L_\rho^\alpha(\sigma) = \delta_\rho^\alpha + \theta_{\alpha\beta}^\rho(\sigma)$  (con  $\theta_{\alpha\beta}^\rho = -\theta_{\beta\alpha}^\rho$ ,  $|\theta_{\alpha\beta}^\rho| \ll 1$ )

tenemos

$$\delta \Psi(\sigma) = \frac{i}{2} \underbrace{\frac{i}{4} [\gamma^\alpha, \gamma^\beta]}_{\substack{\uparrow \text{ matriz } 2 \times 2 \\ \equiv \gamma^{\alpha\beta}}} \underbrace{\theta_{\alpha\beta}^\rho(\sigma)}_{\text{parámetro}} \Psi(\sigma)$$

1 generador de  $SO(1,1)$   $\equiv \gamma^{\alpha\beta}$  parámetro

Para poder escribir término cinético invariante bajo esta simetría local, necesitamos definir derivada covariante

$$\nabla_a \Psi = \partial_a \Psi + \frac{1}{8} [\gamma_\alpha, \gamma_\beta] \omega_a^{\alpha\beta} \Psi$$

donde  $\omega_a^{\alpha\beta}(\sigma) = \frac{1}{2} e^{b\alpha} \partial_a e_b^\beta + \dots$  es la conexión de espín (campo de norma  $SO(d-1,1)$ ) determinada por el requisito

$$\nabla_a e_b^\alpha = \partial_a e_b^\alpha + \omega_a^{\alpha\beta} e_b^\beta - \Gamma_{ab}^c e_c^\alpha = 0.$$

Tomando 'base de Majorana' para álgebra de Dirac,  $\uparrow$  Christoffel

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Rightarrow iS^{\alpha\beta} \in \mathbb{R})$$

el hecho de que  $\Psi^m = \begin{pmatrix} \psi_+^m \\ \psi_-^m \end{pmatrix}$  y  $\chi_a = \begin{pmatrix} \chi_a^+ \\ \chi_a^- \end{pmatrix}$  son

espinores de Majorana significa simplemente que  $\psi_{\pm}^m$  y  $\chi_a^{\pm}$  son reales.

Notar que en esta base la matriz de gamma ( $\sim \gamma^5$ ) es

$$\gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ así que las componentes}$$

individuales  $\psi_+^m, \psi_-^m, \chi_a^+, \chi_a^-$  son espinores

de Majorana-Weyl (lo cual no es posible en 3+1 dim).

Con estas definiciones podemos escribir finalmente

acción para cuerda RNS (en espaciotiempo plano):

$$S[X, \Psi, e, \chi] = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\alpha'} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \right. \\ \left. - i \bar{\Psi}^m \gamma^a \nabla_a \Psi^\nu \eta_{\mu\nu} + \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \bar{\chi}_a \gamma^b \gamma^a \Psi^m \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \bar{\Psi}^m \Psi^\nu \eta_{\mu\nu} \bar{\chi}_a \gamma^b \gamma^a \chi_b \right\}, \quad [\text{ver GSW1 4.3.5}]$$

con  $\gamma^a(\sigma) \equiv e^a_{\alpha}(\sigma) \gamma^\alpha$  ( $\Rightarrow \{\gamma^a, \gamma^b\} = -2g^{ab}$ ) y  $\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0$

Notar que no aparecen derivadas de  $e_a^\alpha$  ó  $\chi_a$   
 (los términos cinéticos correspondientes serían  
 respectivamente  $\int d^2\sigma \sqrt{g} \mathcal{R}$ , invariante topológico,  
 y  $i \bar{\chi}_a \gamma^{[a} \gamma^b \gamma^{c]} \nabla_b \chi_c = 0$  por antisimetrización),  
 así que estos campos son no dinámicos.

$S$  es invariante bajo

1) Poincaré en espaciotiempo (simetría global en hoja de mundo)

$$\tilde{X}^\mu(\sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\sigma) + a^\mu, \quad \tilde{\Psi}^\mu(\sigma) = \Lambda^\mu{}_\nu \Psi^\nu(\sigma)$$

2) Difeos en hoja de mundo (local)

$$\sigma^a \rightarrow \sigma'^a(\sigma), \quad X'^\mu(\sigma') = X^\mu(\sigma), \quad e'^\alpha{}_a(\sigma') = \frac{\partial \sigma^b}{\partial \sigma'^a} e^\alpha{}_b(\sigma),$$

$$\tilde{\Psi}'^\mu(\sigma') = \tilde{\Psi}^\mu(\sigma), \quad \chi'_a(\sigma') = \frac{\partial \sigma^b}{\partial \sigma'^a} \chi_b(\sigma)$$

3) Weyl (local)

$$\delta e^\alpha{}_a(\sigma) = \lambda(\sigma) e^\alpha{}_a(\sigma), \quad \delta X^\mu(\sigma) = 0,$$

$$\delta \tilde{\Psi}^\mu(\sigma) = -\frac{1}{2} \lambda(\sigma) \tilde{\Psi}^\mu(\sigma), \quad \delta \chi_a(\sigma) = \frac{1}{2} \lambda(\sigma) \chi_a(\sigma)$$

#### 4) Lorentz en hoja de mundo (local)

$$\delta e_a^\alpha(\sigma) = \underbrace{l(\sigma) \epsilon^\alpha_\beta}_{\theta^\alpha_\beta(\sigma)} e_a^\beta(\sigma), \quad \delta X^{\tilde{m}}(\sigma) = 0,$$

$$\delta \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma) = \frac{1}{2} l(\sigma) \gamma^0 \gamma^1 \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma), \quad \delta \chi_a^{\tilde{m}}(\sigma) = \frac{1}{2} l(\sigma) \gamma^0 \gamma^1 \chi_a^{\tilde{m}}(\sigma)$$

#### 5) Supersimetría en hoja de mundo $\equiv$ Superdifeos (local)

$$\delta X^{\tilde{m}}(\sigma) = \sqrt{2\alpha'} \bar{\epsilon}(\sigma) \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma)$$

$$\delta \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma) = -i \gamma^{\tilde{a}}(\sigma) \epsilon(\sigma) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \partial_a X^{\tilde{m}}(\sigma) - \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma) \chi_a^{\tilde{m}}(\sigma) \right]$$

$$\delta e_a^\alpha(\sigma) = -2i \bar{\epsilon}(\sigma) \gamma^\alpha \chi_a^{\tilde{m}}(\sigma)$$

$$\delta \chi_a^{\tilde{m}}(\sigma) = \nabla_a \epsilon(\sigma)$$

donde el parámetro infinitesimal  $\epsilon(\sigma)$  es un espinor de Majorana (es decir, tiene componentes reales  $\epsilon_+(\sigma), \epsilon_-(\sigma)$ )

#### 6) Super Weyl (local)

$$\delta \chi_a^{\tilde{m}}(\sigma) = i \gamma_a^{\tilde{m}}(\sigma) \eta(\sigma), \quad \delta X^{\tilde{m}}(\sigma) = \delta e_a^{\tilde{m}}(\sigma) = \delta \bar{\Psi}^{\tilde{m}}(\sigma) = 0$$

espinor Majorana  $\rightarrow$ 
 (usar identidad  $\gamma^a \gamma^b \gamma_a = 0$  en 2 dim)

S describe gravedad 'superconforme' en 2 dimensiones acoplada a campos escalares  $X^M(\sigma)$  y espinorales  $\bar{\Psi}^M(\sigma)$ .

Al igual que en la cuerda bosónica, podemos eliminar redundancia de manera covariante bajo Poincaré en espaciotiempo imponiendo condiciones sobre los campos no dinámicos:

- 4 invariancias bosónicas locales (2 difeos, 1 Weyl, 1 Lorentz) nos permiten fijar  $e_a^\alpha(\sigma) = \delta_a^\alpha$  ( $\leftrightarrow g_{ab}(\sigma) = \eta_{ab}$ )
- 4 invariancias fermiónicas locales (2  $\epsilon$ 's, 2  $\eta$ 's) nos permiten fijar  $\chi_a(\sigma) = 0$

Esta es la norma superplana (Si no usamos Weyl ni superWeyl podemos fijar la norma superconforme  $e_a^\alpha(\sigma) = e^{\lambda(\sigma)} \delta_a^\alpha$ ,  $\chi_a(\sigma) = \delta_a(\sigma) \eta(\sigma)$ .)

El análisis aquí es local - globalmente puede haber módulos y supermódulos, así como vectores y espinores de Killing conformes.



En la norma superplana, la acción se reduce a KG+Dirac sin masa:

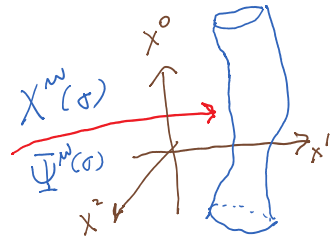
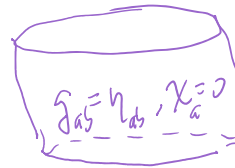
$$S[X, \Psi] = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \left\{ \frac{1}{2\alpha'} \partial^a X^\mu \partial_a X_\mu - i \bar{\Psi}^\mu \gamma^a \partial_a \Psi_\mu \right\},$$

que debe ser suplementada con ecs. de mov. para los campos no dinámicos,

$$T_{ab} \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = - \left( \frac{1}{\alpha'} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + i \bar{\Psi}^\mu \gamma_{(a} \partial_{b)} \Psi_\mu - \text{traza} \right) = 0$$

$$J_a \equiv -\frac{\pi}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta X^a} = \frac{1}{2} \gamma^b \gamma_a \bar{\Psi}^\mu \partial_b X_\mu = 0$$

↑  
[25/04/06] super corriente  
[27; 21/11/21]



Las ecs. de mov. para  $X^\mu$  y  $\Psi^\mu$  en la norma superplana son

$$\partial^a \partial_a X^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad X^\mu(\sigma) = \underbrace{X^\mu(\tau+\sigma)}_{\text{modos izquierdos}} + \underbrace{\tilde{X}^\mu(\tau-\sigma)}_{\text{derechos}}$$

KG sin masa

$$\gamma^a \partial_a \bar{\Psi}^\mu = i \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\tau + \partial_\sigma \\ \partial_\tau + \partial_\sigma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_+^\mu \\ \Psi_-^\mu \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\Psi}^\mu(\sigma) = \begin{pmatrix} \Psi_+^\mu(\tau-\sigma) \\ \Psi_-^\mu(\tau+\sigma) \end{pmatrix}$$

Dirac sin masa

Después de la rotación de Wick  $\tau = \sigma^0 \rightarrow \sigma^2 = i\tau$

y pasando a las coords complejas habituales

$$w \equiv \sigma^2 + i\sigma^1 = i(\tau + \sigma)$$

$$\bar{w} = \sigma^2 - i\sigma^1 = i(\tau - \sigma)$$

$$z = e^w$$

$$\bar{z} = e^{\bar{w}}$$

transform conforme  
= Weyl + (difeo conforme)

tenemos

$$S_{\text{NS}} = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left( \frac{2}{\alpha'} \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi^\mu \bar{\partial} \psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu \partial \tilde{\psi}_\mu \right)$$

$$\text{donde } \psi^\mu(z) \equiv \frac{z^{-1/2}}{\sqrt{2}} \psi_+^\mu(\tau + \sigma), \quad \tilde{\psi}^\mu(\bar{z}) \equiv \frac{\bar{z}^{-1/2}}{\sqrt{2}} \psi_-^\mu(\tau - \sigma),$$

↙ por rescalamiento bajo Weyl ↘  
p. 454

con constricciones

$$T(z) \equiv T_{zz}(z) = -\frac{1}{\alpha'} \partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2} \psi^\mu \partial \psi_\mu = 0$$

$$J(z) \equiv J_z(z) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \psi^\mu \partial X_\mu = 0$$

$$\tilde{T}(\bar{z}) \equiv \tilde{T}_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'} \bar{\partial} X^\mu \bar{\partial} X_\mu - \frac{1}{2} \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} \tilde{\psi}_\mu = 0$$

$$\tilde{J}(\bar{z}) \equiv \tilde{J}_{\bar{z}}(\bar{z}) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} X_\mu = 0$$

$$( \text{Weyl} \Rightarrow T^a_a = 0, \text{ Super Weyl} \Rightarrow \gamma^a J_a = 0 )$$

$S_{\text{res}}[X, \psi]$  posee invariancia residual bajo

1) Transformaciones conformes (Difeo Analítico = Weyl)

$$z \rightarrow z' = z'(z), \quad X^{\sim}(\tilde{z}', \bar{\tilde{z}}') = X^{\sim}(z, \bar{z}),$$

$$\psi^{\sim}(z') = \left( \frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{-1/2} \psi^{\sim}(z) \quad \leftarrow \text{campo primario con } h = \frac{1}{2}, \tilde{h} = 0$$

$$\tilde{\psi}^{\sim}(\bar{z}') = \left( \frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{-1/2} \tilde{\psi}^{\sim}(\bar{z}) \quad \leftarrow \text{campo primario con } h = 0, \tilde{h} = \frac{1}{2}$$

Sabemos que estas transformaciones son generadas

por tensor de energía momento  $T(z), \tilde{T}(\bar{z})$

(  $j_f(z) = if(z)T(z)$  es la corriente de Noether asociada a  $z \rightarrow z' = z + \epsilon f(z)$  ).

2) Transformaciones superconformes (Superdifeo analítico = Weyl = Super Weyl)

$$\delta X^{\sim}(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \in \left[ \eta(z) \psi^{\sim}(z) + \eta(z)^* \tilde{\psi}^{\sim}(\bar{z}) \right]$$

$$\delta \psi^{\sim}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \in \eta(z) \partial X^{\sim}(z)$$

$$\delta \tilde{\psi}^{\sim}(\bar{z}) = -\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \in \eta(z)^* \bar{\partial} X^{\sim}(\bar{z})$$

con  $\eta(z)$  anti conmutativo (espinor Majorana-Weyl),

que son generadas por las supercorrientes  $J(z)$ ,  $\tilde{J}(\bar{z})$   
 ( $j_\eta(z) = \eta(z) J(z)$  es la corriente de Noether asociada).

$S_{RNS}$  es una teoría de campos superconforme (SCFT).

Podemos calcular el propagador para  $\psi^{\mu}(z)$ :

$$0 = \int \mathcal{D}\psi \frac{\delta}{\delta \psi^{\mu}(z)} \left[ e^{-\frac{1}{4\pi} \int d^2z \psi \cdot \bar{\partial} \psi} \psi^{\nu}(z') \right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \langle \bar{\partial} \psi^{\mu}(z) \psi^{\nu}(z') \rangle + \eta^{\mu\nu} \delta^{(2)}(z-z') \langle 1 \rangle$$

$\Rightarrow$   $\langle \psi^{\mu}(z) \psi^{\nu}(z') \rangle = \frac{\eta^{\mu\nu}}{z-z'} \langle 1 \rangle$  ↑ omitir ↓

y de manera similar  $\langle \tilde{\psi}^{\mu}(\bar{z}) \tilde{\psi}^{\nu}(\bar{z}') \rangle = \frac{\eta^{\mu\nu}}{\bar{z}-\bar{z}'} \langle 1 \rangle$ .

Definimos por tanto el orden normal conforme

$$: \psi^{\mu}(z) \psi^{\nu}(z') : \equiv \psi^{\mu}(z) \psi^{\nu}(z') - \eta^{\mu\nu} \frac{1}{z-z'}$$

$$: \tilde{\psi}^{\mu}(\bar{z}) \tilde{\psi}^{\nu}(\bar{z}') : \equiv \tilde{\psi}^{\mu}(\bar{z}) \tilde{\psi}^{\nu}(\bar{z}') - \eta^{\mu\nu} \frac{1}{\bar{z}-\bar{z}'}$$

contribución de  $\psi(z)$  a  $T(z)$

Usando  $T^\psi(z) = -\frac{1}{2} : \psi^\mu \partial \psi_\mu(z) :$  podemos calcular EPO

$$\begin{aligned}
 T^\psi(z) T^\psi(z') &= \frac{1}{4} : \psi^\mu \partial \psi_\mu(z) \psi^\nu \partial' \psi_\nu(z') : + \text{términos con} \\
 &\quad \text{1 contracción} \\
 &+ \frac{1}{4} \left[ - \frac{\eta^{\mu\nu}}{z-z'} \partial \partial' \left( \frac{\eta_{\mu\nu}}{z-z'} \right) + \partial \left( \frac{\delta_\mu^\nu}{z-z'} \right) \partial' \left( \frac{\delta_\nu^\mu}{z-z'} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2(z-z')^4} \frac{D}{2} (z-1) + \frac{2}{(z-z')^2} T^\psi(z') + \frac{1}{(z-z')} \partial' T^\psi(z') + \dots \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}} \\
 &\quad \boxed{c^\psi = \frac{D}{2}}
 \end{aligned}$$

De manera similar, tomando el tensor de energía-momento completo,  $T(z) = T^X(z) + T^\psi(z)$  podemos deducir que

$$T(z) T(0) = \frac{c}{2z^4} + \frac{2}{z^2} T(0) + \frac{1}{z} \partial T(0) + \dots$$

$$T(z) J(0) = \frac{3}{2z^2} J(0) + \frac{1}{z} \partial J(0) + \dots \quad \leftarrow J(z) \text{ es operador primario con } h = \frac{3}{2}$$

$$J(z) J(0) = \frac{2c}{3z^3} + \frac{2}{z} T(0) + \dots$$

$$\text{con } c = c^X + c^\psi = D + \frac{D}{2} = \frac{3D}{2} .$$

Otra novedad es que al fijar la norma en la integral de trayectoria

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab} \mathcal{D}\chi_a \mathcal{D}\chi^m \mathcal{D}\Psi^m}{\text{Dif} \times \text{Weyl} \times \text{SDif} \times \text{SWeyl}} e^{-S[X, \bar{\Psi}, g, \chi]}$$

necesitamos fantasmas adicionales: además de (p.265)

$$\mathcal{D}g_{ab} = J \mathcal{D}\xi^a \mathcal{D}\lambda \quad \text{con } J = \det\left(\frac{\delta g_{zz}}{\delta \xi_z}\right) \det\left(\frac{\delta g_{\bar{z}\bar{z}}}{\delta \bar{\xi}_{\bar{z}}}\right)$$

$\uparrow$  Dif       $\uparrow$  Weyl  
 $\uparrow$        $\uparrow$   
 $\text{Dif}$        $\text{Weyl}$

$$= \det \nabla_z \det \nabla_{\bar{z}}$$

que representamos con campos anticommutativos  $b$  y  $c$ , tenemos ahora [ver GSW 4.4, ó D'Hoker & Phong, Rev. Mod. Phys 60, 917]

$$\mathcal{D}\chi_a = J' \mathcal{D}\epsilon \mathcal{D}\eta \quad \text{con } J' = \left[ \det\left(\frac{\delta \chi_a}{\delta \epsilon}\right) \right]^{-1}$$

$\uparrow$  SDif       $\uparrow$  SWeyl  
 $\text{SDif}$        $\text{SWeyl}$

$$= \left[ \det \nabla_z \det \nabla_{\bar{z}} \right]^{-1}$$

que representamos con campos commutativos  $\beta$  y  $\gamma$ . ← superparejas de  $b, c$

la acción resultante para fantasmas (en la norma superplana) es

$$S_f = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left( b \bar{\partial} c + \beta \bar{\partial} \gamma + \tilde{b} \partial \tilde{c} + \tilde{\beta} \partial \tilde{\gamma} \right)$$

que que son 2 teorías superconformes adicionales, con

$$h_c = -1 (\leftrightarrow \xi), \quad h_b = 2 (\leftrightarrow T), \quad h_\gamma = -\frac{1}{2} (\leftrightarrow \epsilon), \quad h_\beta = \frac{3}{2} (\leftrightarrow J),$$

$$\langle b(z) c(z') \rangle = \frac{1}{z-z'} \quad , \quad \langle \beta(z) \gamma(z') \rangle = -\frac{1}{z-z'} \quad ,$$

$$T^f = -(\partial b) c - 2b \partial c - \frac{1}{2}(\partial \beta) \gamma - \frac{3}{2} \beta \partial \gamma$$

$$J^f = (\partial \beta) c + \frac{3}{2} \beta \partial c - 2b \gamma$$

(con expresiones análogas para la teoría antianalítica),  
de donde  $c^{b,c} = -26$  ,  $c^{\beta,\gamma} = +11$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad c^{TOT} &= c^X + c^\psi + c^{b,c} + c^{\beta,\gamma} \\ &= D + \frac{D}{2} - 26 + 11 \\ &= \frac{3}{2} D - 15 \end{aligned}$$

Concluimos entonces que  $D=10$  es la dimensión crítica para la supercuerda, luego  $c^{TOT} = 0$  y por tanto la anomalía de Weyl se cancela.

(Si  $D \neq 10$  —supercuerda no crítica— podemos fijar la norma superconforme, pero modos de Weyl y superWeyl son dinámicos  $\rightarrow$  acción de superLiouville.)

Analicemos ahora las posibles condiciones de borde,  
primero en el caso de la supercuerda cerrada.

Sabemos ya que los campos con 'espín' entero



deben ser periódicos:

$$X^{\mu}(\sigma+2\pi, \tau) = X^{\mu}(\sigma, \tau) \quad \forall \mu \text{ es la única}$$

condición covariante bajo Poincaré,

y la periodicidad de los fantasmas

$\alpha$  y  $\beta$  se debe a su conexión con reparametrizaciones

y deformaciones de la métrica, respectivamente.

Pero los nuevos campos, que tienen espín semientero,

permiten 2 condiciones de borde distintas:

$$\psi^{\mu}(\sigma+2\pi, \tau) = +\psi^{\mu}(\sigma, \tau) \quad \forall \mu \quad \text{Ramond}$$

(preservan SUSY)

$$\psi^{\mu}(\sigma+2\pi, \tau) = -\psi^{\mu}(\sigma, \tau) \quad \forall \mu$$

Neveu-Schwarz

(rompen SUSY)

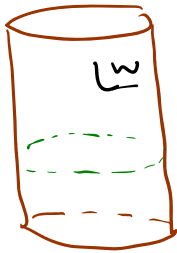
Conviene expresar el signo en la forma

$$e^{2\pi i \Delta}, \quad \text{con} \quad \Delta = \begin{cases} 0 & R \\ 1/2 & NS \end{cases} . \quad (\text{Solo existen estas}$$

2 posibilidades porque  $S \sim \int d^2z \psi \bar{\partial} \psi$  debe ser univaluada.)

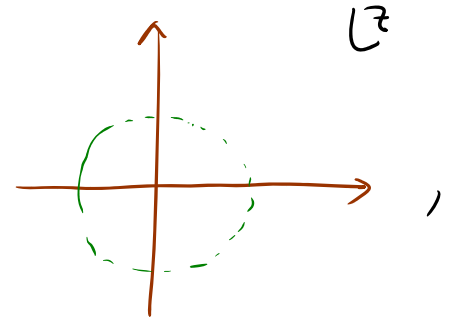


Pasando al plano



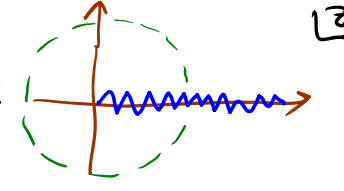
$$w = i(\tau + \sigma) \\ = \sigma^2 + i\sigma'$$

$$z = e^w$$



Dado que  $\psi_{\text{plano}}^{\mu}(z) = \underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)}_{z^{-1/2}} \psi_{\text{cil}}^{\mu}(w)$ , las 2 opciones son

$$\begin{aligned} \psi^{\mu}(e^{2\pi i} z) &= -\psi^{\mu}(z) & R \\ \psi^{\mu}(e^{2\pi i} z) &= +\psi^{\mu}(z) & NS \end{aligned}$$

←  $\exists$  corte: 

Más adelante veremos que, para obtener una teoría de supercuerdas consistente, necesitamos de hecho emplear ambas condiciones de borde, que definen entonces  $Z$  distintos "sectores" de una misma teoría de cuerdas. En cada sector, los superfantomas  $\gamma$  y  $\beta$  deben satisfacer las mismas condiciones de borde que  $\psi^{\mu}$  (porque  $\gamma$  está asociado al espinor  $\epsilon$  que relaciona  $\chi^{\mu}$  con  $\psi^{\mu}$ ).

En resumen:  $NS \equiv \begin{cases} + & \text{plano} \\ - & \text{cilindro} \end{cases}, R \equiv \begin{cases} - & \text{plano} \\ + & \text{cilindro} \end{cases}.$

Tomando en cuenta a los modos derechos  $\tilde{\psi}^{\mu}(\bar{z})$ ,

tenemos entonces 4 sectores para la cuerda cerrada:

$$NS-NS, \quad R-R, \quad NS-R, \quad R-NS$$

$$(\Delta, \tilde{\Delta}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (0, 0) \quad \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Para la cuerda abierta,



$$\delta S_{NS} \Rightarrow \text{término de borde } \frac{1}{2\pi} \int d\tau (\psi^{\mu} \delta \psi_{\mu} - \tilde{\psi}^{\mu} \delta \tilde{\psi}_{\mu}) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}$$

que se anula si  $\psi^{\mu} \Big|_{\sigma=0} = \pm \tilde{\psi}^{\mu} \Big|_{\sigma=\pi} \quad \forall \tau.$

Podemos escribir esto en la forma

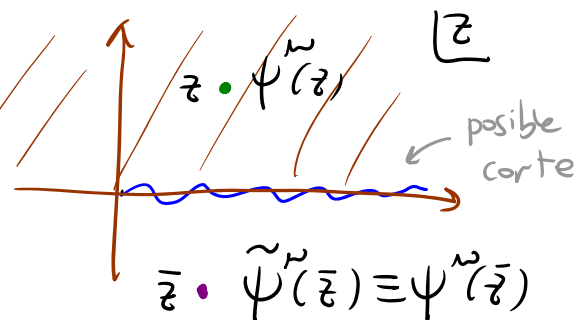
$$\psi_{cil}^{\mu}(0, \tau) = e^{2\pi i \Delta} \tilde{\psi}_{cil}^{\mu}(0, \tau), \quad \psi_{cil}^{\mu}(\pi, \tau) = e^{2\pi i \Delta'} \tilde{\psi}_{cil}^{\mu}(\pi, \tau).$$

Pero siempre podemos redefinir  $\tilde{\psi}_{cil}^{\mu} \rightarrow e^{-2\pi i \Delta'} \tilde{\psi}_{cil}^{\mu}$ ,

así que basta considerar  $\Delta' = 0$ .

Hay entonces 2 sectores:  $\Delta = \begin{cases} 0 & R \\ \frac{1}{2} & NS \end{cases}$

Pasando del cilindro al plano, podemos implementar nuevamente "truco de duplicación":



Obtenemos entonces  $\psi^{\sim}(z)$  definido en todo el plano,  
que satisface  $\psi^{\sim}(e^{2\pi i} z) = -e^{2\pi i \Delta} \psi^{\sim}(z)$  con  $\Delta = \begin{cases} 0 & R \\ 1/2 & NS \end{cases}$ .

27/04/06

Habiendo entendido las condiciones de borde, podemos escribir el desarrollo en modos (usando  $h_{\psi} = 1/2$ )

$$\psi^{\sim}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \Delta} \frac{\psi_r^{\sim}}{z^{r+1/2}} \quad \tilde{\psi}^{\sim}(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \tilde{\Delta}} \frac{\tilde{\psi}_r^{\sim}}{z^{r+1/2}}$$

↑ período NS  
antiperíodo R

que (como consecuencia de FPO  $\psi^{\sim}(z) \psi^{\vee}(0) = \frac{\eta^{\mu\nu}}{z} + \dots$ )  
satisface

$$\{\psi_r^{\sim}, \psi_s^{\vee}\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r,-s} = \{\tilde{\psi}_r^{\sim}, \tilde{\psi}_s^{\vee}\}$$

Desarrollando también

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X^{\mu} \partial X_{\mu} : - \frac{1}{2} : \psi^{\sim} \partial \psi_{\sim} : = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m+2}}$$

↑ orden normal conforme

$$J(z) = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \psi^{\sim} \partial X_{\sim} = \sum_{r \in \mathbb{Z} + \Delta} \frac{G_r}{z^{r+3/2}}$$

obtenemos

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} : \alpha_{m-n}^{\mu} \alpha_{\mu n} : + \frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \Delta} (2r-m) : \psi_{m-r}^{\sim} \psi_{\mu r}^{\sim} : + \delta_{m,0} A_{\Delta}^{\psi, \psi}$$

↑ orden normal de operadores

$$G_r = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^{\mu} \psi_{\mu r-n}$$

constante de orden

que satisfacen el **álgebra superconforme** (o super Virasoro)

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{c}{12} (m^3 - m) \delta_{m,-n}$$

$$\{G_r, G_s\} = 2L_{r+s} + \frac{c}{12} (4r^2 - 1) \delta_{r,-s}$$

$$[L_m, G_r] = \frac{m-2r}{2} G_{m+r}$$

↖ p. 461

(que se puede obtener a partir de EPOs TT, JJ, TJ).

La constante de orden  $A_{\Delta}^{x,\psi}$  se puede calcular de

la manera que vimos en cuerdas bosónicas (pej. comparando  
:: vs. ::, ó usando  $[L_1, L_{-1}] = 2L_0$ ).

Vale la pena memorizar el resultado general:

Cada	bosón	— periódico	-1/24	Contribuye
		— antiperiódico	+1/48	
	fermión	— periódico	+1/24	
		— antiperiódico	-1/48	

al Hamiltoniano  $H$  (en  $w$ ), y  $L_0$  (en  $z$ ) difiere por  $+\frac{c}{24}$   
(recordar que  $H = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c+\tilde{c}}{24}$  por derivada Schwarziana).

De acuerdo con esto, en  $L_0^x$  y  $L_0^{b,c}$  tenemos constantes de orden

$$A^x = -\frac{D}{24} + \frac{D}{24} = 0 \quad \checkmark$$

(como vimos en cuerda bosónica)

$$A^{b,c} = +\frac{2}{24} + \frac{-26}{24} = -1 \quad \checkmark$$

Para  $L_0^\psi$  tenemos

$$A_\Delta^\psi = A_\Delta^{x,\psi} = \begin{cases} \frac{D}{24} + \frac{D/2}{24} = \frac{D}{16} = \frac{5}{8} & R \quad (\Delta=0) \\ -\frac{D}{48} + \frac{D/2}{24} = 0 & NS \quad (\Delta=\frac{1}{2}) \end{cases}$$

Por último, en  $L_0^{\beta,\gamma}$  aparece

$$A_\Delta^{\beta,\gamma} = \begin{cases} -\frac{2}{24} + \frac{11}{24} = +\frac{3}{8} & R \\ +\frac{2}{48} + \frac{11}{24} = +\frac{1}{2} & NS \end{cases}$$

En conjunto tenemos entonces

$$A_{\Delta}^{TOT} = A_{\Delta}^{x,\psi} + A_{\Delta}^{b,c} + A_{\Delta}^{\beta,\gamma} = \begin{cases} 0 & R \\ -\frac{1}{2} & NS \end{cases}$$

← por sus 1  
y  $c^{TOT} = 0$

$L_{25} = 24/11/21$

$= -\Delta$

Podemos proceder ahora a construir el espacio de Hilbert e identificar en él a los estados físicos.

Con  $\alpha_n^m$  es como antes, ¿Qué pasa con  $\psi_r^m$ ?

$$\psi^{\mu}(z), \tilde{\psi}^{\mu}(\bar{z})$$

- NS: tenemos  $\{\psi_r^{\mu}, \psi_s^{\nu}\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r,-s}$   $r, s = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots$

Definimos  $|0\rangle_{NS}$  tal que

$$\psi_r^{\mu} |0\rangle_{NS} = 0 \quad \forall \mu, \forall r > 0$$

Los estados excitados son entonces

$$\psi_{-r_1}^{\mu_1} \dots \psi_{-r_n}^{\mu_n} |0\rangle_{NS}, \text{ con } \binom{\mu_i}{r_i} \neq \binom{\mu_j}{r_j} \quad \forall i \neq j$$

Todos tienen espín entero desde el punto de vista de espaciotiempo 10 dim, y son por tanto bosónicos.

- R: tenemos  $\{\psi_r^{\mu}, \psi_s^{\nu}\} = \eta^{\mu\nu} \delta_{r,-s}$   $r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Si  $|0\rangle_R$  satisface

$$\psi_r^{\mu} |0\rangle_R = 0 \quad \forall \mu, \forall r > 0$$

entonces  $|0\rangle'_R \equiv \psi_0^{\mu} |0\rangle_R$  también (porque  $\{\psi_{r>0}^{\nu}, \psi_0^{\mu}\} = 0$ ).

Así que el estado base en este sector es degenerado.

Notar que  $\{\psi_0^{\mu}, \psi_0^{\nu}\} = \eta^{\mu\nu}$  es equivalente al

álgebra de Dirac  $\{\Gamma^{\mu}, \Gamma^{\nu}\} = 2\eta^{\mu\nu}$  con  $\Gamma^{\mu} \equiv \sqrt{2} \psi_0^{\mu}$ .

Los estados base forman por tanto una representación del álgebra de Dirac, es decir, constituyen un espinor de  $SO(9,1)$ !

Para construirlos explícitamente, definimos espinor en espacio-tiempo

$$b_0^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^0 + \Gamma^1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^0 + \psi_0^1), \quad b_0 \equiv \frac{1}{2}(-\Gamma^0 + \Gamma^1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi_0^0 + \psi_0^1),$$

$$b_1^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^2 + i\Gamma^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^2 + i\psi_0^3), \quad b_1 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^2 - i\Gamma^3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^2 - i\psi_0^3),$$

$$b_2^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^4 + i\Gamma^5) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^4 + i\psi_0^5), \quad b_2 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^4 - i\Gamma^5) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^4 - i\psi_0^5),$$

$$b_3^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^6 + i\Gamma^7) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^6 + i\psi_0^7), \quad b_3 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^6 - i\Gamma^7) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^6 - i\psi_0^7),$$

$$b_4^\dagger \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^8 + i\Gamma^9) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^8 + i\psi_0^9), \quad b_4 \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^8 - i\Gamma^9) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0^8 - i\psi_0^9),$$

y obtenemos así

$$\{b_\alpha, b_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \{b_\alpha, b_\beta\} = 0 = \{b_\alpha^\dagger, b_\beta^\dagger\} \quad \forall \alpha, \beta = 0, \dots, 4$$

5 pares de operadores creación/aniquilación fermiónicos

Definiendo un vacío  $|\Omega\rangle$  tal que  $b_\alpha |\Omega\rangle = 0 \quad \forall \alpha$ ,

obtenemos un total de  $2^5 = 32$  estados actuando (0 ó 1 vez)

con los operadores de creación  $b_\alpha^\dagger$ .

(Más en general, un espinor de Dirac tiene  $2^{D/2}$

componentes en cualquier dimensión par, p.ej.  $2^2 = 4$  en  $D=4$ .)

estados base  $R, |0\rangle_R$

Denotaremos  $|S\rangle_R \equiv |S_0, S_1, S_2, S_3, S_4\rangle_R$  al estado

que se obtiene  $\begin{cases} \text{actuando} \\ \text{no actuando} \end{cases}$  con  $b_\alpha^\dagger$  sobre  $|0\rangle$  si  $S_\alpha = \begin{cases} +1/2 \\ -1/2 \end{cases}$ .

(P.ej.,  $|0\rangle = |-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_R$ ,  $b_2^\dagger b_4^\dagger |0\rangle = |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_R$ )

La notación refleja las propiedades de transformación bajo Lorentz: el teorema de Noether da

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \Delta} [\psi_r^\mu, \psi_{-r}^\nu]$$

como (la contribución fermiónica a) los generadores de Lorentz, que actuando sobre estados base  $|S\rangle_R$  se reduce a

$$\Sigma_0^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} [\psi_0^\mu, \psi_0^\nu] = -\frac{i}{4} [\Gamma^\mu, \Gamma^\nu] \quad \checkmark$$

Tanto  $\Sigma^{\mu\nu}$  como  $\Sigma_0^{\mu\nu}$  satisfacen álgebra  $so(9,1)$ :

$$i[\Sigma^{\mu\nu}, \Sigma^{\sigma\rho}] = \eta^{\nu\sigma} \Sigma^{\mu\rho} + \eta^{\mu\rho} \Sigma^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \Sigma^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho} \Sigma^{\mu\sigma}$$

Un conjunto de generadores simultáneamente diagonalizables

("generadores de Cartan") es entonces

$$S^\alpha \equiv i \sum_{\alpha, 0} d_{\alpha, 0} \sum_{2\alpha, 2\alpha+1} \quad \alpha = 0, 1, \dots, 4$$

rotaciones/empujos en planos perpendiculares

← para que  $S^0$  sea hermitico



que actuando sobre los estados base se reduce a

$$S_0^\alpha = i \delta_{\alpha,0} \sum_0^{2\alpha, 2\alpha+1} = b_\alpha^\dagger b_\alpha - \frac{1}{2},$$

de tal forma que

↑ operador de número  
(eigenvalores 0, 1)

$$S^\alpha |s\rangle_R = s_\alpha |s\rangle_R \quad s_\alpha = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow |s\rangle_R \text{ es } \underline{\text{espinor}}$$

Los operadores de creación  $(-1)^{\delta_{\alpha,0}} \psi_{-r}^{2\alpha} \pm i(\mp i)^{\delta_{\alpha,0}} \psi_{-r}^{2\alpha+1}$   
( $r > 0$ ) cambian el autovalue de

$$S^\alpha = S_0^\alpha + i \delta_{\alpha,0} \left(-\frac{i}{2}\right) \sum_{r \neq 0} [\psi_r^{2\alpha}, \psi_{-r}^{2\alpha+1}]$$

por un entero, así que todos los estados

en el sector  $R$  tienen espin semientero desde el punto de vista lo dim, y son por tanto fermiónicos.

Recordar que (en dimensión par) la representación de

Dirac es reducible: la matriz de quiralidad

$$\Gamma \equiv \Gamma^0 \Gamma^1 \dots \Gamma^9 \quad (\text{análoga a } \gamma^5) \text{ satisface}$$

$$\Gamma^2 = +1, \quad \left\{ \Gamma, \Gamma^\mu \right\} = 0 \quad \text{y } \therefore [\Gamma, \Sigma^{\mu\nu}] = 0. \quad \text{Lorentz}$$

eigenvalores  $\pm 1$   
no se mezclan bajo Lorentz



Conociendo ya el espacio de Hilbert completo, estamos listos para determinar estados físicos.

En la 'cuantización covariante antigua', ignoramos a  $b, c, \beta, \gamma$  (que supuestos están en su estado base)

excepto por su contribución a la constante de orden  $A_{\Delta}^{TOT}$ .

Las condiciones de estado físico son entonces

$$L_{n>0}^{X,\psi} |fís\rangle = 0$$

$$(L_0^{X,\psi} - A_{\Delta}^{X,\psi} + A_{\Delta}^{TOT}) |fís\rangle = 0$$

$$(\Leftrightarrow L_0^{TOT} |fís\rangle = 0)$$

$$G_{r>0} |fís\rangle = 0$$

junto con la relación de equivalencia para estados espurios  
(+ físicos = nulos)  $L_{-n} |X\rangle \approx 0, G_{-r} |X\rangle \approx 0 \quad \forall n, r > 0$ .

Sabemos que  $A_{\Delta}^{TOT} = -\Delta$ ,

$$L_0^{X,\psi} - A_{\Delta}^{X,\psi} = \underbrace{\frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n>0} \alpha_{-n}^{\mu} \alpha_{n\mu}}_{\equiv N^X} + \sum_{n>0} \underbrace{r \psi_{-r}^{\mu} \psi_{r\mu}}_{\equiv N^{\psi}} \equiv L_0,$$

Cuerda cerrada:  $\alpha p^2/4$

abierta:  $\alpha p^2$

[29: 29/11/21]

$$\equiv N^{X,\psi} \equiv N$$

$$G_{\pm 1/2} = \alpha_{0\mu} \psi_{\pm 1/2}^{\mu} + \dots \quad (\text{sector NS}),$$

$$G_0 = \alpha_{0\mu} \psi_0^{\mu} + \dots \quad (\text{sector R}).$$

### Espectro de Supercuerda Abierta

$$\text{- NS: } A_{1/2}^{\text{Tot}} = -1/2 \Rightarrow (L_0 - \frac{1}{2}) |f\rangle = 0$$

es la condición de capa de masa

$$m^2 = \frac{N - 1/2}{\alpha'}$$

$$N = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

• Nivel N=0:  $|0, k\rangle_{\text{NS}}$

$$\text{con } m^2 = -k^2 = -1/2\alpha'$$

Taquión  $\phi(x)$

$\in \text{NS}_-$  autovector de  $(-1)^F$

• Nivel N=1/2:  $\sum_{\mu} \psi_{-1/2}^{\mu} |0; k\rangle_{\text{NS}}$

$$\text{con } m^2 = -k^2 = 0$$

$$\rightarrow G_{1/2} \sum_{\mu} \psi_{-1/2}^{\mu} |0; k\rangle_{\text{NS}} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{\mu} k^{\mu} |0; k\rangle_{\text{NS}} = 0 \Rightarrow \boxed{\varepsilon \cdot k = 0}$$

$$\rightarrow G_{-1/2} |0; k\rangle_{\text{NS}} = \sqrt{2\alpha'} k_{\mu} \psi_{-1/2}^{\mu} |0; k\rangle_{\text{NS}} \text{ nulo} \Rightarrow \boxed{\sum_{\mu} \approx \sum_{\mu} + \lambda k_{\mu}}$$

Bosón de Norma  $A_{\mu}(x) \in \text{NS}_+$

En marco donde  $k_\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$ , todo estado físico es equivalente a una combinación lineal

$$\sum_i \psi_{-1/2}^i |0; k\rangle_{NS} \quad i=2,3,\dots,9 \in \underline{8}_V \text{ de } SO(8). \quad \text{Norma positiva} \checkmark$$

• Nivel N=1:  $(\sum_\mu \alpha_{-1}^\mu + \sum_{\mu\nu} \psi_{-1/2}^\mu \psi_{-1/2}^\nu) |0; k\rangle_{NS}$   $m^2 = -k^2 = +\frac{1}{2\alpha'}$

...  $\in NS_-$  ,

etc.

-R:  $A_0^{\text{TOT}} = 0 \Rightarrow (L_0 + 0) |f\rangle = 0$

resulta en  $m^2 = \frac{N}{\alpha'}$   $N = 0, 1, 2, \dots$

• Nivel 0:  $u_s |S; k\rangle_R$  con  $m^2 = -k^2 = 0$

espinor  $\rightarrow$

Normino  $\lambda_s(x)$  (= gaugino: nombre usual para superparejo de bosón de norma)

$$\underbrace{G_0}_{\sqrt{2\alpha'} p_\mu \psi_0^\mu} u_s |S; k\rangle_R = \sqrt{\alpha'} k_\mu \Gamma_{s's}^\mu u_s |S'; k\rangle_R = 0 \Rightarrow \boxed{k_\mu \Gamma_{s's}^\mu u_s = 0}$$

$\not\partial \lambda(x) = 0 \Leftrightarrow$  i Ec. de Dirac!

(De hecho Dirac  $G_0 = 0 \Rightarrow$  Klein-Gordon  $L_0 = G_0^2 = 0$ .)

En marco donde  $k_\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$ , el operador de Dirac es  $k_0 \Gamma^0 + k_1 \Gamma^1 = k \Gamma^0 (1 - \Gamma^0 \Gamma^1) = k \Gamma^0 (1 - 2S_0^0)$ ,

así que solo son físicos los estados con  $S_0 = +\frac{1}{2}$ .

$$\text{Bajo } \text{So}(9,1) \supset \text{So}(1,1) \times \text{So}(8)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ S^{\alpha} & S^0 & S^1, \dots, S^4 \end{array}$$

tenemos la descomposición

$$\underline{16} = \left(+\frac{1}{2}, \underline{8}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \underline{8}'\right) \quad \# \text{ impar de } -\frac{1}{2}'s$$

$$\underline{16}' = \left(+\frac{1}{2}, \underline{8}'\right) + \left(-\frac{1}{2}, \underline{8}\right) \quad \# \text{ par de } -\frac{1}{2}'s$$

Sobreviven 2

espinores de  $\text{So}(8)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{8} \text{ con } (-1)^F = +1 \quad \in R_+ \\ \underline{8}' \text{ con } (-1)^F = -1 \quad \in R_- \end{array} \right.$$

• Nivel  $N=1$  :  $\left(\sum_{\omega} \alpha_{-1}^{\omega} + \sum'_{\omega} \psi_{-1}^{\omega}\right) |S\rangle_R$  con  $m^2 = -k^2 = \frac{1}{\alpha'}$ ,

$$\in R_+ \cup R_-,$$

etc.

## Espectro de Supercuerda Cerrada

2 copias de la cuerda abierta (con  $p \rightarrow p/2$ ),  
sujetas a la condición de emparejamiento de niveles (p.247)

$$(L_0^{\text{TOT}} - \tilde{L}_0^{\text{TOT}}) |f\rangle = 0 \Rightarrow m^2 = \frac{4}{\alpha'} (N - \Delta) = \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N} - \tilde{\Delta})$$

(donde hemos usado  $A_{\Delta}^{\text{TOT}} = -\Delta$ ,  $\tilde{A}_{\tilde{\Delta}}^{\text{TOT}} = -\tilde{\Delta}$ ).

Recordando que

$$R \quad (\Delta=0) \Rightarrow \begin{cases} N = 0, 1, 2, \dots & = N - \Delta \\ (-1)^F = \pm 1, \pm 1, \pm 1, \dots \end{cases}$$

y

$$NS \quad (\Delta = \frac{1}{2}) \Rightarrow \begin{cases} N = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots & = N - \Delta + \frac{1}{2} \\ (-1)^F = -1, +1, -1, +1, \dots \end{cases}$$

vemos que  $NS_-$  ( $N - \Delta$  semientero) solo puede  
empatearse con  $NS_-$ .

Entendemos también que los estados en los  
sectores  $(NS, NS)$  y  $(R, R)$  son bosónicos ( $s_{\alpha} \in \mathbb{Z}$ ),  
mientras que  $(NS, R)$  y  $(R, NS)$  son fermiónicos ( $s_{\alpha} \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ).

-  $(NS_-, NS_-)$  :  $m^2 = \frac{4}{\alpha'} (N - \frac{1}{2})$ ,  $N = \tilde{N} = 0, 1, 2, \dots$

• Nivel  $N=0$  :  $|0, 0; k\rangle_{NS-NS}$   $m^2 = -k^2 = -2/\alpha'$

Taquión  $\phi(x)$

Los niveles  $N \geq 1$  tienen  $m^2 > 0$ .

En los 9 sectores restantes, el nivel más bajo

corresponde a estados con  $m^2 = 0$  :

-  $(NS_+, NS_+)$  :  $\sum_{\mu\nu} \Psi_{-1/2}^\mu \tilde{\Psi}_{-1/2}^\nu |0, 0; k\rangle_{NS-NS}$

$G_{1/2} = \tilde{G}_{1/2} = 0 \Rightarrow k^\mu \epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} k^\nu = 0$

$G_{-1/2} \tilde{G}_{-1/2} |0, 0; k\rangle_{NS-NS} \text{ nulo} \Rightarrow \epsilon_{\mu\nu} \approx \epsilon_{\mu\nu} + k_\mu \zeta_\nu + \xi_\mu k_\nu$   
 $(\text{c/ } k \cdot \zeta = k \cdot \xi = 0)$

$\therefore (10-2)^2$  estados físicos, que en términos de representaciones irreducibles de  $SO(8)$  son

$\underline{8}_v \times \underline{8}_v = \underline{1}_{(0)} + \underline{28}_{[2]} + \underline{35}_{(2)}$

<u>Dilatón</u>	<u>Antisimetría</u>	<u>Gravitón</u>
$\phi(x)$	$B_{\mu\nu}(x)$	$h_{\mu\nu}(x)$





cf.  $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \bar{\psi} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \psi$ 

$$-(R_+, R_+) : \sum_{\mu_1 \dots \mu_n} (C \Gamma^{\mu_1} \Gamma^{\mu_2} \dots \Gamma^{\mu_n})_{\tilde{s}s} |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R}$$

$$\equiv \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n}$$

donde  $C \equiv \Gamma^0 \Gamma^3 \Gamma^5 \Gamma^7 \Gamma^9$ , la matriz de conjugación de carga,

satisface  $C \Gamma^\mu C^{-1} = -\Gamma^{\mu T}$ ,  $(C \Gamma^0) \Gamma^\mu (C \Gamma^0)^{-1} = \Gamma^{\mu*}$

$$\Rightarrow u^T C \text{ transforma como } \bar{u} \equiv u^T \Gamma^0.$$

A partir de 2 espinores  $u, \tilde{u}$  se pueden por tanto formar tensores linealmente independientes

$$\tilde{u}^T C \Gamma^{\mu_1 \dots \mu_n} u \quad n=0, 1, \dots, 5,$$

pero los casos con n par ( $\Rightarrow$  # impar de  $\Gamma$ 's) dan cero si  $u, \tilde{u}$  tienen la misma quiralidad, como es el caso en este sector [ver Polchinski, Vol II, Apéndice B.1], cf.  $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$

Tenemos entonces solo estados con  $n=1, 3, 5$ .

En términos de representaciones de  $SO(9,1)$ :

$$\underline{16} \times \underline{16} = \underline{10} + \underline{120} + \underline{126}$$

Campos Antisimétricos

	[1]	[3]	[5] <sub>+</sub>	← rep <u>autodual</u> ,
	$G_\mu(x)$	$G_{\mu\nu}(x)$	$G_{\mu\nu\lambda\rho}^+(x)$	

La definición de auto dualidad es como sigue.

Dado un tensor totalmente antisimétrico

$T_{\mu_1 \dots \mu_n}$  en  $D$  dimensiones, su dual de Hodge es

$$*T_{\mu_1 \dots \mu_{D-n}} \equiv \frac{\sqrt{-G}}{n!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{D-n} \nu_1 \dots \nu_n} T_{\nu_1 \dots \nu_n}$$

$\uparrow$   $\epsilon_{012 \dots D-1} = +1$  Levi-Civita

(Para  $F_{\mu\nu}$  en  $D=4$ ,  $F_{\mu\nu} \rightarrow *F_{\mu\nu}$  es la transformación  $(\vec{E}, \vec{B}) \rightarrow (\vec{B}, -\vec{E})$ , y las ecs. de Maxwell son  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \partial_{[\mu} *F_{\nu\lambda]} = 0$ ,  $\partial_\mu *F^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$ .)

Si  $D$  es par y  $n = D/2$ , podemos entonces descomponer de manera covariante

$$T_{\mu_1 \dots D/2} \equiv T_{\mu_1 \dots D/2}^+ + T_{\mu_1 \dots D/2}^- ,$$

$$\text{con } T_{\mu_1 \dots D/2}^\pm = \pm * T_{\mu_1 \dots D/2}^\pm \quad \begin{array}{l} \text{autodual} \\ \text{antiautodual} \end{array}$$

En nuestro caso tenemos  $D=10$  y

$$G_{\mu_1 \dots \mu_5}^+ = + * G_{\mu_1 \dots \mu_5}^+$$

Las condiciones de estado físico  $G_0 = 0 = \tilde{G}_0$

$$\Rightarrow k_{[\mu} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \underbrace{\Gamma^{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n] \mu}}_{(-1)^n (\Gamma^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} - n \eta^{\mu [\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n]})} = 0 = k_{\mu} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \underbrace{\Gamma^{\mu} \Gamma^{[\mu_1 \dots \mu_n]}}_{\Gamma^{\mu \mu_1 \dots \mu_n} + n \eta^{\mu [\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n]}}$$

$$\leftrightarrow k_{[\mu} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n]} = 0 = k^{\mu_1} \epsilon_{[\mu_1 \dots \mu_n]}$$

$$\leftrightarrow \partial_{[\mu} G_{\mu_1 \dots \mu_n]}(x) = 0 = \partial_{[\mu} * G_{\mu_{n+1} \dots \mu_n]} /$$

¿que son las ecs. de Maxwell para una intensidad de campo generalizada  $G_{\mu_1 \dots \mu_n}(x)$ ! Podemos definir el campo de

de norma asociado  $C_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}(x) \approx C_{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}(x) + \partial_{[\mu_1} \lambda_{\mu_2 \dots \mu_{n-1]}(x)$

tal que  $G_{\mu_1 \dots \mu_n}(x) = (n+1) \partial_{[\mu} C_{\mu_1 \dots \mu_n]}(x)$ .

los estados físicos no masivos en este sector son entonces

$$\underline{8} \times \underline{8} = \underline{1} + \underline{28} + \underline{35} + \leftarrow \text{reps de } SO(8)$$

$$[0] \quad [2] \quad [4]_+$$

Campos de Norma R-R  $C(x) \quad C_{\mu\nu}(x) \quad C_{\mu\nu\lambda\rho}^+(x)$

04/05/06

-  $(R_-, R_-)$ : estados  $\sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} (C \Gamma^{\mu_1, \dots, \mu_n})_{\tilde{s}\tilde{s}} |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R}$

con  $n=1, 3, 5$ , que son reps irreducibles en producto

$$\underline{16}' \times \underline{16}' = \underline{1}_0 + \underline{12}_0 + \underline{126} \leftarrow \text{reps de } \text{So}(9,1),$$

$$[1] \quad [3] \quad [5]_-$$

de los cuales son físicos

$$\underline{8}' \times \underline{8}' = \underline{1} + \underline{28} + \underline{35}_- \leftarrow \text{reps de } \text{So}(8)$$

$$[0] \quad [2] \quad [4]_-$$

Campos de  
Norma R-R

$$\hat{C}(x) \quad \hat{C}_{\mu\nu}(x) \quad C_{\mu\nu\lambda\rho}^-(x)$$

-  $(R_+, R_-)$ : estados  $\sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} (C \Gamma^{\mu_1, \dots, \mu_n})_{\tilde{s}\tilde{s}} |s, \tilde{s}; k\rangle_{R-R}$

con  $n=0, 2, 4$ , que figuran en producto

$$\underline{16} \times \underline{16}' = \underline{1} + \underline{45} + \underline{210} \leftarrow \text{reps de } \text{So}(9,1),$$

$$[0] \quad [2] \quad [4]$$

de los cuales son físicos

$$\underline{8} \times \underline{8}' = \underline{8}_v + \underline{56}_t \leftarrow \text{reps de } \text{So}(8)$$

$$[1] \quad [3]$$

Campos de  
Norma R-R

$$C_{\mu}(x) \quad C_{\mu\nu\lambda}(x)$$

-  $(R_-, R_+)$  : igual, con  $n=0, 2, 4$

$\Rightarrow$  estados físicos  $\underline{\theta}' \times \underline{\theta} = \underline{\theta}_V + \underline{56}_t$

Campos de Norma  $R-R$   $\hat{C}_N(x)$   $\hat{C}_{N\lambda}(x)$

*120: 06/12/21*

-  $(NS_+, R_+)$  : estados  $\epsilon_{\mu\tilde{s}} \psi_{-1/2}^\mu |0, \tilde{s}; k\rangle_{NS-R}$

que se pueden separar de manera covariante en

$$u_{\tilde{s}'} (\Gamma_\mu)_{\tilde{s}\tilde{s}'} \psi_{-1/2}^\mu |0, \tilde{s}; k\rangle_{NS-R} \quad (\text{i.e., } \epsilon_{\mu\tilde{s}} = u_{\tilde{s}'} (\Gamma_\mu)_{\tilde{s}\tilde{s}'})$$

y  $u_{\mu\tilde{s}} \psi_{-1/2}^\mu |0, \tilde{s}; k\rangle_{NS-R}$  con  $\Gamma_{\tilde{s}'\tilde{s}}^\mu u_{\mu\tilde{s}} = 0$ ,

lo cual corresponde a descomposición

$$\underline{10} \times \underline{16} = \underline{16} + \underline{144} \quad \leftarrow \text{reps de } so(9,1)$$

*espín 1    ↑    espín 1/2    ↑    espín 1/2    ↑    espín 3/2*

Las condiciones de estado físico

$$G_{1/2} = 0 = \tilde{G}_0 \Rightarrow k^\mu \epsilon_{\mu\tilde{s}} = 0 = k_\mu \Gamma_{\tilde{s}'\tilde{s}}^\mu \epsilon_{\nu\tilde{s}}$$

$$G_{-1/2} |0, \tilde{s}; k\rangle_{NS-R} \approx 0 \Rightarrow \epsilon_{\mu\tilde{s}} \approx \epsilon_{\mu\tilde{s}} + k_\mu T_{\tilde{s}}$$

seleccionan

$$\underline{\theta}_V \times \underline{\theta} = \underline{\theta}' + \underline{56} \quad \leftarrow \text{reps de } so(8)$$

$$\lambda_{\tilde{s}'}(x) \quad \chi_{\mu\tilde{s}}(x)$$

Dilatino      Gravitino

Notar que relación de equivalencia

$$E_{\mu\tilde{s}} \simeq E_{\mu s} + \kappa_{\mu} \tilde{J}_{\tilde{s}}$$

(que es consecuencia de existencia de estado nulo)

es expresión de la invariancia de norma en espaciotiempo

$$\chi_{\mu\tilde{s}}(x) \simeq \chi_{\mu s}(x) + \partial_{\mu} \tilde{J}_{\tilde{s}}(x)$$

↑ parámetro fermiónico

¡¡ Supersimetría local en espaciotiempo !!

- (R<sub>+</sub>, NS<sub>+</sub>) : igual, con  $\tilde{s} \rightarrow s$

$$\text{Estados físicos } \underline{8} \times \underline{8}_v = \underline{8}' + \underline{56}$$

$$\hat{\chi}_{\tilde{s}'}(x) \quad \hat{\chi}_{\mu s}(x)$$

- (NS<sub>+</sub>, R<sub>-</sub>) : igual a (NS<sub>+</sub>, R<sub>+</sub>), con  $\tilde{s} \rightarrow \tilde{s}'$

$$\text{Estados físicos } \underline{8}_v \times \underline{8}' = \underline{8} + \underline{56}'$$

$$\chi_{\tilde{s}}(x) \quad \chi_{\mu s'}(x)$$

- (R<sub>-</sub>, NS<sub>+</sub>) : igual, con  $\tilde{s}' \rightarrow s'$

$$\text{Estados físicos } \underline{8}' \times \underline{8}_v = \underline{8} + \underline{56}'$$

$$\hat{\chi}_{\tilde{s}}(x) \quad \hat{\chi}_{\mu s'}(x)$$

## Operadores de Vértice

$$-NS: \quad \Psi_r^{\sim} \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-1/2} \Psi^{\sim}(z) \quad r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$$

El estado  $|\Phi_1\rangle$  que corresponde a  $\bar{O}=1$  satisface

$$\begin{aligned} \Psi_r^{\sim} |\Phi_1\rangle &\leftrightarrow \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-1/2} \underbrace{\Psi^{\sim}(z) \cdot 1}_{\Psi^{\sim}(0) + z\partial\Psi^{\sim}(0) + \dots} \\ &= 0 \quad \forall r > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\Phi_1\rangle = |0\rangle_{NS}$$

De la misma manera, vemos que

$$\Psi_{-r}^{\sim} |0\rangle_{NS} \leftrightarrow \frac{1}{(r-1/2)!} \partial^{r-1/2} \Psi^{\sim}(0) \quad \forall r > 0,$$

y  $\Psi_{-r_1}^{\sim} \dots \Psi_{-r_n}^{\sim} |0\rangle_{NS} \leftrightarrow$  producto en orden normal.

$$\text{Ej. , } \sum_{\omega} \Psi_{-1/2}^{\sim} |0; k\rangle_{NS} \leftrightarrow \sum_{\omega} \Psi^{\sim} e^{i k \cdot X}$$

Notar que con  $k^2=0$  este vértice tiene  $h=1/2$ .

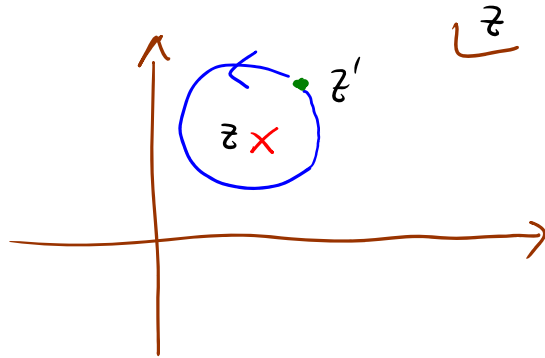
Como veremos más adelante, para obtener  $h=1$  hace falta contribución de superfantasmas.

Como hubiéramos esperado, todos estos vértices  $V_{NS}(z)$  tienen espín entero bajo  $SO(9,1)$ , y satisfacen

$$V_{NS}(z) \psi^{\mu}(z') \sim : \partial^{r_1 - 1/2} \psi^{\mu_1}(z) \cdots : \psi^{\mu}(z') + \dots$$

$$\sim \partial^{r_1 - 1/2} \left( \frac{\eta^{\mu_1 \mu}}{z - z'} \right) \cdots + \dots$$

de donde vemos que  $\psi^{\mu}(z')$  es periódico al rodear  $V_{NS}(z)$ .

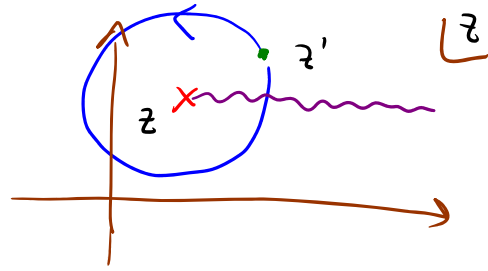


La inserción de  $V_{NS}(z)$  no cambia las condiciones de periodicidad para  $\psi^{\mu}(z')$  alrededor del origen, lo cual refleja el hecho de que la emisión/absorción de un bosón no cambia la estadística del estado inicial.

- R: Los vértices  $V_R(z)$  deben tener espín semientero bajo  $SO(9,1)$ , y satisfacen



$$V_R(z) \tilde{\psi}(z') \sim \frac{1}{\sqrt{z-z'}} \dots,$$



de tal manera que  $\tilde{\psi}(z')$  sea antiperiódico al rodear a  $V_R(z')$ , como corresponde al hecho de que la emisión/absorción de un fermión sí cambia bosón  $\rightarrow$  fermión y fermión  $\rightarrow$  bosón.

¡Es imposible construir semejante  $V_R(z)$  usando solo  $\psi$  y sus derivadas!

Se requiere **bosonizar**  $\psi^w$ : curiosamente, en 2 dimensiones un par de espinores Majorana-Weyl  $\psi, \psi'$  (p.ej.  $\psi^2, \psi^3$ ) ¡resultan ser equivalentes a (la parte analítica de) un escalar  $\varphi$ !

Definiendo  $\psi(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi(z) + i\psi'(z))$ , ← espinor de Weyl (ya no Majorana)  
 $\bar{\psi}(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi(z) - i\psi'(z))$ ,

tenemos EPOs

$$\psi(z) \bar{\psi}(z') = \frac{1}{z-z'} + \dots \quad (\text{como } b \text{ y } c),$$

$$\Psi(z)\Psi(z') \sim z-z' \quad , \quad \bar{\Psi}(z)\bar{\Psi}(z') \sim z-z'$$

Por otro lado, usando  $\varphi(z)\varphi(z') = -\ln(z-z') + :\varphi(z)\varphi(z):$

(con  $\varphi(z)$  la parte analítica de un campo escalar,)

tenemos

$$:e^{+i\varphi(z)}: :e^{-i\varphi(z')} : = \frac{1}{z-z'} + \dots ,$$

$$:e^{+i\varphi(z)}: :e^{+i\varphi(z')} : = z-z' + \dots ,$$

$$:e^{-i\varphi(z)}: :e^{-i\varphi(z')} : = z-z' + \dots$$

Podemos por tanto identificar

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi(z) \simeq e^{+i\varphi(z)} \\ \bar{\Psi}(z) \simeq e^{-i\varphi(z)} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{Pesos conformes} \\ h = \frac{1}{2} = h_{\Psi} = h_{\bar{\Psi}} \end{array} \right. \checkmark$$

(recordar que  $:e^{ik \cdot X}:$  tiene  $h = \frac{k^2}{2} \frac{\alpha'}{2}$ )

Carga central  $c^{\Psi, \bar{\Psi}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = c^{\varphi} \quad \checkmark$

Además,  $\langle \varphi(z)\varphi(z') \rangle = -\ln(z-z')$

$$\Rightarrow_{|z|=|z'|} [\hat{\varphi}(z), \hat{\varphi}(z')] = \pm i\pi ,$$

y usando Campbell-Baker-Hausdorff tenemos entonces

$$:e^{+i\hat{\varphi}(z)}: :e^{+i\hat{\varphi}(z')} = \exp\left(-[\hat{\varphi}(z), \hat{\varphi}(z')]\right) :e^{+i\hat{\varphi}(z')} : :e^{+i\hat{\varphi}(z)} :$$

- 1 ✓

Comparando las EPOs

$$:e^{+i\varphi(z)}: :e^{-i\varphi(-z)}: = \frac{1}{z-(-z)} :e^{+i\varphi(z)-i\varphi(-z)}:$$

$$= \frac{1}{2z} + i\partial\varphi(0) + 2z \left( -\frac{1}{2} : \partial\varphi\partial\varphi(0) : \right) + \dots$$

y  $T^\varphi(0)$

$$\psi(z)\bar{\psi}(-z) = \frac{1}{z-(-z)} + : \psi(z)\bar{\psi}(-z) :$$

$$= \frac{1}{2z} + : \psi\bar{\psi}(0) : + 2z \left( -\frac{1}{2} : \psi\partial\bar{\psi}(0) + \bar{\psi}\partial\psi(0) : \right) + \dots$$

$T^{\psi, \bar{\psi}}(0) = T^{\psi, \psi'}(0)$

concluimos en particular que

$$: \psi\bar{\psi}(z) : \simeq i\partial\varphi(z) \quad \text{y} \quad T^{\psi, \bar{\psi}}(z) \simeq T^\varphi(z)$$

Corriente de Noether asociada a  $\delta\varphi(z) = \epsilon$

Corriente de Noether asociada a  $\delta\psi(z) = +i\epsilon\psi(z)$ ,  $\delta\bar{\psi}(z) = -i\epsilon\bar{\psi}(z)$ .

Considerando todas las FPOs posibles podemos establecer una equivalencia completa entre todos los operadores locales formados con  $\psi, \bar{\psi}$  y sus derivadas y todos los operadores locales formados con  $:e^{i\varphi}: (n \in \mathbb{Z})$  y sus derivadas.

Las funciones de correlación en ambas teorías son analíticas (meromorfas) y poseen las mismas singularidades, por tanto deben ser idénticas.

En nuestro caso, para bosonizar  $\psi^{\tilde{w}}(z)$  agrupamos

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(+\psi^0 + \psi^1), \quad \bar{\psi}_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(-\psi^0 + \psi^1) \\ \psi_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^2 + i\psi^3), \quad \bar{\psi}_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^2 - i\psi^3) \\ \vdots \\ \psi_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^8 + i\psi^9), \quad \bar{\psi}_4 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^8 - i\psi^9) \end{array} \right.$$

(notar que modos cero de  $\psi_\alpha, \bar{\psi}_\alpha$  en sector R son respectivamente  $b_\alpha^+, b_\alpha$ ), y definimos

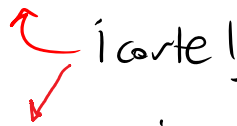
$$\psi_\alpha(z) \simeq e^{+i\varphi_\alpha(z)}, \quad \bar{\psi}_\alpha(z) \simeq e^{-i\varphi_\alpha(z)} \quad \alpha=0,1,\dots,4$$

( sutileza : para que  $e^{\pm i\varphi_\alpha}$  anticomute con  $e^{\pm i\varphi_\beta} \forall \alpha, \beta$ ,  
 debemos agregar 'cociclos'  $C_\alpha$  tales que  
 $\{C_\alpha, C_\beta\} = 0 \forall \alpha \neq \beta, C_\alpha^2 = 1.$  )

Consideremos ahora operadores  $:e^{\pm i\varphi_\alpha/2}:$ , que satisfacen

$$:e^{-\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z)}: :e^{+i\varphi_\alpha(z')} = \frac{1}{\sqrt{z-z'}} :e^{+\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z')} + \dots$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Psi_\alpha(z')}$$

 ¡corte!

$$:e^{+\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z)}: :e^{-i\varphi_\alpha(z')} = \frac{1}{\sqrt{z-z'}} :e^{-\frac{i}{2}\varphi_\alpha(z')} + \dots$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{\Psi}_\alpha(z')}$$

Usándolos, podemos formar el producto

$$J_s(z) \equiv : \exp \left[ i \sum_\alpha s_\alpha \varphi_\alpha(z) \right] : \quad \text{campo de espín,}$$

que produce el corte deseado en  $\Psi^w \forall w$ , y

resulta ser además un espinor de  $so(9,1)$  con

autovalor  $s_\alpha$  bajo el generador de Lorentz

$$S_\alpha = i \delta_{\alpha,0} \oint_{2\pi i} \frac{dz}{z} J^{2\alpha, 2\alpha+1}(z) = i \delta_{\alpha,0} \oint_{2\pi i} \frac{dz}{z} \underbrace{: \Psi_\alpha \bar{\Psi}_\alpha(z) :}_{\approx (-i) \delta_{\alpha,0} i \partial \varphi_\alpha(z)}$$

$$= -\frac{i}{2} : \psi^{2\alpha} \psi^{2\alpha+1} - \psi^{2\alpha+1} \psi^{2\alpha} :$$

Concluimos entonces que

$$|S\rangle_R \equiv |S_0, S_1, \dots, S_4\rangle_R \longleftrightarrow \mathcal{J}_S(z) \equiv \exp\left[i \sum_{\alpha} S_{\alpha} \phi_{\alpha}(z)\right]:$$

09/05/06

El único problema que queda por resolver es

que  $:e^{\pm \frac{i}{2} \phi_{\alpha}}:$  tiene  $h = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}$ , por lo que

$$\mathcal{J}_S(z) \text{ tiene } h = 5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \neq 1.$$

Este problema se soluciona al incorporar la contribución de los super fantasmas. En particular,  $V_R$  debe producir también un corte en  $\beta, \gamma$ . Hace falta entonces "bosonizar" a  $\beta, \gamma$ , para lo cual se requieren 3 campos:

- 1 bosón  $\phi(z)$  con  $\langle \phi(z) \phi(z') \rangle = -\ln(z-z')$  y  $T^{\phi} = -\frac{1}{2} : \partial \phi \partial \phi : = -\partial^2 \phi \Rightarrow C^{\phi} = 1 + 12v^2 = 13$

proviene de término  $\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} R v \phi$   
en acción ( $\leftrightarrow$  fondo dilatónico  
lineal), con  $v = -1$ .

$:e^{n\phi}:$  tiene  $h = -\frac{1}{2} n^2 - n$ . ↖ contribución de término adicional en  $T^{\phi}$

• 2 fermiones  $\eta(z), \xi(z)$ , con

$$\eta(z)\xi(z') = \frac{1}{z-z'} + \dots,$$

$$\eta(z)\eta(z') \sim z-z' \sim \xi(z)\xi(z') \quad (\text{como sistema } b,c),$$

$$T^{\eta,\xi} = -:\eta\partial\xi: \Rightarrow h_\eta = 1, h_\xi = 0, c^{\eta,\xi} = -2$$

Notar que  $c^\phi + c^{\eta,\xi} = 13 - 2 = 11 = c^{\beta,\gamma}$  ✓

Reproducimos entonces todas las Epos si identificamos

$$\begin{array}{ccc} \beta(z) \simeq e^{-\phi(z)} \partial\xi(z), & \gamma(z) \simeq e^{+\phi(z)} \eta(z) & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ h = \frac{3}{2} & h = -\frac{1}{2} & h = 1 \\ \underbrace{h = -\frac{(-1)^2}{2} - (-1) = \frac{1}{2}}_{h = \frac{3}{2}} & \underbrace{h = -\frac{1}{2}(1)^2 - (1) = -\frac{3}{2}}_{h = -\frac{1}{2}} & \end{array}$$

Esto implica en particular que  $T^{\beta,\gamma} \simeq T^{\phi,\eta,\xi}$  ✓

$$y \quad \underbrace{-:\beta\gamma(z):}_{\text{corriente asociada a}} \simeq \underbrace{-\partial\phi(z)}_{\text{corriente asociada a } \phi(z) \rightarrow \phi(z) + a}$$

$$\beta(z) \rightarrow e^{-i\theta} \beta(z), \quad \gamma(z) \rightarrow e^{i\theta} \gamma(z) \quad (\text{anómala si } \chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} R \neq 0)$$

$$\uparrow \text{ carga } -1 \quad \uparrow \text{ carga } +1 \quad e^{n\phi} \text{ tiene carga } n \quad \checkmark$$

"número de fantasmas"

Para completar los operadores de vértice, quisiéramos ahora determinar los operadores  $O_{NS}(z)$ ,  $O_R(z)$  que corresponden respectivamente a

$$|0\rangle_{NS} \quad \text{tal que} \quad \beta_{r \geq \frac{1}{2}} |0\rangle_{NS} = 0 = \gamma_{r \geq \frac{1}{2}} |0\rangle_{NS} \quad \text{y}$$

$$|0\rangle_R \quad \text{tal que} \quad \beta_{r \geq 0} |0\rangle_R = 0 = \gamma_{r \geq 1} |0\rangle_R \quad .$$

(  $|0\rangle_R$  es la contraparte de  $|\downarrow\rangle$ , que satisfacía  $b_{n \geq 0} |\downarrow\rangle = 0 = c_{n \geq 1} |\downarrow\rangle$  . )

Bajo el mapeo estado  $\leftrightarrow$  operador, estas condiciones se traducen en

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r+1/2} \beta(z) O_{NS}(0) = 0 = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-3/2} \gamma(z) O_{NS}(0) \quad \text{y}$$

$\uparrow r \geq 1/2$ 
 $\uparrow r \geq 1/2$

$$\oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r+1/2} \beta(z) O_R(0) = 0 = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{r-3/2} \gamma(z) O_R(0) \quad ,$$

$\uparrow r \geq 0$ 
 $\uparrow r \geq 1$

es decir,  $\beta(z) O_{NS}(0) \sim z^{-1}$ ,  $\gamma(z) O_{NS}(0) \sim z$ ,  
 $\beta(z) O_R(0) \sim z^{-1/2}$ ,  $\gamma(z) O_R(0) \sim z^{1/2}$ .  
 $\leftarrow$  corte esperado  $\rightarrow$



Claramente  $O_{NS}, O_R \neq 1$ . De hecho, ningún producto de  $\beta, \gamma$  y sus derivadas reproduce estas EPOs.

Pero en la descripción 'bosonizada' podemos ver que

$$O_{NS}(z) \simeq e^{-\phi(z)} \quad \text{y} \quad O_R(z) \simeq e^{-\phi(z)/2}.$$

Este resultado nos sirve para finalmente entender 2 temas que habíamos dejado pendientes.

Primero, la contribución del vacío  $|0\rangle_{NS}^{\beta, \gamma}$  ó  $|0\rangle_R^{\beta, \gamma}$  al número "fermiónico" (en realidad, espinorial) en la hoja de mundo,

$$F \equiv \underbrace{S^0 + S^1 + S^2 + S^3 + S^4}_{\text{contribución de } \psi^m} \underbrace{-\frac{1}{2} - \Delta}_{\text{según prometimos, contribución de } \beta, \gamma} \pmod{2}$$

$$\Rightarrow \{(-1)^F, \psi_{-r}^m\} = 0 \quad \Rightarrow \{(-1)^F, \beta_{-r}\} = 0 = \{(-1)^F, \gamma_{-r}\}$$

La definición natural de  $F^{\beta, \gamma}$  que logra esto es

$$F_{\Delta}^{\beta, \gamma} \equiv - \left[ \sum_{r>0} (\beta_{-r} \gamma_r + \gamma_{-r} \beta_r) + \delta_{\Delta, 0} \gamma_0 \beta_0 \right] = - \oint \frac{dz}{2\pi i} \circ \beta \gamma(z) \circ$$

(no confundir con "operador de número"  $N_{\Delta}^{\beta, \gamma} \equiv \sum_{r \in \mathbb{Z} + \Delta} r \circ \beta_{-r} \gamma_r \circ$ ).

Pero comparando  $(X(z)Y(z')) = : \beta(z)Y(z') : + (z-z')^{-1}$   
 $= : \beta(z)Y(z') : + (z'/z)^{1/2} (z-z')^{-1}$

tenemos  $: \beta Y(z) : = - : \beta Y(z) : \approx -\partial \phi(z)$  corriente de número de fantasma,

de modo que  $O_{NS} = : e^{-\phi} :$  tiene  $F_{\Delta=1/2}^{\beta, \gamma} = n_f = -1 = -\frac{1}{2} - \Delta$  ✓

mientras que  $O_R = : e^{-\phi/2} :$  tiene  $F_{\Delta=0}^{\beta, \gamma} = n_f = -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} - \Delta$ . ✓

Segundo, los pesos conformes de estos operadores son

respectivamente  $h_{NS} = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{1}{2}$

y  $h_R = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$ ,

que justo completan a  $V_{NS}^{X, \psi}$  ( $h = \frac{1}{2}$  en capa de masa) y  $V_R^{X, \psi}$  ( $h = \frac{5}{8}$  en capa de masa) para tener  $h_{tot} = 1$ . ✓

P.ej.,

$$\sum_{\omega} \psi_{-\frac{1}{2}}^{\omega} |0; k\rangle_{NS}^{\psi, X} |0\rangle_{NS}^{\beta, \gamma} \longleftrightarrow V_{NS}^{(-1)}(z) \equiv \sum_{\omega} \psi^{\omega} e^{ik \cdot X} e^{-\phi}(z) :$$

$$h = \frac{1}{2} + \frac{\alpha'}{4} k^2 + \frac{1}{2} = 1$$

$$u_s |s; k\rangle_R^{\psi, X} |0\rangle_R^{\beta, \gamma} \longleftrightarrow V_R^{(-\frac{1}{2})}(z) \equiv u_s : \psi_s e^{ik \cdot X} e^{-\phi/2}(z) :$$

$$h = 5 \times \frac{1}{8} + \frac{\alpha'}{4} k^2 + \frac{3}{8} = 1$$

Incorporando la parte de modos derechos, obtenemos así vértices  $V_i(z, \bar{z})$  con  $(h, \bar{h}) = (1, 1)$ , que usamos para construir invariantes conformes

$$V_i \equiv g_c N_i \int d^2z V_i(z, \bar{z})$$

que se insertan en la integral funcional para calcular amplitudes de dispersión.

Recordar que si incluimos al vacío de fantasmas  $|\downarrow\rangle \leftrightarrow c(z)$  ( $h = -1$ ) obtenemos vértices fijos

$$g_c N_i c(z) \tilde{c}(\bar{z}) V_i(z, \bar{z})$$

que también son invariantes conformes (y se usan para eliminar redundancia asociada a vectores de Killing conformes  $\leftrightarrow$  modos cero de  $c(z)$  y  $\tilde{c}(\bar{z})$ ).

Así como la existencia de fantasmas (fermiónicos) da lugar a estas 2 versiones alternativas de los vértices, la existencia de superfantasmas (bosónicos) permite escribir los vértices de la

supercuerda en un número infinito de distintas versiones o "cuadros" (que resultan útiles para eliminar redundancia debida a espinores de Killing conformes  $\leftrightarrow$  modos cero de  $\gamma(z)$  y  $\tilde{\gamma}(\bar{z})$ ). Los vértices en distinto cuadro difieren en su número de fantasmas

$$\eta_f \equiv - \oint \frac{dz}{2\pi i} : \beta \gamma(z) : \simeq - \oint \frac{dz}{2\pi i} \partial \phi(z),$$

es decir, utilizan  $e^{\eta_f \phi}$  con distintos valores de  $\eta_f$ .

P.ej., en lugar de

$$\epsilon_{\omega} \psi_{-1/2}^{\omega} |0; k\rangle_{NS} \longleftrightarrow V_{NS}^{(-1)}(z) = \epsilon_{\omega} : \psi^{\omega} e^{ik \cdot X} e^{-\phi} :$$

"cuadro -1"

podemos usar su pariente superconforme

$$G_{-1/2} \epsilon_{\omega} \psi_{-1/2}^{\omega} |0; k\rangle_{NS} \longleftrightarrow V_{NS}^{(0)}(z) = \left\{ G_{-1/2}, V_{NS}^{(-1)} \right\}$$

$$= \epsilon_{\omega} : \left( i \partial X^{\omega} + \frac{\alpha'}{2} k \cdot \psi \psi^{\omega} \right) e^{ik \cdot X} :$$

"cuadro 0"

que (si  $\epsilon \cdot k = 0$ ) también tiene peso conforme  $h=1$ , y puede  $\therefore$  integrarse para obtener  $V^{(0)} = \int dz V^{(0)}(z)$  invariante.