



¿Cómo podemos agregar interacciones? Nuestro primer instinto quizás sería añadir términos cúbicos o más altos a la acción de Polyakov $S_p[X]$. Ellos serían interacciones en la teoría de campos en 2 dimensiones (que, como veremos más adelante, es lo que se tiene cuando el fondo en el que se propaga la cuerda es no trivial - p.ej. espaciotiempo curvo); pero en el espaciotiempo seguiríamos teniendo una sola cuerda que se propaga libremente.

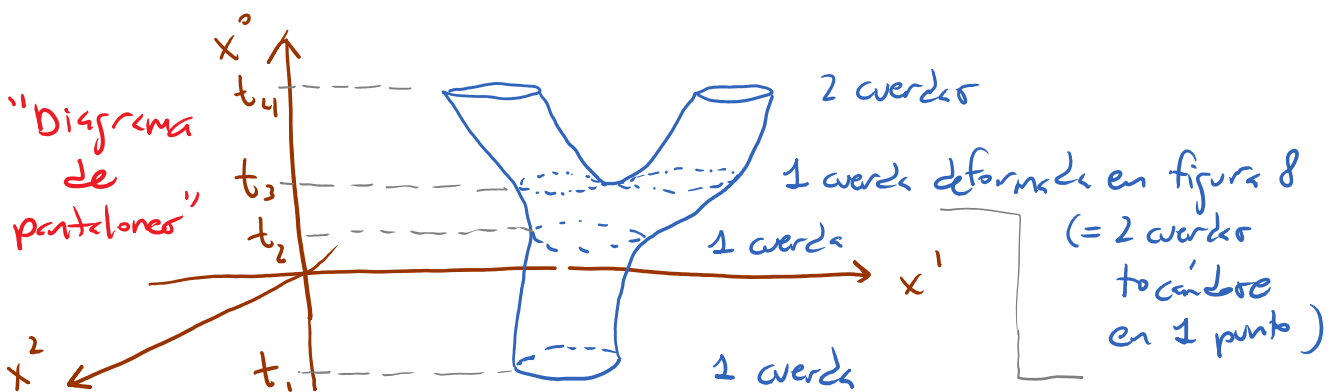
El punto importante aquí es que nuestra descripción es en primera, y no segunda, cuantización. La situación es completamente análoga en la primera cuantización de una partícula. Sabemos que en ese caso podemos incorporar interacciones perturbativamente, agregando a mano vértices de interacción (p. 112) de 3 o más patas, es decir, la posibilidad de que

1 partícula se convierta en 2, ,

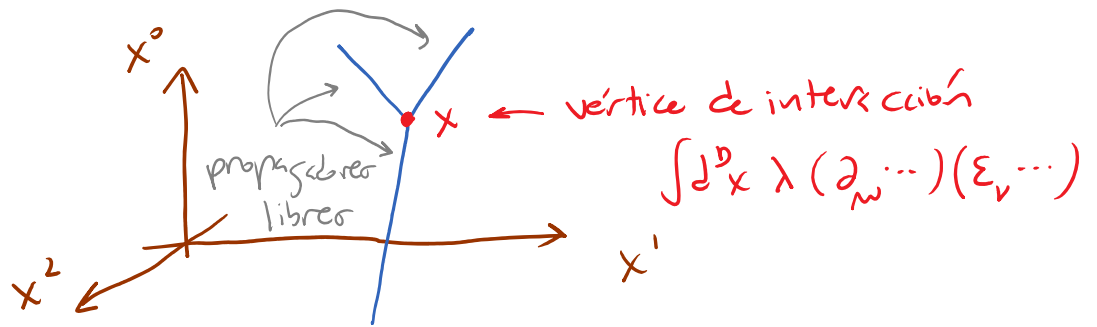
o 1 partícula se convierta en 3, , etc.

La libertad de elegir el tipo de vértices que añadimos, así como los factores que corresponden a cada uno de estos vértices en las reglas de Feynman (constantes de acoplamiento, dependencias del momento y/o polarización de las partículas involucradas, etc.) refleja la gran variedad de teorías de partículas (\leftrightarrow campos) interactivas que es posible construir (aunque faltaría por supuesto analizar unitariedad, causalidad, renormalizabilidad, etc.).

Para agregar interacciones en cuerdas, seguimos entonces el mismo camino. Permitiremos, p.ej., que 1 cuerda se convierta en 2 (o viceversa):

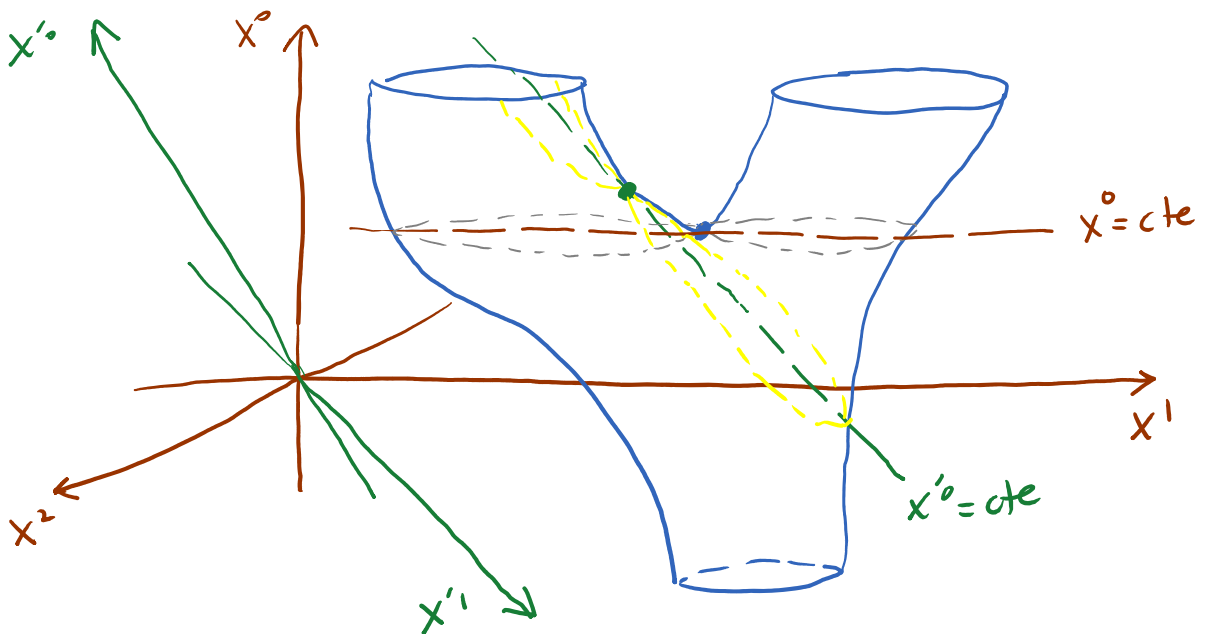


Es importante notar que existe una diferencia esencial entre esto y el vértice cúbico para partículas



En el caso de partículas, existe un punto bien definido en su trayectoria donde ocurre la interacción, y todos los observadores están de acuerdo en cuál es.

Pero en el caso de cuerdas, No es así: el punto en el espaciotiempo donde la cuerda se separa en 2 depende del marco de Lorentz:

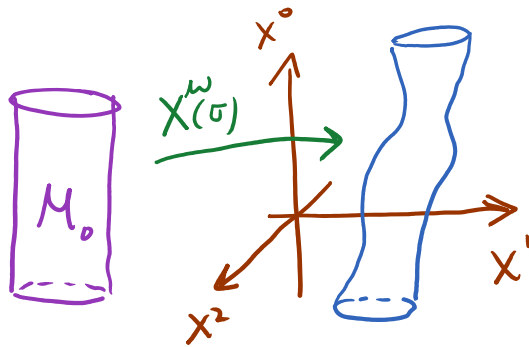


Localmente, cualquier punto en la superficie barrida por la cuerda tiene el mismo aspecto.

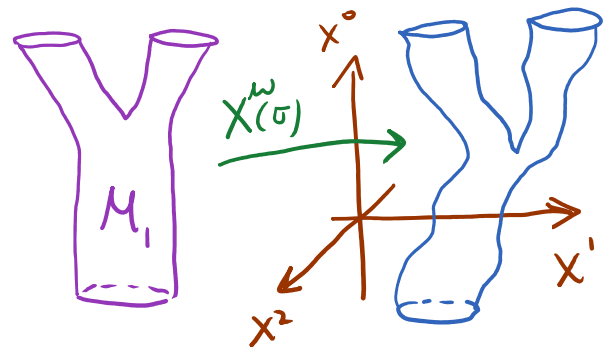
En la descripción de la evolución de la cuerda,

¡¡NO HAY ENTONCES VÉRTICES DE INTERACCIÓN!!

No tenemos opción más que pesar las nuevas trayectorias (donde 1 cuerda se divide en 2) con el mismo factor $e^{-S_p[X]}$ que las trayectorias libres. Lo único que las distingue es su topología, y por tanto, la topología de la hoja de mundo correspondiente:

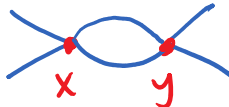


vs.



$$\int_{M_0} DX^\mu(\sigma) e^{-S_p[X]}$$

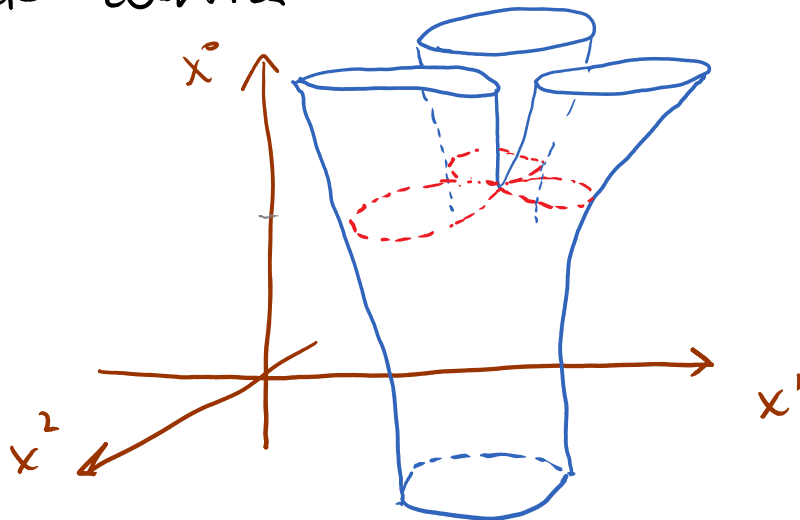
$$\int_{M_1} DX^\mu(\sigma) e^{-S_p[X]}$$

Sabemos que las divergencias UV en teorías de partículas (\leftrightarrow campos) están relacionadas con los límites de integración en los diagramas de Feynman donde 2 o más vértices coincidan en el espaciotiempo (\leftrightarrow energías de partículas en lazo divergen). P.ej.  $= \lambda^2 \int d^D x d^D y \dots$

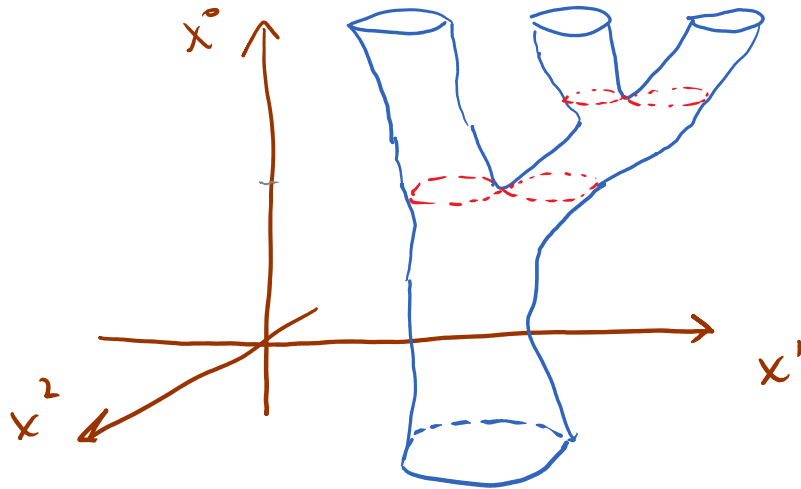
en el límite $x \rightarrow y$.

En cuerdas no existe tal posibilidad, y por esta razón el comportamiento UV se mejora drásticamente. (De hecho, ¡encontraremos que no existen ya divergencias UV!))

Ahora, ¿qué hay de la posibilidad de que 1 cuerda se convierta en 3 o más cuerdas? Aquí nos llevamos otra gran sorpresa: notamos que la trayectoria para una "interacción cúbica"

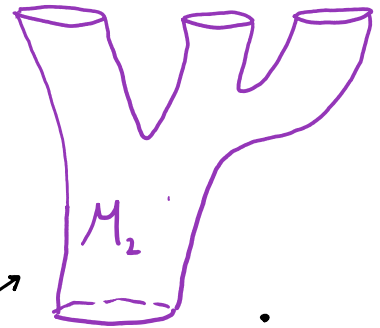


tiene exactamente la misma topología que la trayectoria con 2 "interacciones cúbicas"



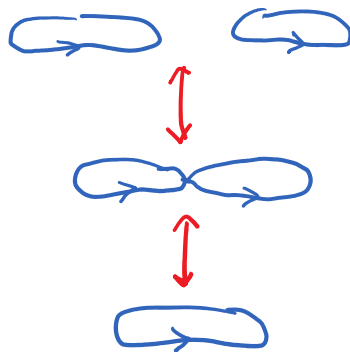
así que ambos posibilidades estén automáticamente incluidos en la integral funcional correspondiente,

$$\int_{M_2} DX^\mu(\sigma) e^{-S_p[X]}$$



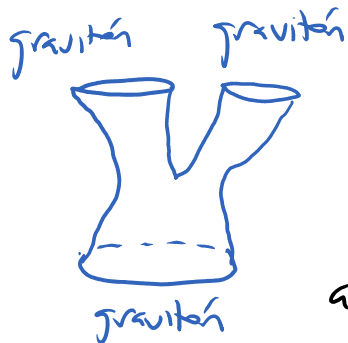
en las funciones de encastre $X^\mu(\sigma)$ definidas sobre la hoja de mundo \rightarrow

Más en general, la conclusión es que todos los posibles "vértices" se incorporan automáticamente e inevitablemente al postular el proceso de interacción "cúbico" básico:

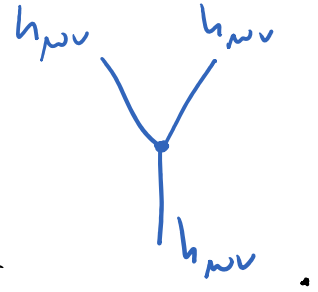


Sorprendentemente, dependiendo de los estados de oscilación

de las cuerdas inicial / final, este único proceso de interacción puede reproducir todas las interacciones en la teoría de campo correspondiente! Veremos, p.ej., que



reproduce el vértice
cúbico apropiado en la
acción de Einstein-Hilbert



Hemos visto entonces que **¡¡ NO HAY LIBERTAD ALGUNA EN EL TIPO DE INTERACCIONES QUE SE PUEDEN AGREGAR !!**

La incorporación de interacciones se logra simplemente sumando sobre hojas de mundo con distintas topologías

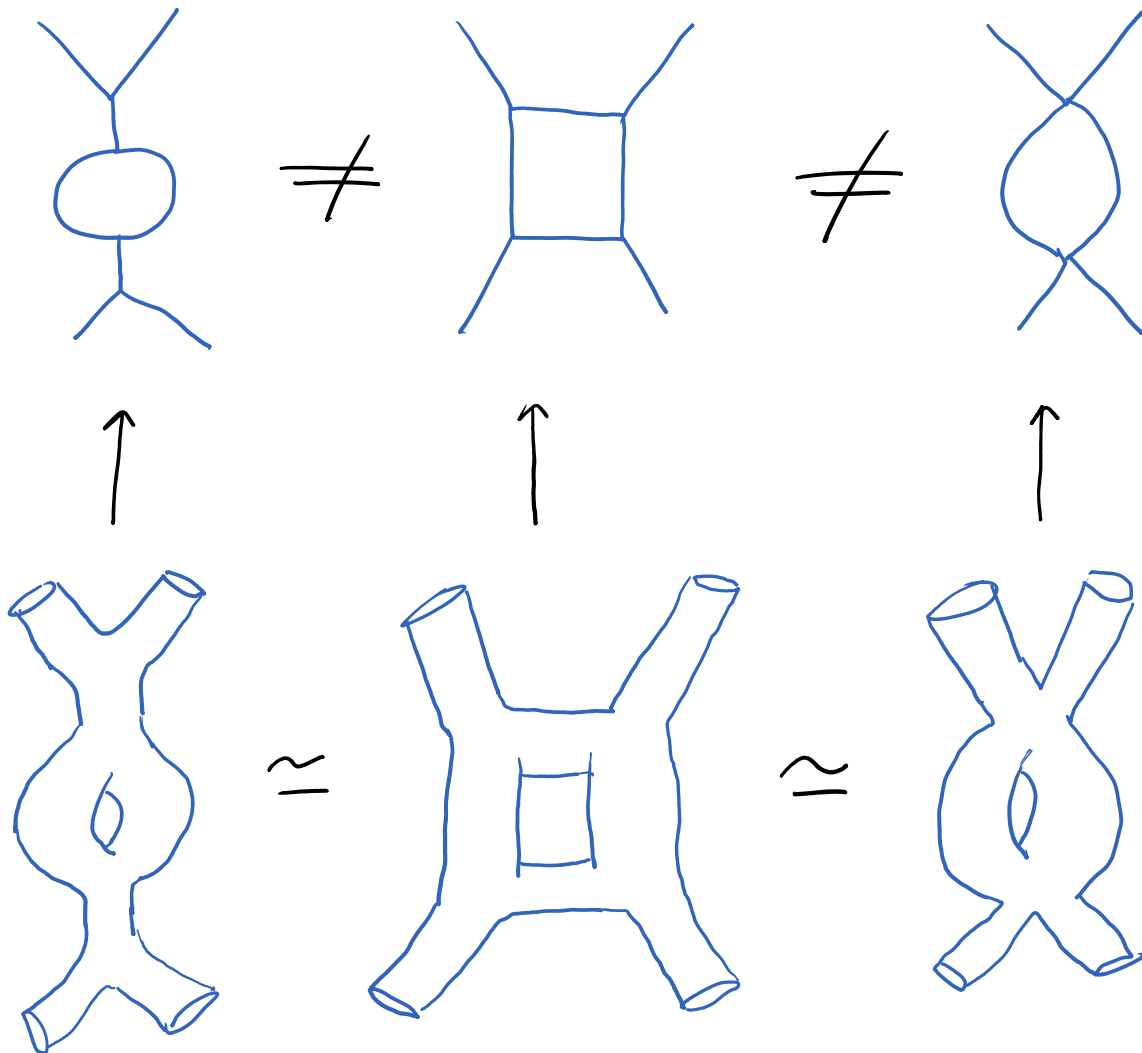
-no existe la posibilidad de inventar a mano distintos vértices asociados a reglas de Feynman arbitrarias.

(Es por esto que la primera cuantización en cuerdas es mucho más satisfactoria que en el caso de partículas.)

Para definir una teoría de cuerdas, basta con especificar los grados de libertad y las reglas de propagación libre. Esta es la razón por la cual existen pocos

teoría de cuerdas, en comparación con muchísimas teorías de partículas.

Podemos notar además que diagramas de Feynman que serían distintos al nivel de partículas pueden ser equivalentes (por tener idéntica topología) al nivel de cuerdas:



En el caso de cuerdas cerradas (y orientadas), la simplificación resulta ser tan drástica que existe ¡1 solo diagrama de Feynman en cada orden de la expansión perturbativa (vs. $\sim L!$ diagramas de partículas a $L \gg 1$ lazos)!

Ahora, para partículas, podemos calcular el propagador

$$\langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi(x') \} | 0 \rangle \sim \text{[diagrama de línea] + [diagrama de bucle] + [diagrama de bucle] + \dots + [diagrama de bucle] + [diagrama de bucle] + \dots,}$$

o más en general, funciones de correlación, ya sea en espacio de posiciones,

$$\langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \} | 0 \rangle = \text{[diagrama de círculo sombreado con n líneas]} \leftarrow \text{suma sobre diagramas conexos (= sin "burbujas de vacío")}$$

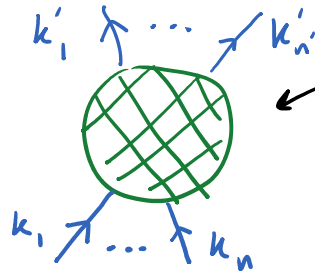
o en espacio de momentos,

$$\int d^D x_i e^{i k_i \cdot x_i} \dots \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \} | 0 \rangle = \text{[diagrama de círculo sombreado con n líneas]} \delta^{(D)}(k_1 + \dots + k_n),$$

para después extraer (a través del procedimiento de "reducción LSZ") las amplitudes de dispersión

$$M(k_1, \dots, k_n \rightarrow k'_1, \dots, k'_n) =$$

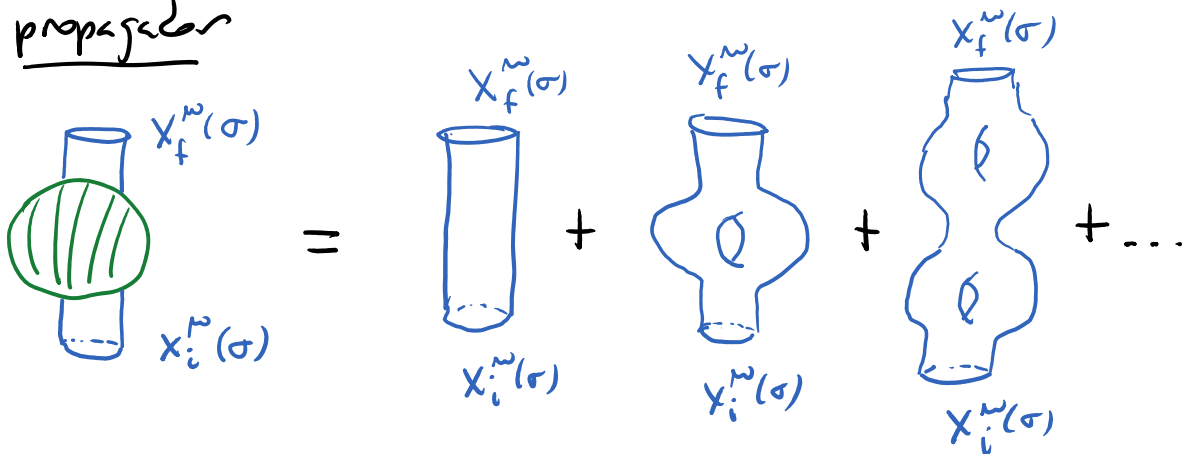
"elemento de matriz invariante"



← suma sobre diagramas conexos y amputados, con patas externas en la capa de masa

(dato básico para calcular secciones eficaces o tasas de decaimiento).

En verdad, podríamos también intentar calcular correladores fuera de la capa de masa, como p.ej. el propagador



$$= \sum_{\mathcal{M}} \int \mathcal{D}X^{\omega}(\sigma) \Big|_{\mu} e^{-S_p[X]} \cdot$$

$$X^{\omega}(\sigma; \sigma'_1) = X^{\omega}(\sigma'_1)$$

$$X^{\omega}(\sigma; \sigma'_2) = X^{\omega}(\sigma'_2)$$

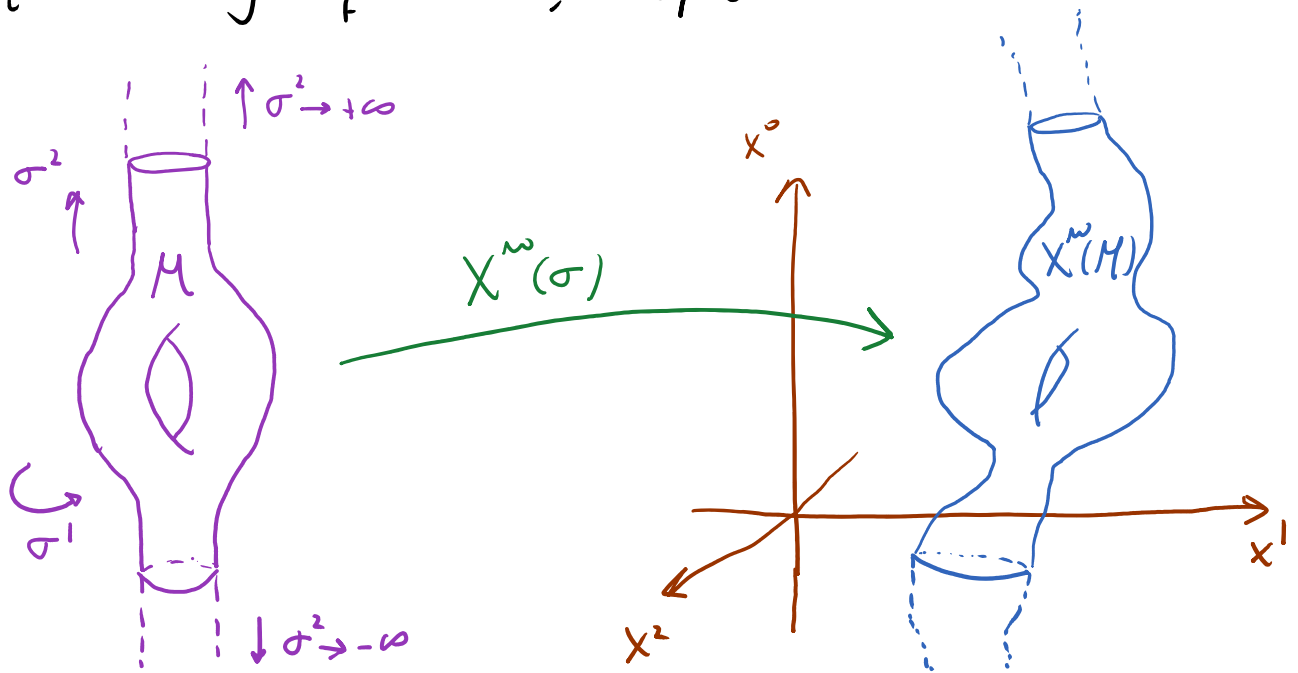
Pero resulta difícil definir estas cantidades locales de manera consistente con las simetrías. [Ver p.ej. artículo de Cohen, Moore, Nelson, Polchinski en '86 y '87.]

Curiosamente, se encuentra que preservar las simetrías en la hoja de mundo está relacionado con preservar las simetrías en el espaciotiempo, y debemos recordar que para las cuerdas estas últimas incluyen los difeos en el espaciotiempo. No es de extrañar entonces que sea difícil definir amplitudes entre puntos espaciotemporales específicos, porque en presencia de gravedad, las coordenadas con que etiquetamos a estos puntos NO tienen significado intrínseco.

Lo que sí podemos definir con relativa facilidad son cantidades globales de interés físico directo: las amplitudes de dispersión, que corresponden al caso particular donde las cuerdas se propagan desde el pasado remoto hasta el futuro remoto.

Las condiciones iniciales y finales para $\int \mathcal{P}X^M(\sigma)$ se

especifican entonces en $x_i^0 \rightarrow -\infty$ y $x_f^0 \rightarrow +\infty$, que podemos hacer corresponder en la hoja de mundo M con $\sigma_i^2 \rightarrow -\infty$ y $\sigma_f^2 \rightarrow +\infty$, respectivamente:



En general harán falta varios parques de coordenadas para cubrir M

Necesitamos entonces calcular
donde M es una hoja de mundo
con 2 o más tubos semi-infinitos.

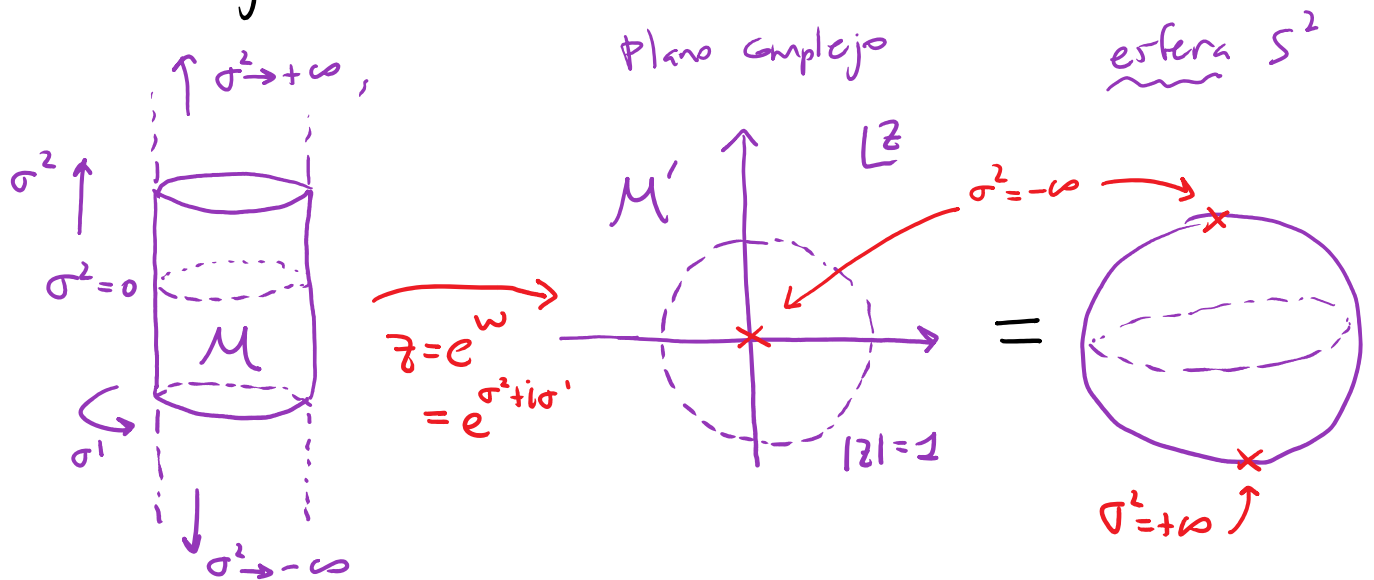
$$\int_{X(\sigma_i^2, -\infty) = X_i^w(\sigma_i^2)}^{X(\sigma_f^2, +\infty) = X_f^w(\sigma_f^2)} \mathcal{D}X^w(\sigma) \Big|_M e^{-S_p[X]}$$

11:16/04/13

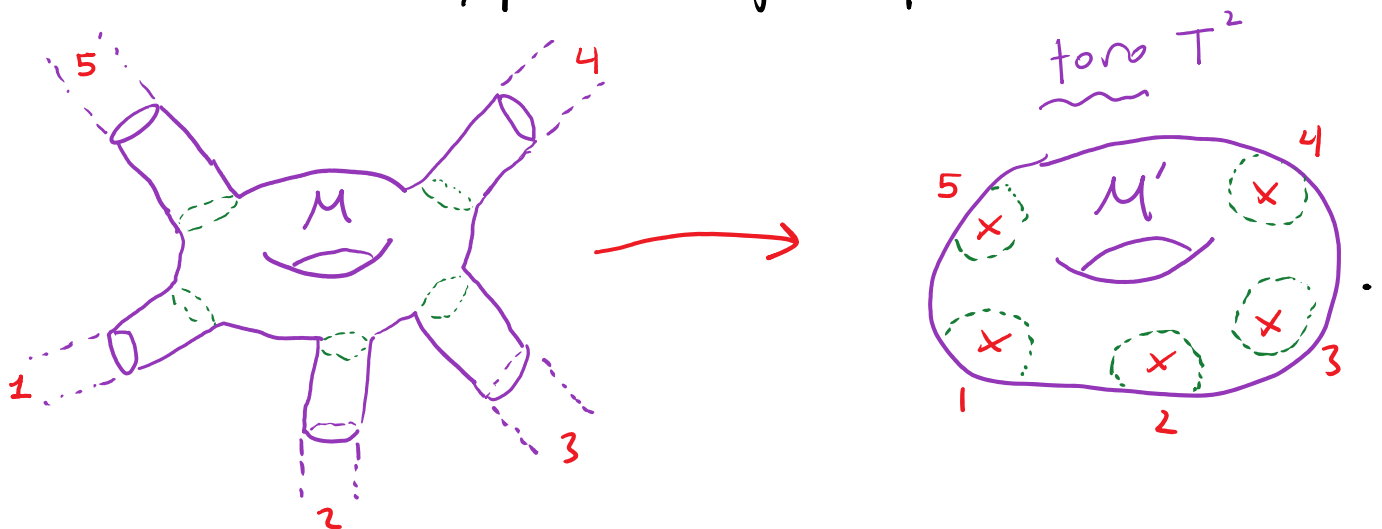
La invariancia conforme nos permite simplificar estas cosas drásticamente: eligiendo una transformación conforme (\leftrightarrow de Weyl) apropiada, podemos convertir a M en una

nueva hoja de mundo M' que sea compacta, es decir, donde los tubos semi-infinitos sean reemplazados por discos de área finita!

Conocemos ya el ejemplo más sencillo de semejante acto de magia:



De manera similar, podemos lograr que



(La forma explícita del mapeo requiere primero adaptar

coordenadas específicas en M , pero es claro que tiene que existir una transformación conforme así, puesto que el convertir un tubo semi-infinito en un disco, como hicimos arriba, es una transformación local en M , así que podemos hacerlo por separado en distintos parches de coordenadas.)

Después de esta transformación, la información sobre los estados iniciales/finales se debe especificar en los puntos marcados (que antes correspondían a $\sigma^2 \rightarrow \pm\infty$), a través de la inserción de operadores locales $V_i(\bar{z}_i, \bar{\bar{z}}_i)$ $i=1, \dots, n$, que llamamos operadores de vértice. A pesar de su nombre, representan no vértices de interacción propiamente, sino estados asintóticos.

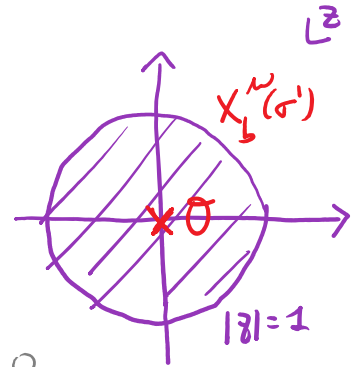
Debemos entonces ser capaces de construir uno de estos operadores por cada estado de vibración de la cuerda. Ésta es de hecho una idea más general, que no aplica solo para la teoría de cuerdas: en cualquier teoría de campos conforme, existe un isomorfismo entre estados y operadores,

que se conoce simplemente como el mapeo estado-operador.

Hemos visto ya cómo podemos pasar de un estado a un operador. La relación inversa se puede establecer asociando a un operador $\mathcal{O}(z, \bar{z})$ el funcional

$$\bar{\Psi}[X_b^w(\sigma')] \equiv \int_{|z| \leq 1} \mathcal{D}X^w(z, \bar{z}) \left| e^{-S_p[X]} \mathcal{O}(0,0), \right.$$

implemente evolución temporal de $\sigma^z = -\infty$ a 0



que se puede interpretar como la funcional de onda de un estado $|\bar{\Psi}\rangle$:

$$\bar{\Psi}[X_b^w(\sigma')] = \langle X_b^w(\sigma') | \bar{\Psi} \rangle$$

(análogo a $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$).

Podemos notar que si $|\bar{\Psi}_0\rangle$ es el estado que corresponde al operador $\mathcal{O}(0,0)$, y $Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} j(z)$ es una carga conservada, entonces el estado $Q|\bar{\Psi}_0\rangle$, que representa el cambio en $|\bar{\Psi}_0\rangle$ bajo la transformación generada por Q , debe corresponder al operador

$$[Q, \mathcal{O}(0,0)] = \oint \frac{dz}{2\pi i} j(z) \mathcal{O}(0,0) \quad ,$$

que es precisamente el cambio en $\mathcal{O}(0,0)$ bajo la misma transformación. Con $Q=L_{-1}$ (\leftrightarrow traslación en z) esto sirve en particular para determinar el estado que corresponde a $\mathcal{O}(z, \bar{z})$ en lugar de $\mathcal{O}(0,0)$.

Podemos deducir la forma explícita del mapeo estado-operador en el caso de la teoría conforme $S_p[X]$ aplicando esta idea, con los cargos

$$\alpha_m^\mu = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \int \frac{dz}{2\pi i} z^m \partial X^\mu(z).$$

Determinemos primero cuál es el estado $|\Psi_1\rangle$ que corresponde al operador identidad $\mathcal{O}(0,0)=1$. Tenemos

$$\alpha_{m \geq 0}^\mu |\Psi_1\rangle \leftrightarrow i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \underbrace{\partial X^\mu(z)}_{\partial X^\mu(0) + z \partial^2 X^\mu(0) + \dots} \cdot 1 = 0$$

y similarmente

$$\sum_{m \geq 0} \alpha_{-m}^{\mu} |\Psi_1\rangle = 0,$$

así que podemos inferir que

$$|\Psi_1\rangle = |0, 0; 0\rangle.$$

vacío de α_{μ} vacío de $\tilde{\alpha}_{\mu}$

eigenvalor

de $p^{\mu} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^{\mu} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\alpha}_0^{\mu}$

Por otro lado,

$$\alpha_{-m}^{\mu} |\Psi_1\rangle \leftrightarrow i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint_{2\pi i} \frac{dz}{z} z^{-m} \partial X^{\mu}(z) \cdot 1$$

$\leftarrow m > 0$

$$\partial X^{\mu}(0) + z \partial^2 X^{\mu}(0) + \dots + \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} \partial^m X^{\mu}(0) + \dots,$$

es decir,

$$\alpha_{-m}^{\mu} |0, 0; 0\rangle \leftrightarrow i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{(m-1)!} \partial^m X^{\mu}(0).$$

Consideremos ahora

$$\alpha_{-n}^{\nu} (\alpha_{-m}^{\mu} |\Psi_1\rangle) \leftrightarrow \left(i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \right)^2 \frac{1}{(m-1)!} \times \oint_{2\pi i} \frac{dz}{z} z^{-n} \partial X^{\nu}(z) \partial^m X^{\mu}(0)$$

$$= \underbrace{\partial X^{\nu}(z) \partial^m X^{\mu}(0)}_{\downarrow} + \underbrace{\partial \partial^m \left[-\frac{\alpha'}{z} \eta^{\nu\mu} \ln|z-z'|^2 \right]}_{\text{No de polo simple}} \Big|_{z'=0}$$

$$\partial X^{\nu}(0) + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \partial^n X^{\nu}(0) + \dots,$$

es decir,

$$\alpha_{-n}^\nu \alpha_{-m}^\mu |0,0;0\rangle \leftrightarrow \left(i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\right)^2 \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{(m-1)!} : \partial^n X^\nu \partial^m X^\mu(0) :$$

Este mismo patrón claramente continúa si actuamos con otros operadores, así que

$$\alpha_{-m_1}^{\mu_1} \dots \alpha_{-m_n}^{\mu_n} |0,0;0\rangle \leftrightarrow \left(i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\right)^n \frac{1}{(m_1-1)!} \dots \frac{1}{(m_n-1)!} : \partial^{m_1} X^{\mu_1} \dots \partial^{m_n} X^{\mu_n}(0) :$$

De manera similar, actuar con $\tilde{\alpha}_{-m}^\mu$ evidentemente corresponde a agregar $i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{(m-1)!} \bar{\partial}^m X^\mu(0)$ dentro del producto en orden normal.

Por último, \swarrow operador de translación en momento

$$|0,0;k\rangle \equiv e^{ik \cdot \hat{x}} |0,0;0\rangle \leftrightarrow : e^{ik \cdot X(0,0)} :$$

Efectivamente, podemos comprobar que

$$k^\mu |0,0;k\rangle = p^\mu |0,0;k\rangle = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu |0,0;k\rangle$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{?}{\longleftrightarrow} i \frac{2}{\alpha'} \oint \frac{dz}{2\pi i} \underbrace{\partial X^\mu(z)}_{\substack{-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z} \\ \text{No de polo}}} : e^{ik \cdot X(0,0)} : \\ &= i \frac{2}{\alpha'} \left(-\frac{\alpha'}{2} \right) k^\mu \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z} : e^{ik \cdot X(0,0)} : \\ &= k^\mu : e^{ik \cdot X(0,0)} : \quad \checkmark \end{aligned}$$

Cualquier estado se puede obtener actuando con α_{-m}^μ 's, $\tilde{\alpha}_{-n}^\nu$'s y $e^{ik \cdot \hat{x}}$ sobre $|0,0;0\rangle$. Según hemos visto, el operador correspondiente es simplemente el producto de los operadores individuales, en orden normal conforme.

Así que, p.ej., el operador de vértice para el taquión es

$$|0,0;k\rangle \longleftrightarrow V_\phi(z, \bar{z}; k) \equiv : e^{ik \cdot X(z, \bar{z})} :$$

y hereda las propiedades del estado físico,

$$\begin{aligned}
 & L_{n>0} |0,0;k\rangle = 0 \quad \leftarrow \text{vacío de osciladores} \quad \longleftrightarrow \quad [L_{n>0}, V_\phi(z, \bar{z}; k)] = 0 \\
 & \tilde{L}_{n>0} |0,0;k\rangle = 0 \quad \longleftrightarrow \quad [\tilde{L}_{n>0}, V_\phi(z, \bar{z}; k)] = 0
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} L_{n>0} |0,0;k\rangle = 0 \\ \tilde{L}_{n>0} |0,0;k\rangle = 0 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{p. 217} \\ \downarrow \\ V_\phi \text{ es} \\ \text{primario} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (L_0 - 1) |0,0;k\rangle = 0 & \longleftrightarrow [L_0, V_\phi(z, \bar{z}; k)] = V_\phi(z, \bar{z}; k) \\
 (\tilde{L}_0 - 1) |0,0;k\rangle = 0 & \longleftrightarrow [\tilde{L}_0, V_\phi(z, \bar{z}; k)] = V_\phi(z, \bar{z}; k)
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} (L_0 - 1) |0,0;k\rangle = 0 \\ (\tilde{L}_0 - 1) |0,0;k\rangle = 0 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{tiene} \\ \text{pesos} \\ \text{conformes} \end{array}$$

p. 214 $\rightarrow h=1, \tilde{h}=1$

(esto último es consistente con lo que aprendimos en la Tarea 2: el operador $:\exp[ik \cdot X(z, \bar{z})]:$ tiene pesos conformes $(h, \tilde{h}) = \frac{\alpha'}{4}(k^2, k^2)$, que en efecto se reducen a $(1, 1)$ usando la condición de capa de masa para el taquión, $k^2 = 4/\alpha' \Leftrightarrow m^2 = -4/\alpha'$).

Bajo una transformación conforme $z \rightarrow z'(z)$, tenemos entonces (p. 216)

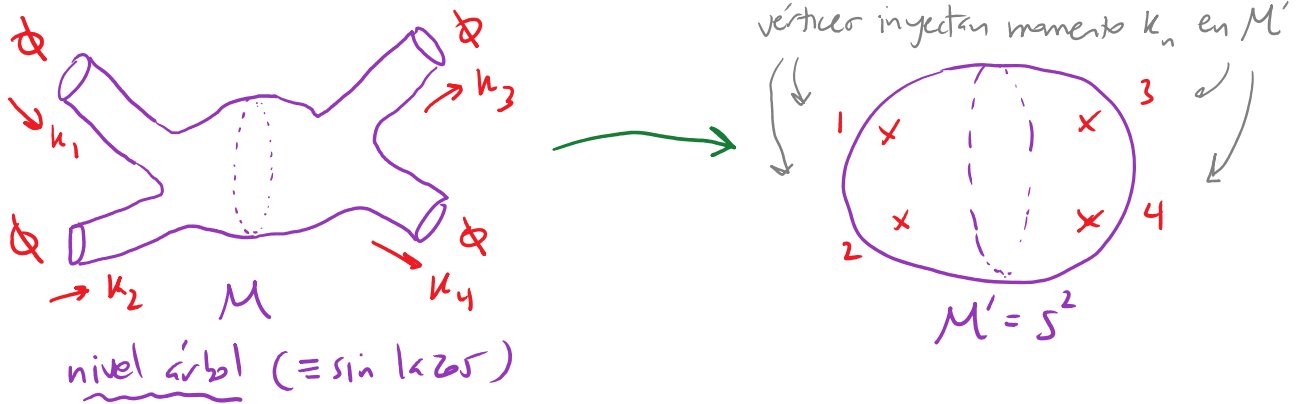
$$V_\phi(z, \bar{z}) \rightarrow V'_\phi(z', \bar{z}') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}\right)^{-1} V_\phi(z, \bar{z}),$$

y por tanto

$$V_\phi(k) \equiv N_\phi \int d^2z V_\phi(z, \bar{z}; k) \text{ es } \underline{\underline{\text{invariante conforme.}}}$$

$\hat{\uparrow}$ cte. de normalización

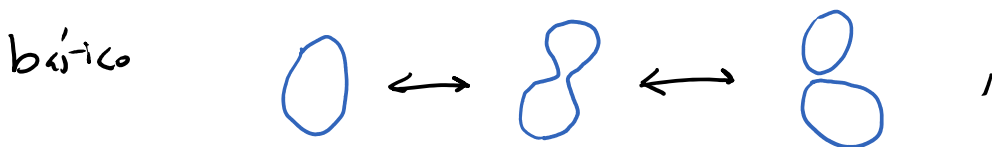
Esta versión integrada del vértice es entonces la que usaremos en el cálculo de amplitudes de dispersión, para respetar las simetrías locales en la hoja de mundo (y tenemos por tanto aquí otra manera de entender por qué $a=1=\tilde{a}$):



$$M^{(0)}(k_1, \dots, k_n) \sim \int_{S^2} DX^\mu(z, \bar{z}) \Big|_{S^2} e^{-S_p[X]} \prod_{\phi} V_{\phi}(k_1) \dots V_{\phi}(k_n)$$

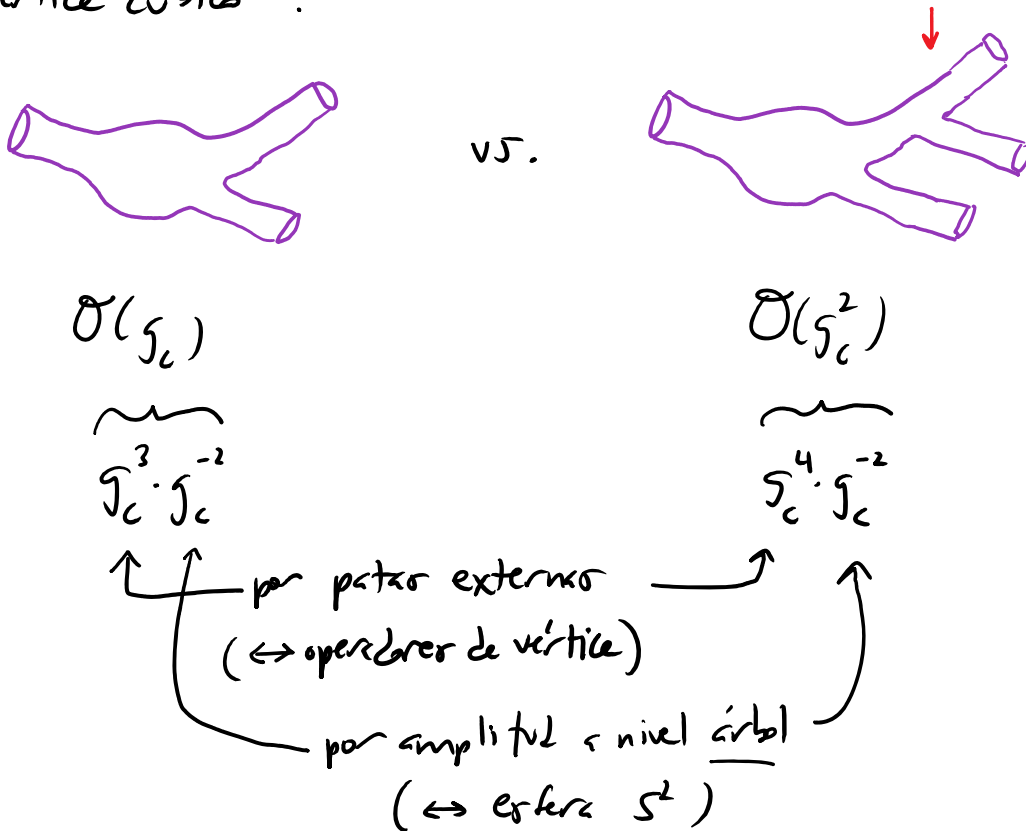
La integral $\int \mathbb{R}^2 z_n$ contenida dentro de cada V_n es parte de la suma sobre todos los procesos posibles (salvo por una sutileza que veremos más adelante).

Notar que, si definimos la constante de acoplamiento de cuerdas g_c como el número adimensional que determina la amplitud de probabilidad del proceso de interacción



y controla por tanto la expansión perturbativa (de

modo que la teoría esté débilmente acoplada si $g_c \ll 1$, entonces debemos tener $N_d \propto g_c$, porque cada patra externa adicional en un diagrama requiere la presencia de un nuevo "vértice cúbico":



Fijaremos una convención precisa para N_d y demás constantes de normalización más adelante.

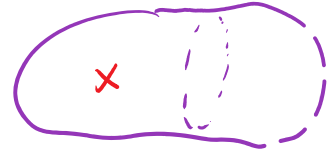
Otro ejemplo sería el operador de vértice para el gravitón

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\mu\nu} \propto \alpha_{-1}^{\mu} \alpha_{-1}^{\nu} |0,0;k\rangle &\stackrel{p.318}{\longleftrightarrow} V_h(\bar{z}, z; k, \epsilon) \equiv : \epsilon_{\mu\nu} \partial X^{\mu} \bar{\partial} X^{\nu} e^{ik \cdot X}(\bar{z}, z) : \\
 \uparrow \text{simétrico} & \qquad \qquad \qquad \uparrow \text{dejar } (i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}})^2 \text{ para } N_h
 \end{aligned}$$

$$V_h(k, \epsilon) \equiv N_h \int d^2z V_h(z, \bar{z}; k, \epsilon),$$

↑ también $\propto g_c$

que si insertarse en una hoja de mundo, inyecta momento y la vibración apropiada.



De manera similar, podemos escribir el operador de vértice para cualquier estado de la cuerda (en lo que a los X^μ respecta). En todos los casos, las condiciones de estado físico se traducen en que el operador de vértice correspondiente es primario y con pesos conformes $h=1=\tilde{h}$. P.ej., de la

Tarea 2 sabemos que $V_h(z, \bar{z}; k, \epsilon)$ efectivamente es primario solo si $k^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0$, y tiene pesos conformes

$$(h, \tilde{h}) = \left(\frac{\alpha' k^2}{4} + 1, \frac{\alpha' k^2}{4} + 1 \right) = (1, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{solo si } k^2 = 0. \end{array} \right.$$

Con un procedimiento análogo podemos determinar el mapeo estado-operador para los fonones: sabemos que

$$b_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} b(z) \quad \left(\Leftrightarrow b(z) = \sum_m \frac{b_m}{z^{m+2}} \right)$$

$$c_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m-2} c(z) \quad \left(\Leftrightarrow c(z) = \sum_m \frac{c_m}{z^{m-1}} \right),$$

así que

$$b_m |\Psi_1\rangle = 0 \quad \forall m \geq -1, \quad c_m |\Psi_1\rangle = 0 \quad \forall m \geq 2.$$

Inferimos entonces que

$$\boxed{|\Psi_1\rangle = b_{-1} |\downarrow\rangle} \quad (\text{recorder que } \{b_m, c_n\} = \delta_{m,-n}).$$

Podemos similarmente deducir que

$$\boxed{b_{-m} \leftrightarrow \frac{1}{(m-2)!} \partial^{m-2} b(0) \quad \forall m \geq 2, \quad c_{-m} \leftrightarrow \frac{1}{(m+1)!} \partial^{m+1} c(0)}$$

(y que, nuevamente, aplicaciones sucesivas de los modos de creación se traducen en el producto de los operadores correspondientes en orden normal (en forma)).

Así que, en particular,

$$|\downarrow\rangle = c_1 \underbrace{b_{-1}}_{\leftrightarrow 1} |\downarrow\rangle \quad \longleftrightarrow \quad c(0),$$

y por tanto, los representantes de las clases de equivalencia

$$|\Psi_{V_x}\rangle \sim |\downarrow\downarrow\rangle \quad \longleftrightarrow \quad V_x(0,0) c(0) \tilde{c}(0).$$

Construido solo en X^m

Conviene notar que si $V_x(z, \bar{z})$ corresponde a un estado

físico (primario en pesos conformes $(h, \tilde{h}) = (1, 1)$), entonces (dado que $c(z)$ tiene pesos $(-1, 0)$ y $\tilde{c}(\bar{z})$ tiene pesos $(0, -1)$) la combinación $c(z)\tilde{c}(\bar{z})V_X(z, \bar{z})$ es invariante conforme (justo como $V_X \equiv \int d^2z V_X(z, \bar{z})$). Usaremos esto más adelante.

Resumiendo lo dicho hasta aquí, nuestra receta básica para calcular amplitudes de dispersión (más específicamente, el elemento de matriz invariante) es

$$M(k_1, k_2, \dots, k_N) = \sum_{\mathcal{M}} M_{\mathcal{M}}(k_1, k_2, \dots, k_N),$$

$$\text{con } M_{\mathcal{M}}(k_1, \dots, k_N) \equiv \underbrace{\int \frac{\mathcal{D}g_{ab}(\sigma) \mathcal{D}X^{\mu}(\sigma)}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} \Big|_{\mathcal{M}} e^{-S_p[g, X]} V_1(k_1) \dots V_N(k_N)}_{\equiv \langle V_1(k_1) \dots V_N(k_N) \rangle_{\mathcal{M}}}$$

$$V_n(k) = N_n \int d^2\sigma \sqrt{g} V_i(\sigma; k)$$

Invariante bajo $\text{Dif} \times \text{Weyl}$

(\Rightarrow invariante conforme en norma plana)

Hemos visto que esto requiere en particular $k^2 = -m^2$

O_1 en términos de diagramas,

$$= \langle V_1 \dots V_N \rangle_{S^2} + \langle V_1 \dots V_N \rangle_{T^2} + \dots$$

De esta forma, ¡¡calculando correladores en una teoría de campo libre 2-dimensional podremos determinar amplitudes de dispersión en una teoría interactuante D-dimensional que incluye a la gravedad !!

Hagamos aquí una pausa para resaltar una conexión interesante. Hasta ahora hemos identificado al gravitón libre (en $D=26$)

$$\epsilon_{\mu\nu} \propto \alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} |0,0;k\rangle$$

← incluye $\frac{2}{\alpha'}$

$$\leftrightarrow V_h(k, \epsilon) = N_h \int d^2z \epsilon_{\mu\nu} : \partial X^{\mu} \bar{\partial} X^{\nu} e^{ik \cdot X} (z, \bar{z}) :$$

con base en sus propiedades de transformación bajo Poincaré (masa cero, espín 2). Con la receta para amplitudes de dispersión, podremos próximamente verificar que estos 'gravitones' realmente interactúan como Einstein predice (salvo pequeñas correcciones, relevantes solo a altas energías).

Pero, aún así, lo que no queda del todo claro es en qué sentido este estado de oscilación de la cuerda tiene que ver con el gravitón entendido como una pequeña fluctuación de la geometría. Esto se aclara si notamos que cuando la métrica del espaciotiempo es

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x),$$

tenemos

$$\begin{aligned} S_p^g[X] &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu g_{\mu\nu}(X) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu \eta_{\mu\nu}}_{S_p[X]} + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu h_{\mu\nu}(X), \end{aligned}$$

por lo que la integral funcional relevante es

$$\int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_p^g[X]} = \int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_p[X]} \left(1 - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z h_{\mu\nu}(X) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu + \dots \right).$$

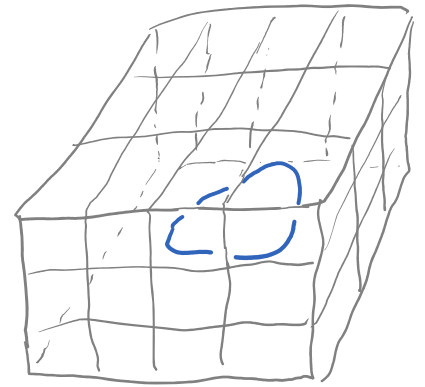
Tomando 1 solo modo de Fourier, $h_{\mu\nu}(X) = \epsilon_{\mu\nu}(k) e^{ik \cdot X}$,
 i venimos que lo que aparece en el integrando es precisamente
el vértice del gravitón $V_h(k, \epsilon)$!

Sabemos ya que insertar 1 vértice $V(k, \epsilon)$ corresponde a
 agregar 1 gravitón $\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0, 0; k\rangle$, así que insertar
 $e^{-V_h(k, \epsilon)}$ corresponde a agregar una especie de estado

coherente de gravitones $\sim \exp(-\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0, 0; k\rangle)$
 ($\neq \exp(-\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu) |0, 0; k\rangle$, que sería 1 único cuerdo
 excitado en un estado coherente de oscilación, es decir,
 un estado coherente desde la perspectiva 2-dimensional),
 Y, con lo que acabamos de ver, aprendemos entonces que
 un fondo con métrica $g_{\mu\nu}(x)$ no trivial en verdad puede
 entenderse como un estado coherente de gravitones.

De manera similar, la receta para describir cuerdas que

se propagan sobre un fondo no trivial de cualquier de los infinitos campos asociados a estados de vibración de las cuerdas ($\Phi(x)$, $g_{\mu\nu}(x)$, $B_{\mu\nu}(x)$, $\varphi(x)$, ...) es exponencial los operadores de vértice correspondientes. Verificamos entonces la interpretación ya enfatizada en varios puntos a lo largo del curso, donde entendemos a las cuerdas como pequeñas excitaciones de una estructura subyacente que representa una drástica generalización del espaciotiempo.



(No debe confundirse el hecho de que tenemos cuerdas propagándose sobre un fondo que a su vez está, en cierto sentido, "hecho" de cuerdas. Esta situación es exactamente análoga a la de fotones propagándose a través de, p.ej., el campo magnético terrestre. En ambos casos, estamos hablando de pequeñas fluctuaciones por encima de un valor de fondo no trivial para el campo correspondiente.)

Regresando a las amplitudes de dispersión, hemos visto que debemos sumar sobre superficies M compactas y conexas (para obtener la parte conexas de la amplitud); pero ¿exactamente de qué tipo?

En los viejos tiempos, antes de que se descubrieran las D-branas, la respuesta a esta pregunta habría dependido de y definido a exactamente cuál teoría de cuerdas bosónicas estamos considerando. Más concretamente, pensábamos que existían (al menos) 4 teorías de cuerdas bosónicas distintas:

1) Cuerdas Bosónicas Cerradas Orientadas



Espectro libre: ϕ ; φ , $h_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$; ...

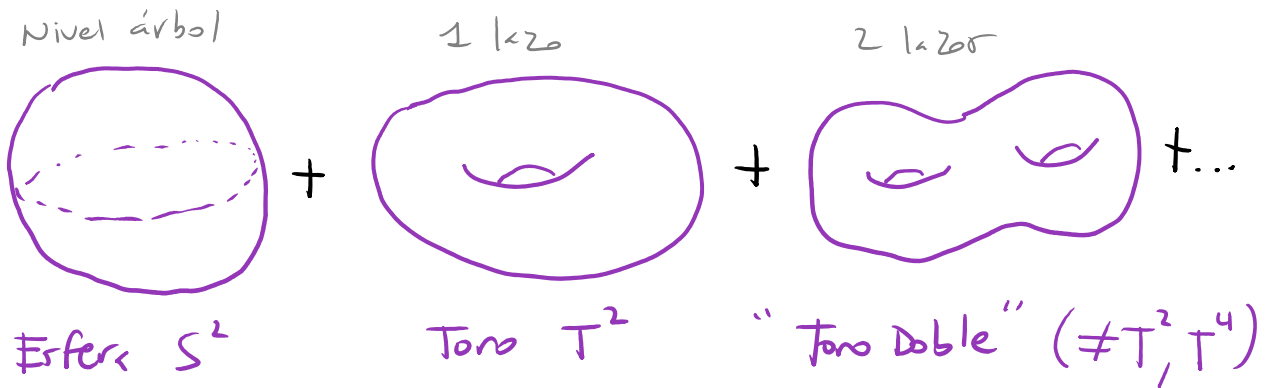
$\underbrace{\hspace{10em}}_{m^2 = -4/\alpha'}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{m^2 = 0}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{m^2 = 4/\alpha', \dots}$

↓ sola interacción:

Correspondiente al diagrama

Así que en este caso, la expansión perturbativa consiste

de una suma sobre superficies orientables y sin bordes:



Genéro $m=0$

$m=1$

$m=2$

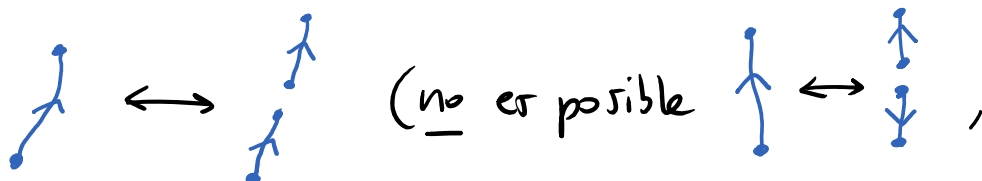
$\uparrow \equiv$ número de 'manijas'

2) Cuerdas Bosónicas Abiertas y Cerradas Orientadas

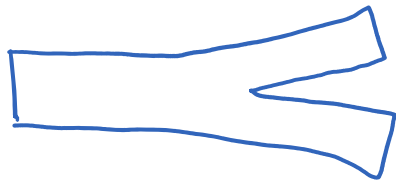
(donde en los viejos tiempos se consideraba solo el caso invariante de Poincaré, con las cuerdas abiertas libres de moverse en $D=26$).

Espectro libre: $\phi, \phi; A_\mu, \psi, h_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}; \dots$
 $m^2 = -4/\alpha' \quad -1/\alpha' \quad 0 \quad 1/\alpha', 2/\alpha', \text{etc.}$

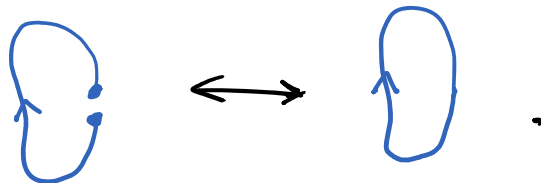
La interacción básica para las cuerdas abiertas es



así que los 2 extremos de la cuerda abierta NO son físicamente equivalentes), correspondiente al diagrama

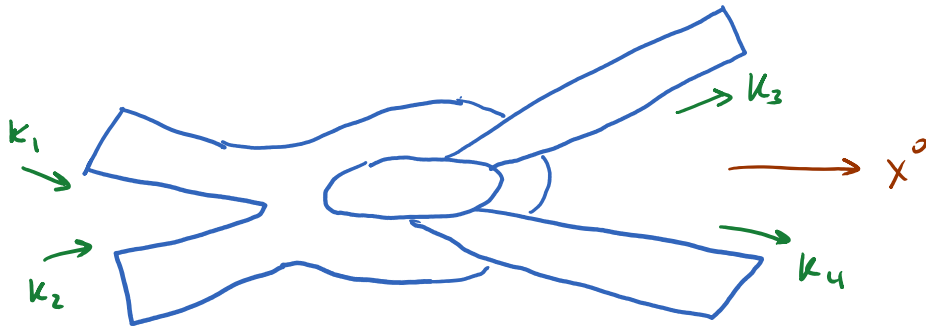


Importantemente, debido que la posibilidad de que 2 extremos se unan es un proceso puramente local, en automático queda incluido también el proceso

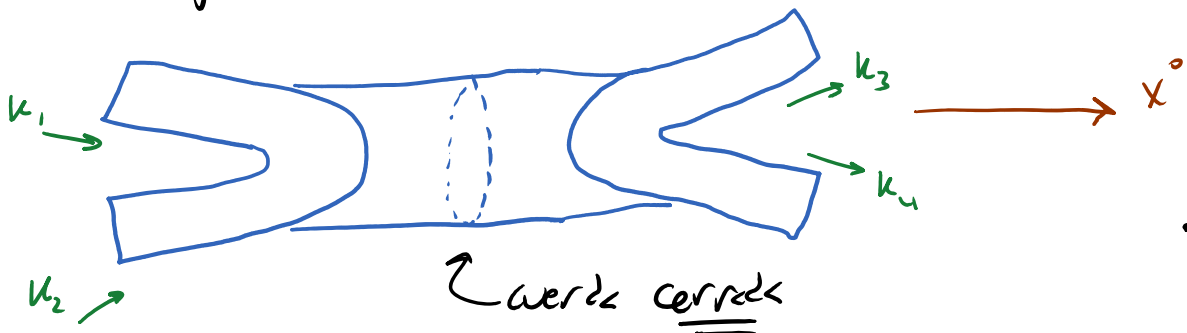


Descubrimos entonces que no puede existir una teoría de cuerdas abiertas (interactuantes) sin cerradas! Y esto implica en particular que cualquier teoría de cuerdas inevitablemente incluye a la gravedad.

Otra manera de decir esto mismo es que un proceso de dispersión "no planar" de dispersión a 1 lazo en cuerdas abiertas en el espaciotiempo, como p.ej.



tiene la misma topología, y por tanto es descrito con la misma hoja de mundo M que



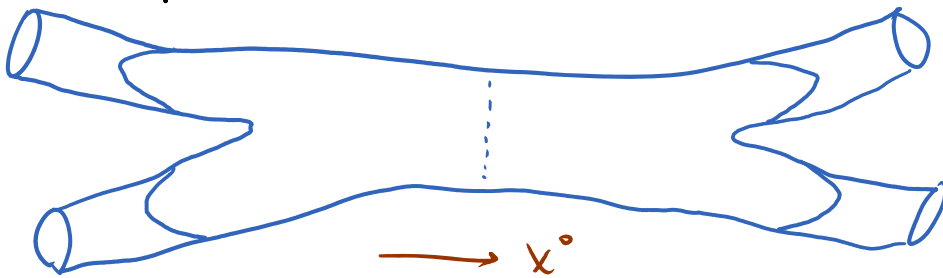
La integral $\int DX^\mu(\sigma) \Big|_{\mathcal{M}} e^{-S_p[X]} V_1(k_1) \dots$ incluye inevitablemente ambos procesos, y por esta razón, al hacer el cálculo se encuentra que dicha amplitud de cuerdas abiertas tiene polos cuando la energía en el marco del centro de masa

$$s \equiv -(k_1 + k_2)^2 = -\frac{4}{\alpha'}, 0, \frac{4}{\alpha'}, \dots, \text{ que coinciden}$$

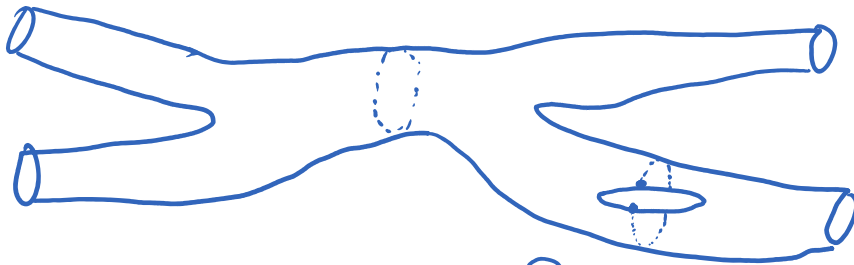
justamente con el espectro de cuerdas cerradas. Esto establece "experimentalmente" la existencia de las cuerdas cerradas, que deben entonces incluirse en la teoría como estados asintóticos (la conexión entre



valor y estado asintótico de 1 partícula es bien conocido en teoría de campos: Källen-Lehmann). 112: 23/04/13

Podemos notar además que estos cuerdos cerrados NO son libres, porque cuando menor pueden interactuar convirtiéndose primero en cuerdos abiertos:



Y de hecho, la integral $\int \mathcal{D}X^\mu(\sigma) \big|_{\mathcal{M}} e^{-S_p[X]} \mathcal{V}_1(k_1) \dots$ que describe este proceso incluye también p.ej.

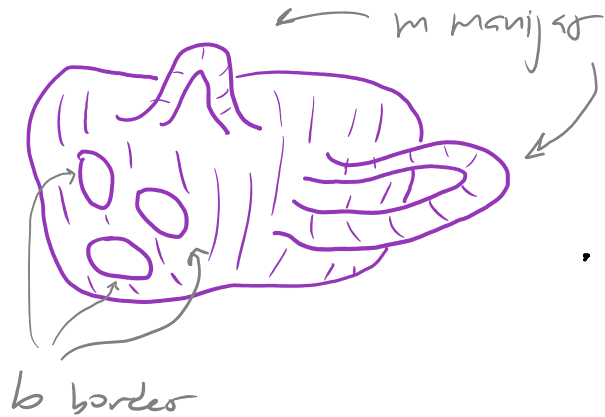


así que la interacción  \leftrightarrow  no es opcional.

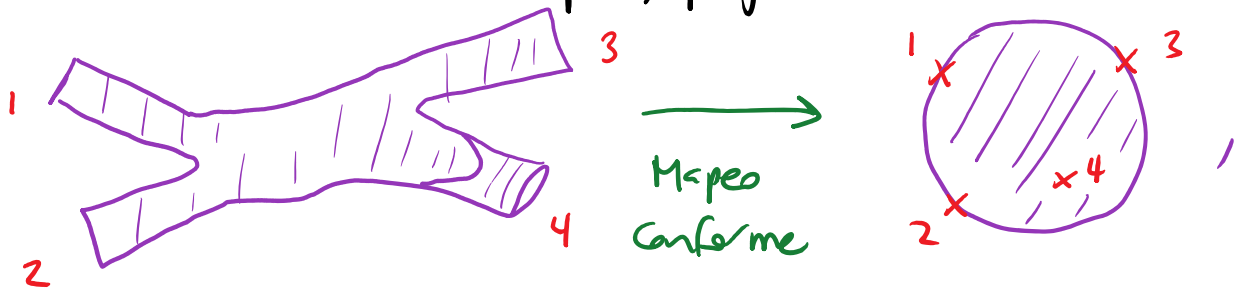
En esta teoría, entonces, la expansión perturbativa consiste de la suma sobre superficies orientables, con o sin bordes:



$$= \sum_{m,b=0}^{\infty}$$



Podemos notar además que, p.ej.



es decir, mientras que los vértices de cuerda cerrada se insertan en el interior de la hoja de mundo M , los de

cuerda abierto se insertan en el borde. En ambos casos, integramos sobre sus posibles ubicaciones en M .

A partir de esto podemos entender por qué los 2 extremos de una cuerda abierta son físicamente distintos. Como verificaremos en la Tarea 4, en el caso de la cuerda abierta el mapeo estado-operador identifica al operador de vértice para el fotón

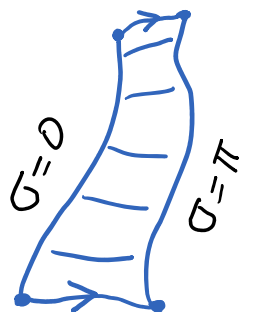
$$\varepsilon_{\mu}^{\nu} \alpha_{-1}^{\mu} (0; k) \iff V_A(z, \bar{z}) = \varepsilon_{\mu}^{\nu} : \frac{1}{2} (\partial + \bar{\partial}) X^{\mu} e^{ik \cdot X} (z, \bar{z}) :$$

$$\begin{aligned} \implies \mathcal{V}_A(k; \varepsilon) &= \mathcal{N}_A \int \mathcal{D}z \varepsilon_{\mu}^{\nu} : \frac{1}{2} (\partial + \bar{\partial}) X^{\mu} e^{ik \cdot X} (z, \bar{z}) : \\ &= \mathcal{N}_A \int \mathcal{D}\tau \varepsilon_{\mu}^{\nu} : e^{ik \cdot X} \partial_{\tau} X^{\mu}(\tau) : \end{aligned}$$

Así que la receta para describir a la cuerda en un fondo no trivial del campo electromagnético $A_{\mu}(x)$ es agregar a la acción el término de borde

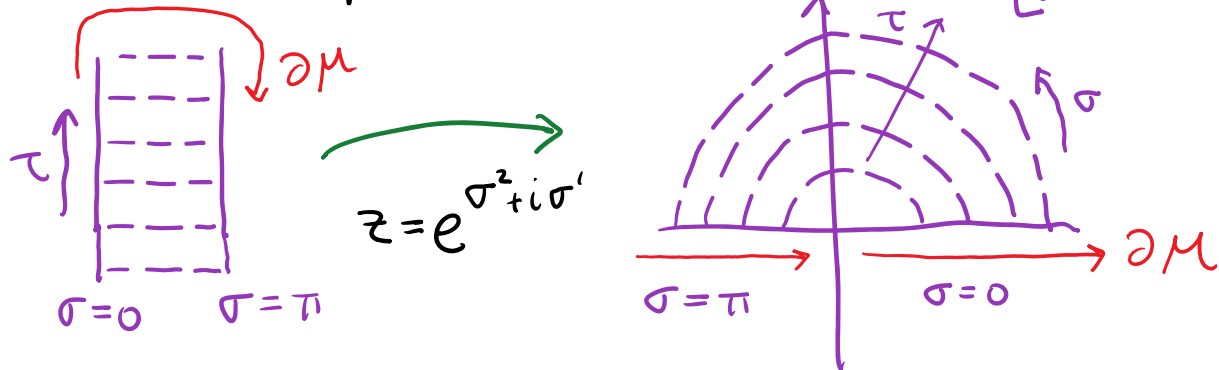
$$S_A = \int_{\partial M} \mathcal{D}\tau A_{\mu}(X(\tau)) \partial_{\tau} X^{\mu}$$

Esto nos dice que los extremos de la



cuerdas son cargas puntuales bajo $A_\mu(x)$.

Recordando que la frontera ∂M es

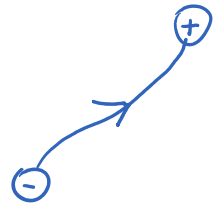


Vemos que

$$\int_{\partial M} \tau A_\mu \partial_\tau X^\mu = + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [A_\mu \partial_\tau X^\mu]_{\sigma=0} - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [A_\mu \partial_\tau X^\mu]_{\sigma=\pi}$$

así que los extremos tienen cargas eléctricas

opuestas (que se neutralizan entonces al juntarse).



Solo hay carga eléctrica de 1 tipo, como corresponde al grupo de norma abeliano $U(1)$.

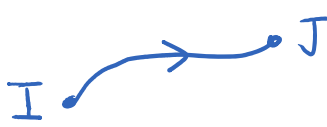
Desde los 70s se conoció el modo de generalizar al caso no abeliano: basta con postular (a modo) la existencia de N tipos distintos de extremos finales

(\leftrightarrow N tipos de cargas; p.ej. con $N=3$ el extremo final sería análogo a un quark $\left(\begin{matrix} \text{rojo} \\ \text{verde} \\ \text{azul} \end{matrix} \right)$),

y los correspondientes N tipos distintos de extremos iniciales ($\leftrightarrow N$ 'anticargas'; en el ejemplo $N=3$, el extremo inicial sería

análogo a un antiquark $\begin{pmatrix} \text{antirrojo} \\ \text{antiverde} \\ \text{antiazul} \end{pmatrix}$).

Con esto agregamos nuevos grados de libertad a la cuerda, localizados en los extremos. Declaramos que estos grados de libertad son internos y no dinámicos, de manera que preservemos automáticamente la invariancia bajo Poincaré y la invariancia conforme.

Para especificar por completo el estado de una cuerda, debemos ahora elegir valores $1 \leq I, J \leq N$ para los extremos inicial y final:  I \rightarrow J

$$\left\langle \alpha_{-n_1}^{\mu_1} \alpha_{-n_2}^{\mu_2} \dots | \dots ; k ; I, J \right\rangle$$

La combinación lineal más general es entonces

$$|\dots ; k ; \lambda \rangle \equiv \sum_{I, J} \lambda_{I, J} |\dots ; k ; I, J \rangle$$

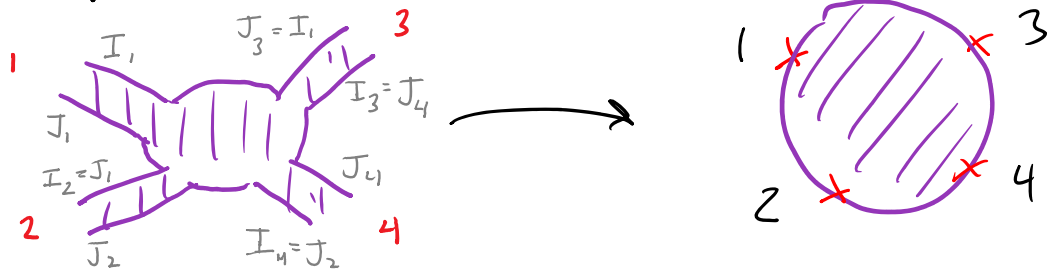
Factor de Chan-Paton

Los campos resultantes son por tanto matrices $N \times N$. P.ej,

$$\alpha_{-1}^M |0; k; IJ\rangle \leftrightarrow (A_N^{(x)})_{IJ}$$

(o, si preferimos, $A_N^{(x)} \equiv \sum_a A_N^a(x) T^a$, con las T^a una base para matrices $N \times N$, p.ej., N^2 matrices hermiticas con $\text{Tr}(T^a T^b) = \delta^{ab}$).

Las amplitudes



incluirán factores $\sim \text{Tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$ Factores de Chan-Paton
y son entonces invariantes bajo

$$U(N): \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1' \\ 2' \\ \vdots \\ N' \end{pmatrix}.$$

En el espaciotiempo tenemos al campo de norma $A_\mu(x)$ (que transforma en la rep. adjunta), así que $U(N)$ figura en nuestra teoría como una

simetría local.

Desde la perspectiva antigua, entonces, basada en estos factores de Chern-Pon abstractos, habríamos contabilizado infinitos teorías distintas de cuerdas abiertas y cerradas orientadas, con grupo de norma $U(N)$, $N=1,2,3,\dots$. Y el caso donde solo hay cuerdas cerradas puede añadirse a la lista como $N=0$.

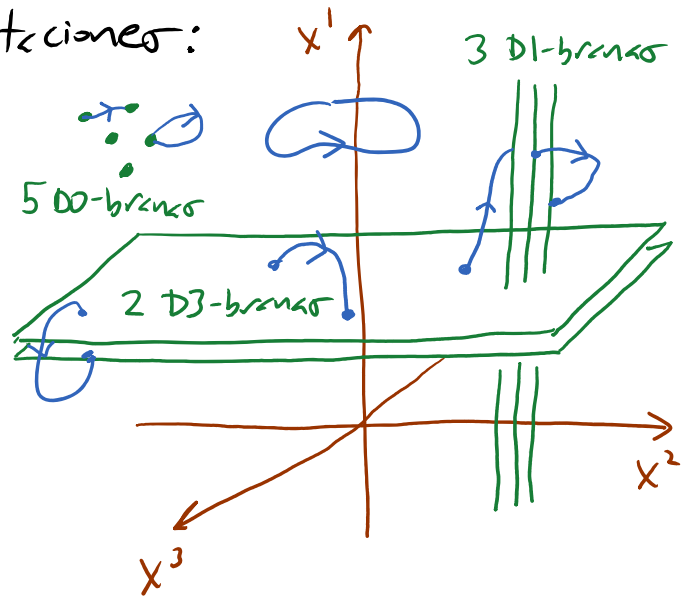
Pero nosotros entendemos bien que éstas no son en realidad distintas teorías, sino distintos sectores de una misma teoría, donde tenemos N D25-branas presentes.

Los índices de Chern-Pon simplemente nos informan en cual de los N D-branas inicia/termina la cuerda abierta en cuestión (p.256).

Y, de lo más de esto, entendemos también que existe un número infinito de sectores adicionales de la misma teoría, donde se tienen D_p -branas con distintos

dimensionalidades y/u orientaciones:

(En la visión antigua, éstos habrían sido considerados teorías distintas — aunque no eran de interés por violar Poincaré.)



El hecho (p.332) de que las cuerdas abiertas se puedan convertir en cerradas y viceversa nos indica que las D-branas pueden interactuar con el espaciotiempo cerrado.

3) Cuerdas Bosónicas Cerradas No Orientadas

$S_p[X]$ y las 2 constricciones son invariantes bajo la transformación de paridad en la hoja de mundo,

$$\Omega: \sigma \rightarrow 2\pi - \sigma, \text{ es decir, } \bar{z} \leftrightarrow \bar{z}$$

que es simplemente una reparametrización, pero invierte la orientación de la cuerda. Dado que $\Omega^2 = 1$, Ω tiene eigenvalores ± 1 .

$$\text{Si fijamos } \Omega |0,0;k\rangle = + |0,0;k\rangle,$$

entonces usando $\Omega : \alpha_n^\mu \leftrightarrow \tilde{\alpha}_n^\mu$ tenemos, p.ej.;

$$\Omega \varepsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle = \varepsilon_{\nu\mu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle.$$

Obtenemos la teoría no orientada truncando la teoría original al subespacio de estados con $\Omega = +1$:

$$|fís\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(1+\Omega)|fís\rangle$$

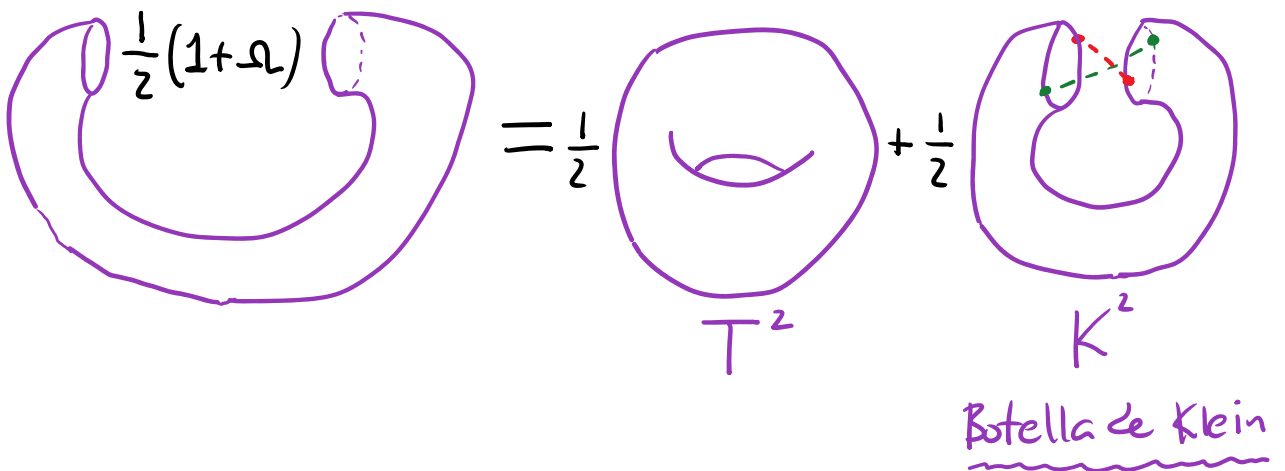


El espectro libre es entonces

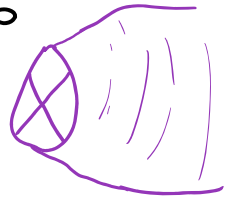
$$\underbrace{\alpha}_{m^2 = -4/\alpha'} ; \underbrace{h_{\mu\nu}, \cancel{B}_{\mu\nu}, \psi}_{m^2 = 0} ; \dots$$

Esta proyección define una teoría consistente, gracias a que las interacciones conservan Ω .

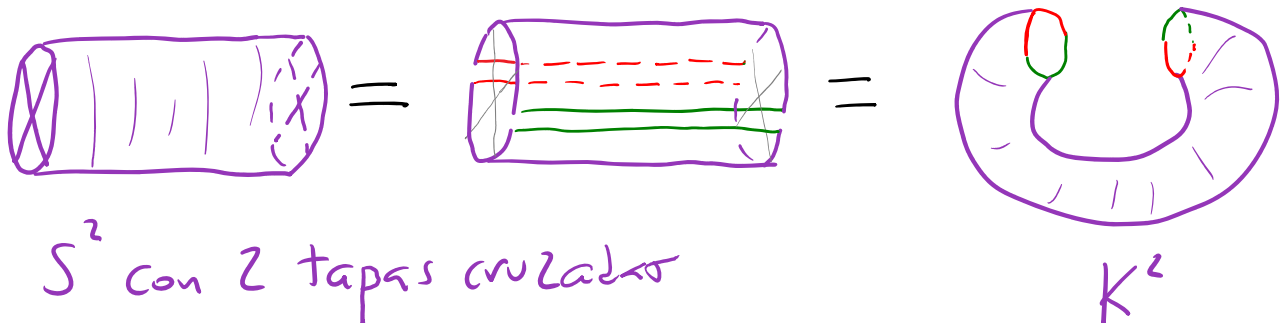
Para eliminar a los estados con $\Omega = -1$ en los lazos, debemos incluir superficies no orientables:



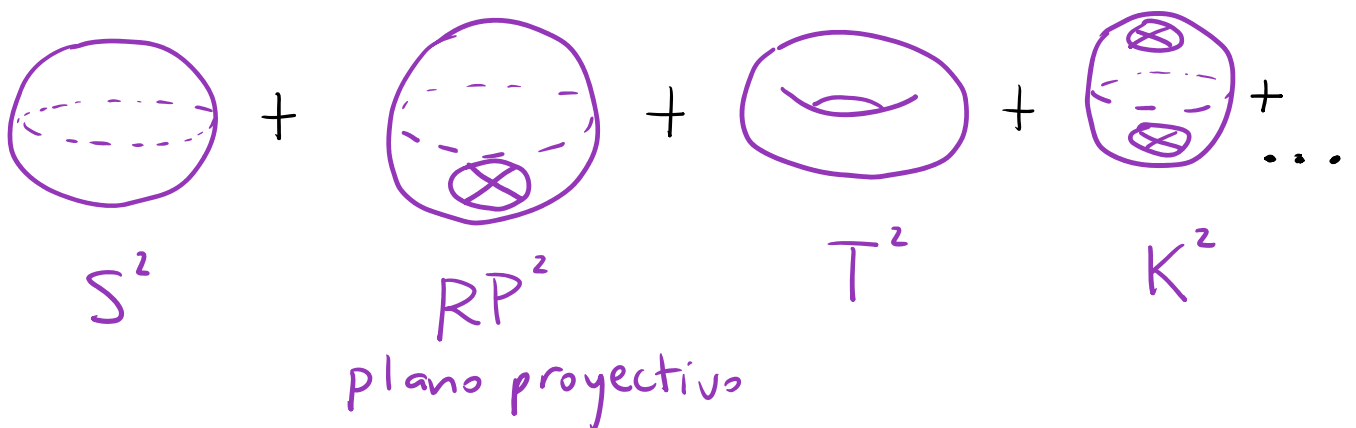
Para caracterizar superficies no orientables conviene definir una tapa cruzada ("crosscap") como un círculo en el cual se identifican los puntos diametralmente opuestos.



Tenemos p.ej.



La suma sobre superficies sin bordes, orientables o no, que necesitamos para la expansión perturbativa de esta teoría



Se puede expresar (usando $m=0, c=3 = m=1, c=1$) como

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{c=0}^{\infty} \text{[Diagram of genus } m \text{ and } c \text{ holes]} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{c=0,1,2}^{\infty} \text{[Diagram of genus } m \text{ and } c \text{ holes]}$$

4) Cuerdas Abiertas y Cerradas No Orientadas



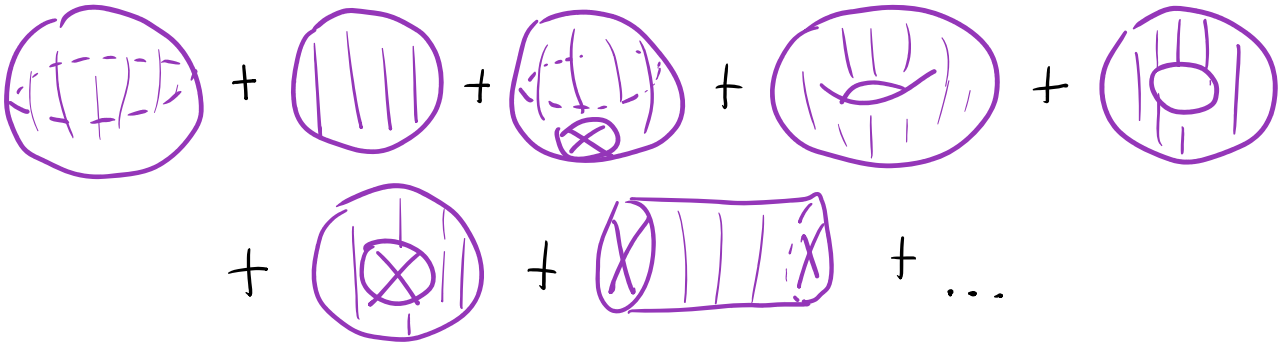
Para la cuerda abierta, $\Omega: \sigma \rightarrow \pi - \sigma$

$$z \leftrightarrow -\bar{z}$$

$$X^{\mu} \sim \sum_n \frac{\alpha_n^{\mu}}{n} (z^{-n} + \bar{z}^{-n}) \Rightarrow \alpha_n^{\mu} \leftrightarrow (-1)^n \alpha_n^{\mu}$$

Espectro: $\alpha; \phi; \cancel{A_{\mu}}, h_{\mu\nu}, \cancel{B_{\mu\nu}}, \varphi; \dots$

La expansión perturbativa involucra suma sobre todas las superficies (con o sin bordes, orientables o no):



Cinta de Moebius M^2

$$\equiv \sum_{m, b=0}^{\infty} \text{Sphere}(m, b) + \sum_{c=1, b=0}^{\infty} \text{Sphere}(c, b)$$

Notar que A_M sobrevive si agregamos factores de Chan-Paton, es decir, D-branas: sistemas que

$$\Omega |N; k; I, J\rangle = (-1)^N |N; k; J, I\rangle$$

eigenvalor del "operador de número" (=1 por A_M)

$$\Rightarrow \Omega \sum_{I, J=1}^N \lambda_{IJ} \alpha_{-1}^M |0; k; I, J\rangle = - \sum_{I, J} \lambda_{JI} \alpha_{-1}^M |0; k; I, J\rangle,$$

estado que sobrevive si $\lambda_{IJ} = -\lambda_{JI}$. Así que el grupo de norma asociado a N D-branas en el caso de una teoría no orientada es $SO(N)$ en lugar de $U(N)$.

acción no trivial sobre extremos

(Proyectando con $\omega \equiv \Omega \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{1}_{N/2} \\ -i\mathbb{1}_{N/2} & 0 \end{pmatrix}$
se obtiene el grupo de norma $Sp(N/2)$.)

Justo como entendimos que los tipos 1) y 2) de teorías de cuerdas son simplemente distintos sectores de una misma teoría, que difieren por la presencia o ausencia de D25-branas, nos queda claro que los tipos 3) y 4) están igualmente conectados.

A estas alturas podemos hablar entonces de que existen solo 2 tipos de teorías de cuerdas básicas: orientadas y no orientadas. Como entenderemos en más detalle el próximo semestre, éstas también son en realidad una misma teoría, que difieren por la ausencia o presencia de un objeto adicional (no dinámico) conocido como un 25-plano de orientidad ("orientifold"). Más en general, una orientidad es un espacio con hiperplanos p -dimensionales que funcionan como espejos, implementando Ω (y algunas simetrías discretas).

Ahora que hemos terminado con la enumeración de los
hojas de mundo M relevantes para cada una de las
"distintas" teorías de cuerdas bosónicas, consideremos
de nuevo al parámetro que controla la expansión
perturbativa. Parecería que debemos agregar
a mano constantes de acoplamiento

 g_c

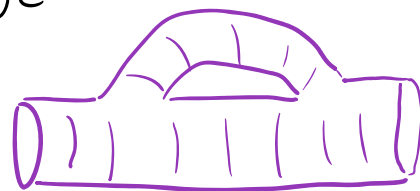
para la
interacción
de cuerdas
cerradas, y

 g_a

para la
interacción
de cuerdas
abiertas,

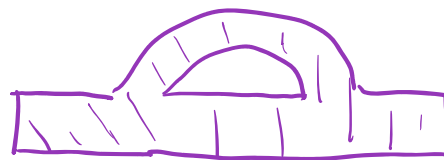
lo cual implicaría que

agregar una manija

 $\propto g_c^2$

y

agregar un borde

 $\propto g_a^2$

Pero de hecho, la teoría contiene ya su propia
receta. Recordemos de las pp. 133-35 que podemos

agregar a $S_p[g, X]$ la acción gravitacional usual

$$S_{\chi}[g] \equiv \Phi_0 \left(\underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{g} R}_{\text{Einstein-Hilbert}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds K}_{\text{Gibbons-Hawking (-York)}} \right)$$

cte. de normalización \nearrow

Einstein-Hilbert Gibbons-Hawking (-York)

necesario en un espacio con frontera, para que el principio variacional esté bien definido

(donde $ds \equiv d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}}$ es la distancia propia sobre ∂M

y $K \equiv -t^a n_b \nabla_a t^b$ la curvatura extrínseca de ∂M

tangente unitaria \nearrow normal (hacia el exterior) unitaria \nearrow),

SIN modificar la dinámica (y la equivalencia con $S_{NG}[X]$)

gracias a que

$$\frac{\delta S_{\chi}}{\delta g^{ab}} \propto \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) = 0 \quad \text{identícamente en 2 dim.}$$

S_χ depende solo de la topología de M :

$$S_\chi = \Phi_0 \left(\underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{g} R}_{M} + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds \kappa \right)$$

Teorema
de Gauss-Bonnet

$$= \chi(M)$$

Número (o características)
de Euler

$$\chi(M) \equiv V - A + C$$

de
vértices

de
aristas

de
caras

de poliedro
homeomorfo a M

P.ej.,

$$\chi(S^2) = \chi(\text{cubo}) = 8 - 12 + 6 = 2$$

(\Leftrightarrow métrica usual $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2\theta \Rightarrow R = \frac{2}{r^2}$ ✓)

$$\chi(T^2) = \chi(\text{toro}) = 16 - 32 + 16 = 0$$

(\Leftrightarrow sobre T^2 es posible definir métricas con $R=0$ ✓)

$$\chi(D^2) = \chi(\text{triángulo}) = 3 - 3 + 1 = 1 \quad (\Leftrightarrow R=0, \kappa=1 \quad \checkmark)$$

Resultado general:

$$\chi = 2 - 2m - b - c$$

manijas

bordes

↑

↑

↑

↑

↑

↑

Así que incorporando S_χ , las amplitudes de dispersión están pesadas con

$$e^{-\Phi_0 \chi} = e^{-2\Phi_0} (e^{\Phi_0})^{2m} (e^{\Phi_0})^b (e^{\Phi_0})^c$$

Podemos entonces identificar

$$g_c = e^{\Phi_0} = g_a^2$$

La expansión perturbativa tiene sentido solo si

$$g_c = e^{\Phi_0} \ll 1$$

Como ya habíamos señalado antes, la constante de acoplamiento correspondiente debe aparecer

también en la normalización de los vértices:

$$V_i \equiv N_i \int d\sigma^2 \sqrt{g} V_i \quad N_i \propto \begin{cases} g_c & i = \phi, h, \varphi, \dots \\ g_a & i = \phi, A_\mu, \dots \end{cases}$$

Podemos comprobar que estas reglas son consistentes con la unitariedad. Recordar que

$$\left. \begin{array}{l} S^t S = \mathbb{1} \\ S = \mathbb{1} + iT \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Z Im } \text{[diagrama]} = \sum_I \left(\text{[diagrama]} \right) \left(\text{[diagrama]} \right)$$

Teorema Óptico: \exists corte cuando estados intermedios van a la capa de masa

En teoría de cuerdas debemos tener p.ej.

$$\text{Z Im } \text{[diagrama]} = \sum_I \text{[diagrama]} \text{[diagrama]}$$

$$\Rightarrow \left(e^{\Phi_0} \right)^{-2+2} g_c^5 \propto \left(e^{\Phi_0} \right)^{-2} g_c^4 \left(e^{\Phi_0} \right)^{-2} g_c^5$$

$$\text{i.e., } e^{\Phi_0} \ll g_c \quad \checkmark$$

(Más adelante: Φ_0 resulta NO ser un parámetro libre de la teoría, sino el valor de fondo del dilataón $\varphi(x) \dots$)

Imponiendo exigido que los vértices V_i sean invariantes bajo $\text{Dif} \times \text{Weyl}$, esperaríamos poder fijar la norma en la integral de trayectoria para obtener

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab} \mathcal{D}X^{\mu}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} e^{-S_p[X, g]} \prod_i V_i$$

$$\stackrel{g = \check{g}}{=} \int \mathcal{D}_{\check{g}}^a c^a \mathcal{D}_{\check{g}}^b b_{ab} \mathcal{D}_{\check{g}} X^{\mu} e^{-S_p[X, \check{g}] - S_f[b, c, \check{g}]} \prod_i V_i$$

Pero, como ya habíamos anticipado, al considerar la estructura global de la hoja de mundo (en lugar de solo examinar la situación localmente, en un parche de coordenadas a la vez, que es lo que habíamos hecho hasta ahora), nos topamos en este procedimiento con 2 sutilezas:

1) Pueden existir simetrías que no se eliminan con la elección de norma $g = \check{g}$, es decir, transf. conformes

Transformación Conforme = Weyl \circ (Reparametrización Conforme)

que estén bien definidas globalmente en M ,

$\sigma^a \rightarrow \sigma'^a = \sigma^a + \delta \sigma^a(\sigma)$ tales que

$$\delta g_{ab} = \check{\nabla}_a \delta \sigma_b + \check{\nabla}_b \delta \sigma_a \propto \check{g}_{ab} \quad \text{Ec. de Killing Conforme}$$

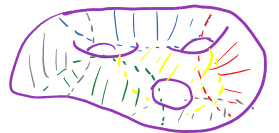
\uparrow para que el efecto sea Weyl

(ec. de Killing usual $\delta g_{ab} = \check{\nabla}_a \delta \sigma_b + \check{\nabla}_b \delta \sigma_a = 0 \leftrightarrow$ isometrías).

Definimos el grupo de Killing Conforme (GKC) como el grupo de transformaciones generadas por vectores (campos vectoriales) que satisfacen esta ecuación y están definidos globalmente.

El GKC es un subgrupo del "grupo" conforme local que habíamos discutido hasta ahora (y que tiene $\dim = \infty$).

Por la exigencia de una definición global, existen vectores de Killing conformes solo para superficies suficientemente sencillas: aquellas con $\chi \geq 0$.



La lista exhaustiva es como sigue (veremos en detalle los casos orientables más adelante):

$$\chi=2: \quad \text{S}^2 \quad \text{GKC} = \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

(generado por $L_0, L_{\pm 1}, \tilde{L}_0, \tilde{L}_{\pm 1}$)

$$K \equiv \dim \text{GKC} = 6$$

$$\chi=1: \quad \text{D}^2 \quad \text{GKC} = \text{SL}(2, \mathbb{R}), \quad K=3$$

$$\text{RP}^2 \quad \text{GKC} = \text{SU}(2), \quad K=3$$

$$\chi=0: \quad \text{T}^2 \quad \text{GKC} = \text{U}(1) \times \text{U}(1), \quad K=2$$

$$\text{C}^2 \quad \text{GKC} = \text{U}(1), \quad K=1$$

$$\text{M}^2 \quad \text{GKC} = \text{U}(1), \quad K=1$$

$$\text{K}^2 \quad \text{GKC} = \text{U}(1), \quad K=1$$

En estos casos tendremos (ignorando por ahora la segunda sutileza)

$$\int \frac{Dg_{ab} DX^{\mu}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} e^{-S_p} \prod_i V_i = \int \frac{Dc^a D b_{ab} DX^{\mu}}{\text{GKC}} e^{-S_p - S_f} \prod_i V_i$$

$$\underbrace{\prod_i N_i \int d^2 \sigma_i \sqrt{g} V_i(\sigma_i)}$$

Dado que las transformaciones en GKC cambian las posiciones σ_i de los vértices V_i , es posible reinterpretar a K de las integrales $\int d^2 \sigma_i$ como $\int d(\text{GKC})$, para cancelar al GKC en el denominador.

En otras palabras, podemos fijar la norma por completo dejando algunos $V_i(\sigma_i)$ sin integrar. (Necesitaremos por supuesto determinar el jacobiano correspondiente.)

2) Pueden existir parámetros en la métrica
que no se eliminan con las simetrías.

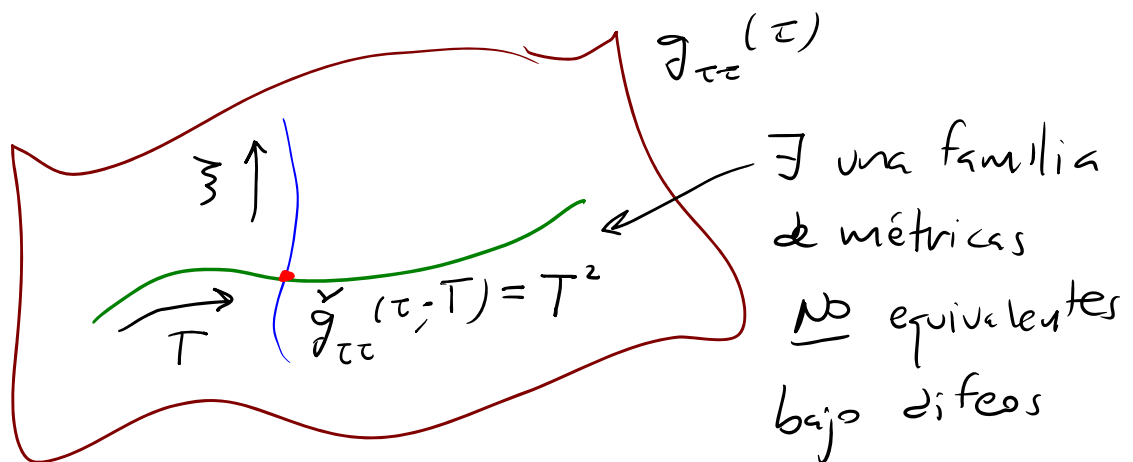
Esta posibilidad es completamente análoga a lo que sucedió en el caso de la partícula (pp. 102-3):

$$\left\{ \begin{array}{l} X^\mu(\tau) \\ g_{\tau\tau}(\tau) \end{array} \right. \quad \tau \in [0, 1]$$

podemos utilizar la invariancia bajo difeos para fijar la norma $\dot{g}_{\tau\tau}(\tau) = \text{cte.}$, pero dado que

$$T \equiv \int_0^1 d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}(\tau)} \quad \text{es invariante bajo difeos,}$$

tenemos necesariamente $\text{cte.} = T^2$



Notar que, de hecho, podríamos transformar

$$\tau \rightarrow \tau'(\tau) = T\tau \quad \text{para obtener} \quad \int_{\tau'}^{\tau'} (\tau') = 1,$$

pero entonces $\tau' \in [0, T]$, $S[X] = \int_0^T d\tau' \dots$,

así que de cualquier manera hay que tomar en cuenta la existencia de distintos valores posibles para T :

$$\int \frac{Dg_{\tau\tau}(\tau)}{\text{Dif}} \dots = \int_0^\infty dT \mu(T) \dots$$

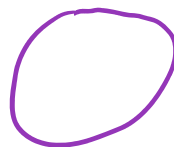
↑ Faddeev-Popov

donde la medida $\mu(T)$ depende de la topología de líneas de mundo:

$$\mu(T) = 1 \quad \text{para}$$



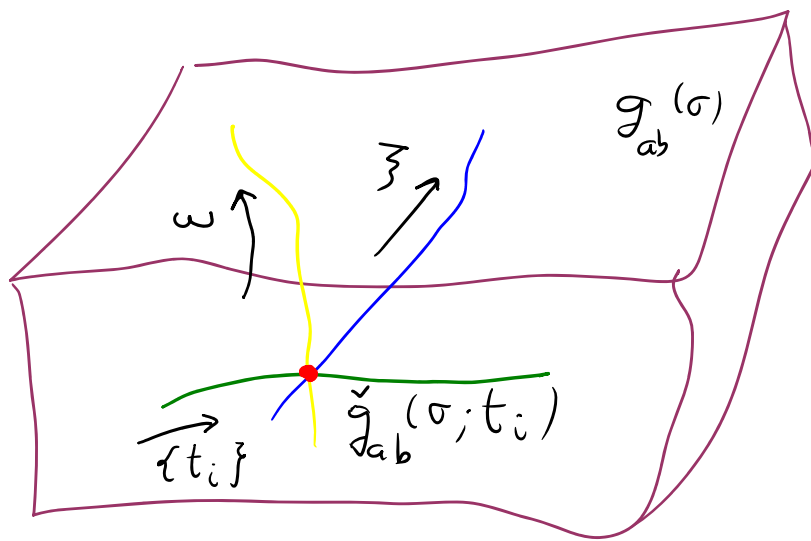
$$\mu(T) = \frac{1}{T} \quad \text{para}$$



Con la cuerda sucede lo mismo: para una hoja de mundo dada, podemos escribir

$$g_{ab}(\sigma) = e^{w(\sigma)} \check{g}_{ab}(\sigma; t_i) \quad i=1, \dots, M$$

← módulos (parámetros)



← En general, existen métricas NO equivalentes bajo $Dif \times Weyl$

y definir

$$M_M \equiv \frac{\text{Métricas}}{Dif \times Weyl}$$

Espacio de Módulos

(M - dimensional)

||3:30/04/13

Justo como en el caso de la partícula, si preferimos podemos



asociar a los módulos no a la métrica sino a las coordenadas: en vez de una métrica definida globalmente $\check{g}_{ab}(\sigma; t_i)$,

podemos usar $\text{Dif} \times \text{Weyl}$ por separado

en cada región de coordenadas $\alpha = 1, 2, \dots$, para

llegar a la métrica plana $ds_{(\alpha)}^2 = d\bar{z}_{(\alpha)} d\bar{z}_{(\alpha)}$.

Las funciones de transición serán entonces

reparametrizaciones conformes $\bar{z}_{(\alpha)} = f_{(\alpha\beta)}(\bar{z}_{(\beta)}; t_i)$,

que combinadas con Weyl pueden ser reinterpretadas como transformaciones conformes (la métrica no cambia).

En otras palabras, en 2 dimensiones


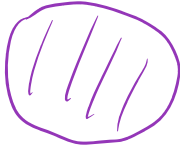

\rightarrow Variedades Riemannianas \cong Variedades Complejas.
 incluye identificación por difeo Weyl ≡ Superficies de Riemann

Existe un teorema que relaciona el número de módulos M en una superficie dada con el número K de vectores de Killing conformes:

$$K - M = 3\chi$$

Teorema de Riemann-Roch

Tenemos entonces $M = K - 3\chi$, es decir (p. 354),

$\chi = 2 :$		S^2	$K = 6$	\Rightarrow	$M = 0$	}	Todas las $g^{(G)}$ son equivalentes bajo $\text{Dif} \times \text{Weyl}$
$\chi = 1 :$		D^2	$K = 3$	\Rightarrow	$M = 0$		
		RP^2	$K = 3$	\Rightarrow	$M = 0$		

$$\begin{aligned} \chi=0 : & \quad \text{torus} \quad T^2 \quad K=2 \Rightarrow M=2 \\ & \quad \text{annulus} \quad C^2 \quad K=1 \Rightarrow M=1 \\ & \quad \text{disk with boundary} \quad M^2 \quad K=1 \Rightarrow M=1 \\ & \quad \text{cylinder} \quad K^2 \quad K=1 \Rightarrow M=1 \end{aligned}$$

$$\chi < 0 : \quad K=0 \quad \Rightarrow \quad M=6m+3b+3c-6$$

En los casos con $\chi \leq 0$ tendremos entonces

$$\int \frac{Dg_{ab} DX^M}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} e^{-S_p[X, g]} \dots$$

$$= \int_{M_M} dt_1 \dots dt_M \Delta_{FP}(\check{g}(t)) \int_{\check{g}} DX^M e^{-S_p[X, \check{g}]} \dots$$

↙ Faddeev-Popov

Estas 2 sutilezas se manifiestan de una manera específica en la descripción con fantasmas:

1) Notar que bajo $z \rightarrow z + \delta z(z, \bar{z})$, tenemos

$$\delta g_{\bar{z}\bar{z}} = 2 \check{\nabla}_{\bar{z}} \left(\check{g}_{\bar{z}z} \delta z + \check{g}_{\bar{z}\bar{z}} \delta \bar{z} \right), \text{ así que}$$

en la norma conforme $\check{g}_{ab} = e^{w(\sigma)} \delta_{ab}$ ($\leftrightarrow \check{g}_{\bar{z}\bar{z}} = 0$)

los vectores de Killing conformes satisfacen

$$\delta g_{\bar{z}\bar{z}} = 2 \check{g}_{\bar{z}z} \check{\nabla}_{\bar{z}} \delta z = e^w \partial_{\bar{z}} \delta z = 0, \text{ es decir,}$$

son vectores analíticos definidos globalmente, y por

tanto están en correspondencia uno a uno en los modos cero de $c(z)$ (para los cuales $S_f = \frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c = 0$).

(Esto es cierto en cualquier norma; el operador que reemplaza a $\bar{\partial}$ es $\check{\bar{\partial}}$, tal que

$$(\check{\bar{\partial}}_i \delta \sigma)_{ab} \equiv \frac{1}{2} \left(\check{\nabla}_a \delta \sigma_b + \check{\nabla}_b \delta \sigma_a - \check{g}_{ab} \check{\nabla}_c \delta \sigma^c \right)$$

— ver más adelante.)

2) Notar que $t_i \rightarrow t_i + \delta t_i$

$$\Rightarrow \check{g}_{ab} \rightarrow \check{g}_{ab} + \delta g_{ab}, \text{ con}$$

$$\delta g_{ab} \perp \delta \omega \check{g}_{ab}, \quad \check{\nabla}_a \delta \sigma_b + \check{\nabla}_b \delta \sigma_a \quad \forall \delta \omega(\sigma), \delta \sigma^a(\sigma)$$

Weyl difeo

donde la ortogonalidad se define en base en al producto interno natural para tensores con 2 índices (p. 262):

$$(\delta g, \delta g') \equiv \int d^2 \sigma \sqrt{\check{g}} \check{g}^{ab} \check{g}^{cd} \delta g_{ac} \delta g'_{bd}$$

En la norma conforme esto implica

$$\delta g_{z\bar{z}} = 0, \quad \check{\nabla}_{\bar{z}} \delta g_{zz} = \partial_{\bar{z}} \delta g_{zz} = 0,$$

cuyas soluciones están en correspondencia uno a uno con los modos cero de $b(z)$ ($S_f = -\frac{1}{2\pi} \int d^2 z \bar{\partial} b c$)

(Ciertamente en cualquier norma; el operador que asume el papel de $\partial_{\bar{z}}$ es \check{P}_1^+ — ver más adelante.)

- Problema: cuando existen modos cero de campos anticommutativos, la integral funcional da cero: desarrollando p.ej.

$$c(z, \bar{z}) = \sum_n c_n G^{(n)}(z, \bar{z})$$

↑
anticommutativo

conjunto completo de campos vectoriales (commutativos)

con $\bar{\partial} G^{(0)} = 0$, podemos ver que

$$\int \mathcal{D}c(z, \bar{z}) e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c} \simeq \int dc_0 e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} G^{(0)} c_0} = 0$$

$\equiv \prod_n dc_n$

p.271: $\int d0 = 0$

Para obtener un resultado $\neq 0$ se requiere de la inserción de un factor de c (en cualquier punto)

$$\int \mathcal{D}c(z, \bar{z}) c(z', \bar{z}') e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c} \simeq \int dc_0 c_0 \neq 0$$

↑

- Solución: de hecho, Faddeev-Popov dará las inserciones necesarias...

Nos interesa entonces calcular la determinante de Faddeev-Popov

$$\frac{\int \mathcal{D}g_{ab}(\sigma) \mathcal{D}X^{\mu}(\sigma)}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} e^{-S_P[X, g]} \prod_{j=1}^N N_j \int d^2\sigma_j \sqrt{g} V_j(\sigma_j; k_j)$$

$$= \int d^M t \Delta_{FP}(\check{g}(t); \check{\sigma}) \int \mathcal{D}X^{\mu}(\sigma) e^{-S_P[X, \check{g}]} \prod_{j=1}^{K/2} N_j \sqrt{\check{g}} V_j(\check{\sigma}_j)$$

definida a través de $\prod_{j=K/2+1}^N N_j \int d^2\sigma_j \sqrt{g} V_j(\sigma_j)$

$$1 = \underbrace{\int d^M t \int \mathcal{D}\xi^a(\sigma) \mathcal{D}\omega(\sigma)}_{\text{Necesarios para cubrir todas las métricas}} \underbrace{\delta(g_{ab}^{\xi, \omega} - \check{g}_{ab}(\sigma)) \delta(\sigma_j^{\xi^a} - \check{\sigma}_j^a)}_{\text{Necesarios para eliminar GKC}} \underbrace{\left| \frac{\partial(g_{ab}^{\xi, \omega, t}, \xi^a)}{\partial(\xi, \omega, t)} \right|}_{= \Delta_{FP}(\check{g}(t), \check{\sigma})}$$

Por las deltas de Dirac, necesitamos al jacobiano solo sobre la condición de norma, así que podemos restringir nuestra atención a una transformación infinitesimal

$$g_{ab}^{\xi, \omega, \delta t}(\sigma) = \check{g}_{ab}(\sigma) + \delta g_{ab}(\sigma) \quad (\Rightarrow \Delta_{FP} \text{ es independiente de } \xi^a \equiv \delta\sigma^a, \delta\omega, \delta t)$$

$$\sigma_j^{\xi^a} = \check{\sigma}_j^a + \delta\sigma^a(\check{\sigma}_j)$$

Utilizaremos la descomposición ortogonal

$$\begin{aligned} \delta g_{ab} &= \delta \omega \check{g}_{ab} + \check{\nabla}_a \delta \sigma_b + \check{\nabla}_b \delta \sigma_a + \delta t^i \partial_t \check{g}_{ab}(t) \\ &= (\delta \omega + \check{\nabla}_c \delta \sigma^c) \check{g}_{ab} + \underbrace{\check{\nabla}_a \delta \sigma_b + \check{\nabla}_b \delta \sigma_a - \check{g}_{ab} \check{\nabla}_c \delta \sigma^c}_{\equiv (\check{P}_i \delta \sigma)_{ab}} + \delta t_i \frac{\partial \check{g}_{ab}}{\partial t_i}. \end{aligned} \quad (*)$$

Tenemos

$$\Delta_{FP}^{-1}(\check{g}, \check{\sigma}) = \int d^M(\delta t) \mathcal{D}(\delta \sigma^a) \mathcal{D}(\delta \omega) \delta^{(\infty)}(\delta g_{ab}) \delta^{(K)}(\delta \sigma^a(\check{\sigma}_j))$$

(porque el jacobiano en una variedad coincide con el jacobiano en el espacio tangente), es decir,

$$\begin{aligned} \Delta_{FP}^{-1}(\check{g}, \check{\sigma}) &= \int d^M(\delta t) \mathcal{D}(\delta \sigma^a) \mathcal{D}(\delta \omega) \overbrace{\mathcal{D}\beta^{ab}}^{\text{variables auxiliares}} d^K s \exp[2\pi i s_j^a \delta \sigma^a(\check{\sigma}_j)] \\ &\quad \exp\left[2\pi i \int d^2\sigma \sqrt{\check{g}} \beta^{ab} \left\{ (\delta \omega + \check{\nabla}_c \delta \sigma^c) \check{g}_{ab} + (\check{P}_i \delta \sigma)_{ab} + \delta t_i \frac{\partial \check{g}_{ab}}{\partial t_i} \right\} \right]. \end{aligned}$$

usando (*) para δg_{ab}

La integral sobre $\delta \omega(\sigma)$ simplemente restringe

$\mathcal{D}\beta^{ab}(\sigma) \rightarrow \mathcal{D}\beta'^{ab}(\sigma)$, de modo que podemos escribir

$\hookrightarrow \equiv$ tensores simétricos sin traza

$$\Delta_{FP}^{-1} = \int \mathcal{D}^M(\delta t) \mathcal{D}(\delta \sigma) \mathcal{D}\beta'_{ab} \int \mathcal{D}^K s \exp[2\pi i s_j^a \delta \sigma^a(\check{\sigma}_j)]$$

$$\exp\left[2\pi i \left(\beta'_{ab}, \check{p}_i^b \delta \sigma + \delta t_i \frac{\partial \check{g}}{\partial t_i}\right)\right]$$

producto interno definido en la p. 363

Ahora podemos invertir la integral del lado derecho (\det^{-1}) reemplazando variables bosónicas por fermiónicas:

$$\delta \sigma^a \rightarrow c^a, \quad \beta'_{ab} \rightarrow \frac{i}{8\pi} b_{ab}, \quad s_j^a \rightarrow \frac{i}{2\pi} \gamma_j^a, \quad \delta t_i \rightarrow \lambda_i \Rightarrow$$

$$\Delta_{FP}(\check{g}, \check{\sigma}) = \int \mathcal{D}b_{ab} \mathcal{D}c^a \int \lambda \int \mathcal{D}^K \gamma \exp[-\gamma_j^d c^d(\check{\sigma}_j)]$$

$$\exp\left[-\frac{1}{4\pi} (b, \check{p}_i^b c) - \frac{1}{4\pi} (b, \lambda_i \frac{\partial \check{g}}{\partial t_i})\right]$$

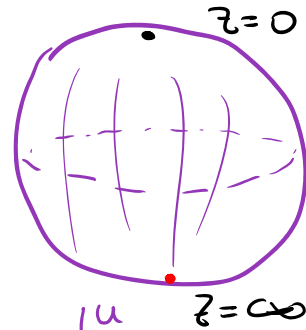
$$\equiv S_f[b, c, \check{g}]$$

Integrando sobre λ y γ , obtenemos finalmente

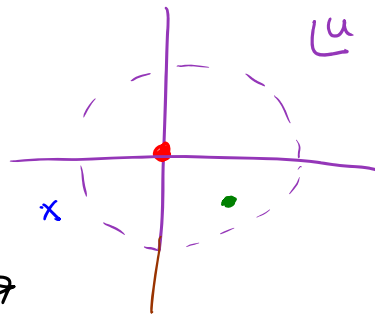
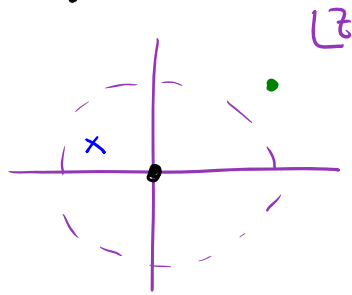
$$\Delta_{FP}(\check{g}, \check{\sigma}) = \int \mathcal{D}b_{ab} \mathcal{D}_g c^a e^{-S_f[b, c, \check{g}]} \prod_{i=1}^M \frac{1}{4\pi} (b, \frac{\partial \check{g}}{\partial t_i}) \prod_{j,d} c^d(\check{\sigma}_j)$$

Amplitudes de Cuerda Cerrada a Nivel Árbol

Esfera $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



2 regiones de coordenadas:



$u = \frac{1}{z}$ función de transición

• S^2 como variedad Riemanniana: métrica

global en norma conforme

$u = \frac{1}{z}$ es un difeo

$$g_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) \longleftrightarrow g_{u\bar{u}}(u, \bar{u}) = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{u}} g_{z\bar{z}}(z, \bar{z}) = |z|^4 g_{z\bar{z}}(z, \bar{z})$$

P.ej., métrica usual $g_{z\bar{z}} = \frac{2r^2}{(1+r^2)^2} \longleftrightarrow g_{u\bar{u}} = \frac{2r^2}{(1+|u|^2)^2}$ bien definida en $u=0$. ✓

• S^2 como variedad compleja: métrica plana

en cada región $g_{z\bar{z}} = \frac{1}{z\bar{z}} = g_{u\bar{u}}$, interpretando a

$u = \frac{1}{z}$ como una transformación conforme.

• ¿Módulos? $\delta g_{z\bar{z}}$ tal que $\partial_{\bar{z}} \delta g_{z\bar{z}} = 0$, definidos globalmente:

$$\delta g_{u\bar{u}} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \delta g_{z\bar{z}} = \underbrace{z^4}_{\leq z^{-4}} \delta g_{z\bar{z}} \text{ finito aún cuando } z \rightarrow \infty$$

+ analiticidad $\Rightarrow \delta g_{z\bar{z}} = 0 \quad \forall z$

Así que NO hay módulos (todas las métricas son equivalentes bajo $\text{Dif} \times \text{Weyl}$) $M=0$

• ¿Vectores de Killing conformes?

δz tal que $\partial_{\bar{z}} \delta z = 0$, definidos globalmente:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial z} \delta z = -z^{-2} \delta z \text{ finito aún cuando } z \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \delta z = \epsilon_0 + \epsilon_1 z + \epsilon_2 z^2 \quad (\Leftrightarrow L_{-1}, L_0, L_1)$$

\therefore $K=6$ (Riemann-Roch: $K-M=3\chi$ ✓)

Version finita: $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in (\mathbb{P})SL(2, \mathbb{C}) = \text{GKC}$

Grupo lineal fraccionario o de Möbius
 \hookrightarrow infinitesimal si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\epsilon_1}{2} & \epsilon_0 \\ -\epsilon_2 & 1 - \frac{\epsilon_1}{2} \end{pmatrix}$

Consideremos la amplitud de dispersión de N taquiones.

Usando el vértice $V_{\phi}(k) = N_{\phi} \int d^2z : e^{ik \cdot X(z, \bar{z})} :$

con $N_{\phi} \equiv g_c N$, sabemos que la amplitud involucra

$$e^{-2\Phi_0} (g_c N)^N \frac{1}{\text{GKC}} \int d^2z_1 \cdots d^2z_N \left\langle : e^{ik_1 \cdot X(z_1, \bar{z}_1)} : \cdots : e^{ik_N \cdot X(z_N, \bar{z}_N)} : \right\rangle_{S^2}^X$$

donde $\langle \cdots \rangle_{S^2}^X \equiv \int \mathcal{D}X^{\mu}(z, \bar{z})_{S^2} e^{-\frac{1}{2} \int d^2z X \cdot \Delta_z X} \cdots$

con $\Delta_z \equiv -\frac{1}{\pi \alpha'} \partial \bar{\partial}$

Notar que si separamos $X^{\mu}(z, \bar{z}) = X^{\mu} + \underline{X}^{\mu}(z, \bar{z})$,
↖ modo constante

de manera que $\mathcal{D}X^{\mu} = d^D x \mathcal{D}\underline{X}^{\mu}$, encontramos que

las amplitudes siempre incluirán

$$\int d^D x e^{i(k_1 + k_2 + \cdots + k_N) \cdot x} = (2\pi)^D \delta^{(D)}(k_1 + k_2 + \cdots + k_N),$$

Como Dios manda. No escribiremos este factor explícitamente de aquí en adelante ($\neq M$).

Conocemos el propagador (p. 195)

$$\langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \rangle = \underbrace{-\frac{\alpha'}{2} \ln |z - z'|^2}_{\Delta^{-1}(z, z')} \eta^{\mu\nu} \langle 1 \rangle,$$

así que podemos calcular

$$\begin{aligned} \left\langle : e^{ik_1 X(z_1, \bar{z}_1)} : \dots : e^{ik_2 X(z_2, \bar{z}_2)} : \dots : e^{ik_N X(z_N, \bar{z}_N)} : \right\rangle_S^X \\ = \prod_{i < j} e^{i^2 k_i \cdot k_j \left[-\frac{\alpha'}{2} \ln |z_i - z_j|^2 \right]} \left\langle : \prod_{j=1}^N e^{ik_j X(z_j, \bar{z}_j)} : \right\rangle_S^X \\ \underbrace{\quad}_{|z_i - z_j|^{-\alpha' k_i \cdot k_j}} \quad \underbrace{\quad}_{\langle 1 \rangle_S^X} \end{aligned}$$

(Alternativamente: sabemos que completando el cuadrado

$$\left\langle e^{\int d^2z J(z) \cdot X(z)} \right\rangle_S^X = e^{\frac{1}{2} \int d^2z \int d^2z' J(z) \cdot \Delta^{-1}(z, z') J(z')} \langle 1 \rangle_S^X$$

y nos interesa aquí el caso $J(z, \bar{z}) \equiv i \sum_{j=1}^N k_j^\mu \delta^{(2)}(z - z_j)$

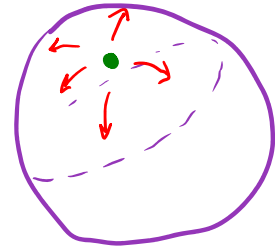
— con autocontracciones eliminadas por el orden normal.)

NOTA: Recordar que $\Delta^{-1}(z, z') = -\frac{\alpha'}{2} \ln|z-z'|^2$

es por definición la función de Green que satisface

$$\Delta_z \tilde{\Delta}(z, z') = \delta^{(2)}(z-z')$$

$$\underbrace{-\frac{1}{\pi \alpha'}}_{\partial \bar{\partial}}$$



y se le puede por tanto interpretar como el potencial electrostático asociado a una carga puntual.

PERO, ahora que nuestra hoja de mundo es compacta, no podemos tener una carga aislada: la ley de Gauss implica que la carga total debe ser cero.

En la construcción usual de la función de Green,

$$G(\sigma, \sigma') = \sum_{\mathbf{I}} \frac{f_{\mathbf{I}}(\sigma) f_{\mathbf{I}}(\sigma')}{\lambda_{\mathbf{I}}},$$

$$\text{con } \Delta_{\sigma} f_{\mathbf{I}}(\sigma) = \lambda_{\mathbf{I}} f_{\mathbf{I}}(\sigma), \quad \int d^2\sigma \sqrt{g} f_{\mathbf{I}} f_{\mathbf{J}} = \delta_{\mathbf{IJ}},$$

claramente debemos excluir el modo cero

$$f_0(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\int d^2\sigma \sqrt{g}}} \quad (\text{que es } \underline{\text{ahora}} \text{ normalizable}),$$

porque $\lambda_0 = 0$. La función de Green resultante \underline{G} satisface entonces $\Delta_\sigma \underline{G}(\sigma, \sigma') = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta^{(2)}(\sigma - \sigma') - \frac{1}{\int d^2\sigma \sqrt{g}}$.

El término adicional se puede interpretar como una distribución de carga uniforme que neutraliza a la carga puntual.

En la esfera, la solución a esta ecuación es del tipo

$$\underline{G}(z, z') = -\frac{\alpha'}{2} \ln |z - z'|^2 + F(z, \bar{z}) + F(z', \bar{z}'),$$

pero felizmente se puede mostrar que los términos adicionales no contribuyen a las funciones de correlación, por conservación de momento (ver Polchinski pp. 170-172).

L

Notar que $I \equiv \int d^2 z_1 \dots d^2 z_N \prod_{i < j} |z_i - z_j|^{\alpha' k_i \cdot k_j}$

es, como prometimos, invariante bajo $SL(2, \mathbb{C})$:

$$z \rightarrow z' = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow d^2 z = \frac{d^2 z'}{|a-cz'|^4}, \quad z_i - z_j = \frac{z'_i - z'_j}{(a-cz'_i)(a-cz'_j)},$$

así que

$$I = \int \frac{d^2 z'_1 \dots d^2 z'_N}{\prod_i |a-cz'_i|^4} \prod_{i < j} \frac{|z'_i - z'_j|^{\alpha' k_i \cdot k_j}}{|a-cz'_i|^{\alpha' k_i \cdot k_j} |a-cz'_j|^{\alpha' k_i \cdot k_j}}$$

Los factores adicionales que involucran p.ej. a z'_i son

$$|a-cz'_i|^{-4 - \underbrace{\alpha' k_i \cdot (k_2 + \dots + k_N)}_{=-k_i}} = |a-cz'_i|^{-4 + \underbrace{\alpha' k_i^2}_{=0}} = 1,$$

por conservación de momento

condición de capa de masa para taquión ✓

de modo que $I = I'$; como esperábamos, tenemos invariancia bajo el grupo de simetría residual, GLC .

(Pero notar, como en la p. 325, que este requisito nos impide calcular amplitudes fuera de la capa de masa.)

Dados 3 puntos fijos $\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3$, existe una transformación $SL(2, \mathbb{C})$ única que mapea

$$\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} z_1, z_2, z_3$$

así que (en el caso $N \geq 3$) podemos reinterpretar

$$\int d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_3 = \int d(\text{GKC}) \underbrace{\omega(\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3)}_{\text{"Faddeev-Popov" (Jacobiano)}}$$

Si integramos sobre todas las z_j ($j=1, \dots, N$), estaríamos entonces contando cada configuración física un número infinito de veces, obteniendo un resultado $\propto \int d(\text{GKC}) = \infty$.

Así que, como ya habíamos visto antes, lo que debemos hacer es fijar $z_1 = \check{z}_1, z_2 = \check{z}_2, z_3 = \check{z}_3$, para eliminar la redundancia por completo, y poder cancelar $\frac{1}{\text{GKC}}$ contra $\int d(\text{GKC})$.

(Notar que esto implica que las amplitudes con $N \leq 2$ dan como resultado cero, como debería ser el caso para $M \propto T$ a nivel árbol: no hay energía del vacío

• ni "renacuajo" $\leftarrow N=0$, ni corrección al propagador $\leftarrow N=2$.)

Debemos ahora determinar el jacobiano $\mu(\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3)$:

dad que para $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\epsilon_1}{2} & \epsilon_0 \\ -\epsilon_2 & 1 - \frac{\epsilon_1}{2} \end{pmatrix}$ tenemos

$$\check{z}_i \rightarrow z_i = \check{z}_i + \delta z_i \quad \text{con} \quad \delta z_i = \epsilon_0 + \epsilon_1 \check{z}_i + \epsilon_2 \check{z}_i^2,$$

veamos que

$$d^2(\delta z_1) d^2(\delta z_2) d^2(\delta z_3) = d^2 \epsilon_0 d^2 \epsilon_1 d^2 \epsilon_2 \underbrace{\left| \det \left(\frac{\partial(\delta z_1, \delta z_2, \delta z_3)}{\partial(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2)} \right) \right|^2}_{d^2(\delta b) \cdot d^2(\delta a) \cdot d^2(\delta c)} \underbrace{\left| \det \begin{pmatrix} 1 & \check{z}_1 & \check{z}_1^2 \\ 1 & \check{z}_2 & \check{z}_2^2 \\ 1 & \check{z}_3 & \check{z}_3^2 \end{pmatrix} \right|^2}_{\left| (\check{z}_1 - \check{z}_2)(\check{z}_1 - \check{z}_3)(\check{z}_2 - \check{z}_3) \right|^2},$$

de donde

$$d^2 z_1 d^2 z_2 d^2 z_3 = d(\text{GKC}) \left| \check{z}_1 - \check{z}_2 \right|^2 \left| \check{z}_1 - \check{z}_3 \right|^2 \left| \check{z}_2 - \check{z}_3 \right|^2.$$

(Hemos usado aquí nuevamente el hecho de que el jacobiano en una variedad coincide con el jacobiano en su espacio tangente ; es fácil verificar que

$$z_i = \frac{a\check{z}_i + b}{c\check{z}_i + \frac{1+bc}{a}} \Rightarrow \det \left(\frac{\partial(z_1, z_2, z_3)}{\partial(a, b, c)} \right) = \frac{-2(\check{z}_1 - \check{z}_2)(\check{z}_1 - \check{z}_3)(\check{z}_2 - \check{z}_3)}{a(c\check{z}_1 + d)^2 (c\check{z}_2 + d)^2 (c\check{z}_3 + d)^2} ,$$

que efectivamente coincide con el resultado

anterior en el punto $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓)

Hemos mostrado entonces explícitamente que

$$\frac{1}{6Kc} \mathbb{I} = \int d^2\check{z}_1 \cdots d^2\check{z}_4 |\check{z}_1 - \check{z}_2|^2 |\check{z}_1 - \check{z}_3|^2 |\check{z}_2 - \check{z}_3|^2 \prod_{i < j} |z_i - z_j| \alpha'^{k_i \cdot k_j}$$

Y este es justamente el resultado que se obtiene a partir

de nuestra fórmula general con fantasmas (p. 367) :

usando los vértices fixos : $c\tilde{c} e^{ik_i \cdot X}(\check{z}_i, \check{z}_i) : i=1,2,3,$

la amplitud incluye

$$\left\langle c(\check{z}_1) c(\check{z}_2) c(\check{z}_3) \right\rangle_{S^2}^{b,c} \left\langle \tilde{c}(\check{z}_1) \tilde{c}(\check{z}_2) \tilde{c}(\check{z}_3) \right\rangle_{S^2}^{\bar{b}, \bar{c}} ,$$

que da resultado $\neq 0$ solo gracias a la contribución de los modos cero (\leftrightarrow vectores de Killing conformes):

$$\begin{aligned} \langle c(\check{z}_1) c(\check{z}_2) c(\check{z}_3) \rangle_{S^2}^{b,c} &\equiv \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c} c(\check{z}_1) c(\check{z}_2) c(\check{z}_3) \\ &\propto \int dc_0 dc_1 dc_2 (c_0 + c_1 \check{z}_1 + c_2 \check{z}_1^2 + \dots) (c_0 + c_1 \check{z}_2 + c_2 \check{z}_2^2 + \dots) (c_0 + c_1 \check{z}_3 + c_2 \check{z}_3^2 + \dots) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & \check{z}_1 & \check{z}_1^2 \\ 1 & \check{z}_2 & \check{z}_2^2 \\ 1 & \check{z}_3 & \check{z}_3^2 \end{pmatrix} = -(\check{z}_1 - \check{z}_2)(\check{z}_1 - \check{z}_3)(\check{z}_2 - \check{z}_3) \quad \checkmark \end{aligned}$$

- Amplitud de 3 puntos:

$$\frac{1}{G_{\text{NC}}} \mathcal{I} = |\check{z}_1 - \check{z}_2|^{2 + \alpha' k_1 \cdot k_2} |\check{z}_1 - \check{z}_3|^{2 + \alpha' k_1 \cdot k_3} |\check{z}_2 - \check{z}_3|^{2 + \alpha' k_2 \cdot k_3},$$

y usando $\alpha' k_i \cdot k_j = \frac{\alpha'}{2} \left[\underbrace{(k_i + k_j)^2}_{k_3^2} - k_i^2 - k_j^2 \right] = -2$ \uparrow capa de masa

(y lo mismo para $\alpha' k_i \cdot k_3$ y $\alpha' k_2 \cdot k_3$) tenemos

$$\frac{1}{G_{\text{NC}}} \mathcal{I} = 1 \quad (\text{independiente de } \check{z}_i \quad \checkmark), \text{ así que}$$

$$\mathcal{M}_{S^2}^{\phi\phi\phi}(k_1, k_2, k_3) = \underbrace{(g_c N)^3}_{\propto g_c} e^{-2\Phi_0} \underbrace{\langle 1 \rangle_{S^2}^{x, b, c, \tilde{b}, \tilde{c}}}_{\text{determinantes}} \sim g_c.$$

$S = 1 + i(2\pi) \delta^{(D)}(k) \mathcal{M}$
 \downarrow
 T

- Amplitud de 4 puntos:

$$\frac{1}{G_{KC}} I = |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2|^{2+\alpha' k_1 \cdot k_2} |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_3|^{2+\alpha' k_1 \cdot k_3} |\tilde{z}_2 - \tilde{z}_3|^{2+\alpha' k_2 \cdot k_3} \int d^2 \tilde{z}_4 |\tilde{z}_1 - \tilde{z}_4|^{-\alpha' k_1 \cdot k_4} |\tilde{z}_2 - \tilde{z}_4|^{-\alpha' k_2 \cdot k_4} |\tilde{z}_3 - \tilde{z}_4|^{-\alpha' k_3 \cdot k_4}$$

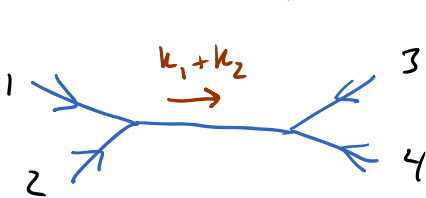
Por simplicidad, tomaremos $\tilde{z}_1 \rightarrow \infty, \tilde{z}_2 = 1, \tilde{z}_3 = 0$.

Factores con $\tilde{z}_1 \rightarrow \infty \rightarrow |\tilde{z}_1|^{4+\alpha' k_1 \cdot (k_2+k_3+k_4)} = |\tilde{z}_1|^{4-\alpha' k_1^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{G_{KC}} I = \int d^2 \tilde{z}_4 |\tilde{z}_4 - 0|^{-\alpha' k_3 \cdot k_4} |\tilde{z}_4 - 1|^{-\alpha' k_2 \cdot k_4}$$

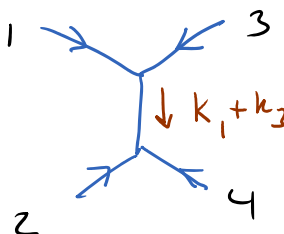
Conviene reescribir en términos de las variables de Mandelstam (invariantes cinemáticas)

$$s \equiv -\alpha' (k_1 + k_2)^2$$



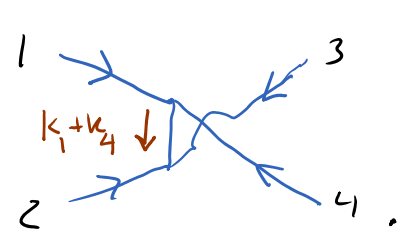
Energía total en el marco del centro de masa

$$t \equiv -\alpha' (k_1 + k_3)^2$$



Transferencia de momento

$$u \equiv -\alpha' (k_1 + k_4)^2$$



Notar que $s+t+u = 4\alpha' m^2 = -16$, y además

$$S = -\alpha'(k_3^2 + 2k_3 \cdot k_4 + k_4^2) = -2\alpha' k_3 \cdot k_4 - 8,$$

$$t = -\alpha'(k_2^2 + 2k_2 \cdot k_4 + k_4^2) = -2\alpha' k_2 \cdot k_4 - 8,$$

así que en términos de $z_4 = r e^{i\alpha}$ tenemos

$$\frac{1}{G_{Kc}} \mathbb{I} = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\infty 2r dr r^{-\frac{s}{2}-4} (1+r^2-2r\cos\alpha)^{-\frac{t}{4}-2}$$

Notar que en la región $r \rightarrow 0$ ($z_4 \rightarrow z_3$) tenemos

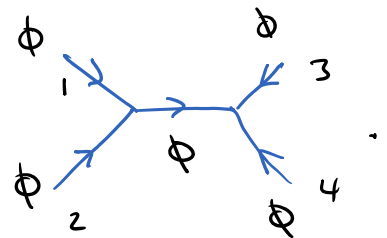
$$\int_0^\infty dr r^{-\frac{s}{2}-3} (1 + \mathcal{O}(r^2)) = \frac{r^{-\frac{s}{2}-2}}{-\frac{s}{2}-2} \Big|_0 + \dots,$$

que es convergente solo si $s < -4$. Vemos entonces que

$$M_{s^2}^{\phi\phi\phi\phi}(s,t) \propto -\frac{2}{s+4} + \text{términos analíticos en } s=-4$$

L14:07/05/13

polo simple en $s=-4$: taquión



La integral diverge $\forall s \geq -4$, pero la amplitud física tiene solo un polo simple en $s=-4$, \therefore se puede definir por continuación analítica en la variable s .

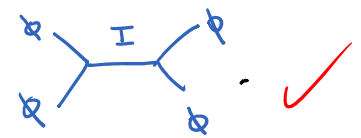
De hecho, $\forall s, t, u < -4$ tenemos (ver GSW p.387)

$$\int d^2z |z|^{-\frac{s}{2}-4} |1-z|^{-\frac{t}{2}-4} = 2\pi \frac{\Gamma(-\frac{s}{4}-1) \Gamma(-\frac{t}{4}-1) \Gamma(-\frac{u}{4}-1)}{\Gamma(-\frac{s}{4}-\frac{t}{4}-2) \Gamma(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2) \Gamma(-\frac{u}{4}-\frac{s}{4}-2)}$$

función gamma de Euler \rightarrow

El lado derecho está bien definido fuera de la región $s, t, u < -4$, y contiene solo polos simples en

$$\left. \begin{aligned} s &= -4, 0, 4, 8, \dots \\ t &= -4, 0, 4, 8, \dots \\ u &= -4, 0, 4, 8, \dots \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \text{espectro de cuerda cerrada libre, tal como esperamos a nivel árbol}$$



Esta es entonces la amplitud física. El origen de los polos se puede entender usando la EPO:

$$\mathcal{M}^{\phi\phi\phi\phi} \propto \int d^2z_4 \left\langle :e^{ik_1 \cdot X(\infty)} : :e^{ik_2 \cdot X(1)} : :e^{ik_3 \cdot X(0)} : :e^{ik_4 \cdot X(z_4)} : \right\rangle_X$$

$$\underbrace{\left\langle :e^{ik_3 \cdot X(0)} : :e^{ik_4 \cdot X(z_4)} : \right\rangle_X}_{|z_4=0|} = e^{-ik_3 \cdot k_4} e^{ik_3 \cdot X(0)} e^{ik_4 \cdot X(z_4)}$$

$$:e^{i(k_3+k_4) \cdot X(0)} : + \frac{1}{2} |z_4|^2 (-k_{4\mu} k_{4\nu}) : \partial X^\mu \partial X^\nu e^{i(k_3+k_4) \cdot X(0)} : + \dots$$

\downarrow polo en $s = -4$: taquión (como ya vimos)
 \downarrow polo en $s = 0$: gravitón/dilatón

$$\Gamma\left(-\frac{s}{4}-1\right) \rightarrow \frac{4}{\alpha'} \frac{1}{(k_1+k_2)^2 - \frac{4}{\alpha'}}$$

$$\text{y } \Gamma\left(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2\right) \rightarrow 1,$$

de modo que el requisito es que

$$(g_c N)^4 e^{-2\Phi_0} < 1 \quad \frac{8\pi}{\alpha'} = \left[(g_c N)^3 e^{-2\Phi_0} < 1 \right]^2$$

$$\Rightarrow e^{-2\Phi_0} < 1 \Big|_{S^2}^{x, y, z, \tilde{c}} = \frac{8\pi}{\alpha' (g_c N)^2}.$$

Usando esto, concluimos finalmente que

$$\mathcal{M}_{S^2}^{\phi\phi\phi}(k_1, k_2, k_3) = \frac{8\pi g_c N}{\alpha'} \quad \text{y}$$

$$\mathcal{M}_{S^2}^{\phi\phi\phi\phi}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{16\pi^2 (g_c N)^2}{\alpha'} \frac{\Gamma\left(-\frac{s}{4}-1\right)\Gamma\left(-\frac{t}{4}-1\right)\Gamma\left(-\frac{u}{4}-1\right)}{\Gamma\left(-\frac{s}{4}-\frac{t}{4}-2\right)\Gamma\left(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2\right)\Gamma\left(-\frac{s}{4}-\frac{u}{4}-2\right)}$$

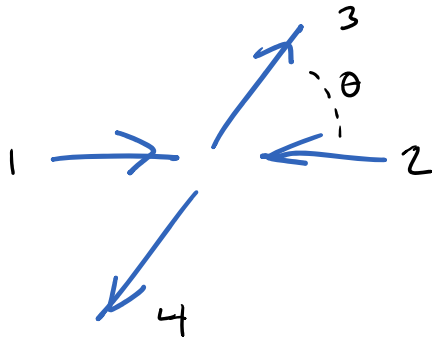
Esta última se conoce como la amplitud de Shapiro-Virasoro

El resultado análogo para cuerdas abiertas es la amplitud

de Veneziano $\mathcal{M}_{D^2}^{\phi\phi\phi\phi} \sim \frac{\Gamma(-1-s)\Gamma(-1-t)}{\Gamma(-2-s-t)}$, que históricamente

condujo al descubrimiento de la teoría de cuerdas.

En el marco del centro de masa,



$$s = \alpha' E^2,$$

$$\frac{t}{s} = \left(\frac{4m^2}{E^2} - 1 \right) \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\frac{u}{s} = \left(\frac{4m^2}{E^2} - 1 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad \left(m^2 = -\frac{4}{\alpha'} \right).$$

En un experimento de dispersión dura, $E \rightarrow \infty$ con θ fijo,

es decir, $s \rightarrow \infty$ con $\frac{t}{s}$ (y $\therefore \frac{u}{s}$) fijo, usando la

fórmula de Stirling $\Gamma(x) \sim x^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-x} = \sqrt{2\pi} e^{x \ln x - x - \frac{1}{2} \ln x}$,
↑

encontramos que la amplitud se comporta como

$$\mathcal{M}_{\phi\phi\phi\phi}(s, t) \sim e^{-sf(\theta)} \quad f(\theta) \approx -\sin^2 \frac{\theta}{2} \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \ln \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

muy suprimida con respecto al resultado en teoría de campos

(\leftrightarrow objetos puntuales), $\mathcal{M}(s \rightarrow \infty, t \propto s) \sim s^{-p}$.

Históricamente, también tiene importancia el límite de Regge

$$\mathcal{M}_{\phi\phi\phi\phi}(s \rightarrow \infty, t \text{ fijo}) \sim s^{2\alpha(t)} \frac{\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(1+\alpha(t))} \quad \alpha(t) \equiv \frac{t}{4} + 1.$$

$E \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0$

Otras amplitudes tienen una estructura similar.

Por ej., usando el vértice del gravitón (/dilatón/antisimetrícón)

$$V_h(\varepsilon; k) = g_c N \left(\frac{2}{\alpha'} \right) \int d^2z \varepsilon_{\mu\nu} : \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ik \cdot X} :$$

podemos calcular \leftarrow por mapeo estado \leftrightarrow operador
 misma cte. que en V_ϕ

$$M_{S^2}^{h\phi\phi}(k_1, \varepsilon; k_2, k_3) = \left(g_c N \frac{2}{\alpha'} \right) \left(g_c N \right)^2 e^{-2\Phi_0} |\check{z}_1 - \check{z}_2|^2 |\check{z}_1 - \check{z}_3|^2 |\check{z}_2 - \check{z}_3|^2$$

$$\varepsilon_{\mu\nu} \left\langle : \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ik_1 \cdot X(\check{z}_1)} : : e^{ik_2 \cdot X(\check{z}_2)} : : e^{ik_3 \cdot X(\check{z}_3)} : \right\rangle_{S^2}$$

factores adicionales de momento (y $\frac{1}{\alpha'}$)

$$M_{S^2}^{h\phi\phi}(k_1, \varepsilon; k_2, k_3) = -\pi g_c N \varepsilon_{\mu\nu} (k_2 - k_3)^\mu (k_2 - k_3)^\nu$$

(Se puede verificar que esto satisface la condición de unitariedad)

$$2\text{Im} \left(\text{Diagram 1} \right) = \left(\text{Diagram 2} \right) 2\pi \delta(k_h^2) \left(\text{Diagram 3} \right)$$

De manera similar (tarea 5)

$$M_{S^2}^{hhh}(k_1, \varepsilon_1; k_2, \varepsilon_2; k_3, \varepsilon_3) = \pi g_c N \varepsilon_{1\mu\nu\rho} \varepsilon_{2\nu\rho'} \varepsilon_{3\rho\rho'} t^{\mu\nu\rho} t^{\rho'\nu'\rho'}$$

con $t^{\mu\nu\rho} \equiv (k_2 - k_3)^\mu \eta^{\nu\rho} + (k_3 - k_1)^\nu \eta^{\rho\mu} + (k_1 - k_2)^\rho \eta^{\mu\nu} + \frac{2}{8} (k_2 - k_3)^\mu (k_3 - k_1)^\nu (k_1 - k_2)^\rho$

Notar que

$$\mathcal{M}^{hhh} \sim g_c \mathcal{N} \left[\underset{\uparrow}{k^2} + \underbrace{\alpha' k^4 + \alpha'^2 k^6}_{\text{despreciables a bajas energías,}} \right]$$

término de 2 derivadas
en acción espaciotemporal
para $h_{\mu\nu}(x)$

$$|k| \ll m_c \equiv \ell_c^{-1}$$

En más detalle, las amplitudes trigráfon-gravitón $\phi\phi\phi$, $h\phi\phi$ y $h h h$ que hemos calculado coinciden con las que se obtendrían con las reglas de Feynman habituales a partir de la acción efectiva en el espaciotiempo

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}}[\phi, h] = \int d^26 x \left\{ & -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{\alpha'} \right) \phi^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu h_{\nu\lambda} \partial^\mu h^{\nu\lambda} \right. \\ & - \frac{1}{3!} \left(\frac{8\pi}{\alpha'} g_c \mathcal{N} \right) \phi^3 + 2\pi g_c \mathcal{N} h^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\ & - 4\pi g_c \mathcal{N} \left[-\frac{1}{2} \partial^\mu h^{\nu\lambda} \partial^\rho h_{\nu\lambda} h_{\mu\rho} \right. \\ & + \partial^\mu h^{\nu\lambda} \partial_\nu h_{\lambda}{}^\rho h_{\mu\rho} \\ & \left. \left. - \partial^\mu h^{\nu\lambda} \partial_\mu h_{\nu}{}^\rho h_{\lambda\rho} + \mathcal{O}(\alpha') \right] \right\} \end{aligned}$$

que de hecho coincide a su vez con lo que se obtiene al desarrollar a orden cúbico la acción

$$S'_{\text{ef}}[\Phi, g] = \int d^{26}x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{\alpha'}\right) \Phi^2 - \frac{2K}{3\alpha'} \Phi^3 - \frac{1}{2K^2} R + \mathcal{O}(\alpha') \right\},$$

↙ Einstein-Hilbert !!

donde $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + 2K h_{\mu\nu}(x)$ campos canónicamente normalizados y estamos trabajando en la norma $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$, $h^\lambda{}_\lambda = 0$.

Además hemos reconocido a $K \equiv 2\pi g_c N$

como la constante gravitacional usual, $2K^2 \equiv 16\pi G_N$.

Notando que $[K^2] = L^{D-2}$ ($\stackrel{D=26}{\Rightarrow} l_p \sim g_c^{1/12} l_c$),

definimos N tal que $2K^2 = (2\pi)^{23} g_c^2 l_c^{24}$

Para obtener gravedad en 3+1 dim, podemos suponer que las 22 dimensiones adicionales son compactas y pequeñas:

$$\frac{1}{2K_{(26)}^2} \int d^{26}x \sqrt{-g} R = \frac{V_{22}}{2K_{(26)}^2} \int d^4x \underbrace{\sqrt{-g^{(4)}} R^{(4)}}_{\text{modo de KK constante}} + \dots \quad \Rightarrow \quad K_{(4)}^2 \equiv \frac{K_{(26)}^2}{V_{22}}.$$

los términos de $\mathcal{O}(\alpha'^4 k^4)$ y $\mathcal{O}(\alpha'^2 k^6)$ en \mathcal{M}^{hh} codifican correcciones específicas a la relatividad general, del tipo $\sim \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}x \sqrt{-g} (\alpha' R^2 + \alpha'^2 R^3)$.

↖ en diversas contracciones de índices

Al calcular amplitudes con $N \geq 4$ gravitones, se reproducen uno por uno los términos de $\mathcal{O}(h^N)$ en $\frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}x \sqrt{-g} R$,

más correcciones adicionales del tipo $\frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}x \sqrt{-g} \alpha'^{N-1} R^N$

Todas estas correcciones son despreciables a bajas energías y curvaturas. !! Así que en verdad cuerdas \Rightarrow relatividad general !!

De manera similar, es posible calcular los acoplamientos $h\varphi\varphi$, hBB , $\varphi\varphi\varphi$, etc. La acción que resume las interacciones de los campos no masivos entre sí resulta ser

$$S_{\text{ef}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g_E} \left\{ R_E - \frac{4}{D-2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{12} e^{-\Phi/D-2} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$

↖ lo para la supercuerda

(con $D=26$), donde $H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\mu B_{\nu\rho} - \partial_\nu B_{\mu\rho} - \partial_\rho B_{\mu\nu}$ y el subíndice E resulta que estamos usando la métrica en el "marco de Einstein" $g_{\mu\nu}^E(x)$, es decir, aquella con acción $\int d^D x \sqrt{-g_E} R_E$.

La métrica $g_{\mu\nu}(x)$ que la cuerda siente directamente, a

través de la acción $S_p[X] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z g_{\mu\nu}(x) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu$, se relaciona con $g_{\mu\nu}^E(x)$ a través de una transformación de Weyl en el espaciotiempo (redefinición de campo, no simetría):

$$g_{\mu\nu}(x) = e^{4\Phi(x)/D-2} g_{\mu\nu}^E(x), \text{ y usándola se tiene}$$

$$S_{ef} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^Dx \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left\{ R + 4(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$


Como veremos más adelante, el hecho de que en este "marco de cuerdas" el dilatón aparece a través del factor $e^{-2\Phi}$ en todos los términos está estrechamente relacionado con el factor $e^{-2\Phi_0}$ en las amplitudes a nivel árbol ($\chi=2$): Φ_0 es el valor de fondo del campo $\Phi(x)$...

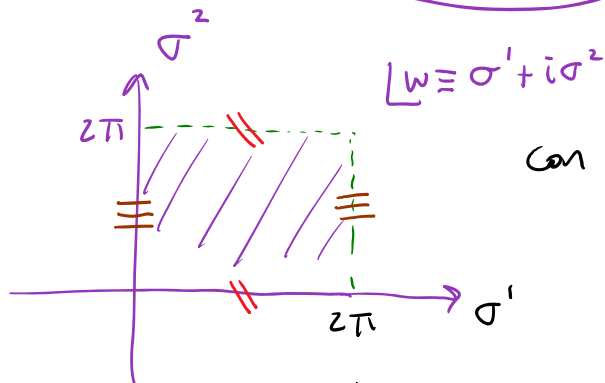
Calculando amplitudes de dispersión para la cuerda abierta (con posibles factores de Chan-Paton) se obtiene para el campo de norma la acción de Maxwell (o Yang-Mills)

$$S_{ef}^a = -\frac{1}{4g_{YM}^2} \int d^Dx \sqrt{-g} e^{-\Phi} \left\{ \text{Tr} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$

$g_{YM}^2 \leftarrow 2\alpha' g_c N^2 \leftarrow \chi=1 \leftarrow \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$

Amplitudes a un lazo

El toro T^2  puede parametrizarse como



con $w \simeq w + 2\pi$, $w \simeq w + 2\pi i$

(\Leftrightarrow funciones de transición).

Nuestros campos $X^w(\sigma)$ y $g_{ab}(\sigma)$ deben ser periódicos.

¿Módulos? δg_{ww} periódica tal que $\partial_{\bar{w}} \delta g_{ww} = 0$

$$\Rightarrow \delta g_{ww} = \epsilon \text{ constante} \therefore \boxed{M=2}$$

De hecho, notando que bajo una transformación de Weyl

$$g_{ab}(\sigma) \text{ arbitraria} \rightarrow \check{g}_{ab}(\sigma) = e^{w(\sigma)} g_{ab}(\sigma)$$

tenemos $\sqrt{\check{g}} \check{R} = \sqrt{g} (R - \nabla^2 w)$, vemos que podemos elegir

$w(\sigma)$ para obtener globalmente una métrica plana

$$\check{g}_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 + \tau_2^2 \end{pmatrix} \leftrightarrow ds^2 = |d\sigma' + \tau d\sigma^2|^2$$

$\tau \equiv \tau_1 + i\tau_2$

(Notar que $\check{R} = 0$ es consistente con $\chi = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\check{g}} \check{R} = 0$.)

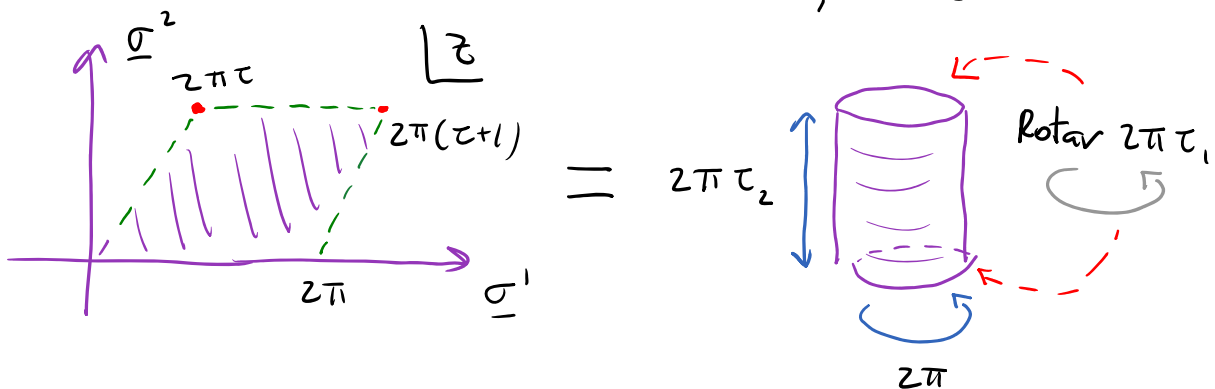
Con esta métrica, el toro tiene área $\int \sqrt{g} = 4\pi^2 \tau_2$.

El caso $\tau = i$ corresponde a $\check{g}_{ab} = \delta_{ab}$ ($\Leftrightarrow \check{g}_{\bar{w}\bar{w}} = \frac{1}{2}$).

Definiendo $z \equiv \sigma^1 + \tau \sigma^2$ (es decir, $z \equiv \underline{\sigma}^1 + i \underline{\sigma}^2$, con $\underline{\sigma}^1 = \sigma^1 + \tau \sigma^2$ y $\underline{\sigma}^2 = \tau_2 \sigma^2$), tenemos la métrica estándar

$ds^2 = dz d\bar{z}$ ($\Leftrightarrow \check{g}_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \check{g}_{\underline{a}\underline{b}} = \delta_{\underline{a}\underline{b}}$), PERO la

periodicidad sería entonces $z \simeq z + 2\pi$, $z \simeq z + 2\pi\tau$:



(Esto es análogo a la partícula: $g_{\tau\tau} = \sqrt{T}$, $\tau \in [0, 1]$

vs. $\check{g}_{\underline{\tau}\underline{\tau}} = 1$, $\underline{\tau} = \tau T \in [0, T]$.)

Claramente podemos restringir atención a $\tau_2 = \text{Im} \tau \geq 0$

($\tau_2 \rightarrow -\tau_2$ es el mismo toro, visto de cabeza).

Además, podemos notar que τ , $\tau+1$ y $-\frac{1}{\tau}$ describen toros equivalentes bajo $\text{Diff} \times \text{Weyl}$:

$$T: \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^1 \\ \tilde{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^1 - \sigma^2 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \Rightarrow ds^2 = \underbrace{|\underbrace{d\tilde{\sigma}^1 + (\tau+1)d\tilde{\sigma}^2}_{\equiv \tilde{\tau}}|}^2$$

$$S: \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^1 \\ \tilde{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ -\sigma^1 \end{pmatrix} \Rightarrow ds^2 = \frac{1}{|\tau|^2} \underbrace{|\underbrace{d\tilde{\sigma}^1 + (-\frac{1}{\tau})d\tilde{\sigma}^2}_{\equiv \tilde{\tau}}|}^2$$

Estas 2 transformaciones generan el grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^1 \\ \tilde{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \Rightarrow ds^2 \propto |d\tilde{\sigma}^1 + \tilde{\tau} d\tilde{\sigma}^2|^2$$

$$\text{con } \tilde{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad ad - bc = 1$$

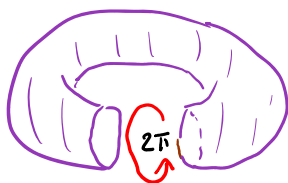
Estos son difeos del toro (respetan la periodicidad),

de modo que $\tilde{\tau} \approx \tau$. Pero notar que se trata

de difeomorfismos "grandes", no conectados a la identidad.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = TST \text{ (generación alternativa)}$$

describen



y



, respectivamente,

que se conocen como "torceduras (twists) de Dehn".

El punto es entonces que, en el caso del toro, el grupo de difeos Dif no es conexo. Para S^2 (y D^2) tenemos

$$\text{Dif} = \text{Dif}_0, \text{ pero en general } \text{Dif}_0 \subset \text{Dif}$$

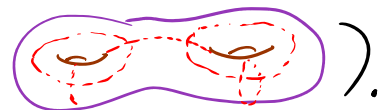
↖ componente que contiene a la identidad

y definimos el grupo modular o grupo de clase de mapeo

$$\text{GM} \equiv \frac{\text{Dif}}{\text{Dif}_0}$$

(= $\text{Sp}(2m, \mathbb{Z})$) para género m , generados por

las torceduras de Dehn



$\int \mathcal{D}g_{ab} \propto \int \mathcal{D}\xi$ cancela solo Dif_0/GKC , de manera que

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} F[g_{ab}] = \frac{1}{\text{GKC}} \underbrace{\frac{\text{Dif}_0}{\text{Dif}}}_{\frac{1}{\text{GM}}} \int dt_1 \dots dt_m \mu(t_i) F[\check{g}_{ab}(t_i)]$$



← ≡ $\frac{\text{Métricas}}{\text{Dif}_0 \times \text{Weyl}}$

Espacio de Teichmüller

$$\int_M dt_1 \dots dt_m \leftarrow \frac{1}{\text{GM}} \text{Espacio de Módulos.}$$

Como ahora $\frac{1}{G_{KC}} \neq 0$, incluso la amplitud de cero puntos
 (\leftrightarrow energía del vacío) puede ser no nula (\leftrightarrow corrección
 cuántica esperada a $1/k_0$), así que calculemos

$$M_{T^2}^{(0)} \equiv \frac{e^{-i\Phi}}{G_{KC}} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} d\tau_1 d\tau_2 \left\langle \prod_{i=1}^2 \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}^2} d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \frac{\partial g_{bc}}{\partial \tau_i} g^{cd} b_{da} \right) \right\rangle_{T^2(\tau)}$$

\swarrow por difeo grande $\underbrace{\hspace{10em}}$ aquí y en lo sucesivo,
 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \right) \in GM,$ tomamos $g_{ab} = g_{ab}^V(\tau)$
 que no cambia τ ( análogo a )

Veamos cada parte por separado.

$$\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)}^X \equiv \int \mathcal{D}_g X^m e^{-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}^2} d^2\sigma \sqrt{g} X \cdot \Delta_\sigma X}$$

[15: 14/05/13]

$\Delta_\sigma \equiv -\frac{1}{2\pi\alpha'} g^{ab} \partial_a \partial_b$

La medida se define (como vimos en detalle en el caso de la partícula, pp. 99-100) a partir de la norma

$$\| \delta X \|^2 = \int_{\mathcal{D}^2} d^2\sigma \sqrt{g} \delta X \cdot \delta X \quad (\text{invariante bajo difeos}).$$

Elegimos normalizar la integral funcional de tal forma que

$$\int \mathcal{D}_g(\delta X^m) e^{-\frac{1}{2} \| \delta X \|^2} = 1.$$

Desarrollando
$$X^w(\sigma) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} x_{\vec{n}}^w \varphi_{\vec{n}}(\sigma),$$

donde $\varphi_{\vec{n}}(\sigma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} e^{i\vec{n} \cdot \sigma}$ son un conjunto

completo de autofunciones (periódicas) de Δ_σ ,

$$\Delta_\sigma \varphi_{\vec{n}}(\sigma) = \lambda_{\vec{n}} \varphi_{\vec{n}}(\sigma) \quad \text{con} \quad \lambda_{\vec{n}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} g^{ab} n_a n_b = \frac{(n_2 - n_1 \tau)(n_2 - n_1 \bar{\tau})}{2\pi\alpha' \tau_2^2},$$

que satisfacen la condición de ortogonalidad

$$(\varphi_{\vec{n}}, \varphi_{\vec{n}'}) \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g} \varphi_{\vec{n}} \varphi_{\vec{n}'} = \delta_{\vec{n}, \vec{n}'},$$

tenemos $\| \delta X \|^2 = \sum_{\vec{n}} \delta x_{\vec{n}} \cdot \delta x_{\vec{n}}$, de modo que

$$\mathcal{D}_g X^w \equiv \prod_{\vec{n}, \mu} \frac{dx_{\vec{n}}^\mu}{\sqrt{2\pi}}$$

Tenemos entonces

$$\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)}^X = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^D} \int d^D x_{\vec{0}} \prod_{\vec{n} \neq 0} \left[\int \frac{d^D x_{\vec{n}}}{(\sqrt{2\pi})^D} e^{-\frac{1}{2} \lambda_{\vec{n}} (x_{\vec{n}})^2} \right]$$

$$X^w(\sigma) = X^w + \underline{X^w}(\sigma) \rightarrow V_D = (2\pi)^D \delta^{(D)}(0) \left[\prod_{\vec{n} \neq 0} \frac{1}{2\pi\alpha' \tau_2^2 (n_2 - n_1 \tau)(n_2 - n_1 \bar{\tau})} \right]^{-D/2}$$

$$\prod_{\vec{n} \neq 0} \lambda_{\vec{n}} \equiv \underline{\det} \Delta_\sigma$$

Con "regularización por función zeta" (que usamos en la p. 211 para la partícula, $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \Big|_{s=0} \equiv \zeta(s) \Big|_{s=0} = -\frac{1}{2}$)

[ver Polchinski, Commun. Math. Phys. 104, 37-47 (1986), apéndice A], se obtiene (como verificaremos más adelante)

$$\underline{\det \Delta_{\sigma}} \sim \tau_2^2 |\eta(\tau)|^4, \text{ donde}$$

$$\eta(\tau) \equiv \tau^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad \text{con } q \equiv e^{2\pi i \tau}$$

es la función eta de Dedekind (holomorfa $\forall \tau_2 \geq 0$).

Para la integral sobre fantasmas, necesitamos primero calcular las inserciones. Usando

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial \tau_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\tau_1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g_{ab}}{\partial \tau_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\tau_1 \end{pmatrix} \quad \text{tenemos}$$

$$M_1^{ad} \equiv g^{ab} \frac{\partial g_{bc}}{\partial \tau_1} g^{cd} = \frac{1}{\tau_2^2} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\tau_2^2} = \frac{1}{\tau_2^2} \begin{pmatrix} -2\tau_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$M_2^{ad} \equiv g^{ab} \frac{\partial g_{bc}}{\partial \tau_2} g^{cd} = \frac{1}{\tau_2^2} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\tau_2^2} = \frac{2}{\tau_2^3} \begin{pmatrix} \tau_1^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollando $b_{ab}(\sigma) = \sum_I b_I B_{ab}^I(\sigma)$

↖ números anti conmutativos
 ↗ tensor (commutativo)
 ↘ simétrico, sin traza

con $(B^I, B^J) \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} g^{cd} B_{ac}^I B_{bd}^J = \delta^{IJ}$

tenemos $D b_{ab}(\sigma) \equiv \prod_I db_I$

Nos interesan los ($M=2$) modos cero ortonormales.

Fácil en coordenadas $\begin{cases} \underline{\sigma}^1 = \sigma^1 + \tau_1 \sigma^2 \\ \underline{\sigma}^2 = \tau_2 \sigma^2 \end{cases}$, donde $g_{\underline{a}\underline{b}} = \delta_{\underline{a}\underline{b}}$:

$$B_{\underline{a}\underline{b}}^{0,1} \equiv \frac{1}{2\pi\sqrt{2\tau_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_{\underline{a}\underline{b}}^{0,2} \equiv \frac{1}{2\pi\sqrt{2\tau_2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformando de vuelta a las coordenadas σ^1, σ^2 , esto es

$$B_{ab}^{0,1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\tau_2}} \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 - \tau_2 \end{pmatrix} \quad B_{ab}^{0,2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\tau_2}} \begin{pmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 2\tau_1\tau_2 \end{pmatrix}$$

La contribución de modos cero es $\left\langle \prod_{i=1}^2 \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} M_i^{ad} b_{da}^{(i)} \right\rangle_{T^2(\tau)}$

es entonces

$$\left(\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \right)^2 \int db_{0,1} db_{0,2} \left[M_1^{ad} (b_{0,1} B_{da}^{0,1} + b_{0,2} B_{da}^{0,2}) M_2^{bc} (b_{0,1} B_{cb}^{0,1} + b_{0,2} B_{cb}^{0,2}) \right]$$

↙ ↘
 ○ ○

$$\sim \tau_2^2 (M_1^{ad} B_{da}^{o,2}) (M_2^{bc} B_{cb}^{o,1}) \sim \tau_2^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_2} \tau_2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_2} \tau_2} \right) = \frac{1}{\tau_2}$$

Falta ahora determinar la contribución de los modos no

constantes, $\langle 1 \rangle_{T^2(\sigma)}^{\underline{b}, \underline{c}} \equiv \int \mathcal{D} \underline{b}_{-a}(\sigma) \mathcal{D} \underline{c}^a(\sigma) e^{-S_f[\underline{b}, \underline{c}]}$

Recordar (pp. 367, 366) que

$$S_f = \frac{1}{2\pi} (b, P_1 c) \equiv \frac{1}{2\pi} (P_1^\dagger b, c)$$

donde $(P_1 c)_{ab} \equiv \nabla_a c_b + \nabla_b c_a - g_{ab} \nabla_c c^c = (g_{bc} \nabla_a + g_{ac} \nabla_b - g_{ab} \nabla_c) c^c$

$((P_1 c)^{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\partial} c^{\bar{z}\bar{z}}$ en norma conforme), $(,)$ denota

el producto interno invariante bajo difeos, y

$(P_1^\dagger)^{dab} = -g^{da} \nabla^b - g^{db} \nabla^a + g^{ab} \nabla^d$ es el operador adjunto a

P_1 ($(P_1^\dagger b)^{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\partial} b_{\bar{z}\bar{z}}$ en norma conforme).

Elegimos $B_{ab}^{\bar{I}}(\sigma)$ tales que $\underbrace{P_1 P_1^\dagger}_{\text{mapes tensores} \leftarrow \text{tensores}} B_{ab}^{\bar{I}} = \lambda_{\bar{I}}^2 B_{ab}^{\bar{I}}$.

Desarrollamos de manera similar $c^a(\sigma) = \sum_J c^J C_J^a(\sigma)$,

con $(C_{\bar{I}}, C_{\bar{J}}) = \delta_{\bar{I}\bar{J}}$ y $\underbrace{P_1^\dagger P_1}_{\text{mapes vectores} \leftarrow \text{vectores}} C_J^a = \lambda_J^2 C_J^a$.

Notando que

$$(P_I P_I^\dagger)(P_I C_J) = P_I (P_I^\dagger P_I C_J) = \lambda_J'^2 (P_I C_J) \quad y$$

$$(P_I^\dagger P_I)(P_I^\dagger B^I) = P_I^\dagger (P_I P_I^\dagger B^I) = \lambda_I^2 (P_I^\dagger B^I),$$

veamos que para $\lambda_I, \lambda_J' \neq 0$, existe una relación biunívoca entre los 2 conjuntos de autofunciones:

$$B_{ab}^I = \frac{1}{\lambda_I} (P_I C_I) \quad \lambda_I = \lambda_I' \neq 0,$$

de tal manera que

$$\langle 1 \rangle_{T(z)}^{\underline{b}, \underline{c}} \sim \prod_{I \neq 0} \left\{ \int d\underline{b}_I d\underline{c}^I \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \lambda_I \underline{b}_I \underline{c}^I \right] \right\}$$

$$\sim \prod_{I \neq 0} \lambda_I = \sqrt{\underline{\det} P_I^\dagger P_I} = \sqrt{\underline{\det} P_I P_I^\dagger}$$

Y usando $(P_I^\dagger P_I)^d_c = -2 \delta_c^d \underbrace{\nabla_a \nabla^a}_{\sim \Delta_\sigma}$

concluimos que $\sqrt{\underline{\det} P_I^\dagger P_I} \sim \underline{\det} \Delta_\sigma \sim \tau_2^2 |\eta(\tau)|^4$ p. 397