

para otros teorías), en las coordenadas z, \bar{z} (pero no, p.ej., en w, \bar{w}).

Podemos regresar ahora a las preguntas de la p. 188: cómo calcular las relaciones de conmutación en el formalismo de la integral de camino?

Usando la conexión con el orden temporal/radial (p. 186) y la definición $\alpha_m^\mu = i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \partial X^\mu(z)$ (p. 188), tenemos

$$[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = \langle 0 | [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] | 0 \rangle$$

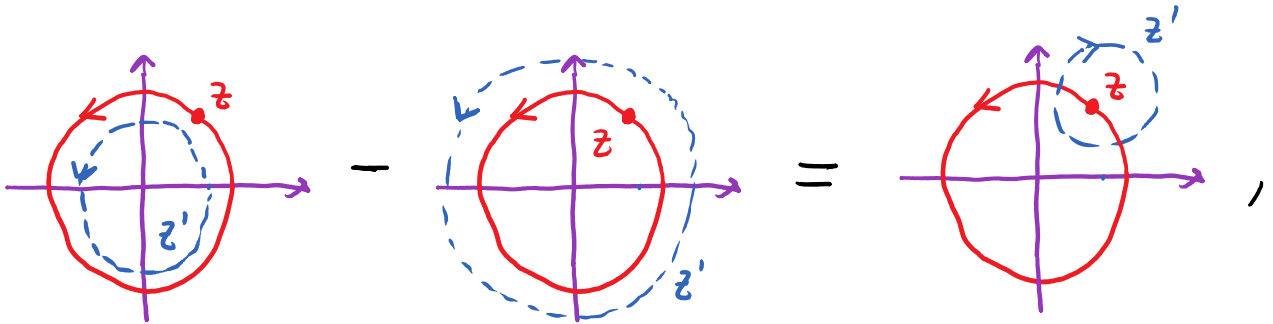
$$= \int \mathcal{D}X e^{-S[X]} \left(\alpha_m^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_n^\nu \alpha_m^\mu \right) / \langle 1 \rangle$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 calcular en $|z|$ en $|z|$ calcular en $|z|$ en $|z|$
 con $|z| > |z'|$ con $|z| < |z'|$

$$= -\frac{2}{\alpha'} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \left\{ \oint_{|z'|=|z|-\epsilon} \frac{dz'}{2\pi i} - \oint_{|z'|=|z|+\epsilon} \frac{dz'}{2\pi i} \right\} z'^n \langle \partial X^\mu(z) \partial X^\nu(z') \rangle$$

$$= \underbrace{\partial \partial' \langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \rangle}_{-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z-z'|^2} \underbrace{-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \frac{1}{(z-z')^2}}_{p. 191}$$

Dado que



lo anterior equivale a

$$\begin{aligned}
 [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] &= -\frac{2}{\alpha'} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \left\{ - \oint_{|z'-z|=\epsilon} \frac{dz'}{2\pi i} z'^n \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{\eta^{\mu\nu}}{(z-z')^2} \right) \right\} \\
 &= \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \oint_{|z'-z|=\epsilon} \frac{dz'}{2\pi i} \left(\frac{z^n}{(z-z')^2} + \frac{n z^{n-1}}{z-z'} + \dots \right) \\
 &= -n \eta^{\mu\nu} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+n-1} \delta_{m,-n}
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\boxed{[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = m \eta^{\mu\nu} \delta_{m,-n}}, \quad \Leftrightarrow [\hat{a}_m^\mu, \hat{a}_n^\nu] = 2\pi \delta_{m,n} \eta^{\mu\nu}$$

tal como afirmamos en la p. 183. ✓

Este resultado se puede resumir en términos más generales: si $Q_i \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} J_i(z)$ $i=1, 2, \dots$ son corrientes conservadas (como lo eran las α 's - ver p. 188), al repetir el argumento anterior se encuentra que

$$\boxed{[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j] = \oint \frac{dz_j}{2\pi i} \operatorname{Res}_{z_i \rightarrow z_j} J_i(z_i) J_j(z_j)}$$

≡ coeficiente del término $\frac{1}{z_i - z_j}$ en la EPO

Lo que vimos para las α 's es un caso particular de esta fórmula, con $\alpha_m^\mu \leftrightarrow J_m^\mu = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} z^m \partial X^\mu(z)$.

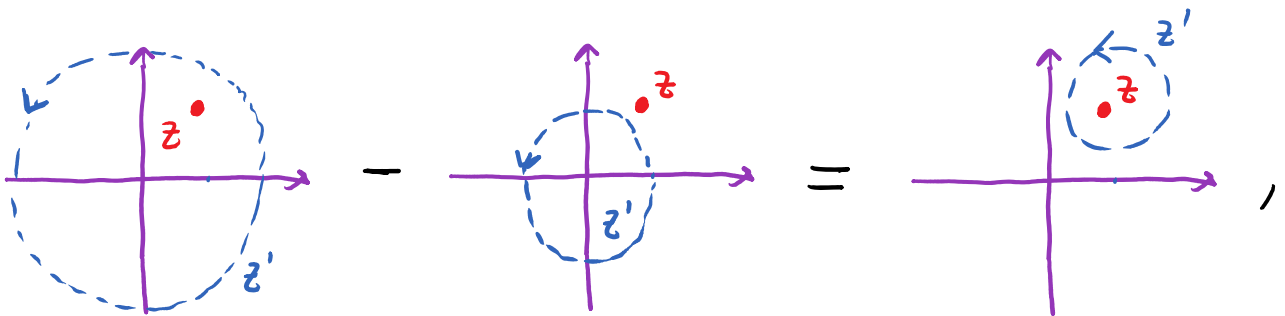
Podemos por cierto deducir la simetría que generan

estas cargas conservadas (cargas de Noether): se trata de $X^{\mu} \rightarrow X^{\mu} + \delta X^{\mu}$, con

$$\delta X^{\mu}(z, \bar{z}) = i \epsilon_{\nu} \left[\alpha_{\nu}^{\mu}, X^{\nu}(z, \bar{z}) \right],$$

parámetro \uparrow forma de variación

que usando nuevamente



se reescribe como

$$\delta X^{\mu}(z, \bar{z}) = i \epsilon_{\nu} \oint \frac{dz'}{2\pi i} T_{\nu}^{\mu}(z') X^{\nu}(z, \bar{z})$$

$|z'-z| = \delta$ $\underbrace{\left[i \sqrt{\frac{z}{\alpha'}} z'^m \partial' X^{\mu}(z') \right]}$

$$= -\sqrt{\frac{z}{\alpha'}} \epsilon_{\nu} \oint \frac{dz'}{2\pi i} z'^m \underbrace{\partial' X^{\mu}(z') X^{\nu}(z, \bar{z})}_{\partial' \left(-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z'-z|^2 \right) + \dots}$$

$|z'-z| = \delta$ \uparrow
 $= z^m + \dots$ $\underbrace{-\frac{\alpha'}{2} \frac{\eta^{\mu\nu}}{z'-z}}$

$$S_p \propto \int d^4z \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

$$= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \epsilon^{\mu\nu} z^\mu,$$

que efectivamente es una simetría (conociamos ya el caso particular $m=0$, generado por $\alpha_0^\mu \leftrightarrow p^\mu$).

Podemos ahora regresar a examinar en más detalle el espacio de Hilbert de nuestra teoría.

Definimos el estado base $|0, k\rangle$ tal que

$$\alpha_n^\mu |0, k\rangle = 0 \quad \forall n > 0 \quad \text{y} \quad \forall \mu$$

(junto con la condición $\tilde{\alpha}_n^\mu |0, k\rangle = 0$, si estamos hablando de una cuerda cerrada), y

$$p^\mu |0, k\rangle = k^\mu |0, k\rangle.$$

Para estos estados, tomamos el producto interno usual

$$\langle 0, k | 0, k' \rangle \equiv (2\pi)^D \delta^{(D)}(k - k').$$

El espacio de Hilbert (espacio de Fock) completo se genera actuando repetidamente con los operadores de

creación α_{-n}^{μ} (y $\tilde{\alpha}_{-n}^{\mu}$) con $n > 0$.

Recordando que $(\alpha_n^{\mu})^{\dagger} = \alpha_{-n}^{\mu}$ (p. 155), podemos notar de inmediato que existen estados con normas negativas, como p.ej. $\alpha_{-n}^{\circ} |0, k\rangle$ ($n > 0$):

$$|\alpha_{-n}^{\circ} |0, k\rangle|^2 = \langle 0, k | \underbrace{\alpha_n^{\circ} \alpha_{-n}^{\circ}}_{[\alpha_n^{\circ}, \alpha_{-n}^{\circ}] = n\eta^{\circ\circ}} |0, k\rangle = -n(2\pi)^D \delta^{(D)}(0).$$

Los estados de este tipo se conocen como fantasmas (en una de las 2 acepciones de este término dentro de la física teórica), y claramente son patológicos: ¡están asociados a probabilidades negativas!

El problema claramente se origina de tener $X(z, \bar{z})$ en la descripción, lo cual fue necesario para preservar la covariancia bajo Lorentz. Sabemos que el precio que pagamos es tener una descripción redundante, donde la mayoría de los estados NO son físicos.

Para identificar a los estados que sí son físicos, nos

falte promover a nivel cuántico a las construcciones clásicas $T_{ab} = 0$. Dado que $T^a_a = 0$ por invariancia de Weyl (p.139), éstas son solo 2 (x ∞) construcciones, que en la norma plana $g_{ab} = \delta_{ab}$ toman la forma (p.138)

$$T_{\sigma\sigma} \propto \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \quad \text{y} \quad T_{\sigma\tau} \propto \dot{X} \cdot X' = 0 \quad \forall \sigma, \tau.$$

Dado que T_{ab} es la corriente de Noether asociada a la invariancia bajo traslaciones en la hoja de mundo, sabemos que se conserva, $\partial^a T_{ab} = 0$. (Más en general, con una métrica arbitraria g_{ab} , la invariancia bajo difeo implica que T_{ab} se conserva covariantemente, $\nabla^a T_{ab} = 0$.)

En coordenadas complejas z, \bar{z} (tal que $g_{z\bar{z}} = 1/2$), la nulidad de la traza equivale a $T_{z\bar{z}} = 0$, y la conservación de T_{ab} se traduce entonces en

$$\bar{\partial} T_{zz} + \cancel{\partial T_{z\bar{z}}}^{\circ} = 0 \quad \text{y} \quad \partial T_{\bar{z}\bar{z}} + \cancel{\bar{\partial} T_{z\bar{z}}}^{\circ} = 0.$$

Es decir,

$T(z) \equiv T_{zz}(z)$ es analítica, y $\tilde{T}(\bar{z}) \equiv T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z})$ antianalítica.

Podemos entonces desarrollar estas funciones en series

de Laurent (tal como hicimos antes para ∂X y $\bar{\partial} X$):

$$T(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{L_n}{z^{n+2}} \quad \leftrightarrow \quad L_n \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z)$$

$$\tilde{T}(\bar{z}) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{L}_n}{\bar{z}^{n+2}} \quad \leftrightarrow \quad \tilde{L}_n \equiv -\oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^{n+1} \tilde{T}(\bar{z})$$

Itemos adaptado aquí una convención con +2 en el denominador, para cancelar el factor de z^2 (\bar{z}^2) que aparece al transformar $T_{zz} \rightarrow T_{ww}$ ($T_{\bar{z}\bar{z}} \rightarrow T_{\bar{w}\bar{w}}$). En las coordenadas originales, estos son simplemente expansiones de Fourier, tomando en cuenta que T_{++} (T_{--}) contiene solo modos izquierdos (derechos).

Los coeficientes/operadores L_n se conocen como modos de Virasoro, y nos dan una manera conveniente de listar nuestras construcciones: pedir que $T(z)=0 \forall z$ equivale a pedir que $L_n=0 \forall n$ (y similarmente para $\tilde{T}(\bar{z})$, \tilde{L}_n).

En el caso concreto de la teoría definida por S_p en la norma plana, se tiene (p. 138)

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X \cdot \partial X(z) : , \quad \tilde{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{\alpha'} : \bar{\partial} X \cdot \bar{\partial} X(\bar{z}) :$$

↑ orden normal utilizado para definir el producto de 2 operadores en un mismo punto.

||: 20/09/21

Justo como las α 's y $\tilde{\alpha}$'s, las L_n y \tilde{L}_n constituyen un número infinito de cargas conservadas (por Cauchy).

Resultan de integrar las corrientes de Noether

$$J_n(z) \equiv z^{n+1} T(z) \quad \text{y} \quad \tilde{J}_n(\bar{z}) \equiv \bar{z}^{n+1} \tilde{T}(\bar{z})$$

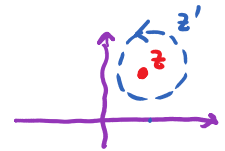
(que evidentemente se conservan por separado, $\bar{\partial} J_n = 0$, $\partial \tilde{J}_n = 0$, tanto como T y \tilde{T} ($n=-1$) lo hacen).

Las transformaciones que generan son

$$X^\mu(z, \bar{z}) \rightarrow X^\mu(z, \bar{z}) + \delta X^\mu(z, \bar{z}) ,$$

con

$$\frac{1}{\epsilon} \delta X^\mu(z, \bar{z}) = [L_n, X^\mu(z, \bar{z})]$$



$$\frac{1}{\epsilon} \delta X^\omega(z, \bar{z}) = \underbrace{\left\{ \oint_{|z'| > |z|} \frac{dz'}{2\pi i} - \oint_{|z'| < |z|} \frac{dz'}{2\pi i} \right\}}_{\oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i}} \underbrace{\left(z'^{n+1} T(z') X^\omega(z, \bar{z}) \right)}_{-\frac{1}{\alpha'} : \partial' X \cdot \partial' X(z') :}$$

$$= -\frac{1}{\alpha'} \oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i} \underbrace{z'^{n+1} : \partial' X \cdot \partial' X(z') : X^\omega(z, \bar{z})}_{z \partial' \left(-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z-z'|^2 : \partial' X_\nu(z') : + \dots \right)}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{-\alpha' \frac{1}{z'-z} \partial X^\omega(z) + \dots}$$

es decir,

$$\delta X^\omega(z, \bar{z}) = \epsilon z^{n+1} \partial X^\omega(z),$$

que (junto con $\delta X^\omega = \bar{\epsilon} \bar{z}^{n+1} \bar{\partial} X^\omega = \bar{\epsilon} [\tilde{L}_n, X^\omega]$)

es el cambio derivado de la transformación conforme

$$z \rightarrow z' = z + \epsilon z^{n+1}.$$

p.172: transformaciones conformes son los mapeos análogos

(Más en general, $J_f(z) = f(z) T(z)$ es la corriente de

Noether asociada a la transformación conforme

$$z \rightarrow z' = z + \epsilon f(z).$$

Vemos en particular que:

$$L_n \text{ genera } z' = z + \epsilon z^{n+1}$$

L_{-1} genera traslaciones $z' = z + b$ (lo cual concuerda con el hecho de que $J_{-1} = T(z)$),

L_0 genera dilataciones/rotaciones $z' = a z$,
o, para ser más precisos,

$L_0 + \tilde{L}_0$ genera dilataciones $z' = \lambda z$ (traslaciones en σ^2),

$L_0 - \tilde{L}_0$ genera rotaciones $z' = e^{i\theta} z$ (traslaciones en σ^1),

y L_1 genera los llamados transformaciones conformes especiales $z' = \frac{z}{cz+1}$.

La composición de estos 3 transformaciones de lugar a la transformación más general

$$z \rightarrow z' = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C},$$

que es invertible solo si $ad-bc \neq 0$, y podemos por tanto ajustar $ad-bc=1$. La regla de composición de estas transformaciones corresponde justamente a la multiplicación de las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, así que L_{-1}, L_0 y L_1 (junto con $\tilde{L}_{-1}, \tilde{L}_0$ y \tilde{L}_1) generan un grupo isomorfo a $SL(2, \mathbb{C})$.

Este es de hecho el único subgrupo propio del grupo conforme en 2 dimensiones (la única colección de L_n 's cuyos conmutadores cierran entre sí).

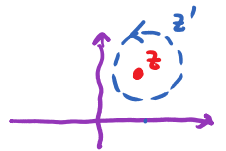
Dado que los L_n (y \tilde{L}_n) son los generadores de las transformaciones conformes, tiene mucho sentido que las constricciones $T_{ab}=0$ equivalgan a pedir que los modos de Virasoro aniquilen a los estados físicos ($L_n |fis\rangle = 0 = \tilde{L}_n |fis\rangle$), puesto que ello tiene como consecuencia que la física NO dependerá de nuestra elección del marco conforme (dado que $z \rightarrow z'(z) \Rightarrow |fis\rangle' \equiv \exp\left(\sum_n c_n L_n\right) |fis\rangle = |fis\rangle$).

Pero en este procedimiento, encontraremos una pequeña obstrucción: $[L_m, L_n]$ incluye un término constante, así que no será consistente pedir que $L_n |f\rangle = 0 \quad \forall n$.

Para entender mejor la interpretación de esta constante, nos conviene desarrollar un poco más de tecnología.

Notemos primero que, de forma similar a lo que vimos arriba para $X^\mu(z, \bar{z})$, la manera como se comporta un operador (\equiv "campo") arbitrario $\mathcal{O}(z, \bar{z})$ bajo transformaciones conformes está determinada por su EPO con $T(z)$ y $\tilde{T}(\bar{z})$, a través de

$$\delta \mathcal{O}(z, \bar{z}) = -\epsilon [L_n, \mathcal{O}(z, \bar{z})] - \bar{\epsilon} [\tilde{L}_n, \mathcal{O}(z, \bar{z})]$$



$$= -\epsilon \oint_{|z'-z|=\delta} \frac{dz'}{2\pi i} z'^{n+1} T(z') \mathcal{O}(z, \bar{z}) - \bar{\epsilon} \oint_{|\bar{z}'-\bar{z}|=\delta} \frac{d\bar{z}'}{2\pi i} \bar{z}'^{n+1} \tilde{T}(\bar{z}') \mathcal{O}(z, \bar{z})$$

$$= -\epsilon \operatorname{Res}_{z' \rightarrow z} z'^{n+1} \underbrace{T(z')}_{\text{usar EPO}} \mathcal{O}(z, \bar{z}) - \bar{\epsilon} \operatorname{Res}_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}} \bar{z}'^{n+1} \underbrace{\tilde{T}(\bar{z}')}_{\text{usar EPO}} \mathcal{O}(z, \bar{z}) .$$

Nos conviene tomar una base de operadores tales que

$$T(z')\sigma(0,0) = \dots + \frac{\hbar}{z'^2}\sigma(0,0) + \frac{1}{z'}\partial\sigma(0,0) + \dots$$

$$\tilde{T}(\bar{z}')\sigma(0,0) = \dots + \frac{\tilde{\hbar}}{\bar{z}'^2}\sigma(0,0) + \frac{1}{\bar{z}'}\bar{\partial}\sigma(0,0) + \dots$$

El término de orden $1/z'$ ($1/\bar{z}'$) implica que $L_n = \oint \frac{dz'}{2\pi i} z'^{n+1} T(z')$

$$[L_{-1}, \sigma(0,0)] = \partial\sigma(0,0), \quad [\tilde{L}_{-1}, \sigma(0,0)] = \bar{\partial}\sigma(0,0),$$

lo cual expresa que bajo una translación $z \rightarrow z' = z + b$

tenemos el resultado esperado $\sigma(0,0) \rightarrow \sigma'(b, \bar{b}) = \sigma(0,0)$,

y más en general,

$$\sigma(z, \bar{z}) \rightarrow \sigma'(z', \bar{z}') = \sigma(z, \bar{z}).$$

El término de orden $1/z'^2$ ($1/\bar{z}'^2$) implica que

$$[L_0, \sigma(0,0)] = \hbar\sigma(0,0), \quad [\tilde{L}_0, \sigma(0,0)] = \tilde{\hbar}\sigma(0,0)$$

así que bajo dilatación/rotación $z \rightarrow z' = \lambda z$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) tenemos

$$\sigma(0,0) \rightarrow \sigma'(0,0) = \lambda^{-\hbar} \bar{\lambda}^{-\tilde{\hbar}} \sigma(0,0),$$

← Esto es lo especial de nuestra base de σ 's

y más en general,

$$\sigma(z, \bar{z}) \rightarrow \sigma'(z', \bar{z}') = \lambda^{-h} \bar{\lambda}^{-\tilde{h}} \sigma(z, \bar{z}) .$$

Llamamos a (h, \tilde{h}) las dimensiones (o pesos) conformes de σ . Más específicamente,

$h + \tilde{h}$ es la dimensión de σ (controla el comportamiento bajo rescalamiento $\leftrightarrow L_0 + \tilde{L}_0$),

$h - \tilde{h}$ es el espín de σ (controla el comportamiento bajo rotaciones $L_0 - \tilde{L}_0$).

P.ej., es fácil comprobar que los pesos conformes de

X^μ son $(h=0, \tilde{h}=0)$,

∂X^μ $(1,0)$, $\bar{\partial} X^\mu$ $(0,1)$,

$\partial^n X^\mu$ $(n,0)$, $\bar{\partial}^n X^\mu$ $(0,n)$,

$:e^{ik \cdot X}: \left(\frac{\alpha' k^2}{4}, \frac{\tilde{\alpha}' k^2}{4} \right) !!$ (ver tarea 2).

En cualquier teoría de campo conforme (TCC \equiv CFT),

juegan un papel especial los llamados operadores primarios (o tensoriales), que bajo una transformación conforme arbitraria $z \rightarrow z'(z)$ transforman de acuerdo con

$$\sigma(z, \bar{z}) \rightarrow \sigma'(z', \bar{z}') = (\partial_z z')^{-h} (\partial_{\bar{z}} \bar{z}')^{-\tilde{h}} \sigma(z, \bar{z}).$$

Es decir, σ transforma como si fuera un tensor de rango $h + \tilde{h}$, con h subíndices z y \tilde{h} subíndices \bar{z} .

La versión infinitesimal de esta regla de transformación es que bajo $z \rightarrow z' = z + \epsilon f(z)$ se tiene

$$\begin{aligned} \delta \sigma(z, \bar{z}) &\equiv \sigma'(z, \bar{z}) - \sigma(z, \bar{z}) \\ &= -\epsilon (h \partial f + f \partial) \sigma(z, \bar{z}) - \bar{\epsilon} (\tilde{h} \bar{\partial} \bar{f} + \bar{f} \bar{\partial}) \sigma(z, \bar{z}). \end{aligned}$$

Tomando $f(z) = z^{n+1}$, esto implica que

$$[L_n, \sigma(z, \bar{z})] = (h(n+1)z^n + z^{n+1} \partial) \sigma(z, \bar{z}),$$

$$[\tilde{L}_n, \sigma(z, \bar{z})] = (\tilde{h}(n+1)\bar{z}^n + \bar{z}^{n+1} \bar{\partial}) \sigma(z, \bar{z}),$$

y en particular,

$$[L_n, \sigma_{(0,0)}] = 0 = [\tilde{L}_n, \tilde{\sigma}_{(0,0)}] \quad \forall n > 0$$

Esto es equivalente a la EPO

$$T(z)\sigma_{(0,0)} = 0 + \frac{h}{z^2}\sigma_{(0,0)} + \frac{1}{z}\partial\sigma_{(0,0)} + \dots$$

↑ No hay términos más singulares que z^{-2}
(y análogamente con $\tilde{T}(\bar{z})$).

Es fácil verificar, peej., que ∂X^μ y $:e^{ik \cdot X}:$ son primarios, pero $\partial^2 X^\mu$ no lo es.

Más en general, los derivados $\partial^n \bar{\partial}^m \sigma$ de un operador primario σ nunca son operadores primarios, y se conocen como descendientes de σ . Todo los operadores en una TCC se pueden expresar como combinaciones de los operadores primarios y sus descendientes.

Curiosamente, el propio tensor de energía-momento en la hoja de mundo, $T(z) = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X \cdot \partial X :$, no es un operador primario:

$$\left(-\frac{1}{\alpha'}\right)^2 : \partial X \cdot \partial X(z) : : \partial X \cdot \partial X(0) :$$

$$T(z)T(0) = \frac{1}{\alpha'^2} \left(2 : \underbrace{\partial X \cdot \partial X(z) \partial X(0) \cdot \partial X(0)}_{\left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z^2}\right)^2 \eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu}} : + 4 : \underbrace{\partial X \cdot \partial X(z) \partial X \cdot \partial X(0)}_{-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z^2} : \partial X(z) \cdot \partial X(0) :} : + \dots \right)$$

$$: \partial X \cdot \partial X(0) : + z : \partial^2 X \cdot \partial X(0) : + \dots$$

$\eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = D$

$$= \frac{D}{2z^4} + \frac{2}{z^2} \left(-\frac{1}{\alpha'}\right) : \partial X \cdot \partial X(0) : + \frac{2}{z} \left(-\frac{1}{\alpha'}\right) : \partial^2 X \cdot \partial X(0) : + \dots$$

es decir,

operador identidad

tensor bajo dilataciones, con $h=2$
(resultado esperado para $T \equiv T_{z\bar{z}}$)

$L_n \equiv \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z)$

$$T(z)T(0) = \frac{D}{2z^4} + \frac{2}{z^2} T(0) + \frac{1}{z} \partial T(0) + \dots$$

$\uparrow [L_2, T(0)] \neq 0$

tensor bajo traslaciones

$\Rightarrow T$ no es primario

En una teoría conforme arbitraria, se tiene

$$T(z')T(z) = \frac{c}{2(z'-z)^4} + \frac{2}{(z'-z)^2} T(z) + \frac{1}{(z'-z)} \partial T(z) + \dots$$

$$\left(\text{y } \tilde{T}(\bar{z}')\tilde{T}(\bar{z}) = \frac{\tilde{c}}{2(\bar{z}'-\bar{z})^4} + \dots \right), \text{ con } c \text{ (y } \tilde{c}) \text{ un}$$

número conocido como la carga central de la teoría.

Hemos aprendido entonces que en la teoría que nos ocupa,
 $S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X \cdot \bar{\partial} X$, la carga central es

$$C = D = \tilde{C}.$$

En general, el valor de c nos da una indicación del número de campos (\sim grados de libertad) en la teoría.

La EPO de T con T implica que bajo $z \rightarrow z + \epsilon f(z)$ (que corresponde a la corriente de Noether $j(z') = i f(z') T(z')$) se tiene

$$\delta T(z) = -\epsilon \left(\frac{c}{12} \partial^3 f(z) + 2 \partial f(z) T(z) + f(z) \partial T(z) \right)$$

(que es la transformación más general que es lineal en f y en 3 subíndices z). La versión finita de esta transformación resulta ser

$$T'(z') = (\partial_z z')^{-2} \left[T(z) - \frac{c}{12} \mathcal{D}_z z' \right],$$

donde

← factor esperado para tensor con peso $h=2$

$$\Phi_z z' \equiv \frac{\partial_z^3 z'}{\partial_z^2 z'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial_z^2 z'}{\partial_z z'} \right)^2$$

se conoce como la derivada Schwarziana

(y satisface $\Phi_z z'' = \Phi_z z' + (\partial_z z')^2 \Phi_{z'} z''$, lo cual es necesario para tener la regla de composición correcta al transformar $z \rightarrow z' \rightarrow z''$).

Así que (si $c \neq 0$) $T(z)$ NO transforma como tensor bajo transformaciones conformes arbitrarias, sino solo bajo aquellas que satisfacen $\Phi_z z' = 0$. Estos resultan ser precisamente las transformaciones $SL(2, \mathbb{C})$ que mencionamos en la p. 212,

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{con } ad-bc=1.$$

Por esta razón, T es lo que se conoce como un operador

cuasi-primario.

(Por supuesto, T_{ab} SÍ es un tensor bajo reparametrizaciones conformes o no —, porque ahí la métrica SÍ cambia.)

L12: 22/09/21

En particular, bajo $w \rightarrow z = e^w$, tenemos $\Phi_w z = -1/2$,

así que

$$z^2 T_{z\bar{z}}(z) = T_{w\bar{w}}(w) + \frac{c}{24}.$$

De aquí se puede ver que los modos de Fourier originales $T_{ww} \equiv \sum_n T_n e^{-nw}$ $\leftarrow \sigma^2 + i\sigma'$ y los de Laurent $T_{zz} \equiv \sum_n L_n / z^{n+2}$ se relacionan a través de

$$T_n = L_n - \frac{c}{24} \delta_{n,0} ,$$

así que el Hamiltoniano original (generador de traslaciones en σ^2) en realidad es

$$H \equiv \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma'}{2\pi} T_{22} = T_0 + \tilde{T}_0 = L_0 + \tilde{L}_0 - \frac{c+\tilde{c}}{24} .$$

\uparrow en hoja de modo $\underbrace{T_{ww} + T_{\bar{w}\bar{w}}}$ $\underbrace{\hspace{10em}}$ generador de dilataciones \textcircled{D} \uparrow OJO

Notar por cierto que, dado que

$$T_{\tau\tau} = -T_{ww} - T_{\bar{w}\bar{w}} = T_{\sigma\sigma} \quad \text{y} \quad T_{\sigma\tau} = -T_{w\bar{w}} + T_{\bar{w}w} \text{ son}$$

hermíticos, sabemos que $T_{ww} = \sum_n T_n e^{-ni(\tau+\sigma)}$ es hermitico,

$$\text{y por tanto } T_n^\dagger = T_{-n} \quad \leftrightarrow \quad L_n^\dagger = L_{-n} .$$

En coordenadas complejas $z = e^{\sigma^2 + i\sigma'}$, tenemos entonces

$$[T(z)]^\dagger = \sum_n \frac{L_n^\dagger}{\bar{z}^{n+2}} = \sum_n \frac{L_{-n}}{\bar{z}^{n+2}} \stackrel{n \rightarrow -n}{=} \sum_n \frac{L_n}{\bar{z}^{-n+2}} = \bar{z}^{-4} T(1/\bar{z}) .$$

primario bajo $SL(2, \mathbb{C})$

Más en general, para un operador cuasiprimario (\Rightarrow primario)

$\sigma(z, \bar{z})$, definimos

$$[\sigma(z, \bar{z})]^{\dagger} = \bar{z}^{-2h} z^{-2\tilde{h}} \sigma\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\right)$$

\uparrow inversión $z \rightarrow 1/z$ necesaria para cambiar el signo enfrente de $\sigma^2 = iT$

En términos de la expansión en modos

$$\sigma(z, \bar{z}) \equiv \sum_{m, n} \frac{\sigma_{m, n}}{z^{m+h} \bar{z}^{n+\tilde{h}}}$$

esto equivale a $\sigma_{m, n}^{\dagger} = \sigma_{-m, -n}$. Un operador analítico

(antianalítico) $\sigma(\tilde{\sigma})$ es un caso particular con solo

$$n=0 \quad (m=0): \quad \sigma(z) = \sum_m \frac{\sigma_m}{z^{m+h}} \Rightarrow \sigma_m^{\dagger} = \sigma_{-m}$$

A partir de la EPO (p. 218)

usamos enter $h=1$ para $\partial X(z)$
 $h=2$ para $T(z)$

$$T(z_1)T(z_2) = \frac{c}{2(z_1 - z_2)^4} + \frac{2}{(z_1 - z_2)^2} T(z_2) + \frac{1}{z_1 - z_2} \partial T(z_2) + \dots$$

podemos deducir de inmediato el conmutador entre los modos de Virasoro,

$$\begin{aligned}
 [L_m, L_n] &= \oint \frac{dz_2}{2\pi i} \operatorname{Res}_{z_1 \rightarrow z_2} z_1^{m+1} T(z_1) z_2^{n+1} T(z_2) \\
 &\quad \begin{array}{l} \text{por residuo} \\ \text{por residuo} \end{array} \\
 &\quad \left[z_2^{m+1} + (m+1)z_2^m(z_1 - z_2) \right. \\
 &\quad \quad + \frac{1}{2}(m+1)m z_2^{m-1}(z_1 - z_2)^2 \\
 &\quad \quad \left. + \frac{1}{3!}(m+1)m(m-1)z_2^{m-2}(z_1 - z_2)^3 + \dots \right] \\
 &\quad \left[\frac{c}{2} \frac{1}{3!}(m+1)m(m-1)z_2^{m+n-1} + 2(m+1)z_2^{m+n+1} T(z_2) \right. \\
 &\quad \quad \left. + z_2^{m+n+2} \frac{\partial T(z_2)}{\partial z_2} \right] \\
 &\quad \quad \quad \sum_k \frac{-(k+2)L_k}{z_2^{k+3}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{c}{12}(m^3 - m) \delta_{m,-n} + 2(m+1)L_{m+n} - (m+n+2)L_{m+n},$$

es decir, obtenemos la llamada álgebra de Virasoro

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m,-n}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Álgebra de Witt}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{"Extensión central"}}$

(Y análogamente para los $[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n]$, usando \tilde{c} .)

Aquí podemos ver, en particular, que L_{-1}, L_0, L_{+1} efectivamente forman una subálgebra (sin extensión central) es decir, sus conmutadores cierran entre sí.

En la teoría que nos interesa,

$$L_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} \left(-\frac{1}{\alpha'}\right) \underbrace{\partial X \cdot \partial X(z)}_{\left(-i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\right)^2 \sum_{n,k} \frac{1}{z^{n+k+2}} : \alpha_n \cdot \alpha_k :}$$

resulta en

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_n \cdot \alpha_{m-n} :$$

Como ya se dijo y es que, para esta teoría y en el marco conforme z , el orden normal conforme $::$ coincide con el orden normal de creación/aniquilación $:\!:\!:$.

Podemos notar que, incluso si hubiese habido una diferencia entre $::$ y $:\!:\!:$ (como la hay, p.ej., en el marco conforme w), tenemos $[\alpha_n, \alpha_{m-n}] = 0 \quad \forall n$ si $m \neq 0$, así que reemplazamos $::$ con $:\!:\!:$ u otra convención

de ordenamiento en la definición de L_m no ocasionaría diferencia alguna si $m \neq 0$. Pero para $m=0$, en general, podríamos tener una distinta constante de orden,

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} + A^X$$

$$= \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n>0} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n + A^X$$

← resulta ser = 0 en la convención aquí adoptada, $T_{\alpha} : \partial X \partial X :$

$$\frac{\alpha_0^2}{4} \stackrel{p.179}{\equiv} N$$

en el caso de la cuerda cerrada (α_0^2 en abierta)
 p.182

llamado convencionalmente el operador de número (aunque en realidad es el Hamiltoniano)

$$N = \sum_{n>0} n |a_n^\dagger \cdot a_n|$$

$\uparrow \epsilon_n = |p|$

Podemos verificar que $A^X = 0$ usando el conmutador

$$[L_1, L_{-1}] = 2L_0 \text{ para notar que}$$

$$A^X |0;0\rangle = L_0 |0;0\rangle = \frac{1}{2} L_1 L_{-1} |0;0\rangle - \frac{1}{2} L_{-1} L_1 |0;0\rangle$$

↑ osciladores p^N

$$\frac{1}{2} \sum_n \alpha_n \cdot \alpha_{-1-n} - \frac{1}{2} \sum_n \alpha_n \cdot \alpha_{1-n}$$

$$= 0 - 0 .$$



LB: 19/03/13

Podemos por fin regresar a la pregunta de cómo imponer las restricciones a nivel cuántico. Dado que tenemos $c \neq 0$, No podemos identificar a los estados físicos pidiendo simplemente que

$$T(z) |f\rangle = 0 \quad \forall z \iff L_n |f\rangle = 0 \quad \forall n,$$

porque esto contradiría el álgebra de Virasoro,

$$[L_n, L_{-n}] = 2nL_0 + \frac{c}{12}(n^3 - n).$$

Pero lo que en realidad nos interesa es asegurar que T_{ab} se anule dentro de los elementos de matriz,

$$\langle f | \underbrace{T(z)}_{\sum_n L_n / z^{n+2}} | f' \rangle = 0 \quad \forall z, \quad \forall |f\rangle, |f'\rangle \text{ físicos,}$$

\longleftarrow no solo en valores esperados $|f'\rangle = |f\rangle$

y usando $L_n^\dagger = L_{-n}$, vemos que esto se logra si imponemos las condiciones de estado físico

$$L_n |f\rangle = 0 \quad \forall n > 0$$

$$(L_0 - a) |f\rangle = 0$$

 $\implies \langle f | L_{-n} = 0$

(y similarmente, $\tilde{L}_{n>0} |f\rangle = 0 = (\tilde{L}_0 - \tilde{a}) |f\rangle$),

donde a (y \tilde{a}) es una posible constante de orden (necesaria por generalidad, después de que hemos elegido trabajar en el marco conforme \tilde{z} y definido $T(z)$ usando el orden normal $::: = \circ \circ$).

Como consecuencia de esta definición, el conjunto de estados físicos forma un subespacio vectorial del espacio de Hilbert completo, $\mathcal{H}_{\text{fis}} \subset \mathcal{H}$.

Podemos notar además que un estado del tipo

$$|\psi\rangle \equiv L_{-n} |\chi\rangle$$

$n > 0 \rightarrow \uparrow$ cualquier estado

es automáticamente ortogonal a todos los estados físicos,

$$\langle \text{fis} | \psi \rangle = \langle \text{fis} | L_{-n} |\chi\rangle = 0 \quad \forall |\text{fis}\rangle \in \mathcal{H}_{\text{fis}}.$$

Esto es lo que se conoce como un estado espurio.

Si un estado es espurio y físico, entonces es ortogonal a sí mismo, es decir, tiene norma cero:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | L_{-n} |\chi\rangle = 0.$$

Lo llamamos un estado nulo. Si existen en \mathcal{H}_{fis}

estados nulos, debemos tener presente que

$$|f_{\text{fis}}\rangle \quad \text{y} \quad |f_{\text{fis}}\rangle + |nulo\rangle$$

son físicamente equivalentes, puesto que dan el mismo resultado al tomar su producto interno con cualquier estado físico.

Para expresar esto, definiremos formalmente una relación de equivalencia

$$|f_{\text{fis}}\rangle \approx |f_{\text{fis}}'\rangle \quad \text{si} \quad |f_{\text{fis}}\rangle - |f_{\text{fis}}'\rangle = \underbrace{\sum_i L_{-n_i} |\chi_i\rangle}_{|nulo\rangle}$$

o, usando las relaciones de conmutación,

$$\text{si} \quad |f_{\text{fis}}\rangle - |f_{\text{fis}}'\rangle = L_{-1} |\chi_1\rangle + L_{-2} |\chi_2\rangle.$$

El espacio de Hilbert que en realidad nos interesa en este procedimiento de cuantización covariante antigua (CCA) es entonces finalmente el conjunto de clases de equivalencia

$$\mathcal{H}_{\text{CCA}} \equiv \frac{\mathcal{H}_{\text{fis}}}{\mathcal{H}_{\text{nulo}}} = \{ |f_{\text{fis}}\rangle \text{ sujeto a } \approx \}.$$

(Se tiene una historia muy similar al cuantizar el campo de Maxwell en la norma de Lorentz.)

Apliquemos ahora este procedimiento para obtener el espectro de la cuerda. Consideraremos primero el caso de la cuerda abierta (\equiv excitación de una D-brana), que es más sencilla porque hay un solo conjunto de modos.

En efecto, sabemos ya (p. 167, 180) que las condiciones de Neumann y Dirichlet asociadas a una Dp-brana,

$$\partial X^\alpha = \bar{\partial} X^\alpha \quad \forall z = \bar{z} \quad (\alpha = 0, \dots, p),$$

$$\partial X^i = -\bar{\partial} X^i \quad \forall z = \bar{z} \quad (i = p+1, \dots, D-1),$$

implican que

$$\alpha_n^\alpha = \tilde{\alpha}_n^\alpha, \quad \alpha_n^i = -\tilde{\alpha}_n^i \quad \forall n.$$

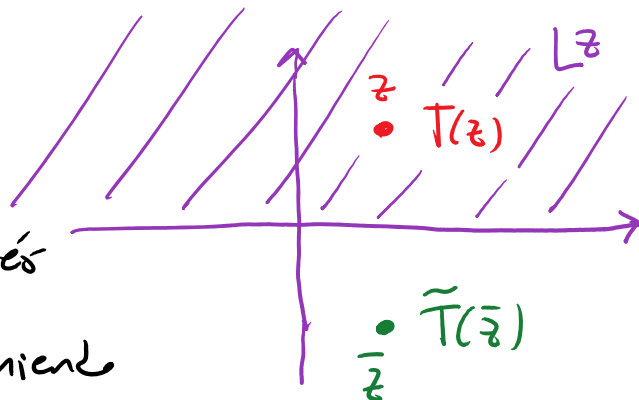
Podemos notar además que estas mismas condiciones tienen como consecuencia que

$$T(z) \Big|_{z=\bar{z}} = -\frac{1}{\alpha'} : \partial X \cdot \partial X(z) : = -\frac{1}{\alpha'} : \bar{\partial} X \cdot \bar{\partial} X(\bar{z}) : = \tilde{T}(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}=\bar{z}}$$

es decir,

$$L_n = \tilde{L}_n \quad \forall n.$$

Esta conexión se puede implementar nuevamente a través del truco de duplicación, definiendo



$T(\bar{z}) \equiv \tilde{T}(\bar{z})$, de modo que nos quedamos con una sola función $T(z)$ definida sobre todo el plano complejo, que es continua al cruzar el eje real $z = \bar{z}$.

De la mano de esto, tenemos un solo conjunto de modos de Virasoro (análogamente a $\alpha_m^N \leftrightarrow z^m \partial X^N$),

$$\begin{aligned} L_n &\equiv \frac{1}{2\pi i} \oint (dz z^{n+1} T(z) - d\bar{z} \bar{z}^{n+1} \tilde{T}(\bar{z})) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_n \cdot \alpha_{n-n} : , \end{aligned}$$

que usaremos para imponer las condiciones de estado físico.

En particular,

$$L_0 = \underbrace{\frac{1}{2} \alpha_0^2}_{\alpha' p^2} + \underbrace{\sum_{n>0} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n}_{\equiv N}$$

↪ "operador de número" satisface

↪ $p^\alpha =$ energía y momento espacial del centro de masa de la cuerda ($p^i = 0$)

$$[N, \alpha_{-m}^\mu] = m \alpha_{-m}^\mu$$

(porque $\alpha_{-n} \cdot \alpha_n = n a_{-n}^\dagger a_n$),

así que la construcción

$$(L_0 - a) |fis\rangle = 0$$

no es otra cosa que la condición de capa de masa

$$m^2 \equiv -p^2 = \frac{N - a}{\alpha'}$$

$$N = 0, 1, 2, \dots$$

válida para los operadores y sus eigenvalores

Análogo a la partícula relativista, donde teníamos una sola construcción, que era justamente $(p^2 + m^2) |fis\rangle = 0$.

Así que, dependiendo de la manera en que esté vibrando la cuerda (valor de N), tendrá una cierta masa m (de entre un conjunto infinito pero discreto de posibilidades),



tal como si fueran una partícula relativista (en decir, su energía será $E_{\vec{p}} \equiv p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ $\leftarrow p^{\alpha \neq 0}$). $E_{\vec{p}} = \sqrt{\frac{N-a}{\alpha'} + \vec{p}^2}$

Lib: 27/04/11

Para identificar en completo detalle a los estados físicos, nos falta todavía imponer las construcciones restantes, $L_{n>0} |fis\rangle = 0$. Analizaremos por separado los estados en distintos eigenvalores de N .

• $N=0 \leftrightarrow m^2 = -\frac{a}{\alpha'}$: estado $|0; k\rangle$ con $k^2 = \frac{a}{\alpha'}$.

oscilador \downarrow momento \downarrow
 $\uparrow k^\alpha$

Es fácil ver que en este caso las construcciones se cumplen automáticamente,

$$L_{n>0} |0; k\rangle = \frac{1}{2} \sum_l \alpha_l \cdot \alpha_{n-l} |0; k\rangle = 0,$$

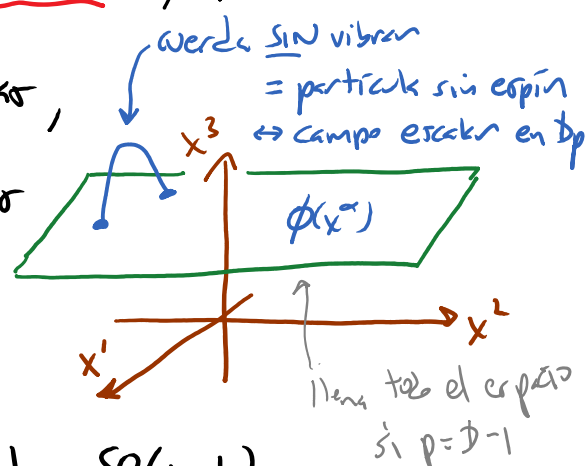
$$\frac{1}{2} (\alpha_0 \cdot \alpha_n + \alpha_{n-1} \cdot \alpha_1 + \alpha_{n-2} \cdot \alpha_2 + \dots + \alpha_{-1} \cdot \alpha_{n+1} + \alpha_{-2} \cdot \alpha_{n+2} + \dots)$$

así que todos los estados $|0; k\rangle$ son físicos.

Felizmente, todos tienen norma positiva. ✓

Claramente son idénticos a los estados $|k^\alpha\rangle$ de una partícula sin espín (en decir, sin estado interno) con

masa $m^2 = -a/\alpha'$, que se mueve en $p+1$ dimensiones, la cual a su vez reconocemos como una pequeña fluctuación en un campo escalar $\phi(x^\sigma)$ definido sobre la D_p -brana. En otras palabras, $\phi(x^\sigma)$ es uno de los modos en que la D_p -brana puede ser excitada. Es un escalar del grupo de Lorentz longitudinal, $SO(p, 1)$.



• $N=1 \leftrightarrow m^2 = \frac{1-a}{\alpha'}$: estados $\alpha_{-1}^\mu |0; k\rangle$ con $k^2 = \frac{a-1}{\alpha'}$.

La combinación más general es $\sum_\mu \alpha_{-1}^\mu |0; k\rangle \equiv |\epsilon; k\rangle$.

Este estado tiene norma

↑ constantes arbitrarias: vector de polarización

$$\langle \epsilon; k | \epsilon; k \rangle = \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu \langle 0; k | \underbrace{\alpha_{-1}^\mu \alpha_{-1}^\nu}_{= [\alpha_{-1}^\mu, \alpha_{-1}^\nu] = \eta^{\mu\nu}} |0; k \rangle = \epsilon_\mu^* \epsilon_\nu (2\pi)^D \delta^{(D)}(0),$$

el estado problemático es $\alpha_{-1}^0 |0; k\rangle$

que es negativa si $\epsilon_\mu^* \epsilon_\mu < 0$. P.ej., para $\epsilon_\mu = (1, 0, 0, \dots)$.

Para tener una teoría sensata, necesitamos asegurarnos que los estados con norma negativa (= fantasmas) NO sean físicos. Podemos verificar que

$L_{n>2} |\epsilon; k\rangle = 0$ en subnúmero, $\forall \epsilon, k$; pero \leftarrow igual que para $|0; k\rangle$

$$L_1 |\epsilon; k\rangle = (\sqrt{2\alpha'} p \cdot \alpha_1 + \dots) \epsilon_\mu \alpha_{-1}^\mu |0; k\rangle$$

\uparrow términos que se anulan

$$= \sqrt{2\alpha'} \epsilon_\mu k_\nu \underbrace{\alpha_1^\nu \alpha_{-1}^\mu}_{[\alpha_1^\nu, \alpha_{-1}^\mu] = \eta^{\mu\nu}} |0; k\rangle$$

$$= \sqrt{2\alpha'} \epsilon \cdot k |0; k\rangle$$

$$= 0 \text{ solo si } \epsilon \cdot k = 0. \quad \begin{array}{l} \text{polarización} \\ \text{transversal} \end{array}$$

Además,

$$L_{-1} |0; k\rangle = (\sqrt{2\alpha'} p \cdot \alpha_{-1} + \dots) |0; k\rangle = \sqrt{2\alpha'} k \cdot \alpha_{-1} |0; k\rangle,$$

así que $|\epsilon; k\rangle$ con $\epsilon_\mu = \lambda k_\mu$ es espurio.

Consideremos ahora las 3 distintas posibilidades para el valor de la constante de orden a .

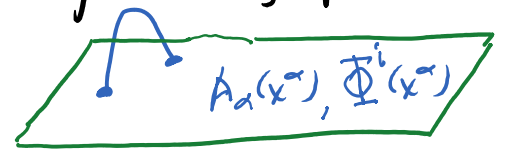
i) Si $a < 1$, entonces $m^2 = -k^2 = \frac{1-a}{\alpha'} > 0$.

El estado espurio $|\lambda k; k\rangle$ tiene $\epsilon \cdot k = \lambda k^2 \neq 0$, \leftarrow viola $L_1 = 0$

y por tanto no es físico (es decir, no existen estados nulos).

Con un empujón adecuado, podemos ir al mar en reparo para la cuerda, donde $k^\mu = (m, 0, 0, \dots)$.
 La condición de estado físico $\epsilon \cdot k = \epsilon_0 = 0$ elimina entonces a los estados con $\epsilon_0 \neq 0$, de modo que el estado con norma negativa $\alpha_{-1}^0 |0; k\rangle$ NO es físico. ✓

Nos quedamos entonces con $D-1$ estados de partícula $\sum_{\mu=1}^M \alpha_{-1}^\mu |0; k\rangle$ en las $p+1$ dimensiones de la D_p -brana, que se dividen en 2 conjuntos con base en sus propiedades de transformación bajo el grupo de Lorentz longitudinal $SO(p, 1)$,



$\sum_{\alpha=1}^p \alpha_{-1}^\alpha |0; k\rangle \leftrightarrow$ p estados de partícula masiva con espín 1 ($m^2 = \frac{1-g}{\alpha'} > 0$)
 ↗ en polarización transversal, $\epsilon \cdot k = 0$
 ↗ como en Proca
 \leftrightarrow fluctuación de un campo vectorial masivo $A_\alpha(x^\beta)$ sobre D_p

$\sum_i \alpha_{-1}^i |0; k\rangle \leftrightarrow$ $D-p-1$ partículas masivas sin espín ($m^2 = \frac{1-g}{\alpha'} > 0$)
 ↗ $\epsilon \cdot k = 0$ es automático

↔ fluctuación de $D-p-1$ campos
escalares masivos $\Phi(x^\alpha)$ sobre D_p .

ii) Si $a=1$, entonces $m^2 = -k^2 = \frac{1-a}{\alpha'} = 0$.

El estado espurio $|\lambda k; k\rangle$ tiene ahora $\epsilon \cdot k = \lambda k^2 = 0$,
 y por lo tanto es nulo. Como resultado, tenemos
 la relación de equivalencia

$$|\epsilon; k\rangle \approx |\epsilon'; k\rangle \quad \text{si} \quad \epsilon'_\mu = \epsilon_\mu + \lambda k_\mu.$$

Con un empujón podemos ir al marco donde
 $k^\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$, y la condición de estado
 físico $\epsilon \cdot k = 0$ implica entonces $\epsilon_1 = -\epsilon_0$.

Dado que el estado con

$$\epsilon_\mu = (\epsilon_0, -\epsilon_0, 0, 0, \dots) \propto k_\mu = (-k, k, 0, 0, \dots)$$

es nulo, tenemos

$$(\epsilon_0, -\epsilon_0, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots) \approx (0, 0, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots),$$

es decir, cualquier estado físico es equivalente a
 una combinación lineal de estados $\propto_{-1}^\mu |0; k\rangle$ con
 $\mu \neq 0, 1$. No hay estados con normas negativas. ✓

Los estados físicos nuevamente son de 2 tipos
con respecto a $SO(p, 1)$,

$\epsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0; k\rangle \leftrightarrow p-1$ estados de partículas

no masiva con espín 1
 \uparrow con polarización transversal $\epsilon \cdot k = 0$
 y $\epsilon'_\alpha = \epsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$

\leftrightarrow fluctuación de un campo
vectorial no masivo $A_\alpha(x^\beta)$,

o sea decir, un campo de norma,

con $\epsilon_\alpha \simeq \epsilon'_\alpha = \epsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$ la

expresión de la invariancia de

norma

$A_\alpha(x) \rightarrow A'_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \partial_\alpha \lambda(x)$,

y $k \cdot \epsilon = 0$ es la condición de

norma de Lorentz $\partial \cdot A = 0$;

$\epsilon_i \alpha_{-1}^i |0; k\rangle \leftrightarrow D-p-1$ partículas no masivas

\uparrow $\epsilon \cdot k = 0$
 es automático

sin espín

\leftrightarrow Fluctuación de $D-p-1$ campos
escalares no masivos $\Phi^i(x^\alpha)$
 (sin invariancia de norma).
 $\epsilon_i \approx \epsilon_i + \lambda \vec{k}_i$
 no tiene
 ningún efecto

iii) Si $a > 1$, entonces $m^2 = -k^2 < 0$ (taquión)

El estado espurio $|\lambda k, k\rangle$ tiene $\epsilon \cdot k = \lambda k^2 \neq 0$
 y por tanto No es físico. ↑ viola $L_1 = 0$

Yendo al marco donde $k^\mu = (0, m, 0, 0, \dots)$,
 la condición de estado físico $\epsilon \cdot k = 0$ elimina los
 estados con $\epsilon_i \neq 0$.

El estado con norma negativa $\alpha_{-1}^0 |0, k\rangle$ es
 entonces físico. X

Del análisis de este nivel, concluimos entonces que:

* Para que la teoría tenga sentido, debemos tener $a \leq 1$.

* En el caso límite $a=1$ existen menor estados físicos
 no nulos ($b-2$ en lugar de $D-1$), lo cual está
 asociado a una invariancia de norma en el espaciotiempo
 ($A_\alpha \approx A_\alpha + \partial_\alpha \lambda \leftrightarrow \epsilon_\alpha \approx \epsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$).

$$\bullet \quad N \geq 2 \leftrightarrow m^2 \geq \frac{2-a}{\alpha'} \stackrel{a \leq 1}{\geq} \frac{1}{\alpha'} \quad :$$

P.ej. con $N=2$ se tienen $\alpha_{-1}^{\mu} \alpha_{-1}^{\nu} |0; k\rangle$ y $\alpha_{-2}^{\mu} |0; k\rangle$
 con $k^2 = \frac{a-2}{\alpha'}$

La combinación lineal más general es entonces

$$\left(\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^{\mu} \alpha_{-1}^{\nu} + \epsilon_{\mu} \alpha_{-2}^{\mu} \right) |0; k\rangle .$$

Los resultados para $N \geq 2$ dependen no solo del valor de la constante de orden a , sino también de la dimensión espaciotemporal D (\leftrightarrow número de X^{μ}).

P.ej., tomando $a=1$, se puede verificar (Tarea 3) que

$$|\psi\rangle \equiv \left\{ \alpha_{-1} \cdot \alpha_{-1} + \left(\frac{D-4}{5}\right) \alpha' (k \cdot \alpha_{-1})^2 + \left(\frac{D-1}{5}\right) \sqrt{2\alpha'} k \cdot \alpha_{-2} \right\} |0; k\rangle$$

(con $k^2 = -1/\alpha'$) es físico, y tiene norma

$$\langle \psi | \psi \rangle = \frac{2}{25} (D-1) (26-D) (2\pi)^D \delta^{(D)}(0)$$

$$< 0 \quad \text{si} \quad D > 26 . \quad \times$$

El resultado general ("teorema de no fantasmas") es

que los estados con normas negativas se eliminan $\forall N$

en las condiciones de estado físico si $a \leq 1$ y $D \leq 26$

[ver p.ej. 65W 2.3.3, Polchinski 4.4].

El caso límite $a=1, D=26$ es especial, puesto que da lugar a muchos más estados nulos, y contiene por tanto menos estados físicos (no nulos), como expresión de invariancia de norma en el espacio tiempo.

Tomando en cuenta todos los estados nulos, en el caso $a=1, D=26$ se encuentra que los estados físicos independientes son generados únicamente por $D-2$ osciladores transversales $\{\alpha_{-n}^j\}$ (como vimos explícitamente para el nivel $N=1$), que es justo lo que esperamos desde un principio, dado que solo $D-2$ de los campos X^M representan grados de libertad físicos.

Por esta razón, es solo para $a=1, D=26$ que el espectro en CCA (donde primero cuantizamos, y después eliminamos la redundancia) resulta ser idéntico al obtenido por cuantización en el caso de luz (p.143, donde primero

eliminar las redundancias y después cuantizarlos). En sentido inverso, se encuentra que la CCL solo es covariante bajo Lorentz si $D=26$.

Como veremos más adelante, el caso $\alpha=1, D=26$, que es el único donde a nivel de la teoría libre (en el espacio tiempo, es decir, cuando las cuerdas no interactúan)

tenemos

$$\mathcal{H}_{CCA} = \mathcal{H}_{CCL} = \mathcal{H}_{CCM} \text{ (BRST)}$$

covariante antigua (pointing to \mathcal{H}_{CCA})
 cov de luz (pointing to \mathcal{H}_{CCL})
 covariante moderna (ver más adelante) (pointing to \mathcal{H}_{CCM})

es también el único que tiene sentido al considerar interacciones.

L14: 29/09/21

Usando $\alpha=1, D=26$, podemos listar con más precisión los estados de la cuerda bosónica abierta (libre) asociados a una D_p -brana:

- $\boxed{N=0}$ $|0;k\rangle$ con $m^2 = -k^2 = -\frac{1}{\alpha'}$ Taquión
 solo $k_\alpha \neq 0$ \leftrightarrow campo escalar $\phi(x)$ sobre D_p

- $\boxed{N=1}$ $\epsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0;k\rangle$ con $m^2 = -k^2 = 0$ Fotón
 $\epsilon \cdot k = 0$
 $\epsilon_\alpha \approx \epsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$ \leftrightarrow campo de norma $A_\alpha(x)$ sobre D_p

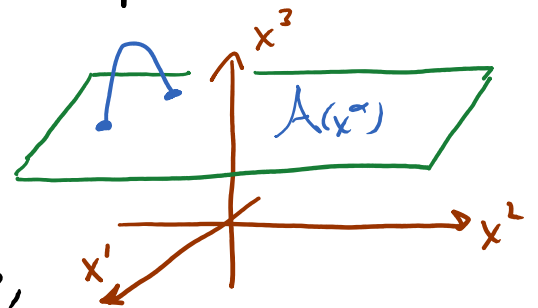
$$\varepsilon_i \alpha_{-1}^i |0; k\rangle \quad \text{con } m^2 = -k^2 = 0 \quad \text{Escalares}$$

↔ 25-p campo escalares $\Phi^i(x)$ sobre D_p

- $N \geq 2$ estado de partículas con $m^2 = -k^2 = \frac{N-1}{\alpha'}$ y espines $s \leq N$

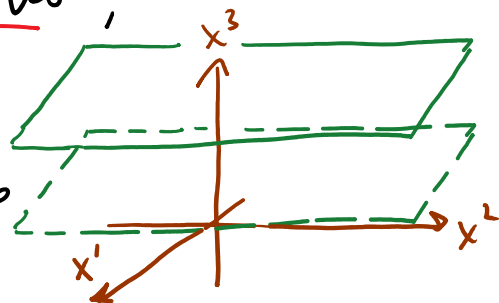
↔ campo tensoriales $A_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(x^\mu)$ sobre D_p .

Entendamos que estas partículas/campo representan excitaciones / grados de libertad de la D_p -brana. ¿Qué expectativas tenemos para ellas? Si la D -brana en verdad es un objeto dinámico, entonces, como mínimo, esperamos que pueda moverse. Pensaríamos entonces en describir su trayectoria covariantemente usando $D=26$ funciones de empuje $X^\mu(\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^p)$, o, si fijamos las normas estáticas $\sigma^\alpha = x^\alpha$, con 25-p funciones $X^i(x^\alpha)$ asociadas a las direcciones transversales. Estas son campos escalares bajo el grupo de Lorentz en la D_p .



Y esperamos que sean campos no masivos,

puesto que la δp en cualquier posición en Minkowski (cualquier valor esperado $\langle X^i(x^\alpha) \rangle = c^i$) tiene la misma



energía, así se las piensa fluctuaciones en su posición (es decir, las partículas asociadas a los campos $X^i(x^\alpha)$)

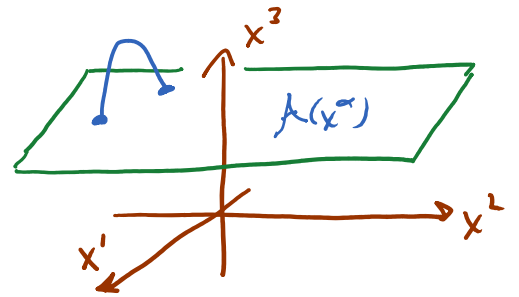
deben tener masa esto energético por excitar el campo cero (su energía mínima posible, correspondiente al modo constante $k^{\alpha \neq 0} \rightarrow 0$, es cero).

Esta es una propiedad genérica de los objetos solitónicos (en ausencia de un potencial): su posición está descrita por campos escalares no masivos, que se conocen como los coordenados colectivos del solitón.

Y hemos visto que precisamente eso es lo que obtenemos en el espectro de las cuerdas abiertas asociadas a una δp : un campo escalar no masivo $\Phi^i(x^\alpha)$ por cada dirección transversal a la brana ($i=p+1, \dots, 25$). ¡Así se los Φ^i son los coordenados colectivos esperados para la D -brana! (Más adelante comprobaremos que $X^i = \frac{\Phi^i}{2\pi\alpha'}$.) Y a las partículas asociadas bien les podríamos llamar entonces "particiones"...

Al cuantizar la cuerda abierta hemos obtenido entonces este resultado esperado, y mucho más: aprendemos que la D-brana tiene de hecho un número infinito de excitaciones internas descritas por los campos

$A_{\alpha_1 \dots \alpha_j}(x)$, incluyendo en particular al campo de norma vectorial $A_\alpha(x)$.



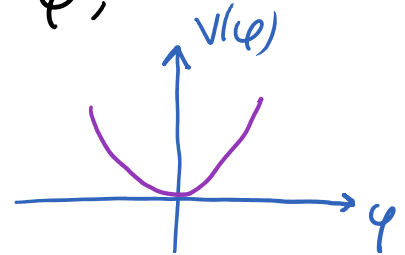
Todos ellos tienen $m^2 \geq 0$, excepto el campo escalar $\phi(x)$ que corresponde a la cuerda sin oscilar: el taquión.

Recordemos que para un campo arbitrario φ ,

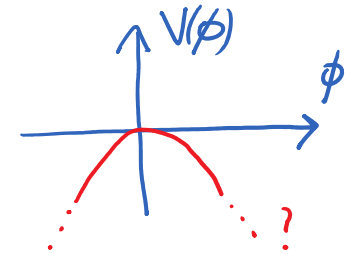
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - V(\varphi)$$

$$\text{con } V(\varphi) = V(0) + \cancel{V'(0)}\varphi + \frac{1}{2}V''(0)\varphi^2 + \dots,$$

$$\underbrace{\quad}_{\equiv m^2} \quad (\text{masa en el caso libre})$$



así que $m^2 < 0$, como obtuvimos para el modo más bajo ϕ en la cuerda abierta, simplemente quiere decir que $V''(0) < 0$.

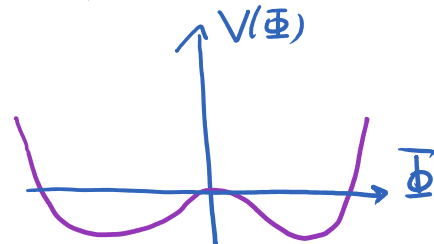


Es decir, estamos perturbando alrededor de un extremo del potencial que es un máximo, en lugar de un mínimo.

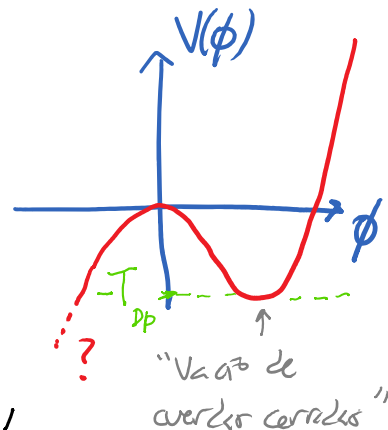
La existencia del taquión nos informa entonces que el

vacío con $\langle \phi \rangle = 0$, alrededor del cual estamos perturbando, es inestable: el sistema tiende a cambiar de estado para adquirir $\langle \phi \rangle \neq 0$ (porque es energéticamente favorable), proceso conocido como condensación del taquión.

La teoría será saludable solo si, al tomar en cuenta las interacciones, $V(\phi)$ tiene un mínimo absoluto, como sucede p.ej. para el campo de Higgs Φ en el Modelo Estándar.



Cálculos en la teoría del campo de cuerdas abiertas muestran que el potencial para el taquión ϕ es como se indica a la derecha, y que el mínimo corresponde a la completa desaparición de la D-brana, dejando solo el espaciotiempo cuélgero, cuyas excitaciones son solo cuerdas cerradas.



Así que las D-branas en la teoría de cuerdas bosónicas son inestables y tienden a decaer.

[Ver p.ej. hep-th/0311017, 0102085, 0410103.]

Procedamos ahora a cuantizar la cuerda cerrada.

El procedimiento es virtualmente idéntico, con la salvedad de que ahora los modos izquierdos α_n^μ son independientes de los derechos $\tilde{\alpha}_n^\mu$. El espectro es entonces básicamente el producto tensorial de 2 copias del espectro de la cuerda abierta.

Tenemos también modo de Virasoro independientes L_n y \tilde{L}_n , así que las condiciones de estado físico son

$$\begin{aligned} L_{n>0} |f\rangle &= 0, & \tilde{L}_{n>0} |f\rangle &= 0, \\ (L_0 - a) |f\rangle &= 0, & (\tilde{L}_0 - \tilde{a}) |f\rangle &= 0, \end{aligned}$$

donde (para la cuerda bosónica) tenemos por simetría $a = \tilde{a}$. Y, como la cuerda cerrada (a diferencia de la abierta) es además invariante bajo transformaciones

$$\sigma' \rightarrow \sigma' + c \quad \longleftrightarrow \quad \text{rotaciones en el plano } z = e^{\sigma' + i\tau'}$$

cuyo generador es $L_0 - a - \tilde{L}_0 + \tilde{a} = L_0 - \tilde{L}_0$ (p. 211),

debemos imponer la condición adicional

$$(L_0 - \tilde{L}_0) |f_{\text{fis}}\rangle = 0$$

← exige que los estados físicos sean independientes de nuestra elección de origen en $\sigma = \sigma'$

conocida como la condición de emparejamiento de niveles ("level-matching"). Esta es la única conexión entre los modos izquierdos y los derechos. Usando (p. 225)

$$L_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + N, \quad \tilde{L}_0 = \frac{\alpha' p^2}{4} + \tilde{N},$$

claramente equivale a

$$(N - \tilde{N}) |f_{\text{fis}}\rangle = 0.$$

Con un análisis idéntico al de la cuerda abierta, se encuentra nuevamente que los estados con normas negativas se eliminan solo si $a \leq 1$ y $D \leq 26$, y que en el caso límite $a=1, D=26$ hay muchos más estados nulos, de manera tal que el espectro coincide con el de cuantización en el caso de luz.

Especializando a este caso, tenemos entonces (a partir de $L_0 - 1 = 0 = \tilde{L}_0 - 1$) el espectro

$$m^2 = \frac{4}{\alpha'} (N-1) = \frac{4}{\alpha'} (\tilde{N}-1)$$

Los niveles más bajos son

- $N = \tilde{N} = 0 \leftrightarrow m^2 = -\frac{4}{\alpha'}$: estados $|0,0;k\rangle$ con $k^2 = \frac{4}{\alpha'}$
(todos son físicos)

Partícula sin espín \leftrightarrow Fluctuación de campo escalar $\phi(x)$

Teoría de cuerdas cerradas

x^μ
 $\mu=0,\dots,25$

(\neq teoría de cuerdas abiertas $\phi(x)$ con $m^2 = -\frac{1}{\alpha'}$)

$\uparrow x^\alpha \alpha=0,1,\dots,p$

- $N = \tilde{N} = 1 \leftrightarrow m^2 = 0$: $\sum_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle$ con $k^2 = 0$

$L_{n \geq 2} = 0 = \tilde{L}_{n \geq 2}$ se satisfacen en automática

$L_1 = 0 = \tilde{L}_1$ exigen que $k^\mu \sum_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} = 0 = k^\nu \sum_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu}$

polarización transversa .

Los estados

$L_{-1} \sum_{\nu} \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle$ y $\sum_{\mu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{L}_{-1} |0,0;k\rangle$

son físicos, y por tanto nulos, si $\sum \cdot k = 0 = \tilde{\sum} \cdot k$.

Tenemos entonces la relación de equivalencia

$$\epsilon_{\mu\nu} \simeq \epsilon'_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} + k_\mu \zeta_\nu + \xi_\mu k_\nu \quad \text{con } \zeta \cdot k = 0 = \xi \cdot k.$$

En el marco donde $k^\mu = (k, k, 0, 0, \dots)$, concluimos entonces que cada estado físico es equivalente a una combinación lineal

$$\epsilon_{ij} \propto \begin{pmatrix} i & \sim & j \\ -1 & & -1 \end{pmatrix} |0, 0; k\rangle \quad \text{con } i, j = 2, \dots, 25.$$

Estos son $(D-2)^2 = 24^2$ estados con polarización transversal. Podemos separarlos en 3 conjuntos de

estados que no se mezclan entre sí bajo Lorentz:

{	la traza $\epsilon_{ij} \propto \epsilon \delta_{ij}$	1 estado	<small>← invariante bajo rotaciones $SO(24)$</small>	<small>↑ $SO(24)$ nos mantiene en el mismo marco de referencia ("gripito")</small>
	la parte simétrica sin traza $\epsilon_{(ij)}$	$\frac{(D-2)(D-1)}{2} - 1$ estados		
	la parte antisimétrica $\epsilon_{[ij]}$	$\frac{(D-2)(D-3)}{2}$ estados		$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

Reservando ϵ un marco arbitrario, esto es

$$* \epsilon \eta_{\mu\nu}^T \propto \begin{pmatrix} \mu & \sim & \nu \\ -1 & & -1 \end{pmatrix} |0, 0; k\rangle \quad \text{partícula no masiva sin espín Dilatación}$$

$$k \cdot \eta^T = 0 = \eta^T \cdot k$$

↔ campo escalar $\phi(x)$

* $\Sigma_{(\mu\nu)} \alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} |0,0,k\rangle$ partícula no masiva con espín 2 gravitón

$$k \cdot \xi = 0$$

$$\xi_{\mu\nu} \simeq \xi_{\mu\nu} + \xi_{\mu} k_{\nu} + k_{\mu} \xi_{\nu}$$

$$(con\ k \cdot \xi = 0)$$

↔ campo tensorial simétrico $h_{\mu\nu}(x)$

¡ Justo lo que esperamos como fluctuación
de la Métrica $g_{\mu\nu}(x) \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$!

* $\Sigma_{[\mu\nu]} \alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} |0,0,k\rangle$ partícula en rep. antisimétrica "Antisimetrón"

$$k \cdot \xi = 0$$

$$\xi_{\mu\nu} \simeq \xi_{\mu\nu} + \xi_{\mu} k_{\nu} - k_{\mu} \xi_{\nu}$$

↔ campo tensorial antisimétrico $B_{\mu\nu}(x)$

Campo de Kalb-Ramond

(Como veremos más adelante en el curso, estos mismos 3 campos aparecen también entre los estados no masivos de la teoría de supercuerdas.)

Podemos notar que, en el caso del gravitón, la equivalencia

$$\xi_{\mu\nu} \simeq \xi'_{\mu\nu} = \xi_{\mu\nu} + k_{\mu} \xi_{\nu} + \xi_{\mu} k_{\nu}$$

corresponde a la invariancia de gauge

$$h_{\mu\nu}(x) \simeq h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) + \partial_{\mu} \xi_{\nu}(x) + \partial_{\nu} \xi_{\mu}(x),$$

que no es otra cosa que la expresión que corresponde

al cambio en la métrica debido a una reparametrización en el espaciotiempo, $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu - \xi^\mu(x)$
 (caso particular de la fórmula para un fondo arbitrario, $h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h'_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) + \nabla_\mu \xi_\nu(x) + \nabla_\nu \xi_\mu(x)$).
 $\leftarrow |\xi| \ll |x|$

Y en este mismo caso, la condición

$$k^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \partial^\mu h_{\mu\nu}(x) = 0$$

es básicamente la definición de la norma de Lorentz (=armónica = de de Darder). $\hat{=} \text{Lorentz}$

Dentro del enfoque que hemos adoptado, donde consideramos solo pequeñas fluctuaciones alrededor del espaciotiempo de Minkowski, vemos entonces que estos estados de vibración de la cuerda, $\epsilon_{(\mu\nu)} \propto \begin{pmatrix} \alpha^\mu & \tilde{\alpha}^\nu \\ -1 & -1 \end{pmatrix} (0, 0; k)$, en verdad reproducen perfectamente a un gravitón libre.

Más adelante aprenderemos cómo encender un valor de fondo para el campo correspondiente, $\langle h_{\mu\nu}(x) \rangle \neq 0$, y comprobaremos que el efecto es justamente una deformación grande de la métrica, $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$.

Y al agregar interacciones veremos que estos modos de

la cuerda en realidad interactúan como gravitones.

De manera similar, en el caso del antisimetrización

$$\varepsilon_{\mu\nu} \simeq \varepsilon'_{\mu\nu} + k_\mu J_\nu - J_\mu k_\nu$$

expresaz la invariancia de norma

$$B_{\mu\nu}(x) \simeq B'_{\mu\nu}(x) = B_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu J_\nu(x) - \partial_\nu J_\mu(x),$$

análoga a la transformación de norma

$$A_\mu(x) \simeq A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x)$$

para el potencial electromagnético.

Así que el campo de Kalb-Ramond es un campo de norma generalizado: un potencial con 2 índices en lugar de 1. Por analogía con $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, podemos definir una intensidad de campo asociada a $B_{\mu\nu}$,

$$H_{\mu\nu\lambda}(x) \equiv \partial_\mu B_{\nu\lambda} - \partial_\nu B_{\mu\lambda} - \partial_\lambda B_{\nu\mu},$$

tensor (0,3) totalmente antisimétrico que es invariante de norma.

L15: 04/10/21

Este campo juega un papel muy especial en la teoría

de cuerdas: veremos más adelante que, justo como el campo de norma vectorial se acopla de manera natural a una partícula (objeto cero-dimensional) a través de

$$S_{\text{int}} = q \int dz A_{\mu}(X(z)) \partial_z X^{\mu}(z),$$

↑ carga

el campo de norma tensorial $B_{\mu\nu}(x)$ se acopla de manera natural a la cuerda (objeto uno-dimensional) a través de

$$S_{\text{int}} = \rho \int dz d\sigma B_{\mu\nu}(X(z,\sigma)) \partial_z X^{\mu}(z,\sigma) \partial_{\sigma} X^{\nu}(z,\sigma).$$

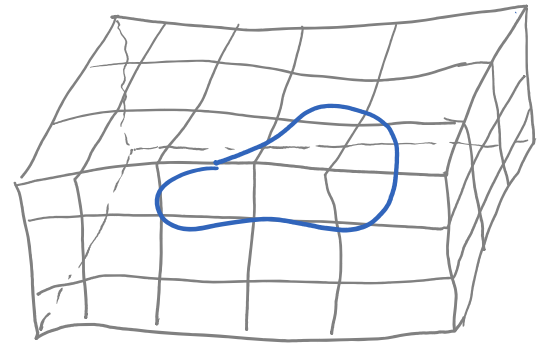
↑ densidad de carga

Es decir, nuestras cuerdas (cerradas o abiertas) están cargadas "eléctricamente" bajo $B_{\mu\nu}(x)$.

Pero, de nuevo, esto tendrá que esperar hasta que aprendamos cómo encender valores de fondo no triviales para los campos que hasta ahora solo hemos encontrado como fluctuaciones infinitesimales.

Lo que ya hemos podido empezar a confirmar es que en verdad las cuerdas cerradas son pequeñas fluctuaciones de

una estructura (el campo de cuerdas
cerradas) que incluye el propio
espaciotiempo 26-dimensional, junto con
un número infinito de otros campos.



El hecho de que entre estos campos se encuentre el término $\Phi(x)$ indica que el fondo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (todos los otros campos = 0) alrededor del cual estamos perturbando es también inestable a decaer en algo más (tal vez a un espaciotiempo con $D=2$ y un fondo dilatónico lineal $\phi(t,x) \propto x$, o quizás, a la nada \equiv ausencia de espaciotiempo).

[Ver p.ej. hep-th/0607037, 0611003, 0405064, 0506077.]

[9:03/04/13]

En resumen, comenzando con ingredientes muy sencillos,

Cuerdas como
excitaciones
básicas + Mecánica
Cuántica + Relatividad
Especial

hemos llegado a predecir la existencia de, en particular,

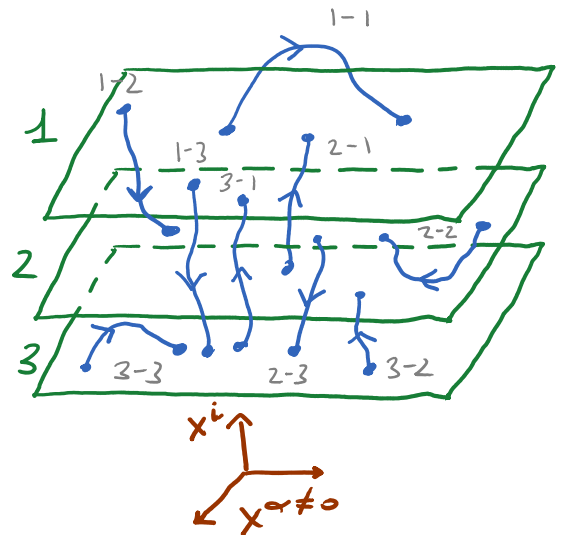
el campo de Maxwell $A_\alpha(x^\mu) \leftrightarrow$ fotones \leftrightarrow cuerdas
abiertas
el campo gravitacional $h_{\mu\nu}(x^\lambda) \leftrightarrow$ gravitones \leftrightarrow cuerdas
cerradas

al menos (hasta ahora) como campos libres (bajo la suposición de que $a=1$, necesaria para que $CCA=CCL$).

Esto por supuesto resulta atractivo como un primer paso en la dirección de reproducir propiedades de nuestro universo, aunque es claro que distamos todavía mucho de un modelo realista: tenemos $D=26$ y taquiones de 2 tipos, y nos falta incorporar interacciones y fermiones.

En esta misma dirección, hay otro rasgo importante de nuestro mundo que ya estamos en posibilidad de reproducir. Para ver esto, consideremos el espectro de excitaciones en presencia de más de una D-brana en la misma dimensionalidad p y la misma orientación.

En este caso (como vimos en la Tarea 1) hay más de un tipo de cuerdas abiertas, porque el extremo inicial ($\sigma=0$) y final ($\sigma=\pi$) de la cuerda puede estar sobre cualquiera de las D-branas.



En el dibujo, hemos agregado flechas a las cuerdas para indicar su orientación, es decir, el sentido en el cual aumenta la coordenada espacial en la hoja de mundo, σ . Por supuesto, cuál extremo llamamos $\sigma=0$ es solo una convención; pero lo importante es que existan 2 opciones que pueden ser físicamente distintas; la transformación de paridad $\sigma \rightarrow \pi - \sigma$ es discreta, y no necesariamente redundante (esto quedará claro más adelante).

Vemos entonces que, en presencia de N Dp-branas paralelas, existen N^2 tipos distintos de cuerdas abiertas.

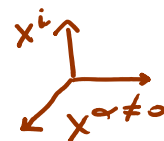
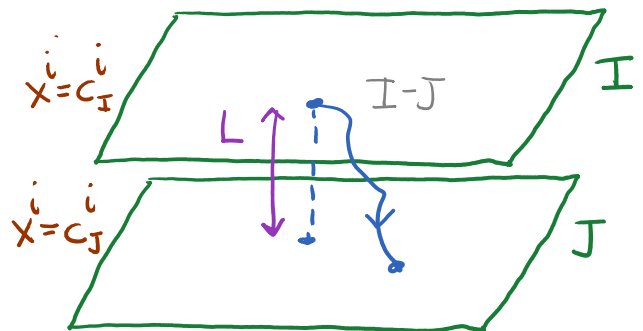
Podemos etiquetarlas $I-J$, con $I, J = 1, 2, \dots, N$, donde I denota la D-brana del extremo inicial y J la final.

Al cuantizarlas, obtendremos naturalmente N^2 copias de cada uno de los mismos estados que teníamos antes,

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \alpha_{-n}^{\mu_1} \dots |0; k; I, J\rangle,$$

↑ ↑
nuevas etiquetas

con la única novedad de que sus masas² reciben una contribución



↙ costo energético por estirar cuerda distancia L

adicional $\Delta m^2 = \left(\frac{L}{2\pi\alpha'}\right)^2$, donde $L \equiv \sqrt{(c_i - c_j)^2}$ es la longitud mínima posible de la cuerda en cuestión.

(Verificaremos este resultado para m^2 en la Tarea 3.)

Los campos asociados se pueden pensar entonces como matrices $N \times N$ $A_{IJ}^{m_1, \dots, m_r}(x^\alpha)$. En particular, en el nivel de excitación $N=1$ obtenemos

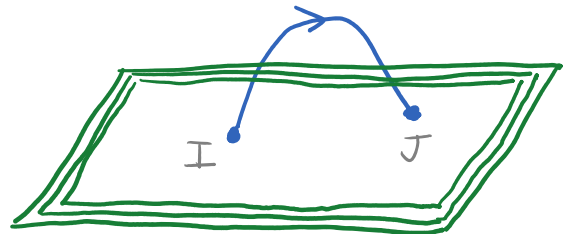
$$A_{IJ}^\alpha(x^\beta), \quad \Phi_{IJ}^i(x^\beta),$$

donde, en general, solo las componentes diagonales ($I=J$, asociados a cuerdas que empiezan y terminan en la misma D-brana) son no masivas.

Pero notemos que si colocamos todas las D-branas en el mismo sitio, $c_I^i = c^i$, entonces $L=0 \forall I, J$, así que las N^2 componentes de A^α y Φ^i se vuelven no masivas.

Los estados correspondientes,

$$E_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0; k; I, J\rangle$$



parecen ser entonces N^2 (en vez de N) fotones.

En este caso, tenemos una simetría adicional: dado que los

N D $_p$ -branos son enteramente indistinguibles, podemos hacer un cambio arbitrario de base con respecto a los índices I, J 'rotando' entre sí a los D-branos a través de una transformación unitaria $U \in U(N)$:

$$|I\rangle \rightarrow |I'\rangle \equiv U_{I'I} |I\rangle \quad \text{para el extremo inicial}$$

$$|J\rangle \rightarrow |J'\rangle \equiv U_{J'J}^* |J\rangle \quad \text{para el extremo final}$$

(con U^* en lugar de U en la segunda expresión, para que esta siga siendo una simetría en el caso interactuante, como veremos más adelante). Es decir, en la nueva base, el D-brano que identificamos como, p.ej., Z' , es una combinación lineal de los N D-branos originales, con coeficientes $U_{Z'I}$.

El efecto de esta transformación $U(N)$ es

$$\varepsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0, k; I, J\rangle \rightarrow U_{I'I} U_{J'J}^* \varepsilon_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0, k; I, J\rangle$$

sobre los estados, o lo que es lo mismo,

$$A^\alpha(x) \rightarrow A'^\alpha(x) = U A^\alpha(x) U^{-1}$$

índice: $I'J'$ $I'I$ IJ JJ' $\leftarrow = (U^*)^T = U^\dagger$

sobre el campo matricial (y similarmente para Φ^i , etc.)

Al cambiar esta simetría global con la invariancia ya conocida $E_\alpha \alpha_{-1}^\alpha |0; k; I, J\rangle \simeq (E_\alpha + \lambda k_\alpha) \alpha_{-1}^\alpha |0; k; I, J\rangle$, tenemos entonces la invariancia local bajo

$$A_\alpha(x) \rightarrow U(x) [A_\alpha(x) + i\partial_\alpha] U^{-1}(x),$$

$\uparrow \exp(i\lambda(x))$, con $\lambda(x)$ una matriz hermitiana $N \times N$

$$\Phi^i(x) \rightarrow U(x) \Phi^i(x) U^{-1}(x),$$

$\lambda(x)^\dagger = \lambda(x)$ \uparrow generadores

$$A^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) \rightarrow U(x) A^{\mu_1 \dots \mu_s}(x) U^{-1}(x)$$

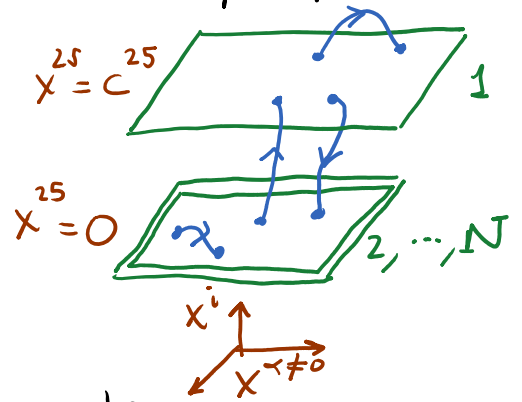
$\uparrow s=0, 2, 3, \dots$

Es decir, la física de una pila de N Dp-branas es descrita por una teoría de norma no abeliana (un infinito campo), con grupo de norma $U(N)$. Los $\alpha_{-1}^\mu |0; k; I, J\rangle$ son "gluones" (libros).

Hemos verificado esto en el caso donde las D-branas son todas coincidentes; pero ahora podemos entender ya por qué al separarlas se tiene menor simetría. Si empezamos con las N D-branas en (p.ej.) $x^i = 0$, para separar a,

digamos, la número 1, a lo largo de, p.ej., la dirección x^{25} , debemos encender un valor esperado al campo que describe su correspondiente coordenada colectiva (p.243),

$$\langle \Phi_{11}^{25}(x) \rangle = \frac{c^{25}}{2\pi\alpha'}$$



Del dibujo vemos que esto hace que surmente la masa de los componentes $I1$ y $1J$ de todos los campos. En particular, dichos componentes del campo de norma dejan de ser no masivos y adquieren una masa

$$m = \frac{|c^{25}|}{2\pi\alpha'} = |\langle \Phi^{25} \rangle|$$

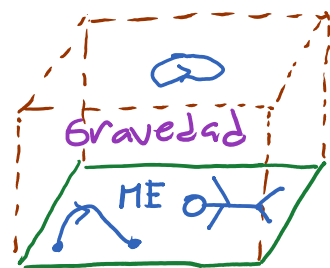
Esto es ni más ni menos que una implementación geométrica del mecanismo de Higgs! Estos bosones de norma

adquieren masa porque es justamente bajo Λ_{I1}^{α} y Λ_{1J}^{α} que está cargado el campo escalar Φ_{11}^{25} cuyo valor esperado encendimos (cosa que, de nuevo, quedará clara al estudiar las interacciones). Y como consecuencia de estas masas, la simetría disminuye (se rompe espontáneamente)

$$U(N) \rightarrow U(N-1) \times U(1).$$

Separando más branas podemos reducir aún más la simetría local, a $U(n_1) \times U(n_2) \times \dots$ si dejamos pilas con n_1, n_2, \dots branas coincidentes (donde $n_1 + n_2 + \dots = N$), y a solo $U(1)^N$ en el caso más genérico.

Con esto vislumbramos ya cómo es que en la teoría de cuerdas podríamos aspirar a obtener todas las interacciones del Modelo Estándar + Gravedad. Y entendemos también la motivación de la propuesta de mundo branas (p.42), donde los campos del Modelo Estándar viven solo dentro de una brana.



16: 06/10/21

Hasta ahora hemos visto que la eliminación de los estados con norma negativa en la cuantización covariante antigua requiere que $D \leq 26$, y el acuerdo con la cuantización en el caso de luz exige que $D = 26$ (que es a su vez la condición para que la CCL resulte en un espectro covariante bajo Lorentz).

En última instancia, la restricción a $D=26$ se debe a una sutileza: para $D \neq 26$ las transformaciones de Weyl NO son una simetría del sistema a nivel cuántico — existe una anomalía. Esto hace que $S_p[X, g]$ tenga $D-1$ en lugar de $D-2$ grados de libertad, y no empareja por tanto con la acción original para la cuerda, $S_{NG}[X]$.

En más detalle, si bien la acción

$$S_p[X, g] = \frac{1}{4\pi\alpha_c^2} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

es invariante bajo $g_{ab}(\sigma) \rightarrow \Omega(\sigma) g_{ab}(\sigma)$, las

medidas de integración $D_g X^\mu(\sigma) \propto \prod_\sigma dX^\mu_\sigma$ y

$D_g g_{ab} \propto \prod_\sigma dg_{ab, \sigma}$, que para respetar la invariancia

bajo difeo en la hoja de mundo se definen (como en las pp. 98-100) a partir de las normas

$$\|\delta X\|^2 \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g} \delta X^\mu \delta X^\nu \eta_{\mu\nu},$$

$$\|\delta g\|^2 \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} g^{cd} \delta g_{ac} \delta g_{bd},$$

NO son invariantes de Weyl.

En otras palabras: un parámetro de corte UV invariante bajo difeo necesariamente viola Weyl.

Para entender mejor este punto, analizaremos ahora la integral funcional en más detalle.

El punto de partida es que (de manera similar a lo que ocurre en el caso de la partícula, p.101)

$$\int \mathcal{D}_g g_{ab}(\sigma) \mathcal{D}_g X^\mu(\sigma) e^{-S_p[X, g]}$$

incluye cada trayectoria física un número infinito de veces,

$$(X^\mu(\sigma), g_{ab}(\sigma)) \xleftrightarrow{\text{Dif} \times \text{Weyl}} (\underline{X}^\mu(\sigma), \underline{g}_{ab}(\sigma)),$$

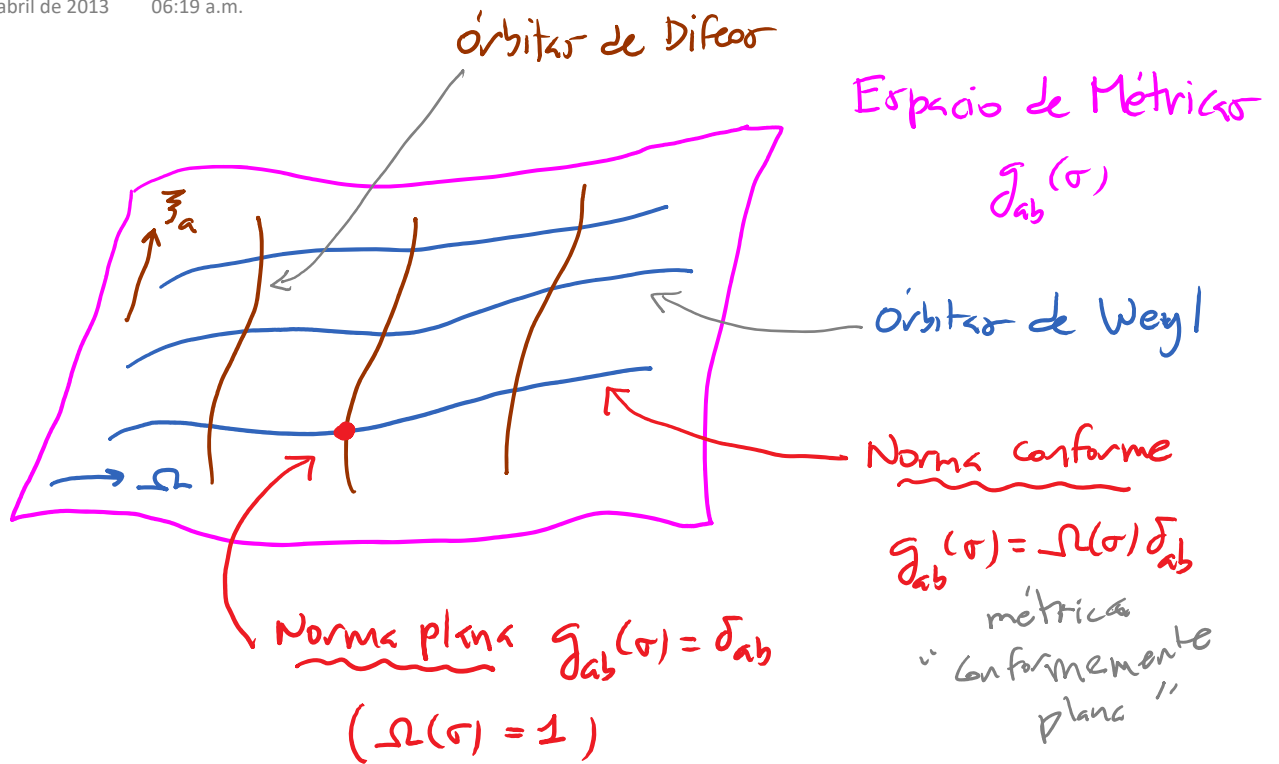
y no está por tanto bien definida.

Debemos eliminar la redundancia — fijar la norma. Nos interesa en realidad

$$\mathcal{Z} \equiv \int \frac{\mathcal{D}_g g_{ab}(\sigma) \mathcal{D}_g X^\mu(\sigma)}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} e^{-S_p[X, g]},$$

donde pretendemos fijar (localmente) la norma plana

$g_{ab}(\sigma) = \delta_{ab}$. Esquemáticamente:



Heitor resaltado que $g_{ab} \rightarrow \Omega g_{ab}$ pudiera no ser en verdad una simetría dentro de la integral funcional, así que primero eliminaremos la redundancia por difeos, fijando la normas conforme ("conformemente plana")

$$g_{ab}(\sigma) = \Omega(\sigma) \delta_{ab} \equiv \check{g}_{ab}(\sigma) \iff \check{g}_{zz} = 0 = \check{g}_{\bar{z}\bar{z}}, \quad \check{g}_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \Omega(z, \bar{z})$$

y después nos preguntaremos si el resultado es invariante de Weyl.

El primer paso es entonces reescribir $\mathcal{D}g_{ab} \rightarrow \mathcal{D}\check{g}_{ab} d\xi_a$: ↖ difeos

$$Z = \int \frac{Dg_{ab}^V(\sigma) D\tilde{\xi}_a(\sigma) D\tilde{X}^M(\sigma)}{\text{Weyl} \times \text{Dif}} \times (?) \times e^{-S_p[X, \tilde{\xi}]}$$

\uparrow Jacobiano que debemos determinar

Para esto, utilizamos el método de Faddeev-Popov:
 empleamos la generalización ∞ -dimensional de la identidad

$$1 = \int \underbrace{\prod_{i=1}^n d\xi_i}_{\prod_{j=1}^n dg_j} \det\left(\frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi_i}\right) \delta^{(n)}(g_j(\xi) - \check{g}_j)$$

con $i \rightarrow (z, \bar{z})$,

$$1 = \int D\tilde{\xi}_z(z, \bar{z}) D\tilde{\xi}_{\bar{z}}(z, \bar{z}) \det\left(\frac{\delta g_{zz}^{\tilde{\xi}}}{\delta \tilde{\xi}_z}\right) \det\left(\frac{\delta g_{\bar{z}\bar{z}}^{\tilde{\xi}}}{\delta \tilde{\xi}_{\bar{z}}}\right)$$

$$\times \delta^{(\infty)}\left(g_{zz}^{\tilde{\xi}}(z, \bar{z}) - \check{g}_{zz}(z, \bar{z})\right) \delta^{(\infty)}\left(g_{\bar{z}\bar{z}}^{\tilde{\xi}}(z, \bar{z}) - \check{g}_{\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z})\right)$$


condiciones
 de normas conforme ($g_{z\bar{z}}^{\tilde{\xi}} = \frac{\Omega}{2}$ queda libre)

$$\text{Usando } \det \left(\frac{\delta g_{z\bar{z}}^{\zeta}}{\delta \bar{\zeta}_z} \right) \Big|_{g=\check{g}} = \det \left(\frac{\delta}{\delta \bar{\zeta}_z} (g_{z\bar{z}} + 2\nabla_z \check{\zeta}_z) \right) \Big|_{g=\check{g}}$$

$$= \det(2\nabla_z) \Big|_{g=\check{g}} = \det(2\check{\nabla}_z)$$

$$\text{y } \det \left(\frac{\delta g_{z\bar{z}}^{\zeta}}{\delta \zeta_{\bar{z}}} \right) \Big|_{g=\check{g}} = \det(2\check{\nabla}_{\bar{z}}), \text{ esto es}$$

$$1 = \int \mathcal{D}\zeta_z \mathcal{D}\bar{\zeta}_{\bar{z}} \det(2\check{\nabla}_z) \det(2\check{\nabla}_{\bar{z}}) \delta(g_{z\bar{z}}^{\zeta}) \delta(g_{\bar{z}\bar{z}}^{\zeta}).$$


 podemos ignorar el 2: cte. de normalización

Insertando esta expresión en

$$\mathcal{Z} = \int \frac{\mathcal{D}g_{ab}^{\zeta}(\sigma) \mathcal{D}X_{\zeta}^{\mu}(\sigma)}{\text{Weyl} \times \text{Dif}} e^{-S_p[X_{\zeta}, g^{\zeta}]}$$

(que hemos reescrito usando la invariancia bajo

$$(X, g) \rightarrow (X_{\zeta}, g^{\zeta}), \text{ tenemos}$$

$$Z = \int \frac{D\bar{\xi}_z D\xi_{\bar{z}}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} \overbrace{Dg_{ab}^{\bar{z}}} Dg_{z\bar{z}}^{\bar{z}} Dg_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} Dg_{z\bar{z}}^{\bar{z}} DX_{\bar{z}}^{\omega} \\ \times \delta(g_{z\bar{z}}^{\bar{z}}) \delta(g_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}}) \text{Det} \check{V}_z \text{Det} \check{V}_{\bar{z}} e^{-S_p[X_{\bar{z}}, \bar{g}_{\bar{z}}]} .$$

Si ahora renombramos las variables de integración mudas

$$(X_{\bar{z}}, g_{\bar{z}}^{\bar{z}}) \rightarrow (X, g) ,$$

veremos que

$$Z = \int \frac{D\bar{\xi}_z D\xi_{\bar{z}}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} \overbrace{D\Omega} Dg_{z\bar{z}} Dg_{\bar{z}\bar{z}} Dg_{z\bar{z}} DX^{\omega} \\ \times \delta(g_{z\bar{z}}) \delta(g_{\bar{z}\bar{z}}) \text{Det} \check{V}_z \text{Det} \check{V}_{\bar{z}} e^{-S_p[X, g]} \\ = \int \frac{D\bar{\xi}_z D\xi_{\bar{z}}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} \underbrace{D\Omega DX^{\omega} \text{Det} \check{V}_z \text{Det} \check{V}_{\bar{z}} e^{-S_p[X, g]}} ,$$

Nada aquí depende ya de $\bar{\xi}_a$

es decir,

$$Z = \int \frac{D\Omega}{\text{Weyl}} \underbrace{\det \check{V}_z \det \check{V}_{\bar{z}}}_{\equiv \Delta_{\text{FP}}(\check{g})} D X^m e^{-S_p[X, \check{g}]}$$

determinante de Faddeev-Popov
(Jacobiano que buscábamos)

Habiendo decidido esto, la pregunta clave ahora es si

$$Z[\check{g}_{ab} = \Omega \delta_{ab}] \equiv \int D\check{g} X^m \Delta_{\text{FP}}(\check{g}) e^{-S_p[X, \check{g}]}$$

es o no independiente de Ω , porque si lo es, tendríamos finalmente

$$Z = \int \frac{D\Omega}{\text{Weyl}} \underbrace{Z[\Omega \delta_{ab}]}_{Z[\delta_{ab}]} = Z[\delta_{ab}]$$

↑ Normas
planas

Para responder esta pregunta, conviene reexpresar a $\Delta_{\text{FP}}(\check{g})$ en términos de campos auxiliares b_{ab} y c^a conocidos como fantasmas de Faddeev-Popov:

$$\text{Det } \check{V}_z = \int \mathcal{D}b_{\bar{z}\bar{z}} \mathcal{D}c^{\bar{z}} \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b_{\bar{z}\bar{z}} \check{V}_z c^{\bar{z}} \right],$$

$$\text{det } \check{V}_{\bar{z}} = \int \mathcal{D}b_{z\bar{z}} \mathcal{D}c^z \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b_{z\bar{z}} \check{V}_{\bar{z}} c^z \right],$$

donde

← vector, como ξ^a →

$\left\{ \begin{array}{l} \text{el fantasma } c^a(\sigma) \text{ es un campo vectorial anticommutativo} \\ \text{el antifantasma } b_{ab}(\sigma) \text{ es un campo tensorial simétrico} \\ \text{sin traza } (b_{z\bar{z}}=0) \text{ anticommutativo.} \end{array} \right.$

(Notar que este es una acepción de "fantasma" muy distinta a la que habíamos usado antes: estos son fantasmas amistosos, que ayudan en lugar de ajustar. Se les utiliza también al cuantizar Yang-Mills gvariantemente.)



Recordemos que para funciones ordinarias, conmutativas, tenemos (p.108)

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{2} \int d^2\sigma \varphi \Delta_\sigma \varphi} = \frac{1}{\sqrt{\text{Det } \Delta_\sigma}}$$

es paralelo con la integral gaussiana usual

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2} ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Este es el tipo de funciones que usamos para cuantizar por integral de trayectorias a campos bosónicos, que en el formalismo canónico obedecen relaciones de conmutación (como el campo de Klein-Gordon, φ^4 , Maxwell, Yang-Mills, Higgs, los X^μ de la partícula o la cuerda, etc.).

Pero para campos fermiónicos, que canónicamente obedecen relaciones de anticomutación (como el campo de Dirac, b_{ab} y $C^{\hat{a}}$) necesitamos usar en la integral funcional números anticomutativos. Estos se definen como un conjunto de objetos θ_i $i=1, \dots, n$, que son elementos de un espacio vectorial

$$c_0 + c_1 \theta_1 + \dots + c_n \theta_n \quad c_i \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C}$$

\uparrow $c_0 = 1$

y pueden multiplicarse formalmente tomando en cuenta la propiedad básica

$$\boxed{\{\theta_i, \theta_j\} \equiv \theta_i \theta_j + \theta_j \theta_i = 0 \quad \forall i, j \quad (\Rightarrow \theta_i^2 = 0)}$$

(Esto define lo que los matemáticos llaman un álgebra de Grassmann. Ver p.ej. mis apuntes de Campos II.)

La función más general de 1 número anticommutativo θ es entonces $a + b\theta$.

La definición natural de "integral", conocida como integral de Berezin, es

$$\int d\theta (a + b\theta) = b \quad (\text{coincide con derivada } \frac{d}{d\theta}!).$$

El análogo de una integral "gaussiana" es entonces

$$\int d\theta_1 d\theta_2 e^{-\theta_1 c \theta_2} = \int d\theta_1 d\theta_2 (1 - \theta_1 c \theta_2) = c.$$

exponente aparece en el numerador \uparrow
en vez de denominador

Así que, dador 2 campos anticommutativos

$$\psi(\sigma) \equiv \sum_i \varphi_i(\sigma) \psi_i, \quad \chi(\sigma) \equiv \sum_i \varphi_i(\sigma) \chi_i$$

\swarrow números anticommutativos \searrow
 \nearrow base ortogonal para funciones ordinarias,

$$\text{con } \Delta_\sigma \varphi_i(\sigma) = \lambda_i \varphi_i(\sigma), \quad \int d^2\sigma \varphi_i(\sigma) \varphi_j(\sigma) = \delta_{ij}$$

\uparrow operador diferencial que figura en acción de ψ, χ

tenemos

$$\begin{aligned}
 & \int D\psi(\sigma) D\chi(\sigma) e^{-\int d^2\sigma \chi \Delta_\sigma \psi} \\
 &= \int \prod_k (d\chi_k d\psi_k) e^{-\sum_{i,j} \chi_i \psi_j \underbrace{\int d^2\sigma \varphi_i \Delta_\sigma \varphi_j}_{\lambda_j \int d^2\sigma \varphi_i \varphi_j}} \\
 & \hspace{15em} \underbrace{\hspace{10em}}_{\delta_{ij}} \\
 &= \int \prod_k (d\chi_k d\psi_k) e^{-\sum_i \lambda_i \chi_i \psi_i} \\
 & \stackrel{\substack{\text{solo} \\ \text{posiblemente} \\ \text{un signo}}}{=} \prod_i \lambda_i = \det \Delta_\sigma,
 \end{aligned}$$

y esta es justo la propiedad que usamos al definir a los fantasmas de Faddeev-Popov en la p. 262.

(Notar que c^a y b_{ab} deben ser fermiónicos a pesar de tener espín entero en la hoja de mundo. Estos campos violan entonces, por construcción, el teorema de espín-estadística, lo cual no nos preocupa porque son solo campos auxiliares.)

Regresando a nuestro cálculo, hemos aprendido que el efecto neto de fijar las normas con respecto a difeos dentro de la integral funcional es agregar a nuestro sistema los 2 campos auxiliares c^a y b_{ab} , con acción

$$S_F[b, c, g] \equiv \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} b_{ca} \nabla_b c^c,$$

de tal forma que ahora tenemos

$$Z[\gamma] = \int D_\gamma X^\mu D_\gamma b_{ab} D_\gamma c^a e^{-S_p[X, \gamma] - S_F[b, c, \gamma]}.$$

Usando $\gamma_{ab} = \Omega \delta_{ab}$ la acción de los fantasmas toma la forma que anunciamos en la p. 262,

$$S_F[b, c, \gamma] = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{zz} \overset{\vee}{\nabla}_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \overset{\vee}{\nabla}_z c^{\bar{z}}).$$

En estas normas conforme, los únicos símbolos de Christoffel que no se anulan son

$$\Gamma_{zz}^z = \frac{\partial_z \Omega}{\Omega} \quad \text{y} \quad \Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} = \frac{\partial_{\bar{z}} \Omega}{\Omega},$$

así que

$$\nabla_{\bar{z}} c^z = \partial_{\bar{z}} c^z \quad \text{y} \quad \nabla_z c^{\bar{z}} = \partial_z c^{\bar{z}}$$

← para esto es
que elegimos
ab. u. el
índice arriba

Usando la notación abreviada

$$c \equiv c^z, \quad b \equiv b_{zz}, \quad \tilde{c} \equiv c^{\bar{z}}, \quad \tilde{b} \equiv b_{\bar{z}\bar{z}},$$

podemos escribir entonces

$$S_f[b, c, \tilde{b}, \tilde{c}, \gamma] = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b \bar{\partial} c + \tilde{b} \partial \tilde{c}).$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\bar{\partial} c = 0 = \bar{\partial} b, \quad \partial \tilde{c} = 0 = \partial \tilde{b},$$

así que c, b son analíticas y \tilde{c}, \tilde{b} anti-analíticas.

$\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c$ y $\frac{1}{2\pi} \int d^2z \tilde{b} \partial \tilde{c}$ son 2 nuevos teóricos
conformes, invariante bajo $z \rightarrow z'(z)$ con

$$b(z) \rightarrow b'(z') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{-2} b(z) \quad \text{operador primario con } h_b = 2 \quad (\tilde{h}_b = 0),$$

$$c(z) \rightarrow c'(z') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{+1} c(z) \quad \text{primario con } h_c = -1 \quad (\tilde{h}_c = 0),$$

$$\tilde{b}(\bar{z}) \rightarrow \tilde{b}'(\bar{z}') = \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}\right)^{-2} \tilde{b}(\bar{z}) \quad \text{primario con } \tilde{h}_{\tilde{b}} = 2 \quad (h_{\tilde{b}} = 0),$$

$$\tilde{c}(\bar{z}) \rightarrow \tilde{c}'(\bar{z}') = \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}}\right)^{+1} \tilde{c}(\bar{z}) \quad \text{primario con } \tilde{h}_{\tilde{c}} = -1 \quad (h_{\tilde{c}} = 0).$$

(Esto equivale a decir que b_{ab}, c^a son neutros bajo transformaciones de Weyl, pero debemos notar que entonces b^a_b, b^{ab}, c_a no lo son.)

Estos campos claramente son libres. Dado que el término "cuadrático" en la acción conecta a b únicamente con c , y a \tilde{b} únicamente con \tilde{c} , esperamos que las únicas funciones de 2 puntos distintas de cero sean $\langle b(z) c(z') \rangle$ y $\langle \tilde{b}(\tilde{z}) \tilde{c}(\tilde{z}') \rangle$ (esto es análogo al campo de Dirac, donde $S = \int d^D x \bar{\Psi}(i\not{\partial} - m)\Psi$ y por tanto $\langle \bar{\Psi}(x)\Psi(x') \rangle \neq 0$).

Para calcular estos propagadores, podemos proceder en analogía con lo que hicimos para X^μ en las pp. 192-3, notando que

$$0 = \int \mathcal{D}b(z) \mathcal{D}c(z) \overset{\text{derivada fermiónica}}{\frac{\delta}{\delta b(z_1)}} \left[e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c} b(z_2) \right]$$

$$= \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c \left[-\frac{1}{2\pi} \bar{\partial} c(z_1) b(z_2) + \delta^{(2)}(z_1 - z_2) \right] e^{-\frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c},$$

es decir,

$$\bar{\partial}_1 \langle c(z_1) b(z_2) \rangle = 2\pi \delta^{(1)}(z_1 - z_2) \quad \leftarrow \equiv \text{integral funcional apropiada}$$

Como de costumbre, el propagador es la función de Green del operador diferencial correspondiente.

Sabiendo ya (p.194) que

$$\bar{\partial} \ln |z|^2 = \partial \left(\frac{1}{\bar{z}} \right) = \bar{\partial} \left(\frac{1}{z} \right) = 2\pi \delta^{(2)}(z),$$

conocemos la solución a la anterior ecuación diferencial:

$$\langle c(z_1) b(z_2) \rangle = \frac{1}{z_1 - z_2} \quad \longleftrightarrow \quad \langle b(z_1) c(z_2) \rangle = \frac{1}{z_1 - z_2}.$$

↑ ¡Recordar que estos campos son anticonmutativos!

De manera similar, podemos mostrar que

$$\langle c(z_1) c(z_2) \rangle = 0, \quad \langle b(z_1) b(z_2) \rangle = 0,$$

y las 3 expresiones análogas para \tilde{c}, \tilde{b} .

Usando este propagador, definiremos el orden normal conforme como hicimos para X^M en la p.195:

$$:b(z_1) c(z_2): \equiv b(z_1) c(z_2) - \frac{1}{z_1 - z_2}$$

(teniendo cuidado con los signos por anticomutatividad al hacer contracciones en productos de 3 o más campos).

Este producto es analítico ($\bar{\partial} : \dots : = 0$) dentro de correladores, y permite por tanto expansiones de Taylor para obtener FPOs.

Desarrollemos los campos en modo de Laurent con la convención usual (p. 222)

$$b(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+2}} \quad \leftrightarrow \quad b_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} b(z) = b_{-n}^{\dagger}$$

$\curvearrowright h_b$

$$c(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n-1}} \quad \leftrightarrow \quad c_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n-2} c(z) = c_{-n}^{\dagger}$$

$\curvearrowright h_c$

(y análogamente para $\tilde{b}(\bar{z}), \tilde{c}(\bar{z})$).

En el caso de campos anticomutativos, la definición natural de orden temporal/radial incluye un -1 adicional (como en el campo de Dirac):

$$R(\hat{b}(z_1) \hat{c}(z_2)) = \begin{cases} \hat{b}(z_1) \hat{c}(z_2) & \text{si } |z_1| > |z_2| \\ -\hat{c}(z_2) \hat{b}(z_1) & \text{si } |z_1| < |z_2| \end{cases},$$

\uparrow

y se puede mostrar que es justamente esto lo que calcula la integral de trayectorias fermiónicas con inserciones.

Este signo menor hace que la fórmula que obtuvimos en la p.203 resulte en el anticommutador en lugar del conmutador de cargas conservadas,

$$\{\hat{Q}_i, \hat{Q}_j\} = \oint \frac{dz_j}{2\pi i} \operatorname{Res}_{z_i \rightarrow z_j} J_i(z_i) J_j(z_j) .$$

Con esta fórmula podemos calcular

$$\{b_m, c_n\} = \oint \frac{dz_2}{2\pi i} \operatorname{Res}_{z_1 \rightarrow z_2} \underbrace{z_1^{m+1} b(z_1) z_2^{n-2} c(z_2)}_{z_1^{m+1} z_2^{n-2} \frac{1}{z_1 - z_2} + \dots}$$

\uparrow
 $z_2^{m+1} + \dots$

$$= \oint \frac{dz_2}{2\pi i} z_2^{m+n-1} ,$$

es decir,

$$\boxed{\{b_m, c_n\} = \delta_{m,-n}} .$$

[17: 11/10/13]

Podemos mostrar similarmente que

$$\{b_m, b_n\} = 0 = \{c_m, c_n\} \quad \left(\Rightarrow \begin{array}{l} \text{en particular,} \\ b_n^2 = 0 = c_n^2 \end{array} \right)$$

y los 3 anticonmutadores análogos para \tilde{b}_m, \tilde{c}_n .

Así que, como era de esperarse, nuestros campos anticonmutativos libres equivalen a una colección infinita de osciladores armónicos fermiónicos.

Considerando a b_{-n}, c_{-n} ($n > 0$) como operadores de creación, es natural definir el estado base del sistema como aquel que satisface

$$b_n |vac\rangle = 0, \quad c_n |vac\rangle = 0 \quad \forall n > 0.$$

Pero, por la existencia de los modos cero b_0 y c_0 , existen de hecho 2 estados así:

$$|\downarrow\rangle \text{ tal que } b_0 |\downarrow\rangle = 0, \quad b_{n>0} |\downarrow\rangle = 0 = c_{n>0} |\downarrow\rangle$$

y

↙ NO se refiere a espín
↘

$$|\uparrow\rangle \text{ tal que } c_0 |\uparrow\rangle = 0, \quad b_{n>0} |\uparrow\rangle = 0 = c_{n>0} |\uparrow\rangle.$$

(El enunciado análogo en el caso bosónico es que para los campos X^μ tenemos infinitos estados base $|0; k\rangle$.)

Usando $b_0^2 = 0$, $c_0^2 = 0$, nos queda claro que estos 2 estados están conectados por

$$|\uparrow\rangle = c_0 |\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\rangle = b_0 |\uparrow\rangle.$$

↑ aniquilado por c_0

↑ aniquilado por b_0

Será conveniente para nosotros considerar a b_0 como el operador de aniquilación (y c_0 de creación). Nuestro espacio de Hilbert se construye entonces actuando sobre $|\downarrow\rangle$ con los operadores de creación c_0, c_{-n}, b_{-n} (máximo 1 vez con cada uno).

El tensor de energía-momento para los fantasmas se puede determinar a partir de la definición usual

$$T_{ab}^f \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_f}{\delta g^{ab}},$$

o como la corriente de Noether asociada a las transformaciones $\sigma^a \rightarrow \sigma^a + \epsilon^a$. En coordenadas complejas se encuentra que

$$T_{(z)}^f \equiv T_{z\bar{z}}^f(z) = -2 : b \partial c : + : c \partial b : ,$$

usamos la misma convención que en $T_{(z)}^x$ para definir el operador compuesto

con lo cual podemos calcular la EPO

$$\begin{aligned}
 T(z)T(z') &= 4 : b \partial_c(z) : : b \partial_c(z') : - 4 : b \partial_c(z) : : c \partial_b(z') : \\
 &\quad + : c \partial_b(z) : : c \partial_b(z') : \\
 &= \underbrace{4 b \partial_c b \partial_c}_{\text{buscar nuevamente el término más singular}} - \underbrace{4 b \partial_c c \partial_b}_{\text{cancela}} + \underbrace{c \partial_b c \partial_b}_{\text{términos en 1 ó 0 contracciones}} + \dots \\
 &\quad \underbrace{\partial\left(\frac{1}{z-z'}\right)}_{-\frac{1}{(z-z')^2}} \underbrace{\partial'\left(\frac{1}{z-z'}\right)}_{+\frac{1}{(z-z')^2}} - \underbrace{\left(\frac{1}{z-z'}\right) \partial \partial'\left(\frac{1}{z-z'}\right)}_{-\frac{2}{(z-z')^3}} \underbrace{\partial\left(\frac{1}{z-z'}\right) \partial'\left(\frac{1}{z-z'}\right)}_{\dots} \\
 &= \frac{-4}{(z-z')^4} + \frac{-8}{(z-z')^4} + \frac{-1}{(z-z')^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(z-z')^2}\right) \\
 &= \frac{-13}{(z-z')^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(z-z')^2}\right).
 \end{aligned}$$

Recordando la expresión general para cualquier teoría de campo conforme (p. 218)

$$T(z)T(z') = \frac{c}{2(z-z')^4} + \frac{2}{(z-z')^2} T(z) + \frac{1}{(z-z')} \partial T(z') + \dots,$$

← carga central
← h para T
← transformación bajo transacciones (L₋₁)

aprendamos entonces que **b, c** tienen carga central

$$\boxed{c^{b,c} = -26} \quad (\text{y } \tilde{c}^{b,c} = 0).$$

Similáramente, \tilde{b}, \tilde{c} tienen $\tilde{c}^{\tilde{b}, \tilde{c}} = -26$ (y $c^{\tilde{b}, \tilde{c}} = 0$).

Considerando a ambas teorías a la vez, escribiremos

$$c^f = -26, \quad \tilde{c}^f = -26$$

[10: 09/04/13]

Se puede mostrar que en teorías de campos conformes donde no existen estados con norma negativa (es decir, fantasmas malos) se tiene necesariamente $c > 0$ (de hecho, $c \geq 1$ y $h \geq 0$, salvo por las opciones discretas $c = 1 - 6/(r(r+1))$ con $r=3, 4, \dots$ y ciertos valores específicos de h). [Ver p.ej. hep-th/9108028 sección 4.3, Polchinski 2.9 y 15.1, o Di Francesco et al. 7.2.]

Usando $b_n^{\dagger} = b_{-n}$ y $c_n^{\dagger} = c_{-n}$, que, como se puede verificar, implican $|\downarrow\rangle^{\dagger} = \langle \uparrow |$ (es decir, $\langle \uparrow | \downarrow \rangle = 1$, $\langle \downarrow | \downarrow \rangle = 0$), es fácil ver que la teoría S_f tiene en efecto estados con norma negativa, como p.ej. $b_{-n} c_{-n} |\downarrow\rangle$ (ver Tarea 3).

El que b, c (y \tilde{b}, \tilde{c}) tengan $c < 0$ ($\tilde{c} < 0$) y por tanto

constituyen "un número negativo de grados de libertad" va de la mano con su papel como campos auxiliares, que cancelan grados de libertad no físicos en X^m -p.ej. X^0, X^1 . (Se tiene una situación análoga al cuantizar Yang-Mills.)

En términos de la expansión en modos b_n, c_n ,

$$\begin{aligned} T^f(z) &= -2 : b \partial c(z) : + : c \partial b(z) : \\ &= -2 : \sum_{n,k} \frac{b_n}{z^{n+2}} \frac{(1-k)c_k}{z^k} : + : \sum_{n,k} \frac{c_k}{z^{k-1}} \frac{(-n-2)b_n}{z^{n+3}} : \\ &\quad \underbrace{\hspace{15em}} \\ &\quad - : \sum_{n,k} \frac{(-n-2)b_n}{z^{n+3}} \frac{c_k}{z^{k-1}} : \\ &= \sum_{n,k} \frac{(2k+n)}{z^{n+k+2}} : b_n c_k : , \end{aligned}$$

así que los modos de Virasoro son

$$L_m^f \stackrel{p.208}{=} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} T^f(z) = \sum_{n,k} (2k+n) : b_n c_k : \underbrace{\oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{z^{m+1}}{z^{n+k+2}}}_{\delta_{m,n+k}} ,$$

es decir,

$$L_m^f = \sum_n (2m-n) : b_n c_{m-n} :$$

Por conviene reescribir esto usando el orden normal de creación aniquilación,

$\circ \circ \equiv$ poner b_{-n}, c_{-n}, c_0 a la izquierda de c_n, b_n, b_0 .
(con factores de -1 por anti conmutación)

En este caso $::$ y $\circ \circ$ No coinciden; pero por la forma de L_m^f vemos que esto solo afecta el modo $m=0$, así que

$$L_m^f = \sum_n (2m-n) \circ b_n c_{m-n} \circ + A^f \delta_{m,0}$$

↖ constante de orden

Como hicimos para X^w , podemos determinar A^f estableciendo directamente la relación entre $:bc:$ y $\circ bc \circ$, o utilizando el álgebra de Virasoro (p. 223)

$$[L_m^f, L_n^f] = (m-n) L_{m+n}^f + \frac{c^f}{12} (m^3 - m) \delta_{m,-n}$$

para notar que

$$\begin{aligned}
 A^f | \downarrow \rangle &= L_0^f | \downarrow \rangle = \frac{1}{2} (L_1^f L_{-1}^f - L_{-1}^f L_1^f) | \downarrow \rangle \\
 &= \frac{1}{2} (2b_0 c_1 + \dots) (-b_{-1} c_0 + \dots) | \downarrow \rangle \\
 &\quad \underbrace{-c_1 b_{-1} b_0 c_0}_{\langle b_0, c_0 \rangle = 1} \\
 &\quad \underbrace{-\langle c_1, b_{-1} \rangle = -1} \\
 &= - | \downarrow \rangle,
 \end{aligned}$$

$L_m^f = \sum_n (2m-n) : b_n c_{m-n} :$

es decir, $A^f = -1$. ← Será importante más adelante

Regresemos ahora al tema de la anomalía de Weyl:
 deseamos saber si

$$\begin{aligned}
 Z[\check{g}_{ab}] &\equiv \int (Db Dc D\tilde{b} D\tilde{c} DX^m)_{\check{g}} e^{-S_p[X, \check{g}] - S_f[b, c, \tilde{b}, \tilde{c}, \check{g}]} \\
 &\equiv \langle 1 \rangle_{\check{g}} \quad \text{es o no invariante de Weyl.}
 \end{aligned}$$

Por definición, bajo $\check{g}_{ab} \rightarrow \check{g}_{ab} + \delta g_{ab}$ tenemos

$$\delta Z = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\gamma} \langle T^{ab} \rangle_{\gamma} \delta g_{ab} + \mathcal{O}(\delta g^2) .$$

↑ tensor de energía-momento cuántico:
incluye posible contribución de la
medida en integral funcional

Como siempre, la invariancia bajo difeos $\delta g_{ab} = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a$
implica la conservación de este tensor,

$$\langle \nabla_a T^{ab} \rangle_{\gamma} = 0 .$$

Consideremos ahora una transformación de Weyl infinitesimal

$$\gamma_{ab} \rightarrow e^{\delta\omega(\sigma)} \gamma_{ab} , \text{ es decir, } \delta g_{ab} = \delta\omega \gamma_{ab} .$$

En este caso, $\langle T^{ab} \rangle_{\gamma} \delta g_{ab} = \langle T^a_a \rangle_{\gamma} \delta\omega$,
así que preguntarnos acerca de la invariancia de Weyl
básicamente equivale a verificar si $\langle T^a_a \rangle_{\gamma} = 0$ (y
condiciones similares a orden más alto en $\delta\omega$).

Examinaremos ahora esto en más detalle partiendo de
la norma plana $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$:

$$\delta Z = -\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \delta\omega(\sigma) \langle T^a_a(\sigma) \rangle_\sigma$$

porque en normas planas
 si teníamos invariancia
 conforme \leftrightarrow Weyl
 (No sucede para $\tilde{g}_{ab} \neq \tilde{g}_{ab}$)

$$+ \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4\pi}\right)^2 \int d^2\sigma d^2\sigma' \delta\omega(\sigma) \delta\omega(\sigma') \langle T^a_a(\sigma) T^b_b(\sigma') \rangle_\sigma + \dots$$

o, en coordenadas complejas,

$$\delta Z = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 \left(\frac{1}{2} \cdot 4\right)^2 \int d^2z d^2z' \delta\omega(z, \bar{z}) \delta\omega(z', \bar{z}') \langle T_{z\bar{z}} T_{z'\bar{z}'} \rangle_\sigma$$

Usando $\nabla^a T_{ab} = 0$

$$\xleftrightarrow{\frac{\delta}{\delta\sigma}} \partial_{\bar{z}} T_{z\bar{z}} + \partial_{\bar{z}'} T_{z\bar{z}'} = 0$$

$$\left(\partial_{\bar{z}} \partial_{\bar{z}'}\right)^{-1} \langle \partial_{\bar{z}} T_{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}'} T_{z'\bar{z}'} \rangle_\sigma$$

$$\langle \partial_{\bar{z}} T_{z\bar{z}} \partial_{\bar{z}'} T_{z'\bar{z}'} \rangle_\sigma$$

$$\partial_{\bar{z}} \partial_{\bar{z}'} \langle T_{z\bar{z}} T_{z'\bar{z}'} \rangle_\sigma$$

p. 218 \rightarrow

$$= \frac{c}{2(z-z')^4}$$

$$\partial_{\bar{z}}^2 \partial_{\bar{z}'} \left[\frac{c}{12(z-z')} \right]$$

$$\partial_{\bar{z}} \partial_{\bar{z}'} \left[\frac{c}{12} \partial_{\bar{z}} \left(\frac{1}{z-z'} \right) \right]$$

$2\pi \delta^{(2)}(z-z'),$

así que

$$\delta Z = \frac{c}{48\pi} \int \mathcal{D}^2 \sigma \partial_{\bar{z}} \delta \omega \partial_{\bar{z}} \delta \omega .$$

L18: 13/10/21

Se puede mostrar que la contraparte de este resultado cuando se hace una transformación de Weyl finita a partir de una métrica inicial \tilde{g}_{ab} arbitraria es

$$Z[e^{\omega} \tilde{g}_{ab}] = e^{-c S_L[\omega, \tilde{g}]} Z[\tilde{g}_{ab}] ,$$

con S_L la llamada acción de Liouville

$$S_L[\omega, \tilde{g}] \equiv -\frac{1}{96\pi} \int \mathcal{D}^2 \sigma \sqrt{\tilde{g}} \left(2\tilde{R}\omega + \underbrace{\tilde{g}^{ab} \partial_a \omega \partial_b \omega}_{\text{término que reproducimos}} + \underbrace{\omega^2 e^{\omega}}_{\text{presente si integramos}} \right).$$

escalar de Ricci
(=0 cuando $\tilde{g}_{ab} = \delta_{ab}$)

término que reproducimos

presente si integramos $\omega^2 \int \mathcal{D}^2 \sigma \sqrt{\tilde{g}}$ en acción original

[ver p.ej. Polchinski 9.6, 9.7].

Concluimos entonces que la integral funcional Z es invariante de Weyl solo si $\boxed{c=0}$ (y $\boxed{\tilde{c}=0}$).

Adicionalmente, fuera de la norma plus tenemos $\tilde{R} \neq 0$, y por tanto δZ tiene una contribución lineal en $\delta \omega$,

de modo que

$$\langle T^a_a \rangle_g = -\frac{c}{12} \tilde{R}.$$

Así que p.ej. S_p no es estrictamente invariante conforme cuando $\tilde{g}_{ab} \neq g_{ab}$.

En nuestro caso,

$$c = c^{\text{TOT}} = c^x + c^f = D - 26$$

contribución a
anomalía de Weyl que
proviene de $\int dX^m$

contribución de $\frac{\mathcal{D}g_{ab}}{\text{Dif}}$
($\leftrightarrow \int D_b D_c \bar{D}\tilde{b} \tilde{D}\tilde{c} e^{-S_f}$)

así que la teoría es invariante de Weyl, y podemos entonces cancelar (p.268)

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}w(\sigma)}{\text{Weyl}} Z[e^w \tilde{g}_{ab}] = \int \frac{\mathcal{D}w(\sigma)}{\text{Weyl}} Z[\tilde{g}_{ab}] = Z[\tilde{g}_{ab}],$$

solo si $\boxed{D=26}$.

Llamamos a esta la dimensión crítica para las cuerdas bosónicas en espaciotiempo plano. Como veremos

más adelante, en el caso de la supercuerda en fondo plano, los campos adicionales en la hoja de mundo acaban modificando esta condición a $D=10$. Y, como veremos incluso antes de lo anterior, el valor de la dimensión crítica cambia también si consideramos a la cuerda bosónica en un fondo no trivial — es decir, distinto a Minkowski con todos los otros campos apagados.

Para cubrir todos los casos desde una perspectiva más general, podemos definir una teoría de cuerdas (a nivel perturbativo) como una teoría de campos conforme en 2 dimensiones, con carga central total igual a cero.

Si, en la teoría de cuerdas bosónicas en fondo plano, tomamos $D \neq 26$, el campo $w(\sigma)$ no se desacopla. Podríamos entonces olvidar el factor $\frac{1}{\text{Weyl}}$ (no se necesita para eliminar redundancia, porque no hay tal redundancia), y trabajar con

$$Z = \int \mathcal{D}w Z[e^w g_{ab}] = \int \mathcal{D}w \mathcal{D}X^{\tilde{M}} \mathcal{D}b \mathcal{D}c \mathcal{D}\tilde{b} \mathcal{D}\tilde{c} e^{-cS_L - S_p - S_f}.$$

Nuestra teoría tiene entonces 1 grado de libertad adicional. Si tomamos p.ej. $\omega^2=0$, entonces

$$S_L[\omega, \overset{y}{g}_{ab}] = -\frac{1}{96\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\overset{y}{g}} \left(\overset{y}{g}{}^{ab} \partial_a \omega \partial_b \omega + 2\overset{y}{R} \omega \right)$$

muestra que el campo escalar $\omega(\sigma)$ puede considerarse como una X^M adicional que es espacial o temporal si $D < 26$ o $D > 26$; pero sin invariancia bajo

transformaciones $\omega \rightarrow \omega + c$. Llamamos a esta una

teoría de cuerdas no crítica. ^{← D equivocada} Interesantemente, es posible reinterpretarla como una teoría de cuerdas

habitual (es decir, crítica), pero con $\boxed{D+1}$ dimensiones

y un fondo no trivial (como entenderemos más adelante, se trata de un fondo dilatónico lineal, $\varphi(X, \omega) \propto \omega$). [Ver, p.ej., Polchinski 9.9.]

Con una u otra interpretación, vemos que de hecho sí es posible trabajar con $D \neq 26$; pero el precio que pagamos es que el fondo no parece prometer

para describir algo parecido a nuestro mundo.
 El caso $D=1$ ($D+1=2$) se ha estudiado mucho, porque resulta no tener taquión, y puede ser descrito de manera no perturbativa a través de una discretización de la hoja de mundo que conduce a un modelo matricial. [Ver p.ej. hep-th/9108019, 9304011, 9411028 sección 5, 0310287.]

Regresando a nuestra discusión principal, ahora que tenemos a $b, c, \tilde{b}, \tilde{c}$ como campos adicionales, los generadores de Virasoro total $L_m^{\text{TOT}} \equiv L_m^X + L_m^F$ satisfacen el álgebra sin extensión central,

$$[L_m^{\text{TOT}}, L_n^{\text{TOT}}] = (m-n) L_{m+n} + \frac{c^{\text{TOT}}}{12} (m^3 - m) \delta_{m,-n} ,$$

Para imponer la ecuación de movimiento faltante $T^{ab} \propto \delta J / \delta g_{ab} = 0$ a nivel cuántico, pensaríamos nuevamente pedir

$$\langle f_{\text{FS}}' | L_m^{\text{TOT}} | f_{\text{FS}} \rangle = 0 \quad \forall m .$$

Pero ahora tenemos un nuevo problema, porque claramente el espacio de Hilbert es más grande que antes: se construye con los operadores de creación

$$\{ \alpha_{-n}^{\mu}, b_{-n}, c_{-n}, c_0, \tilde{\alpha}_{-n}^{\mu}, \tilde{b}_{-n}, \tilde{c}_{-n}, \tilde{c}_0 \}$$

actuando sobre el vacío $|0,0;k\rangle | \downarrow \downarrow \rangle$. Y peor aún, hemos visto que esto de lugar a estados con norma negativa adicionales. ¿Cómo podemos entonces distinguir a los estados físicos?

La presencia de los fantasmas nos permite recurrir a un formalismo más poderoso que la CCA: la cuantización BRST (Becchi, Rouet, Stora; Tyutin), o cuantización covariante moderna (CCM). Aquí solo esbozaremos rápidamente las ideas principales. [Para más detalle, ver Polchinski 4.2-4.3, o GSW 3.2.]

El punto de partida es que, aún después de fijar la norma plana $g_{ab} = \delta_{ab}$, nuestro sistema

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X \cdot \bar{\partial} X + \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b \bar{\partial} c + \tilde{b} \partial \tilde{c})$$

tiene una simetría global remanente: la llamada

transformación BRST

$$\delta X^{\mu} = i\varepsilon (c\partial + \tilde{c}\bar{\partial}) X^{\mu},$$

← difeo con parámetros $\varepsilon c(z), \varepsilon \tilde{c}(\bar{z})$

$$\delta b = i\varepsilon (T^X + T^f), \quad \delta c = i\varepsilon c\partial c,$$

$$\delta \tilde{b} = i\varepsilon (\tilde{T}^X + \tilde{T}^f), \quad \delta \tilde{c} = i\varepsilon \tilde{c}\bar{\partial}\tilde{c},$$

con ε un parámetro (constante) anticommutativo.

El teorema de Noether conduce entonces a la corriente conservada

$$j_{BRST}(z) = cT^X + \frac{1}{2} :cT^f: + \frac{3}{2} \partial c \quad (\text{y } \tilde{j}_{BRST}(\bar{z}) = \tilde{c}\tilde{T}^X + \dots)$$

y por tanto, a la carga BRST

$$Q_{BRST} = \frac{1}{2\pi i} \oint (d\bar{z} j_{BRST} - d\tilde{z} \tilde{j}_{BRST})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n L_{-n}^X + \tilde{c}_n \tilde{L}_{-n}^X)$$

$$+ \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{m-n}{2} : (c_m c_n b_{-m-n} + \tilde{c}_m \tilde{c}_n \tilde{b}_{-m-n}) : - (c_0 + \tilde{c}_0)$$

(un objeto fermiónico tal que $Q_{\text{BRST}}^{\dagger} = Q_{\text{BRST}}$).

Se puede mostrar que los resultados serán invariantes bajo un cambio en la condición de norma

$$N(g, X) = \delta_{ab} - g_{ab} = 0 \rightarrow N + \delta N$$

si los estados físicos son invariantes bajo BRST, es decir,

$$Q_{\text{BRST}} |\text{fís}\rangle = 0 .$$

Además, el requisito de que Q_{BRST} se conserve aún después del cambio en la condición de norma equivale a

$$Q_{\text{BRST}}^2 = 0 .$$

Es decir, una propiedad básica de la carga BRST es que debe ser nilpotente. En nuestro caso, esto resulta cumplirse solo si $D=26$, lo cual constituye por tanto una quinta manera de deducir la dimensión crítica (En $D \neq 26$ decir que hay una anomalía BRST.)

Una consecuencia de $Q_{\text{BRST}}^2 = 0$ es que un estado del tipo $Q_B |\text{arbitrario}\rangle$ es trivialmente físico, y es además ortogonal a todos los estados físicos (incluido él mismo), es decir, es nulo. Tenemos entonces la relación de equivalencia

$$|\psi\rangle \simeq |\psi'\rangle \quad \text{si} \quad |\psi\rangle - |\psi'\rangle = Q_{\text{BRST}} |\chi\rangle.$$

En matemáticas, cuando se tiene un operador nilpotente como Q_{BRST} , o la derivada exterior d sobre formas diferenciales $A_{(p)} = \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \dots \wedge dx^{\mu_p}$ (↑ producto exterior o cúps), ($dA_{(p)}$ tiene componentes $(dA)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]}$), es habitual utilizar la noción de cohomología para referirse a la construcción recién descrita.

En esta terminología, los estados físicos, $Q_B |\text{fís}\rangle = 0$, se llaman cerrados, los nulos, $Q_B |\chi\rangle$, se llaman exactos,

y al conjunto de clases de equivalencia

$$[|\psi\rangle] \equiv \{ |\psi'\rangle \mid |\psi'\rangle - |\psi\rangle = Q_B |\chi\rangle \}$$

de estados cerrados módulo exactos

se le llama la cohomología de Q_{BRST} ,

$$\mathcal{H}_{BRST} \equiv \frac{\mathcal{H}_{\text{cerrados}}}{\mathcal{H}_{\text{exactos}}}$$

A cada $[|\psi\rangle]$ se le llama una clase de cohomología.

Podemos clasificar a estos estados con base en su número de fantasmas F (y \tilde{F}), que es la carga de Noether asociada a la simetría global

$$c \rightarrow e^{+i\theta} c, \quad b \rightarrow e^{-i\theta} b \quad (\text{con } \theta \text{ conmutativo),}$$

cuya corriente es $j(z) = -:bc:$, y carga

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{-n} b_n - b_{-n} c_n) + c_0 b_0 - \frac{1}{2}$$

Vemos entonces que

$$F |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle, \quad \text{y } \begin{matrix} c_{-m}, c_0 \\ b_{-n} \end{matrix} \text{ cambian } F \text{ por } \begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix}.$$

Es fácil verificar (ya sea a partir de la EPO de j_{BRST} con b , o de las expansiones en modos) que

$$\{Q_{BRST}, b_m\} = L_m^x + L_m^f,$$

así que podemos lograr que los estados físicos satisfagan la condición de capa de masa

$$L_0^{TOT} |fís\rangle = (L_0^x + L_0^f) |fís\rangle = 0$$

si exigimos como condición adicional que

$$b_0 |fís\rangle = 0 \quad (\text{y } \tilde{b}_0 |fís\rangle = 0)$$

$$\Rightarrow L_0^{TOT} |fís\rangle = \{Q_{BRST}, b_0\} |fís\rangle = 0.$$

La parte de fantomas será entonces del tipo

$$\underbrace{c_{-n_1} \dots b_{-m_1}} | \downarrow \rangle$$

tal que $Q_{BRST} |fís\rangle = 0$

En cada uno de los clases de equivalencia que satisfacen esta condición se puede encontrar siempre un estado "sin fantasmas" $|\psi\rangle$ tal que

$$|\psi\rangle = |\psi_x\rangle |\downarrow\downarrow\rangle.$$

Y en este caso,

$$\begin{aligned} Q_B |\psi_x\rangle |\downarrow\downarrow\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[c_{-n} (L_n^x - \delta_{n,0}) + \tilde{c}_{-n} (\tilde{L}_{-n}^x - \delta_{n,0}) \right] |\psi_x\rangle |\downarrow\downarrow\rangle, \end{aligned}$$

así que $Q_B |\psi\rangle = 0$ es equivalente a las condiciones

$$\begin{aligned} L_{n>0}^x |\psi_x\rangle = 0 &= \tilde{L}_{n>0}^x |\psi_x\rangle \\ (L_0^x - 1) |\psi_x\rangle = 0 &= (\tilde{L}_0^x - 1) |\psi_x\rangle \end{aligned}$$

que tenemos en cuantización covariante antigua (CCA).

Podemos notar en particular que la constante de orden $a=1$ (que fue crucial para obtener al gravitón y los bosones de normas vectoriales) en realidad proviene de

$$L_0^{\text{TOT}} |\psi_x\rangle |\downarrow\downarrow\rangle = (L_0^x + L_0^f) |\psi_x\rangle |\downarrow\downarrow\rangle,$$

$$L_0^f = \sum_{n=1}^{\infty} n (b_{-n} c_n + c_{-n} b_n) - 1.$$

\uparrow
 A^f (p. 284-5)

En resumen, en la cuantización BRST los estados físicos son clases de cohomología de Q_{BRST} , con número de fantasmas $F = -1/2$ (y $\tilde{F} = -1/2$), y como hemos esbozado, esto conduce a los mismos resultados que CCA y CCL.

2. Cuerdas Bosónicas II

Hasta ahora hemos hablado de una cuerda libre, para la cual usamos una hoja de mundo con la topología de un cilindro (en el caso de la cuerda cerrada, y una tira en el caso de la cuerda abierta):

