

$\int Dg_{\tau\tau} Dg Dg X^{\mu}$ incluye cada trayectoria física de la partícula un número infinito de veces. Concretamente,

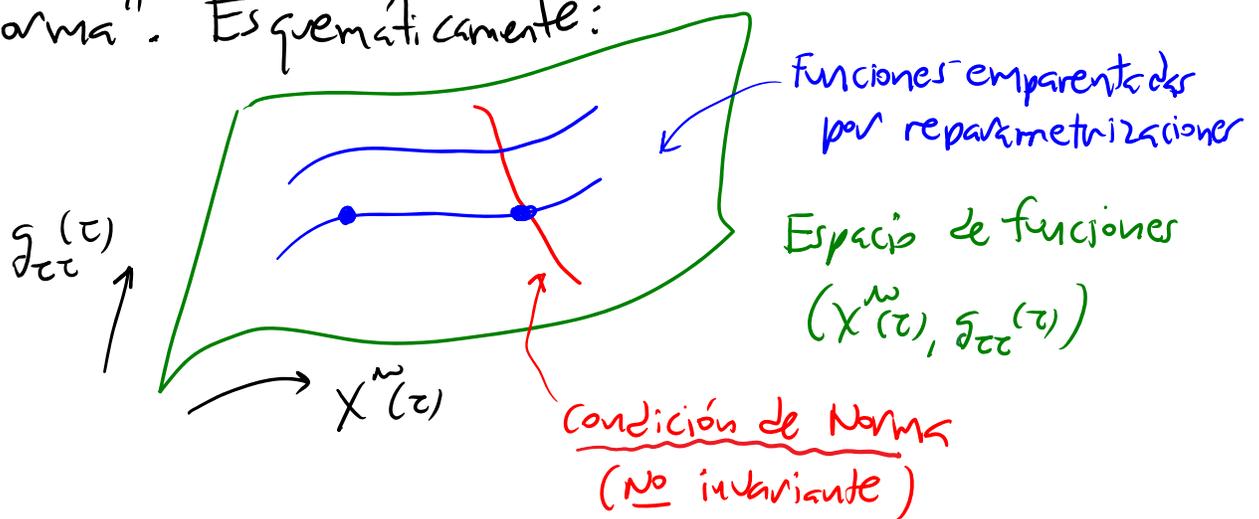
$$(X^{\mu}(\tau), g_{\tau\tau}(\tau)) \quad \text{y} \quad (X'^{\mu}(\tau'), g'_{\tau\tau}(\tau'))$$

describen la misma trayectoria física si existe una función $\tau'(\tau)$ tal que $X'^{\mu}(\tau') = X^{\mu}(\tau)$ y $g'_{\tau\tau}(\tau') = \left(\frac{\partial\tau}{\partial\tau'}\right)^2 g_{\tau\tau}(\tau)$.

No debemos entonces integrar libremente sobre todas las funciones $X^{\mu}(\tau)$ y $g_{\tau\tau}(\tau)$, sino definir

$$G_2(x', x) = \int_{\substack{X(0)=x^{\mu} \\ X(1)=x'^{\mu} \\ \text{Reparametrizaciones}}} \frac{Dg_{\tau\tau} Dg Dg X^{\mu}}{e^{i\bar{S}[X, g]}}$$

Es decir, necesitamos eliminar la redundancia, "fijar la norma". Esquemáticamente:



Lo interesante es que, ahora que además del parámetro τ

nos hemos inventado la variable auxiliar $g_{\tau\tau}(\tau)$, podemos fijar la norma (= especificar τ) de manera covariante bajo Lorentz, imponiendo una condición no sobre una de las $X^\mu(z)$, sino sobre $g_{\tau\tau}(\tau)$. Eliminamos la redundancia por completo si pedimos p.ej. que $g_{\tau\tau}(z) = \text{cte.}$: cualquier métrica en 1 dim, existe una y solo una reparametrización de $\tau \in [0, 1]$ que la hace independiente de τ .

Notar sin embargo que

$$\int_0^1 d\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}} \equiv T \quad \leftarrow \text{"tiempo" propio total} \quad \text{es invariante bajo reparametrizaciones}$$

en τ , así que no podemos elegir libremente el valor constante de la métrica: debemos poner $g_{\tau\tau}(\tau) = -T^2$, y, para incluir todas las trayectorias físicas distintas, integramos sobre todos los valores posibles de T .

Es decir,

$$\int_{\text{Reparametrizaciones}} \frac{D_g g_{\tau\tau} D_g X^\mu}{D_g g_{\tau\tau} D_g X^\mu} = \int_0^\infty dT \underbrace{\mu(T)}_{\text{función por determinar}} \int_{D_T} D_T X^\mu$$

(Notar que, de hecho, podríamos reparametrizar $\tau \rightarrow \tau'(\tau) = T\tau$ para lograr que $g'_{\tau\tau}(\tau) = -1$; pero entonces tendríamos $\tau' \in [0, T]$, y habría falta por tanto sumar de cualquier manera sobre todos los posibles valores de T .)

Es muy buena noticia que al final no resulte necesario hacer la integral $\int \mathcal{D}g_{\tau\tau}$, porque no era gaussiana. La deducción de $\mu(T)$ es sutil, e involucra el procedimiento para fijar la norma dentro de la integral funcional, conocido como método de Faddeev-Popov (que veremos más adelante, en el contexto de la cuerda), pero al final arroja el sencillo resultado $\mu(T) = 1$.

Así que nuestras 2 invenciones, τ (\leftrightarrow difeo) y $g_{\tau\tau}(z)$, se cancelan casi por completo una a la otra, y al final tenemos

$$G_2(x', x) = \int_0^{\infty} dT \int_{\substack{X(0)=x \\ X(1)=x'}} \mathcal{D}_T X^{\mu} \exp \left[i \frac{m}{2} \int_0^1 d\tau \left(\frac{\dot{X}^2}{T} - T \right) \right],$$

es decir, una integral funcional puramente gaussiana.

La ec. de mov. que se deduce del lagrangiano

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{X}^{\mu} - T \right)^2 \quad \text{es} \quad \ddot{X}^{\mu} = 0, \quad \text{cuyas soluciones}$$

son líneas rectas en el espaciotiempo, justo como esperaríamos clásicamente para una partícula libre.

Podemos extraer de la integral funcional $\int \mathcal{D}_T X^{\mu}$ la dependencia de x^{μ} y x'^{μ} haciendo un cambio de variable (función) de integración $X^{\mu}(\tau) \rightarrow Y^{\mu}(\tau)$, con

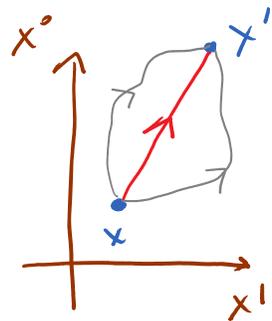
$$X^{\mu}(\tau) \equiv \underbrace{x^{\mu} + (x'^{\mu} - x^{\mu})\tau}_{\text{Solución de ec. de mov. que satisface } X^{\mu}(0) = x^{\mu}, X^{\mu}(1) = x'^{\mu}} + \underbrace{Y^{\mu}(\tau)}_{\text{Función arbitraria (fluctuación) tal que } Y^{\mu}(0) = 0 = Y^{\mu}(1)}$$

Solución de ec. de mov. que satisface

$$X^{\mu}(0) = x^{\mu}, \quad X^{\mu}(1) = x'^{\mu}$$

Función arbitraria (fluctuación) tal que

$$Y^{\mu}(0) = 0 = Y^{\mu}(1)$$



$$\Rightarrow \dot{X}^{\mu}(\tau) = (x'^{\mu} - x^{\mu}) + \dot{Y}^{\mu}(\tau)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 d\tau \dot{X}^2 = (x' - x)^2 + 2(x' - x)_{\mu} \int_0^1 d\tau \dot{Y}^{\mu} + \int_0^1 d\tau \dot{Y}^2$$

Se anula porque extremizamos la acción

Dado que

$$\mathcal{D}_T X^w(\tau) \propto \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^D X(\tau_1) \cdots d^D X(\tau_{N-1}),$$

$$\mathcal{D}_T Y^w(\tau) \propto \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^D Y(\tau_1) \cdots d^D Y(\tau_{N-1}),$$

y en cada τ_n dado, $X^w(\tau_n)$ y $Y^w(\tau_n)$ difieren solo por una constante,

$$X^w(\tau_n) = (x'^w - x^w) \tau_n + Y^w(\tau_n),$$

tenemos $\mathcal{D}_T X^w(\tau) = \mathcal{D}_T Y^w(\tau)$ (el jacobiano es 1).

Obtenemos entonces

$$\Theta_2(x', x) = \int_0^1 dT e^{i \frac{m}{2T} (x' - x)^2 - i \frac{m}{2} T \int_0^1 d\tau \dot{Y}^2}$$

Nos interesa solo la dependencia de T

Como mencionamos antes, $\mathcal{D}_T X^w \equiv \mathcal{D}_g X^w$ se define usando $g_{\tau\tau} = -T^2$. La receta apropiada es insertar $(\sqrt{\Delta\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_n)}})^D = (\sqrt{T/N})^D$ en cada punto de la discretización ($\Delta\tau \equiv 1/N$, $\tau_0 = 0$, $\tau_n \equiv n\Delta\tau$, $\tau_N = 1$):

$$\begin{aligned}
 \int \mathcal{D}_T Y^M e^{i \frac{m}{2T} \int_0^1 d\tau \dot{Y}^2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d^D y_1 \dots d^D y_{N-1} \left(\sqrt{\frac{T}{N}} \right)^{D(N-1)} \exp \left[i \frac{m}{2T} \sum_{n=1}^N \Delta\tau \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta\tau} \right)^2 \right] \\
 z_n &\equiv \frac{y_n}{\sqrt{T}} \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{T}{N}} \cdot \sqrt{T} \right)^{D(N-1)} \int d^D z_1 \dots d^D z_{N-1} \exp \left[i \frac{m}{2} \sum_{n=1}^N \Delta\tau \left(\frac{z_n - z_{n-1}}{\Delta\tau} \right)^2 \right] \\
 &\propto \prod_{n=1}^{\infty} T^D, \quad \text{independiente de } T, \propto \sqrt{\Delta\tau}^{D(N-1)}
 \end{aligned}$$

Otra perspectiva: podemos eliminar a T de la medida de integración $\mathcal{D}_T Y^M \sim \sqrt{T}^D d^D y_1 \dots \sqrt{T}^D d^D y_{N-1}$ definiendo $W^M \equiv \sqrt{T} Y^M$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
 \int \mathcal{D}_T Y^M \exp \left[i \frac{m}{2T} \int_0^1 d\tau \partial_\tau Y \cdot \partial_\tau Y \right] &= \int \mathcal{D}W^M \exp \left[i \frac{m}{2T^2} \int_0^1 d\tau \partial_\tau W \cdot \partial_\tau W \right] \\
 &= \int \mathcal{D}W^M \exp \left[\frac{i}{2} \int_0^1 d\tau W \cdot \underbrace{\left(-\frac{m}{T^2} \partial_\tau^2 \right)}_{\equiv \Delta_\tau} W \right].
 \end{aligned}$$

El operador diferencial $\Delta_z \equiv -\frac{m}{T^2} \partial_z^2$ tiene un conjunto completo de funciones propias

$$f_n(z) = \sqrt{2} \sin(n\pi z)$$

$\leftarrow n=1, 2, \dots$

\leftarrow satisfacen condiciones de borde
 $f_n(0) = 0 = f_n(1)$ /

con valores propios $\lambda_n \equiv \frac{m}{T^2} n^2 \pi^2$.

Desarrollando

$$W^M(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^M f_n(z), \quad \text{podemos reinterpretar}$$

$$\int \mathcal{D}W^M(z) \propto \int_{-\infty}^{\infty} d^D c_1 d^D c_2 \dots,$$

quedando entonces con las integrales gaussianas

$$\int \mathcal{D}W^M \exp \left[\frac{i}{2} \int_0^1 dz \underbrace{W \cdot \Delta_z W}_{\sum_n c_n f_n, \sum_n \lambda_n c_n f_n} \right], \quad \text{con } \int dz f_n f_m = \delta_{n,m}$$

$$\propto \int_{-\infty}^{\infty} d^D c_1 d^D c_2 \dots \exp \left[\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n c_n^2 \right].$$

Recordando que $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$ (válido para a imaginaria, por continuación analítica), concluimos entonces que, en general,

$$\int \mathcal{D}W^M \exp \left[\frac{i}{2} \int_0^1 \tau W \cdot \Delta_\tau W \right] \propto \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \right)^D$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \dots}} \right)^D \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{\det \Delta_\tau}} \right)^D,$$

↑ determinante funcional

y en nuestro caso particular,

$$\int \mathcal{D}_T \gamma^M e^{\frac{i m}{2T} \int_0^1 \tau \dot{\gamma}^2} \propto \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m}{T^2} n^2 \pi^2 \right)^{-D/2}$$

$$\propto \prod_{n=1}^{\infty} T^D = T^{D \sum_{n=1}^{\infty} 1},$$

que coincide con lo que tenemos en la p. 106.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ claramente diverge, y se trata de un efecto de distancias pequeñas / energías grandes, es decir, una divergencia ultravioleta (UV). Para lidiar con ella, procedemos de la manera habitual en teoría cuántica de campos:

I) Primero 'regularizamos', es decir, modificamos a menos la teoría en el UV de tal modo que el resultado

sea finito, y por tanto manejable.

II) Después renormalizamos, es decir, cambiamos a parámetros más directamente físicos, lo cual acaba teniendo como consecuencia que cancelamos las divergencias UV y podemos entonces retirar la regularización.

[4: 19/02/13

En el caso que nos interesa, podemos por ejemplo regularizar reemplazando

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\epsilon n}$$

← suprime modos UV
con $n \gg 1/\epsilon$

↑ "parámetro de corte"

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - e^{-\epsilon}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - (1 - \epsilon + \frac{1}{2}\epsilon^2 - \dots)} - 1 \right)$$

$$\frac{1}{\epsilon(1 - \frac{1}{2}\epsilon + \dots)} \approx \frac{1}{\epsilon} (1 + \frac{1}{2}\epsilon + \dots)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right)$$

"Renormalizaremos" descartando la parte divergente, para quedarnos con

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 \rightarrow -\frac{1}{2} \quad (!!),$$

lo cual, como veremos, conduce al resultado correcto para el propagador.

Conviene mencionar que es posible extraer este mismo resultado con un truco matemático: el procedimiento de continuación analítica conocido como regularización por función zeta. Para ello, recordemos la definición de la función zeta (delta) de Riemann

$$\zeta(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} du \frac{u^{z-1}}{e^u - 1}$$

para $\text{Re } z > 1$, que puede continuarse analíticamente a todo el plano complejo, a través de la relación

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \text{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(1-z) \zeta(1-z).$$

El resultado es una función que es holomorfa, o analítica, en todo $z \in \mathbb{C}$, excepto en $z=1$, donde tiene un polo simple (correspondiente a $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$).

Por continuación analítica, podemos entonces definir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) \rightarrow \zeta(0) = -\frac{1}{2},$$

que, según lo que afirmamos antes, ¡es el resultado deseado! (Notar que esto requirió solamente un paso, que empaqueta entonces regularización y renormalización.)

La regularización por función zeta parece magia negra; pero desde los '70s y '80s es de hecho un método respetable [ver p.ej. hep-th/9308028 y refs. ahí citados].

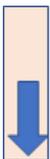
Usando este "resultado", podemos proceder ahora a la etapa final de nuestro cálculo:

$$G_2(x', x) = \int_0^{\infty} dt T^{-D/2} e^{i \frac{m}{2T} (x' - x)^2 - i \frac{m}{2} t}$$

$$\propto \int_0^{\infty} dt t^{-D/2} e^{i \frac{(x' - x)^2}{2t} - \frac{i}{2} m^2 t}$$

$$\propto \int_0^{\infty} dt \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-\frac{i}{2} (m^2 + p^2) t + i p \cdot (x' - x)}$$

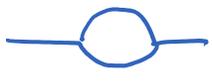
Completar cuadrado y hacer D-integrar gaussianas



Haciendo la integral sobre t , obtenemos finalmente

$$G_2(x', x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot (x-x')} \frac{-i}{p^2 + m^2} \quad \checkmark$$

que efectivamente es el resultado correcto, p. 81 (salvo que en este cuento no le hemos seguido la pista a la constante de normalización).

Hasta aquí apenas hemos mostrado que cuantizando directamente a una partícula se puede reproducir el propagador de Feynman para una teoría de campos libre. Para reproducir los diagramas de Feynman de una teoría de campos interactuante, es posible agregar los vértices de interacción a mano (p.ej., , donde  denota la propagación libre y  = $-i\lambda$ es una interacción cúbica).

Así que, si uno se pone necio, es posible hablar de partículas cuánticas relativistas SIN usar campos [ver p.ej. Bjorken & Drell, vol. 1]. Pero el resultado

es torpe (p.ej., una batalla por asegurarse de que la descripción sea unitaria), y necesariamente perturbativo, y por tanto, incompleto.

¡Por eso usamos campos!

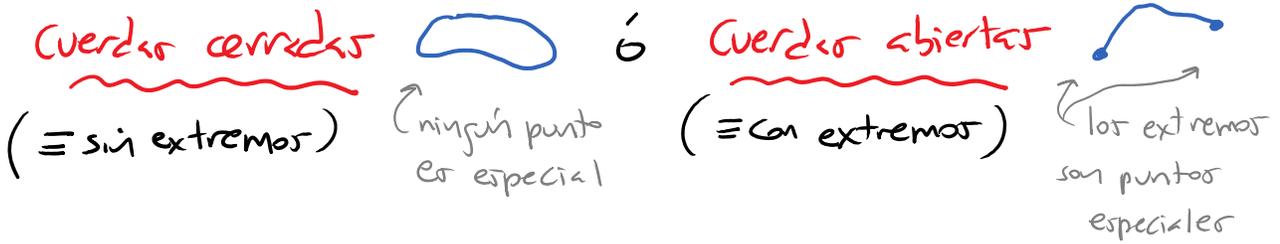
(Aunque, por otro lado, algunos cálculos de diagramas en loop se procesan más eficientemente con este método de "primera cuantización", que en una versión inspirada por las técnicas de cuerdas, se conoce también como "formalismo de la línea de mundo"
[ver, p.ej. Schubert, hep-th/9610108, 0703186].)

* Cuerdas

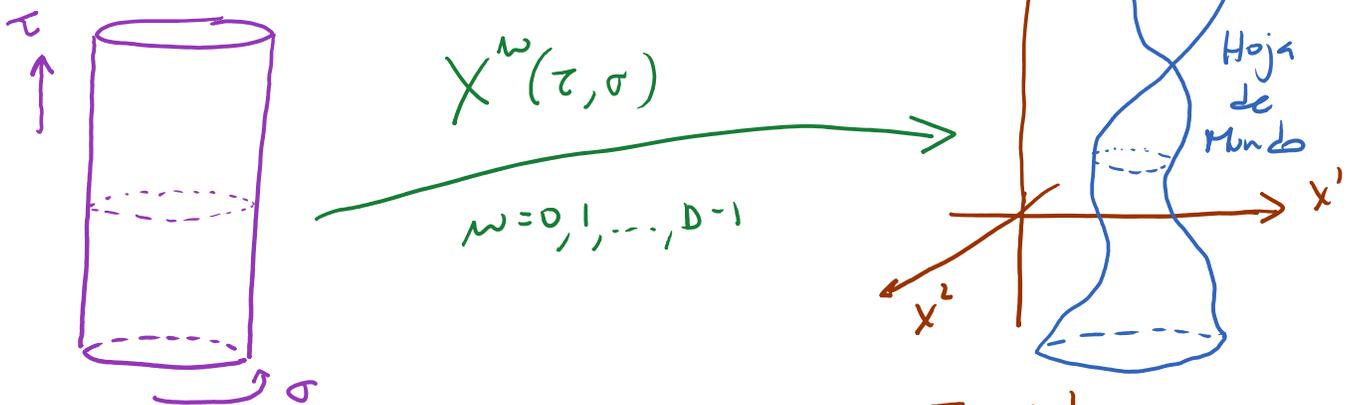
Para describir a objetos unidimensionales cuánticos y relativistas, existen nuevamente 2 opciones.

① Cuantizar Cuerdas ("primera cuantización")

Por generalidad, podemos considerar



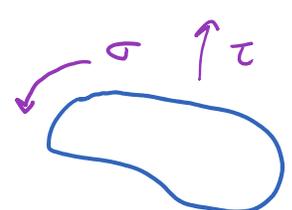
En cualquier caso, necesitamos algunas etiquetas para ubicar a los distintos puntos sobre la cuerda a un tiempo dado. Pero además nos falta incorporar la evolución temporal. Por ser la cuerda un objeto unidimensional, su trayectoria al transcurrir el tiempo traza una superficie en el espaciotiempo, que llamamos su hoja de mundo. Análogamente al caso de la partícula, para describir a la cuerda covariantemente nos inventamos 2 parámetros arbitrarios τ, σ y consideramos D mapas $X^\mu(\tau, \sigma)$:



Espacio Ficticio 1+1 dimensional que será útil llamar hoja de mundo

Espaciotiempo D dimensional

Esencialmente, τ es una etiqueta que indica en qué instante estamos examinando a la cuerda, mientras que σ indica cuál punto de la cuerda nos interesa.



En este método, necesitaremos escribir una acción para la cuerda en la hoja de mundo, $S[X] = \int d\tau d\sigma L$ (cuya forma explícita veremos en breve), y cuantizar, ya sea canónicamente (fijando o no la norma antes) o con la integral de trayectoria, $\int \mathcal{D}X^M(\tau, \sigma) e^{iS[X]}$.

Podremos así hablar de la propagación libre de una cuerda, y eventualmente agregar interacciones (¿a mano?).

② Cuantizar un Campo de Cuerdas ("segunda cuantización")

¿Qué cosa es un campo de cuerdas? Un campo ordinario es una función que asigna un número (o varios) a cada punto en el espaciotiempo, $\varphi(x^m)$. Es decir, es un mapeo que como los datos que podrían describir a una partícula a un instante dado, $x^m = X^m(\tau)$.

↖ fijo

Análogamente, un campo de cuerdas es un mapeo que como los datos que podrían describir a una cuerda en un instante dado, $x^\mu(\sigma) = X^\mu(\tau, \sigma)$. Es decir, es no una función sino un funcional $\Phi[X^\mu(\sigma)]$, que mapea configuraciones de la cuerda a números.

Para perderle el miedo a este objeto, imaginemos desarrollar a las $x^\mu(\sigma)$ en un conjunto completo de funciones, como p.ej. modos de Fourier,

$$x^\mu(\sigma) = x_0^\mu + \sum_{n \neq 0} \tilde{x}_n^\mu e^{in\sigma} \quad (\text{con } \tilde{x}_n^* = \tilde{x}_{-n}).$$

modo cero: centro de masa 

Tenemos entonces $\Phi[x^\mu(\sigma)] = \Phi(x_0^\mu, \tilde{x}_n^\mu)$, y

[3: 16/08/21

podemos pensar en descomponer

$$\Phi[x^\mu(\sigma)] = \sum_{l=1}^{\infty} \varphi_l(x_0^\mu) \Phi_l[\tilde{x}_n^\mu]$$

↑ conjunto completo
de funcionales,
especificado de antenas

(p.ej., $\Phi_l[\tilde{x}_n] = \tilde{x}_l, \tilde{x}_l \tilde{x}_{l'}, \text{ etc.}$)

Reconocemos así al campo de cuerdas $\Phi[x^\mu(\sigma)]$ como una colección de un número infinito de campos convencionales $\phi_i(x)$.

Para codificar la dinámica del campo de cuerdas, necesitamos una acción en el espacio de $x^\mu(\sigma)$'s.

Existen varias opciones y enfoques [Witten; Zwiebach; Berkovits; Kaku, Kikkawa; Siegel; ...]

Un ejemplo es la acción de Witten (y Kato, Kugo, Ojawa, Uehara) para cuerdas abiertas,

$$S[\Phi] = \frac{1}{2} \int \Phi * Q_B \Phi + \frac{2g}{3} \int \Phi * \Phi * \Phi$$

"producto estrella"
"carga BRST"
"acción formal de integración"

[ver p.ej. hep-th/0311017, 0102085].

La "segunda cuantización" de las cuerdas debería ser un formalismo más poderoso que la "primera cuantización"; pero es más complicado, y durante muchos años, lo único que se pudo hacer con él fue reproducir

la expansión perturbativa conocida ya a partir de las cuerdas en "primera cuantización".

Hacia finales de los 90 hubo nuevos avances que por fin dejaron claro que la teoría del campo de cuerdas (string field theory) en verdad incluye más información, no perturbativa. Desde entonces ha seguido habiendo avances, pero el tema sigue siendo bastante complicado [ver p.ej. 1912.00521, 1905.06781], y en cualquier caso No parece ser el camino para encontrar la respuesta completa a la pregunta clave, ¿de qué están hechos las cuerdas? Si las cuerdas no son fundamentales, tampoco debemos esperar que lo sea el campo de cuerdas.

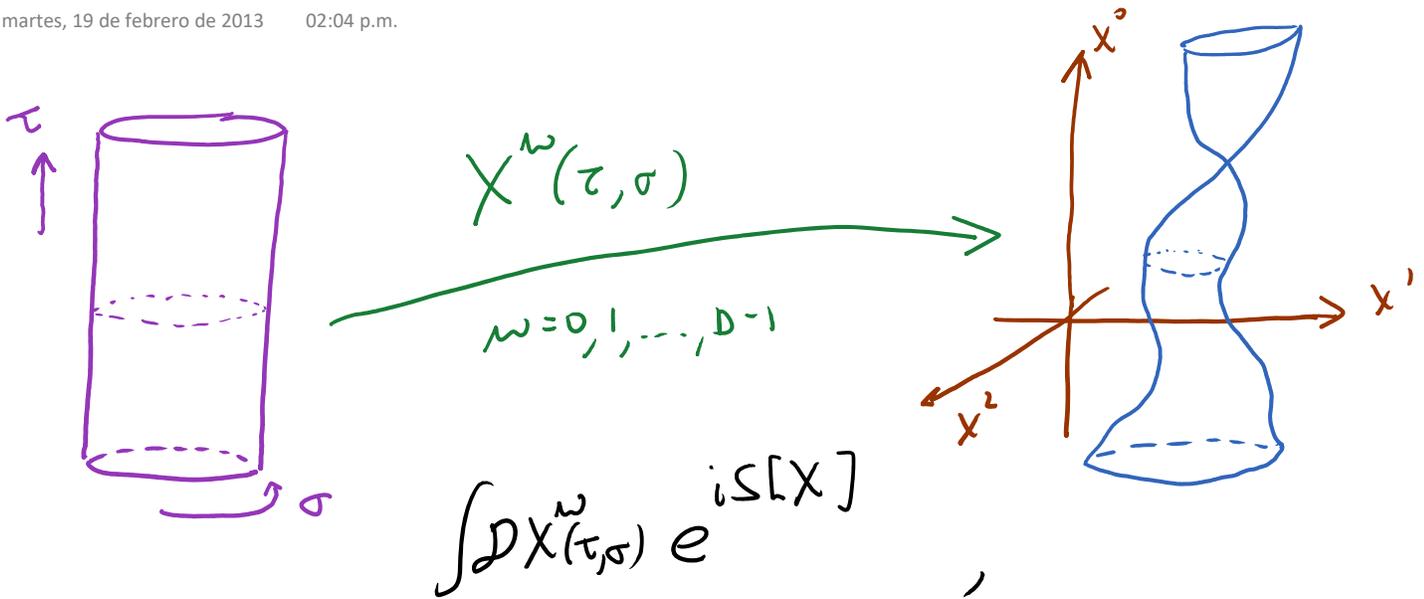
En lo que resta del curso trabajaremos con las cuerdas en "primera cuantización", conocida también en este contexto como el formalismo de la hoja de mundo. Como ya hemos dicho, para desarrollar la expansión perturbativa, que es nuestro objetivo central aquí, este camino arroja

los mismos resultados que la teoría del campo de cuerdas, con la ventaja de ser más fácil.

Además, como iremos viendo, en cuerdas (a diferencia de partículas) la "primera cuantización" nos permite llegar bastante lejos, y en particular, las interacciones se pueden agregar de manera muy natural.

Por ahora hablemos de la cuerda bosónica, donde $X^\mu(\tau, \sigma)$ son los únicos grados de libertad, es decir, el estado de la cuerda está completamente caracterizado por su forma/ubicación en el espaciotiempo. Para obtener física más realista necesitaremos estudiar más adelante a la supercuerda, que tiene grados de libertad adicionales. Pero para iniciar, la cuerda bosónica es un útil modelo de juguete, análogo al campo escalar real.

En todo lo sucesivo, resultará provechoso notar que el sistema que nos interesa, la cuerda encajada en un espaciotiempo D -dimensional, descrita en "primera cuantización",



puede reinterpretarse como una teoría cuántica de D campos escalares (con nombre X^μ en vez de φ_n) que viven en 1+1 dimensiones (con coordenadas que denotamos τ, σ en vez de t, x). Este sería el punto de vista natural para un observador en domicilio en la hoja de mundo, que para nosotros es un espacio puramente ficticio/auxiliar, pero de gran utilidad.

Para proceder, necesitamos conocer la acción que controla la dinámica de la cuerda. En el caso de la partícula relativista, vimos que la acción natural es

$$S_{\text{partícula}} = - \text{masa} \times \left(\begin{array}{l} \text{longitud} \\ \text{propia} \end{array} \right),$$

↖ energía en reposo

así que la generalización obvia para una cuerda relativista es

$$S_{\text{cuerda}} = - \text{tensión} \times \left(\begin{array}{l} \text{Área} \\ \text{propia} \end{array} \right),$$

↖ ≡ energía por unidad de longitud para cuerda en reposo

es decir, la acción de (Dirac-) Nambu-Goto

$$S_{\text{NG}}[X] = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)}$$

↖ $a, b = 0, 1; \sigma^0 \equiv \tau, \sigma^1 \equiv \sigma$ ↗ métrica en el espaciotiempo

$$T \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'}$$

↖ "pendiente de Regge" ↗

≡ $h_{ab}(\tau, \sigma)$

define (con $\hbar = c = 1$)

$$l_c \equiv \sqrt{\alpha'} \quad \text{longitud de cuerdas}$$

$$m_c \equiv l_c^{-1} \quad \text{escala de cuerdas}$$

Métrica inducida en la hoja de mundo (retracción de la del espaciotiempo)

Notar que

$$-\det h_{ab} = -\det \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ X' \cdot \dot{X} & X'^2 \end{pmatrix} = (\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2,$$

donde $\cdot \equiv \partial_\tau \equiv \partial_0$, $' \equiv \partial_\sigma \equiv \partial_1$ y el producto punto involucra a la métrica en el espaciotiempo, p.ej., $X' \cdot \dot{X} = X'^\mu \dot{X}^\nu g_{\mu\nu}(X)$.

Elegiremos trabajar con coordenadas adimensionales en la hoja de mundo: $[\tau] = [\sigma] = M^0$ (en lugar de M^{-1}).

La acción de Nambu-Goto es invariante bajo:

i) Reparametrizaciones en el espaciotiempo

$$x^\mu \rightarrow \bar{x}^\mu(x), \quad g_{\mu\nu}(x) \rightarrow \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\lambda\rho}(x)$$

(lo cual implica

$$X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow \bar{X}^\mu(\tau, \sigma) = \bar{x}^\mu(X(\tau, \sigma)),$$

$$\partial_a X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow \partial_a \bar{X}^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \partial_a X^\nu(\tau, \sigma).$$

En particular, en un espaciotiempo plano,

$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, S_{NG} es invariante bajo transformaciones de Poincaré (= Lorentz + traslaciones)

$$X^\mu(\sigma) \rightarrow \bar{X}^\mu(\sigma) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\sigma) + C^\mu$$

\uparrow
quiero decir $\sigma^a \equiv (\tau, \sigma)$

(bajo las cuales $\eta_{\mu\nu}$ no cambia).

(ii) Reparametrizaciones en la hoja de mundo

$$\sigma^a \rightarrow \bar{\sigma}^a(\sigma), \quad X^\mu(\sigma) \rightarrow \bar{X}^\mu(\bar{\sigma}) = X^\mu(\sigma)$$

X^μ son
campos
escalares

Estas últimas son 2 "simetrías" locales o

de gauge en la hoja de mundo, que se manifiestan a través de 2 constricciones ("de primera clase")

$$\Pi_\mu \Pi^\mu + T^2 X'_\mu X'^\mu = 0, \quad \Pi_\mu X'^\mu = 0,$$

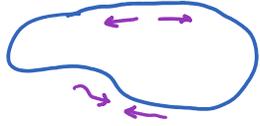
donde $\Pi_\mu(\sigma) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{NG}}{\partial \dot{X}^\mu(\sigma)} = T \frac{X'^2 \dot{X}_\mu - \dot{X} \cdot X' X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$

es el momento canónico conjugado a $X^\mu(\sigma)$.

(Análogamente, para la partícula tenemos

1 simetría local, $\tau \rightarrow \bar{\tau}(\tau)$, asociada a
 1 construcción $p^2 + m^2 = 0$.)

Esto expresa la redundancia existente en nuestra
 descripción covariante: tenemos D variables $X^\mu(\sigma)$,
 pero solo $D-2$ grados de libertad físicos. Tal como
 en el caso de la partícula, $X^\mu(\sigma)$ NO es un grado
 de libertad verdadero, pero aquí tampoco lo es la
 dirección longitudinal sobre la cuerda, $\frac{X'^\mu(\sigma)}{\sqrt{X'^2(\sigma)}} X^\mu(\sigma)$,
 es decir, aquella a lo largo del cuerpo de la cuerda.

Por ej., la rotación rígida  , o la
 compresión/expansión con forma constante 
NO son movimientos físicos, puesto que
 nuestra cuerda pretende ser fundamental / elemental:
 a diferencia de un mechete, NO está hecha de partículas
 a las cuales les podríamos seguir la pista individualmente.
 Cada pequeño trozo de la cuerda es igual a todos los
 demás, y está caracterizado únicamente por su

tensión = $\frac{\text{energía}}{\text{longitud}}$. Nota que, mientras que para una cuerda no relativista la tensión = fuerza y la densidad de masa $\mu = \text{masa}/\text{longitud}$ son 2 conceptos independientes, y la velocidad de propagación de las ondas es $v = \sqrt{T/\mu}$, en el caso de una cuerda relativista $\mu = T$, y por tanto, $v = 1$.

Otra manifestación de la invariancia bajo difeo en la hoja de mundo es el hecho de que la densidad hamiltoniana es

$$\mathcal{H} \equiv \pi_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L}$$

$$\pi_\mu = T \frac{X'^2 \dot{X}_\mu - \dot{X} \cdot X' X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

$$= -T \frac{(\dot{X} \cdot X')^2 - X'^2 \dot{X}^2}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - X'^2 \dot{X}^2}} - (-T \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - X'^2 \dot{X}^2}) = 0,$$

y más en general, el tensor de energía-momento en la hoja de mundo (\equiv corriente de Noether asociada a la invariancia bajo traslaciones $\sigma^a \rightarrow \sigma^a + \delta \sigma^a$; recordar que a estas alturas no hay métrica g_{ab}) se anula:

$$T^a_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_a X)} \cdot \partial_b X - \mathcal{L} \delta^a_b$$

por teorema
de Noether

$$T^0_0 = \pi_m \dot{X}^m - \mathcal{L} = \mathcal{H} = 0,$$

$$T^0_1 = \pi_m X'^m = 0,$$

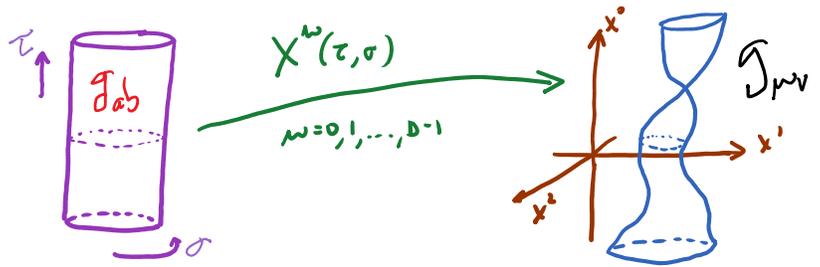
$$T^1_0 = -T \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_m - \dot{X}^2 X'_m}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \dot{X}^m = 0,$$

$$T^1_1 = -T \frac{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

$$-(-T \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}) = 0.$$

4:23/08/21

$S_{NG}[X]$ es no polinomial; pero podemos quitarle la raíz de manera análoga al caso de la partícula: nos inventamos como variable auxiliar a la métrica intrínseca en la hoja de mundo $g_{ab}(\tau, \sigma)$, y reescribimos la acción en la forma $\uparrow 2 \times 2$, simétrica



$$S_p[X, g_{ab}] = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)$$

Acción de Polyakov (Brink-Di Vecchia-Howe - Deser-Zumino)

Bajo $g^{ab} \rightarrow g^{ab} + \delta g^{ab}$ se tiene $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}$,
de modo que la ecuación de movimiento de la
métrica g^{ab} es

$$-\frac{2}{T} \frac{\delta S_p}{\delta g^{ab}} = \underbrace{\sqrt{-g} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}}_{h_{ab} \text{ métrica inducida}} \overset{\text{no confundir con } g_{ab}}{\quad} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} g^{cd} \underbrace{\partial_c X^\lambda \partial_d X^\rho g_{\lambda\rho}}_{h_{cd}}$$

$$= \sqrt{-g} \left(h_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} h_{cd} \right) = 0.$$

Esto no determina g_{ab} por completo; pero sí

implica que $\sigma^a = (\tau, \sigma)$ \swarrow función arbitraria (positiva)

$$g_{ab}(\sigma) = \lambda(\sigma) h_{ab}(\sigma) = \lambda(\sigma) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X);$$

$$h_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} h_{cd} = h_{ab} - \frac{1}{2} \lambda h_{ab} \lambda^{-1} \underbrace{h^{cd} h_{cd}}_{\delta_c^c = 2} = 0.$$

es decir, la métrica intrínseca y la inducida están relacionadas por un rescalamiento local (\equiv transformación 'de Weyl' o 'conforme' - ver más adelante).

Y podemos verificar que

$$\begin{aligned} S_p[X, g_{ab} = \lambda h_{ab}] &= -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X) \\ &= -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \underbrace{\sqrt{-\det(\lambda h_{ab})}}_{\lambda^2 \det h_{ab}} \underbrace{(\lambda^{-1} h^{ab}) h_{ab}}_{\delta_a^a = 2} \\ &= -T \int d^2\sigma \lambda \sqrt{-\det h_{ab}} \\ &= -T \int d^2\sigma \sqrt{-h} = S_{NG}[X]. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ahora que ya tenemos una métrica intrínseca en la hoja de mundo, la definición estándar del tensor de energía-momento correspondiente (con una convención útil para la constante de normalización) es

$$T_{ab} \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_p}{\delta g^{ab}}$$

↙ *contracción con $g_{\mu\nu}$* ↘

$$= - \frac{1}{\alpha'} \left(\partial_a X \cdot \partial_b X - \frac{1}{2} g_{ab} g^{cd} \partial_c X \cdot \partial_d X \right)$$

$x_c^2 \rightarrow x_c$

(lo cual coincide con la definición como corriente de Noether asociada a transformaciones $\sigma^a \rightarrow \sigma^a + \delta\sigma^a$), así que la ecuación de movimiento para g_{ab} , que debemos imponer para garantizar que $S_p = S_{NG}$, dice simplemente que

$$T_{ab} = 0,$$

lo cual justo coincide con lo que encontraremos (como identidad) a partir de la acción de Nambu-Goto.

S_p tiene las mismas simetrías que S_{N6} , y una adicional:

1) Reparametrizaciones en el espaciotiempo (y en particular, el grupo de Poincaré cuando $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$).

2) Reparametrizaciones en la hoja de mundo (con

$$\bar{g}_{ab}(\bar{\sigma}) = \frac{\partial \sigma^c}{\partial \bar{\sigma}^a} \frac{\partial \sigma^d}{\partial \bar{\sigma}^b} g_{cd}(\sigma) \text{) .}$$

3) Transformaciones de Weyl (= conformes, pero relativistas)

$$\sigma^a \rightarrow \bar{\sigma}^a = \sigma^a, \quad X^\mu(\sigma) \rightarrow \bar{X}^\mu(\sigma) = X^\mu(\sigma),$$

$$g_{ab}(\sigma) \rightarrow \bar{g}_{ab}(\sigma) = \Omega(\sigma) g_{ab}(\sigma)$$

↑ función arbitraria (positiva)

$$\Rightarrow \bar{g}^{ab} = \Omega^{-1} g^{ab}, \quad \det \bar{g}_{ab} = \Omega^2 \det g_{ab},$$

$$\underbrace{\sqrt{-g} g^{ab}}_{\text{factor en } S_p} \rightarrow \sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{ab} = \cancel{\Omega \sqrt{-g}} \cancel{\Omega^{-1}} g^{ab} = \sqrt{-g} g^{ab} \text{) .}$$

Esta nueva simetría local es una propiedad especial de S_p en 2 dimensiones, y su existencia explica

por qué la ecuación de movimiento de g_{ab} solo determinó a g_{ab} módulo un factor arbitrario $\lambda(\sigma)$.

Las invariaciones locales nuevamente están asociadas a sendas constricciones hamiltonianas ("de primera clase" = conmutan bajo paréntesis de Poisson).

$$\pi_{\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{x}^{\mu}} = -T \sqrt{-g} g^{0a} \partial_a X_{\mu} \quad -\frac{T}{2} \int d\sigma \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} g_{\mu\nu}(X)$$

implica, a través de la ecuación de movimiento $T_{ab} = 0$, o equivalentemente, $g_{ab} = \lambda h_{ab}$, las constricciones que antes teníamos (como identidades) a partir de S_{NG} :

$$\begin{aligned} & \pi^2 + T^2 \dot{X}^{\prime 2} \quad \leftarrow \text{no confundir con } T_{ab} \\ & = T^2 \left(\underbrace{-g g^{0a} \partial_a X \cdot \partial_b X g^{0b}}_{h_{ab}} + \underbrace{\partial_i X \cdot \partial_i X}_{h_{11}} \right) \\ & \quad \leftarrow T_{ab}=0 \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{-\lambda^2 h}_{\lambda^{-1} \delta_b^0} \quad \underbrace{\lambda^{-1} h^{0b}}_{\lambda^{-1} h^{0b}} \\ \underbrace{-h h^{00}}_{-h h^{00}} = -h_{11} \end{array} \right. \leftarrow h^{ab} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} h_{11} & -h_{01} \\ -h_{10} & h_{00} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= 0,$$

$$\pi_{\mu} X'^{\mu} = \overbrace{-T\sqrt{-g} g^{0a}}^{\pi_{\mu}} \underbrace{\partial_a X \cdot \partial_1 X}_{h_{a1}} = -T\sqrt{-h} \delta_1^0 = 0,$$

$T_{ab}=0 \rightarrow \underbrace{\lambda\sqrt{-h}}_{\pi_{\mu}} \underbrace{\lambda^{-1} h^{0a}}_{\partial_a X} \underbrace{h_{a1}}_{\partial_1 X}$

es decir,

$$\boxed{\begin{aligned} \pi^2 + T^2 X'^2 &= 0 \\ \pi_{\mu} X'^{\mu} &= 0 \end{aligned}}$$

Y adicionalmente, para los momentos conjugados a las 3 nuevas variables g_{ab} , tenemos directamente

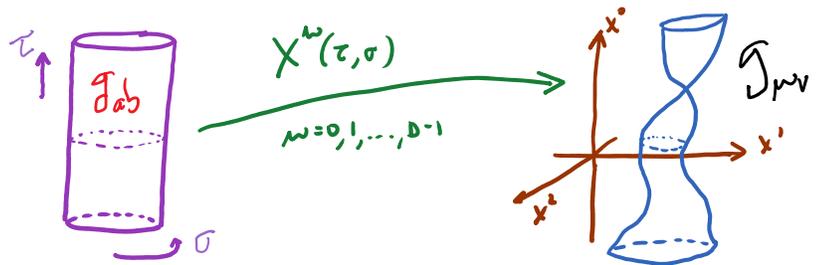
$$\pi_{ab} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{g}^{ab}} = 0.$$

Podemos notar que esto da el conteo correcto de grados de libertad físicos:

$$\begin{array}{ccc} X^{\mu} & \swarrow \searrow & g_{ab} \\ \pi_{\mu} & \swarrow \searrow & \pi_{ab} \end{array} \quad (D+3) - (2+3) = D-2 \quad \checkmark$$

Variables
 \nearrow en espacio
configuración

Constricciones grados de libertad
 \nearrow cada construcción "de primera
 clase" cuenta doble en el espacio fase



Podemos notar que,
desde el punto de vista de la hoja de mundo,

$$S_p = -\frac{T}{2} \int d^2\sigma \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X)$$

es una teoría de campos con D campos escalares en 1+1 dim

(D copias de Klein-Gordon si $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, pero con término cinético no trivial si $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(X)$), a saber a una

métrica no dinámica: $g_{ab}(\sigma)$ es un campo no dinámico

porque aparece sin derivadas en S_p , y entendamos

que esto se debe a que cumple exclusivamente la función de campo auxiliar.

Pensaríamos entonces que el contacto descrito de S_p con la acción natural de k cuerdas relativistas, S_{NG} , se perdería si agregamos un término cinético para g_{ab} , es decir, la acción de Einstein-Hilbert

$$S_E[g_{ab}] = c \int d^2\sigma \sqrt{-g} R$$

↑
cte. de
normalización

↑
escalar de curvatura
en 1+1 dim

(que, por otra parte, respeta correctamente la invariancia bajo difeomorfismos y Weyl).

Dado que

$$\frac{\delta S_E}{\delta g^{ab}} = c \sqrt{-g} \underbrace{\left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right)}_{\text{tensor de Einstein}},$$

si tomamos como acción a $S_p + S_E$ la ecuación de movimiento para g_{ab} será la ec. de Einstein,

$$\underbrace{R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R}_{\text{de } \delta S_E} = \frac{4\pi}{c} \underbrace{T_{ab}}_{\text{de } \delta S_p},$$

lo cual luce muy distinto a $T_{ab} = 0$ ($\Rightarrow g_{ab} = \lambda h_{ab}$), que nos permitiría recuperar S_{NG} .

Pero, curiosamente, en $1+1$ dimensiones se tiene

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 0 \quad \text{idénticamente,}$$

porque las simetrías del tensor de Riemann determinan de manera única

$$R_{abcd} = \frac{1}{2} (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) R.$$

En este caso se tiene entonces $\delta S_E / \delta g^{ab} = 0$ para cualquier g_{ab} , es decir, la acción

$$S_E = c \int d^2\sigma \sqrt{-g} R \text{ es de hecho } \underline{\text{independiente}}$$

de la métrica, y depende solo de la topología de la hoja de mundo. (Como veremos más adelante, este es el contenido del teorema de Gauss-Bonnet.)

En resumen, podemos agregar S_E sin poner en riesgo el contacto entre S_p y S_{NG} - y sin que g_{ab} se vuelva dinámica. Más adelante entenderemos la utilidad de S_E .

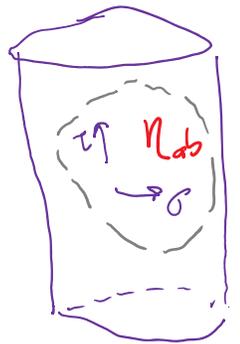
De ahora en adelante (hasta nuevo aviso), tomaremos por simplicidad $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$.

Para cuantizar a la cuerda, de una manera u otra conviene fijar una norma. Justo como en el caso de la partícula, podemos hacerlo de manera covariante

bajo Poincaré imponiendo condiciones sobre $g_{ab}(\sigma)$.
 Ésta tiene 3 componentes independientes, que
 podemos especificar por completo utilizando nuestras
 3 invariancias locales (2 difeo + 1 Weyl).

Elegiremos trabajar en la norma plana

$$g_{ab}(\sigma) = \begin{cases} \eta_{ab} & \text{en signature lorentziana} \\ \delta_{ab} & \text{en signature euclidea} \end{cases}$$



Para ser más precisos: dada cualquier $\bar{g}_{ab}(\sigma)$, siempre
 es posible transformar a η_{ab} o δ_{ab} localmente
 (en un parche de coordenadas a la vez). Globalmente
 habrá en general restricciones ("módulos" análogos al
 "tiempo" propio T en el caso de la partícula); pero
 eso solo será importante más adelante.

Será conveniente para nosotros hacer además una
rotación de Wick en la hoja de mundo, renombrando

$$\tau \equiv \sigma^0 = -i\sigma^2,$$

de modo que $g_{ab} = \eta_{ab} \rightarrow \delta_{ab}$. Al hacer
 $\underbrace{\quad}_{a,b=0,1}$ $\underbrace{\quad}_{a,b=1,2}$

esto, es habitual definir la acción euclídea con el signo invertido con respecto a la lorentziana, de forma que $\exp(i \int d\sigma d\sigma' \mathcal{L}_{\text{Lor.}}) = \exp(- \int d\sigma d\sigma' \mathcal{L}_{\text{Eucl.}})$.

Nuestro sistema es entonces

$$S_p[X] = + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X^\mu \partial_a X^\nu \eta_{\mu\nu} ,$$

\uparrow
 $\underbrace{\quad}_{T/2}$

\curvearrowright suma implícita
 (contráctos con δ^{ab})

que describe simplemente D campos escalares libres (Klein-Gordon) no masivos en $1+1$ dimensiones!

Pero no puede ser esta la historia completa, porque tenemos aquí todavía D variables.

El punto es que, antes de fijar $g_{ab} = \delta_{ab}$, la acción $S_p[X, g]$ contiene la información sobre la ecuación de g_{ab} , $T_{ab} = 0$, que como vimos, resulta clave para reproducir S_{NG} . Al fijar g_{ab} perderíamos

esta información, así que para recuperar la física correcta debemos imponerla a mano (ver p. 129),

$$T_{22} = \mathcal{H} = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \dot{X}^2 - \frac{1}{2} X'^2 \right) = 0,$$

$$T_{11} = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \dot{X}^2 + \frac{1}{2} X'^2 \right) = 0,$$

$$T_{12} = \frac{1}{\alpha'} \dot{X} \cdot X' = 0.$$

Sabemos que estas condiciones equivalen a decir que $h_{ab}(\sigma) = \lambda^{-1}(\sigma) g_{ab}(\sigma) = \lambda^{-1}(\sigma) \delta_{ab}$, es decir, que la métrica inducida es conformalmente plana (plana salvo Weyl). Y de hecho, si en S_{N6} elegimos σ^1, σ^2

talos que $h_{12} = \dot{X} \cdot X' = 0$ y $\leftarrow \equiv \partial_2$ aquí

$$h_{11} = X'^2 = \lambda^{-1} = \dot{X}^2 = h_{22}, \text{ obtenemos}$$

$$S_{N6}[X] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} \cdot X')^2} \rightarrow 0 = S_p[X].$$

L5: 25/08/21

$$\dot{X}^2 = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + X'^2)$$

Podemos notar que las 3 ecuaciones de movimiento $T_{ab} = 0$ en realidad nos dan solo 2 constricciones independientes, puesto que $T_{11} + T_{22} = \delta^{ab} T_{ab} = 0$, o en versión lorentziana, $T_{11} - T_{00} = \eta^{ab} T_{ab} = 0$.

El hecho de que la traza de T_{ab} sea en automático cero es consecuencia directa de la invariancia de Weyl: bajo $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta g_{ab}$ se tiene por definición

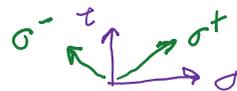
$\delta S_p \propto \int d^2\sigma \sqrt{-g} \delta g^{ab} T_{ab}$, y para una transformación de Weyl, $\overbrace{w(\sigma) g^{ab}} (g^{ab} \rightarrow (1+w(\sigma)) g^{ab})$, así que $\delta S_p = 0$ para cualquier $w(\sigma)$ implica que $\boxed{g^{ab} T_{ab} = 0}$.

Esto es importante porque nos da el conteo correcto: D variables - 2 constricciones = $D-2$ grados de libertad. ✓

Las 2 constricciones expresan el hecho de que, aún después de haber fijado $g_{ab} = \delta_{ab}$, tenemos todavía un lenguaje redundante, que se manifiesta también en la existencia de 2 simetrías locales remanentes.

Es decir, hemos fijado las normas (eliminado la redundancia) casi por completo; pero (localmente) existen unas cuantas transformaciones en el grupo Dif x Weyl que no cambian la métrica $g_{ab} = \delta_{ab}$, y por tanto siguen vivas.

Para entender esto, conviene usar las coordenadas del cono de luz en las hojas de mundo



$$\left. \begin{aligned} \sigma^+ &\equiv \tau + \sigma = -i\sigma^2 + \sigma^1 \\ \sigma^- &\equiv \tau - \sigma = -i\sigma^2 - \sigma^1 \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \begin{cases} \tau = \frac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^-) \\ \sigma = \frac{1}{2}(\sigma^+ - \sigma^-) \end{cases}$$

de modo que la métrica plana $g = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ se reescribe en la forma $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$:

$$g_{++} = \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma^+} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma^+}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \underbrace{g_{\tau\tau}}_{\eta_{\tau\tau} = -1} + \underbrace{\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^+} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^+}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \underbrace{g_{\sigma\sigma}}_{\eta_{\sigma\sigma} = +1} = 0,$$

$$g_{--} = \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma^-} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma^-}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \underbrace{g_{\tau\tau}}_{\eta_{\tau\tau} = -1} + \underbrace{\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^-} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^-}}_{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} \underbrace{g_{\sigma\sigma}}_{\eta_{\sigma\sigma} = +1} = 0,$$

$$g_{+-} = \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma^+} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma^-}}_{\left(\frac{1}{2}\right)^2} g_{\tau\tau} + \underbrace{\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^+} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^-}}_{-\left(\frac{1}{2}\right)^2} g_{\sigma\sigma} = -\frac{1}{2},$$

$\eta_{\tau\tau} = -1$ $\eta_{\sigma\sigma} = +1$

es decir, $ds^2 \equiv g_{ab} d\sigma^a d\sigma^b = -d\tau^2 + d\sigma^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-$.

$(-\tau^2 + \sigma^2 = -\sigma^+ \sigma^-)$

Definiendo a los reparametrizaciones conformes

$$\begin{cases} \sigma^+ \\ \sigma^- \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{\sigma}^+(\sigma^+) \\ \underline{\sigma}^-(\sigma^-) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{en lugar de} \\ \underline{\sigma}^\pm(\sigma^+, \sigma^-) \end{array},$$

veremos que su efecto sobre la métrica es

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{g}_{ab} = \frac{\partial \sigma^c}{\partial \underline{\sigma}^a} \frac{\partial \sigma^d}{\partial \underline{\sigma}^b} g_{cd} = \begin{cases} 0 & \text{si } a=b \\ \frac{\partial \sigma^+}{\partial \underline{\sigma}^+} \frac{\partial \sigma^-}{\partial \underline{\sigma}^-} \left(-\frac{1}{2}\right) & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

es decir, $\underline{g}_{ab} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma^+}{\partial \underline{\sigma}^+} & \frac{\partial \sigma^-}{\partial \underline{\sigma}^-} \end{pmatrix} g_{ab}$,

efecto que podemos eliminar con una transformación de Weyl con $\Omega^{-1} = (\partial\sigma^+ / \partial\underline{\sigma}^+) (\partial\sigma^- / \partial\underline{\sigma}^-)$.

Llamamos transformación conforme a la combinación

$$\left(\begin{array}{l} \text{Weyl con} \\ \Omega^{-1} = \frac{\partial\sigma^+}{\partial\underline{\sigma}^+} \frac{\partial\sigma^-}{\partial\underline{\sigma}^-} \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{l} \text{reparametrización} \\ \text{conforme} \\ \underline{\sigma}^+(\sigma^+), \underline{\sigma}^-(\sigma^-) \end{array} \right)$$

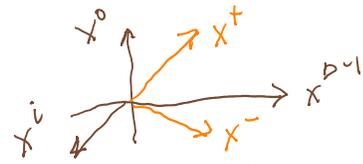
(un subgrupo de medida cero en $\text{Dif} \times \text{Weyl}$),

y vemos entonces que las transformaciones conformes preservan la norma plana $g_{ab} = \delta_{ab}$, y son por tanto las simetrías resistentes aún después de fijar esta norma.

[5:26/02/13]

Para seguir adelante, tenemos entonces 2 opciones:

- i) Eliminar la redundancia por completo antes de cuantizar. La elección obvia $X^0 = \tau$ (que habría que complementar con una condición adicional) no



es muy manejable para la cuerda. El método más conveniente y tradicional es definir las coordenadas del cono de luz en el espaciotiempo

$$x^{\pm} \equiv \pm x^0 + x^{D-1} \quad \Rightarrow \quad X^{\pm}(\sigma) \equiv \pm X^0(\sigma) + X^{D-1}(\sigma),$$

y fijar la norma del cono de luz

$$X^+(\tau, \sigma) = x^+ + \alpha' p^+ \tau \quad \text{Básicamente, } X^+ = \tau \text{ en lugar de } X^0 = \tau$$

cte. \uparrow cte. \leftarrow $\alpha' p^+ \tau$ \leftarrow α'^2

A partir de las constricciones se puede entonces despejar X^- en términos de X^+ y las coordenadas transversales X^i $i=1, \dots, D-2$, de tal modo que quedamos solo con las $D-2$ $X^i(\tau, \sigma)$ como grados de libertad físicos (ya sin constricciones), que uno procede a cuantizar.

Este método constituye un atajo útil para deducir el espectro de la cuerda y el valor requerido para D (la llamada dimensión crítica); pero no tiene invariancia de Poincaré manifiesta.

[Ver p.ej. Green-Schwarz-Witten cap. 2, Polchinski cap. 1, Brink-Henneaux cap. 12, Becker-Becker-Schwarz cap. 2.]

ii) Cuantizar los D campos X^M , y eliminar la redundancia después, imponiendo las constricciones a nivel cuántico, como condiciones para identificar a los estados físicos, análogamente a lo que hicimos para la partícula. Este es el método que usaremos en el resto del curso, y se le conoce como cuantización covariante "antigua" (para contrastar con la cuantización covariante "moderna", o BRST, que mencionaremos brevemente más adelante).

Por ahora nos olvidemos entonces de las 2 constricciones, y el sistema que debemos cuantizar es simplemente

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X^M \partial_a X_M, \quad \leftarrow a=1,2$$

que como ya dijimos no es otra cosa que D

campos escalares libres (Klein-Gordon) reales y no masivos. La ecuación de movimiento para cada campo es la ec. de Klein-Gordon sin masa,

$$\partial^2 \chi^{\mu} = 0$$

↪ Laplaciano / D'Alembertiano $\partial_1^2 + \partial_2^2 = \partial_1^2 - \partial_0^2$

mejor conocida como la ecuación de ondas.

De la p. 14, esperamos entonces poder desarrollar a los χ^{μ} en modo de Fourier, en analogía directa con la expresión clásica

$$\varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{i p \cdot x} + a_{\vec{p}}^* e^{-i p \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

↕

$$\chi^{\mu}(\tau, \sigma) = \int \frac{d p}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p^{\mu} e^{i p \cdot \sigma} + a_p^{*\mu} e^{-i p \cdot \sigma} \right) \Big|_{p^0 = E_p \equiv |p|}$$

↖ $p = p'$ momento espacial en la hoja de mundo

donde, al cuantizar, los coeficientes a_p^μ y $a_p^{\mu*}$ se convertirán en operadores de aniquilación y creación \hat{a}_p^μ y $\hat{a}_p^{\mu\dagger}$.

Esto es esencialmente correcto; pero habrá diferencias en 2 aspectos: las condiciones de frontera para X^μ , y la notación que es tradicional en cuerdas.

Las condiciones de frontera se deducen, justo como la ecuación de movimiento, a partir del principio variacional: comenzando con

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \partial_a X^\mu \partial_a X_\mu, \quad M \leftarrow \text{hoja de mundo}$$

al variar $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$ obtenemos

$$\delta S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \partial_a X^\mu \partial_a (\delta X_\mu)$$

$$\stackrel{\text{partes}}{=} \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma (-\partial^2 X^\mu) \delta X_\mu + \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_M d^2\sigma \partial_a (\partial_a X^\mu \delta X_\mu)}$$

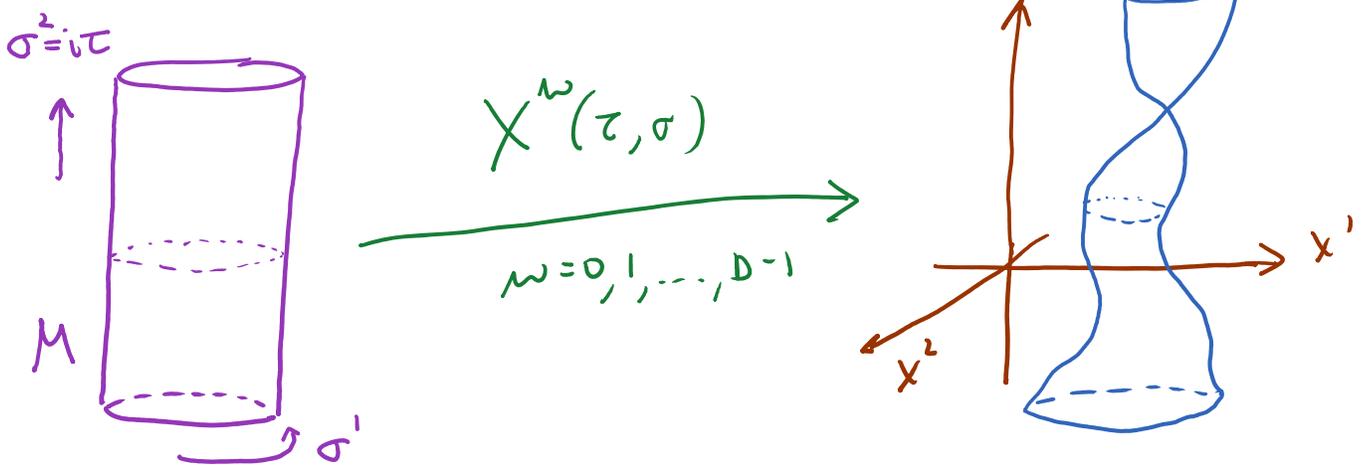
(posible) frontera de hoja de mundo $\rightarrow \partial M$

$$\int ds \partial_n X^m \delta X_m$$

\uparrow
 $\equiv n^a \partial_a$
 \uparrow
vector normal a ∂M

Llegados a este punto, el análisis es distinto dependiendo de si estamos hablando de una cuerda cerrada o abierta.

Analizemos primero la propagación libre de una cuerda cerrada. En este caso, la hoja de mundo M es un cilindro,



que elegiremos parametrizar con $-\infty < \sigma^2 < \infty$, $0 \leq \sigma^1 \leq 2\pi$, $\sigma^1 \simeq \sigma^1 + 2\pi$. Nuestra hoja de

mundo no tiene entonces frontera, $\partial M = \emptyset$. (Si
 acaso pensáramos en algún momento en trabajar
 en un intervalo finito de la coordenada "temporal"
 $\sigma^2 \in [\sigma_i^2, \sigma_f^2]$, de cualquier manera no habría
 contribución de los bordes $\sigma^2 = \sigma_{i,f}^2$, porque en
 el principio variacional fijamos las condiciones
 inicial y final para $X^\mu(\sigma^1, \sigma^2)$, de modo que
 $\delta X^\mu \Big|_{\sigma^2 = \sigma_{i,f}^2} = 0$.)

No tenemos entonces condiciones de frontera en
 sentido estricto, pero sí debemos tomar en cuenta
 que nuestros campos X^μ están definidos sobre un
círculo S^1 ($\sigma^1 \approx \sigma^1 + 2\pi$), y obedecen condiciones de
periodicidad

$$X^\mu(\sigma^1, \sigma^2) = X^\mu(\sigma^1 + 2\pi, \sigma^2) \quad (\text{cuerda cerrada}).$$

Así que, en lugar de desarrollar nuestros campos con una transformada de Fourier,

$$X^\mu(\tau, \sigma) \sim \int \frac{dp}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left(a_p^\mu e^{i p \cdot \sigma} + a_p^{\mu*} e^{-i p \cdot \sigma} \right) \Big|_{p^0 = \varepsilon_p = |p|}$$

\uparrow $p = p'$ momento espacial en la hoja de mundo

teremos una serie de Fourier: el momento p' se discretiza a la Kaluza-Klein (p. 36),

$$p' = \frac{n}{R} = n \in \mathbb{Z}, \quad \text{de tal modo que}$$

\leftarrow radio del círculo = 1 ($\sigma' \cong \sigma' + 2\pi$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp' \rightarrow \frac{1}{R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \quad (\text{y } \delta(p-p') \rightarrow \delta_{n,n'}),$$

y quedamos entonces con

$$X^\mu(\tau, \sigma) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{2|n|}} \left(a_n^\mu e^{-in|\tau| + in\sigma} + a_n^{\mu*} e^{in|\tau| - in\sigma} \right)$$

\uparrow $p^0 = \varepsilon_p = |p|$

que claramente respeta la condición de periodicidad.

Como siempre, el modo con $p' = n = 0$ representa una excitación constante del campo. Pero podemos notar

que la expresión anterior no es de hecho la solución más general a la ecuación de movimiento

$$(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2) X^\mu = 0 : \text{ es posible agregar además}$$

un término lineal en σ o τ . (Esto no sería posible si estuviéramos tratando con la ecuación

de Klein-Gordon con masa. El caso sin masa lo usamos p.ej. para el campo electromagnético A_μ .

En ese contexto, términos lineales en x^0 o x^i representan una intensidad de campo constante $F_{0i} = E_i$ ó $F_{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$, posibilidad que normalmente descartamos por condiciones de frontera en $|\vec{x}| \rightarrow \infty$.)

La condición de periodicidad prohíbe un término lineal en σ , pero no en τ .

Tomando en cuenta además que X^μ tiene unidades de longitud, mientras que un campo escalar φ en $1+1$ dimensiones ($\frac{1}{2} \int d^2\sigma \partial_a \varphi \partial^a \varphi$) tendrá dimensión 0,

reescribimos nuestra expresión anterior por $\sqrt{2\pi\alpha'}$
 $(\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X \cdot \partial^a X)$, quedando entonces con

$x^\mu, p^\mu, a_n^\mu, a_n^{\mu*}$ des.

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu + \alpha' p^\mu \tau$$

$$\sum_{n \neq 0} \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{4\pi|n|}} \left(a_n^\mu e^{-in\tau + in\sigma} + a_n^{\mu*} e^{in\tau - in\sigma} \right)$$

El coeficiente del término lineal en τ merece ese nombre porque es la carga conservada asociada a la invariancia bajo traslaciones $X^\mu \rightarrow X^\mu + c^\mu$, es decir, el momento espaciotemporal. Para ver esto, recordemos que para deducir la corriente de Noether asociada a una simetría podemos razonar como sigue.

Al considerar

$$X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow X^\mu(\tau, \sigma) + \underbrace{\delta X^\mu(\tau, \sigma)}_{\equiv E^\nu(\tau, \sigma) \delta_\nu^\mu},$$

tenemos $\delta S_p = 0$ si E^ν es constante, porque en ese caso δX^μ es una traslación, que constituye una simetría de S_p . Cuando E^ν no es constante,

$$\delta S_p = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \ 2 \partial_a X^\mu \partial^a \underbrace{\delta X_\mu}_{E_\mu(\tau, \sigma)} \neq 0$$

en general. Pero si ahora pedimos que X^M satisfaga su ecuación de movimiento, entonces tenemos $\delta S_p = 0$ bajo variaciones δX^M arbitrarias. Denotando

$$\boxed{J_a^M \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_a X^M}, \text{ tenemos entonces}$$

$$\delta S_p = - \int d^2\sigma J_a^M \partial^a \epsilon_M$$

$$\stackrel{\text{partes}}{=} \int d^2\sigma \partial^a J_a^M \epsilon_M = 0 \quad \forall \epsilon_M(\tau, \sigma).$$

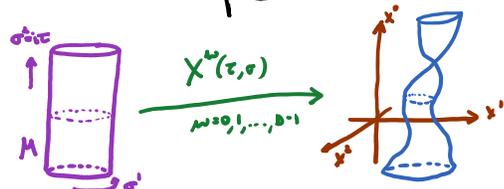
Decimos de aquí que $\partial^a J_a^M = 0$, es decir, J_a^M es la corriente de Noether asociada a traslaciones a lo largo de X^M . En este caso, es de hecho obvio que $\partial^a J_a^M \propto \partial^a \partial_a X^M = 0$ como consecuencia de la ec. de movimiento, pero el mismo procedimiento es útil también en otros casos.

La carga total asociada a esta simetría es entonces

$$\int_0^{2\pi} d\sigma J_\tau^M = \int_0^{2\pi} d\sigma \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau X^M}_{\propto p^M + \text{términos periódicos en } \sigma} = p^M. \quad \checkmark$$

L6; 30/06/21

Otra manera de decir lo mismo es notar que

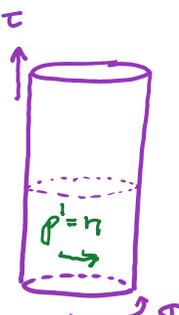
$$\Pi_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial \dot{X}^\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu$$


es la densidad de momento canónico conjugado al campo X^μ . Para un campo arbitrario φ , el Π correspondiente no guarda relación con el momento espaciotemporal; pero en este caso X^μ es la posición en el espaciotiempo, así que Π_μ es directamente la densidad de momento espaciotemporal sobre la cuerda. Y el momento total que porta la cuerda es entonces, efectivamente,

$$\int_0^{2\pi} d\sigma \Pi_\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau X_\mu}_{J_{\tau\mu}} = P_\mu \quad \checkmark$$

La expansión en modos de Fourier de la p. 151,

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x^\mu + \alpha' p^\mu \tau$$

$$\sum_{n \neq 0} \frac{\sqrt{\alpha'}}{\sqrt{4\pi|n|}} \left(a_n^\mu e^{-in\tau + in\sigma} + a_n^{\mu*} e^{in\tau - in\sigma} \right),$$


que como hemos visto es exactamente la esperada

para campos escalares no masivos en $1+1$ dim, nos servirá de punto de partida al cuantizar los campos X^μ (si cuantizamos canónicamente, tendremos entonces a \hat{X}^μ , \hat{p}^μ , \hat{a}_n^μ y $\hat{a}_n^{\mu\dagger}$ como operadores). Pero, por razones históricas y prácticas, es habitual reescribirlos en otra notación.

Recordando que la solución general a la ecuación de ondas $\frac{\partial}{\partial \tau^+} \frac{\partial}{\partial \sigma^-} X^\mu = 0$ debe poderse expresar como una suma de términos independientes que describen ondas viajeras hacia la izquierda y hacia la derecha, separamos

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \underbrace{\frac{X^\mu}{2} + \frac{\alpha'}{2} p^\mu (\tau - \sigma) + \sum_{n>0} \sqrt{\frac{\alpha'}{4\pi n}} \left(a_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} + c.c. \right)}_{\text{Modos Derechos}}$$

$$\equiv X_{\text{D}}^\mu(\tau - \sigma) \equiv \tilde{X}^\mu(\sigma^-)$$

$\underbrace{\tau - \sigma}_{\equiv \sigma^-}$

$$+ \underbrace{\frac{X^\mu}{2} + \frac{\alpha'}{2} p^\mu (\tau + \sigma) + \sum_{n<0} \sqrt{\frac{\alpha'}{4\pi(-n)}} \left(a_n^\mu e^{in(\tau+\sigma)} + c.c. \right)}_{\text{Modos Izquierdos}}$$

$$\equiv X_{\text{I}}^\mu(\tau + \sigma) \equiv X^\mu(\sigma^+)$$

$\underbrace{\tau + \sigma}_{\equiv \sigma^+}$

Y a continuación definiremos

$$\alpha_0^{\omega} \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^{\omega}, \quad \tilde{\alpha}_0^{\omega} \equiv \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^{\omega},$$

y, para todo $n > 0$,

$$\alpha_n^{\omega} \equiv -i \sqrt{\frac{n}{2\pi}} a_{-n}^{\omega}, \quad \alpha_{-n}^{\omega} \equiv i \sqrt{\frac{n}{2\pi}} a_n^{\omega*},$$

operadores de aniquilación $\left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\}$

operadores de creación $\left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\}$

$$\tilde{\alpha}_n^{\omega} \equiv -i \sqrt{\frac{n}{2\pi}} a_n^{\omega}, \quad \tilde{\alpha}_{-n}^{\omega} \equiv i \sqrt{\frac{n}{2\pi}} a_{-n}^{\omega*}.$$

Notar que esto implica que $(\alpha_n^{\omega})^* = \alpha_{-n}^{\omega}$ y $(\tilde{\alpha}_n^{\omega})^* = \tilde{\alpha}_{-n}^{\omega}$.

Con esto, nuestro campo puede ser escrito como

$$X^{\omega}(z, \sigma) = \underbrace{\frac{X^{\omega}}{2} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \tilde{\alpha}_0^{\omega} \sigma^- + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^{\omega} e^{-in\sigma^-}}_{X_D^{\omega}(\sigma^-) = \tilde{X}^{\omega}(\sigma^-)} + \underbrace{\frac{X^{\omega}}{2} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^{\omega} \sigma^+ + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^{\omega} e^{-in\sigma^+}}_{X_I^{\omega}(\sigma^+) = X^{\omega}(\sigma^+)}.$$

Podemos ver que la notación para α_0^μ y $\tilde{\alpha}_0^\mu$ se ha elegido de forma tal que

$$\partial_{\sigma^-} X^\mu(\tau, \sigma) = \partial_{\sigma^-} \tilde{X}^\mu(\sigma^-) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma^-},$$

$\uparrow X_0^\mu$ \uparrow incluye $n=0$

$$\partial_{\sigma^+} X^\mu(\tau, \sigma) = \partial_{\sigma^+} X^\mu(\sigma^+) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_n \alpha_n^\mu e^{-in\sigma^+}.$$

$\uparrow X_0^\mu$

La interpretación física de los coeficientes en esta expansión es clara (y era clara ya antes del cambio de notación):

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu + \alpha' p^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left(\alpha_n^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \right)$$

\nearrow

posición del
centro de masa
(en $\tau=0$)

\uparrow

momento del
centro de masa

\uparrow

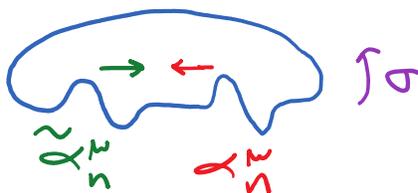
ondas hacia
la "izquierda"

\uparrow

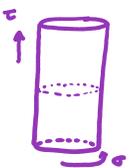
ondas hacia
la "derecha"

Grados de libertad de partícula
Osciladores: ondas sobre la cuerda

$(X^\mu(\tau), \dot{X}^\mu(\tau) = 0)$



Al cuantizar canónicamente, tendremos operadores $\hat{X}^\mu, \hat{p}^\mu, \hat{\alpha}_n^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\mu$, asociados a un espacio de estados que pueda construirse actuando sobre

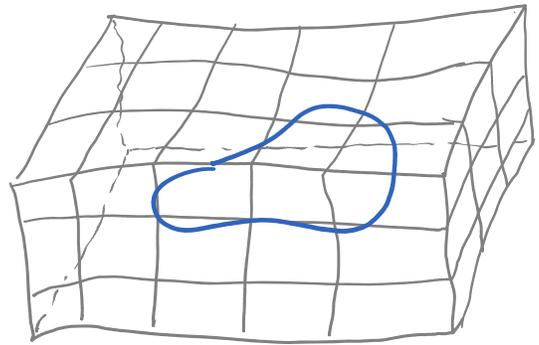
$|0,0;p\rangle$ en los operadores de creación
 estado base ↑ estado base
 para α_n para $\tilde{\alpha}_n$
 $\hat{\alpha}_{-n}^\mu (\propto \hat{a}_{-n}^{\mu\dagger})$ y $\hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^\mu (\propto \hat{\tilde{a}}_n^{\mu\dagger})$. 
 ↖ n > 0 ↗ ↖ n > 0 ↗

Desde la perspectiva de la hoja de mundo (donde estamos haciendo 2da. cuantización de los campos X^μ), esto nos daría estados con distintos números de partículas; pero desde el punto de vista del espaciotiempo (donde estamos haciendo 1a. cuantización de la trayectoria X^μ de la cuerda), todos los estados representan a una sola cuerda cerrada, con mayor o menor grado de excitación. 

Como hemos dicho, esta cuerda representa a su vez la excitación más pequeña posible del campo de cuerdas cerradas. Para obtener el espectro físico de estados de

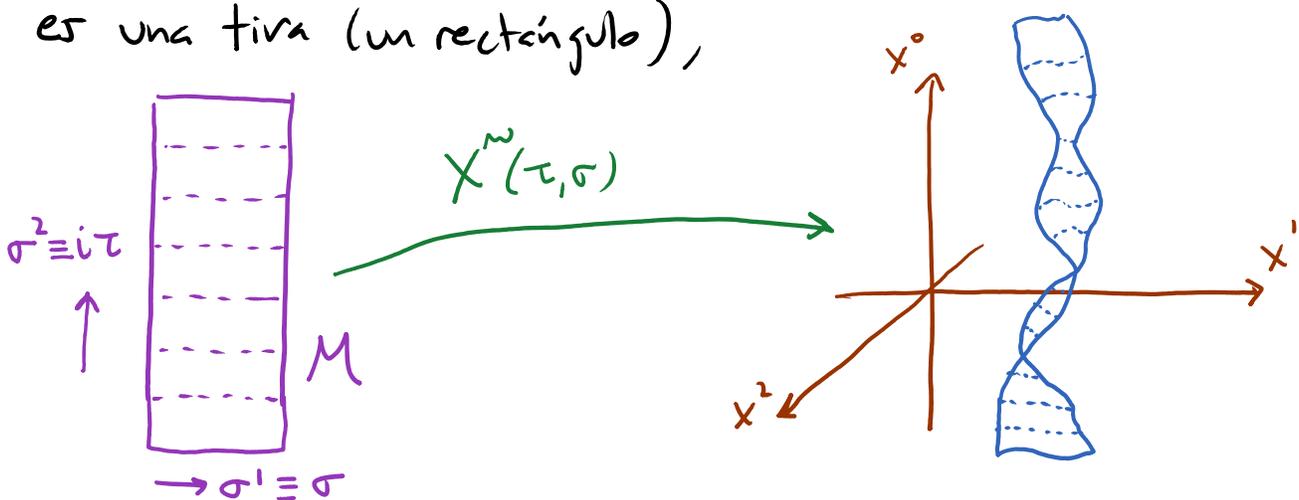
vibración de la cuerda (y por tanto, del campo de cuerdas), tendríamos todavía que imponer a nivel cuántico las restricciones $\dot{X} \cdot X' = 0$, $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$.

Veremos eventualmente que en el caso de la cuerda cerrada, uno de los estados físicos es un gravitón, con lo cual quedará claro que el campo de cuerdas cerradas es la generalización cuerdica del propio espaciotiempo.



Analizemos ahora el caso de la cuerda abierta.

En este caso, la hoja de mundo M para propagación libre es una tira (un rectángulo),



de modo que ahora sí tiene una frontera ($\partial M \neq \emptyset$), que está dada por las líneas de mundo de los 2 extremos de la cuerda.

Elegiremos trabajar en $0 \leq \sigma' \leq \pi$, $-\infty < \sigma^2 < \infty$, de tal modo que la frontera esté en $\sigma' = 0, \pi$. El término de frontera en δS_p que obtuvimos en la p. 147,

$$\int_M d^2\sigma \partial^{\hat{a}} (\partial_{\hat{a}} X^{\mu} \delta X_{\mu}) = \int_{\partial M} ds \partial_n X^{\mu} \delta X_{\mu}$$

$\partial M \quad \uparrow \equiv n^{\hat{a}} \partial_{\hat{a}}, \text{ con } n^{\hat{a}} \perp \partial M,$

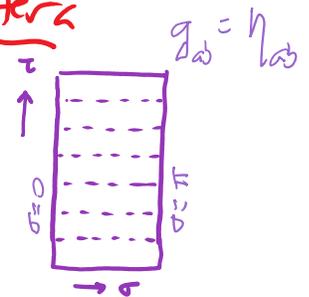
usa $ds \equiv d\tau$ y $\partial_n \equiv \partial_{\sigma}$, y se reescribe entonces como

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^{\pi} d\sigma \partial_{\sigma} (\partial_{\sigma} X^{\mu} \delta X_{\mu}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [\partial_{\sigma} X^{\mu} \delta X_{\mu}]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}.$$

Para que esta contribución de borde a δS_p se anule, debemos imponer entonces condiciones de frontera

tales que

$$\partial_{\sigma} X^{\mu} \delta X_{\mu} = 0 \quad \text{en } \sigma = 0, \pi.$$



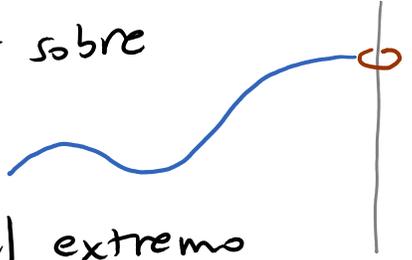
La única opción covariante bajo Poincaré es pedir

$$\left. \partial_\sigma X^\mu \right|_{\sigma=0, \pi} = 0 \quad \forall \tau \quad \left(\left. \partial_n X^\mu \right|_{\sigma=\pi} = 0 \right) \quad \forall \mu,$$

es decir, condiciones de Neumann, o de extremo

libre. Físicamente, estas condiciones significan que no hay momento espaciotemporal p^μ fluyendo por los extremos de la cuerda, de modo que p^μ se conserva, lo cual va de la mano de la invariancia bajo traslaciones.

(Al estudiar en la licenciatura las ondas sobre una cuerda, la condición de Neumann se nos presenta como asociada a que el extremo de la cuerda está atado a un anillo que se desliza sin fricción sobre una varilla.)



Otra segunda posibilidad es pedir que

$$\left. X^\mu \right|_{\sigma=0, \pi} = c^\mu \quad \forall \tau \quad \left(\left. X^\mu \right|_{\sigma=\pi} = c^\mu \right),$$

↪ cte.

o lo que es lo mismo,

$$\partial_\tau X^\mu \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0 \quad \forall \tau \quad \left(\partial_t X^\mu \Big|_{\partial M} = 0 \right),$$

$$\uparrow \partial_t \equiv t^a \partial_a \text{ con } t^a \parallel \partial M$$

para al menos algunos valores de μ . Estos son

condiciones de Dirichlet, o de extremo fijo, y

tienen como consecuencia $\delta X^\mu \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0$, con lo

cual también se logra $\delta S_p = 0$. Esta condición

de frontera nos resulta muy familiar, pues es la que satisfacen las cuerdas de guitarra, violín, etc.

Pero en el contexto de la cuerda relativista, tienen la

peculiaridad de que violan la invariancia bajo Lorentz

si no todos los X^μ son Dirichlet, y además,

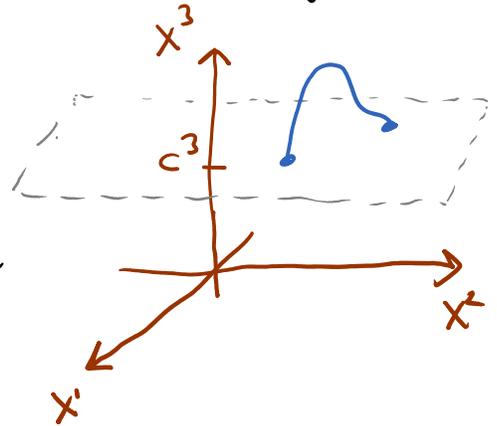
violan la invariancia bajo traslaciones.

Efectivamente, si pedimos que

$$\begin{cases} \partial_\sigma X^\alpha \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0 & \text{para } \alpha = 0, 1, \dots, p \\ X^i \Big|_{\sigma=0, \pi} = c^i & \text{para } i = p+1, \dots, D-1 \end{cases} \quad (\text{con } p = -1, \dots, D-2),$$

estamos estipulando que $x^i = c^i$ es un lugar especial, y las cuerdas abiertas deben tener sus extremos justo ahí.

P.ej., el caso $p=2$ sería como en la figura de la derecha: los extremos de la cuerda solo podrían desplazarse libremente a lo largo de x^1 y x^2 ,



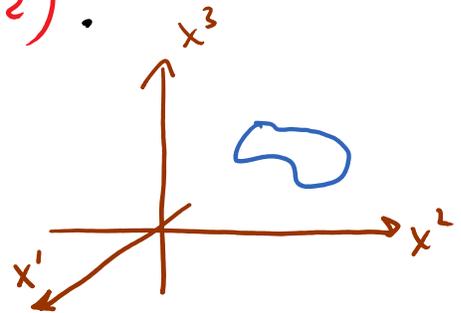
pero en las direcciones restantes están restringidos a no salirse nunca del plano 2-dimensional definido por $x^3 = c^3, \dots, x^{D-1} = c^{D-1}$. (El caso $p=-1$, donde todos los x^m serían Dirichlet, es todavía más peculiar, pues ambos extremos estarían atados en un solo evento $x^m = c^m$ en el espaciotiempo.) Vale la pena enfatizar que esta restricción aplica solo para los extremos: los puntos en el cuerpo de la cuerda abierta son indistinguibles de los puntos en una cuerda cerrada, y pueden por tanto moverse en todo el espacio. Aunque, por supuesto, incurrirán en un costo energético grande si se alejan mucho de

$x^i = c^i$, porque la cuerda tendrá que estirarse/crecer.

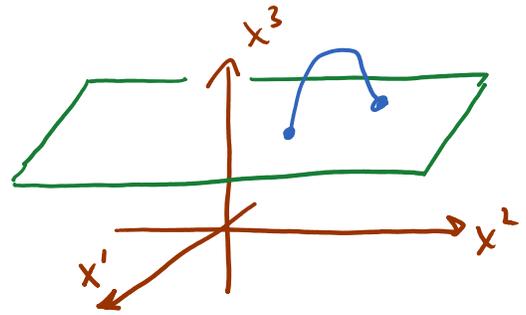
Durante muchos años, esto pareció demasiado extraño como para tomarse en cuenta. Pero en 1989, Dai, Leigh y Polchinski, y por separado Hořava, entendieron la verdadera naturaleza de estas condiciones: mostraron (utilizando la llamada "dualidad T") que el plano p -dimensional en $x^i = c^i$ es un objeto físico que debe considerarse parte del espectro no perturbativo, un solitón, de la teoría de cuerdas. Dai, Leigh y Polchinski lo bautizaron D-brana (o más específicamente, D_p-brana, si se quiere indicar su dimensionalidad).

La idea es entonces que, así como una cuerda cerrada es una pequeña excitación de (la generalización

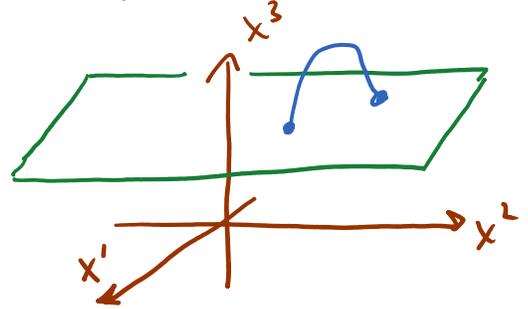
cuerdas de) el propio espaciotiempo, una cuerda abierta es una pequeña excitación de un objeto físico extendido en p dimensiones espaciales ($-1 \leq p \leq D-1$),



que llamamos una D-brana. Esto explica por qué los extremos de la cuerda abierta solo pueden deslizarse libremente a lo largo de algunas direcciones x^α ($\alpha=0, \dots, p$): la D-brana está localizada en $x^i = c^i$ ($i=p+1, \dots, D-1$), y la cuerda abierta es una excitación de ella — podemos pensarla como un hilito (filamento) de la propia D-brana. Dicho a la inversa, así como el espaciotiempo es un objeto cuyos pequeños excitaciones son cuerdas cerradas (que pueden, naturalmente, moverse por todo el espacio), y siempre que hablamos de cuerdas cerradas estamos en última instancia hablando del espaciotiempo cuerdero, una D-brana es un objeto cuyos pequeños excitaciones son cuerdas abiertas (que, naturalmente, solo pueden moverse sobre la D-brana), y siempre que hablamos de cuerdas abiertas estamos en última instancia hablando de una (o varias) D-brana(s).

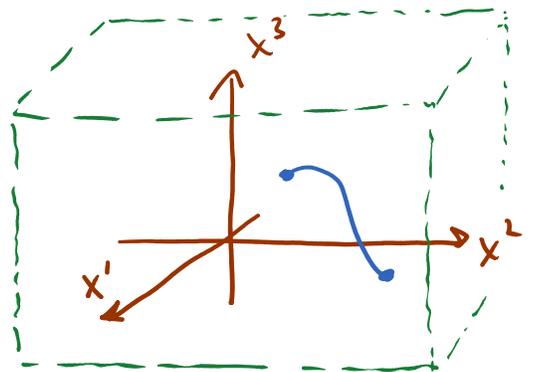


Queda claro entonces que el hecho de que las condiciones de Dirichlet violen la invariancia bajo Poincaré no es un crimen, sino una consecuencia natural de la



presencia de la D-brana. Y entendemos también que incluso en el caso $p=D-1$, donde todos los x^μ son Neumann y sí se tiene invariancia de Poincaré, las

cuerdas abiertas deben interpretarse de cualquier manera como excitaciones de una D-brana que llene todo el espacio, una $D(D-1)$ -brana.



letra: Dirichlet \uparrow \curvearrowright número: dimensión del espaciotiempo (eventualmente 26)

En ausencia de D-branas, NO puede haber cuerdas abiertas, solo cerradas.

El grueso de la comunidad cuerdas no aceptó a las D-branas como objetos intrínsecos de la teoría de cuerdas sino hasta 1995, cuando Polchinski publicó un trabajo clave [hep-th/9510017] donde demostró contundentemente

su relevancia. Desde entonces, los D-branes han sido pieza crucial en muchos avances dentro de la teoría.

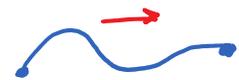
Procedamos ahora a implementar explícitamente las condiciones de frontera de Dp-brane,

$$\left. \partial_\sigma X^\alpha \right|_{\sigma=0,\pi} = 0 \quad (\alpha=0, \dots, p), \quad \left. X^i \right|_{\sigma=0,\pi} = c^i \quad (i=p+1, \dots).$$

Ahora nuestros campos viven no sobre un círculo, sino sobre un intervalo; pero de cualquier manera, el hecho de que σ tenga un rango finito vuelve a hacer que el momento en la hoja de mundo sea discreto, $p' = n$.

La diferencia importante con respecto a la cuerda cerrada es que ahora los modos izquierdos y derechos NO son independientes, porque las condiciones de borde hacen que los ondas derechas se conviertan en izquierdas (y viceversa) al rebotar en los extremos de la cuerda (\Rightarrow ondas estacionarias).

Concretamente, para satisfacer las condiciones de



$\partial_\sigma X^\alpha = 0$ \rightarrow $X^i = c^i$
 Neumann y Dirichlet necesitamos tener, respectivamente,

$\tilde{\alpha}_n^\alpha = \alpha_n^\alpha \quad \forall n$, $\tilde{\alpha}_n^i = -\alpha_n^i \quad \forall n$,
no confundir

así que la expansión toma la forma

$$X^\alpha(\tau, \sigma) = x^\alpha + 2\alpha' p^\alpha \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\alpha e^{-in\tau} \cos(n\sigma)$$

\uparrow porque ahora $p_\mu = \int_0^\pi d\sigma \pi_\mu = \int_0^\pi d\sigma \frac{\dot{X}_\mu}{2\pi\alpha'}$

$X^i(\tau, \sigma) = c^i + 0 + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^i e^{-in\tau} \sin(n\sigma)$.
no confundir

\uparrow no se permite término lineal en τ

$(\alpha_0^i + \tilde{\alpha}_0^i = 0)$, así que $p^i = 0$:

la cuerda No puede portar un momento

neto en las direcciones transversales

a la Dp-brana.

Es claro entonces que, al cuantizar, el espacio de Hilbert resultante para la cuerda abierta será más pequeño que

el de la cuerda cerrada (y en particular, veremos que no incluye a un gravitón).

Hemos entendido ya las condiciones de frontera para la cuerda cerrada y abierta, así como el cambio de notación de a_s y a_s^\dagger a α_s y $\tilde{\alpha}_s$.

Vimos en las pp. 141-2 que, incluso después de fijar la norma plana $g_{ab} = \eta_{ab}$ ó δ_{ab} , S_p tiene todavía a las transformaciones conformes como simetría local remanente. En efecto,

$$S_p = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma^1 d\sigma^2 \partial_a X \cdot \partial_a X$$

$$= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma^+ d\sigma^- \partial_{\sigma^+} X \cdot \partial_{\sigma^-} X,$$

con $\sigma^+ \equiv \tau + \sigma \equiv -i\sigma^2 + \sigma^1$, $\sigma^- \equiv \tau - \sigma \equiv -i\sigma^2 - \sigma^1$,
es invariante bajo

$$\sigma^+ \rightarrow \underline{\sigma}^+(\sigma^+), \quad \sigma^- \rightarrow \underline{\sigma}^-(\sigma^-):$$

$$\begin{aligned}
 \underline{S}_p &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma^+ d\sigma^- \partial_{\sigma^+} X \cdot \partial_{\sigma^-} X \\
 &= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma^+ d\sigma^- \underbrace{\left| \frac{\partial(\sigma^+, \sigma^-)}{\partial(\underline{\sigma}^+, \underline{\sigma}^-)} \right|}_{\frac{\partial\sigma^+}{\partial\underline{\sigma}^+} \frac{\partial\sigma^-}{\partial\underline{\sigma}^-}} \frac{\partial\sigma^+}{\partial\underline{\sigma}^+} \partial_{\sigma^+} X \cdot \partial_{\sigma^-} X \frac{\partial\sigma^-}{\partial\underline{\sigma}^-} \\
 &= S_p .
 \end{aligned}$$

Esta No es una reparametrización: la métrica no cambia (sigue siendo $g_{11} = 1 = g_{22}$, $g_{12} = 0$, o lo que es lo mismo, $g_{++} = 0 = g_{--}$, $g_{+-} = -1/2$), así que las distancias propias sí cambian. Como vimos,

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{c} \text{Transformación} \\ \text{Conforme} \end{array} \right) &\equiv \left(\begin{array}{c} \text{Transformación} \\ \text{de Weyl} \end{array} \right) \circ \left(\begin{array}{c} \text{Reparametrización} \\ \text{conforme} \end{array} \right) \\
 g_{ab} &\rightarrow \Omega g_{ab} \quad g_{ab} \rightarrow \underbrace{\frac{\partial\sigma^+}{\partial\underline{\sigma}^+} \frac{\partial\sigma^-}{\partial\underline{\sigma}^-}}_{\equiv \Omega^{-1}} g_{ab}
 \end{aligned}$$

Preserva localmente distancias propias, pero preserva ángulos.

A pesar de que las reparametrizaciones conformes son

un subconjunto de medida cero del grupo de difeos, en 2 dimensiones las transformaciones conformes (definidas a nivel local) forman un grupo de dimensión infinita: infinitesimalmente, $\underline{\sigma}^+(\sigma^+) = \sigma^+ + \sum_r \epsilon_r(\sigma^+)^r$.

S_p es un ejemplo de lo que llamamos una teoría de campos conforme (TCC \equiv CFT) en 2 dimensiones.

Las teorías conformes son también importantes en $d > 2$ dimensiones (p.ej., las teorías de campos bien definidas se reducen a una TCC a ultra-altas energías, y frecuentemente se reducen a TCC a ultra-bajas energías). Pero en $d > 2$, la dimensión del grupo conforme es solo $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$. [6:05/03/13]

El caso $d=2$ es especial, y la simetría conforme se vuelve entonces una herramienta muy poderosa.

Para hacerla manifiesta y aprovecharla más fácilmente, conviene hacer un nuevo cambio de

notación, para pasar a coordenadas complejas en la hoja de mundo:

$$\left. \begin{aligned} w &\equiv \sigma^2 + i\sigma^1 \quad (= i(\tau + \sigma) = i\sigma^+) \\ \bar{w} &\equiv \sigma^2 - i\sigma^1 \quad (= i(\tau - \sigma) = i\sigma^-) \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \begin{cases} \sigma^2 = \frac{1}{2}(w + \bar{w}) \\ \sigma^1 = \frac{i}{2}(\bar{w} - w) \end{cases}$$

↖ convenciones diferentes de Polchinski

↖ $\equiv w^*$

$$\Rightarrow \partial_w = \frac{1}{2}(\partial_2 - i\partial_1), \quad \partial_{\bar{w}} = \frac{1}{2}(\partial_2 + i\partial_1),$$

$$\begin{aligned} g_{w\bar{w}} &= \frac{\partial\sigma^1}{\partial w} \frac{\partial\sigma^1}{\partial \bar{w}} (1) + \frac{\partial\sigma^2}{\partial w} \frac{\partial\sigma^2}{\partial \bar{w}} (1) = \frac{1}{2}, \\ g_{ww} &= \frac{\partial\sigma^1}{\partial w} \frac{\partial\sigma^1}{\partial w} (1) + \frac{\partial\sigma^2}{\partial w} \frac{\partial\sigma^2}{\partial w} (1) = 0, \\ g_{\bar{w}\bar{w}} &= \frac{\partial\sigma^1}{\partial \bar{w}} \frac{\partial\sigma^1}{\partial \bar{w}} (1) + \frac{\partial\sigma^2}{\partial \bar{w}} \frac{\partial\sigma^2}{\partial \bar{w}} (1) = 0, \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{fuera} \\ \text{de la} \\ \text{diagonal,} \\ \text{justo} \\ \text{como} \\ g_{+-} \end{array} \right\}$$

$$d^2w \equiv dw d\bar{w} = \left| \frac{\partial(w, \bar{w})}{\partial(\sigma^1, \sigma^2)} \right| d\sigma^1 d\sigma^2 = 2 \underbrace{d\sigma^1 d\sigma^2}_{d^2\sigma}.$$

La acción de Polyakov se reescribe entonces como

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2w \partial_w X \cdot \partial_{\bar{w}} X.$$

↖ contracción en $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

Adoptaremos la notación $f(w, \bar{w})$ para una función

genéricas, $f(w)$ para una función analítica/holomorfa y $f(\bar{w})$ para una función antianalítica/antiholomorfa.
 Por ejemplo, la separación que tenemos entre en modo izquierdo y derecho adopta la forma

$$X^{\mathcal{N}}(w, \bar{w}) = X^{\mathcal{N}}(w) + \tilde{X}^{\mathcal{N}}(\bar{w}).$$

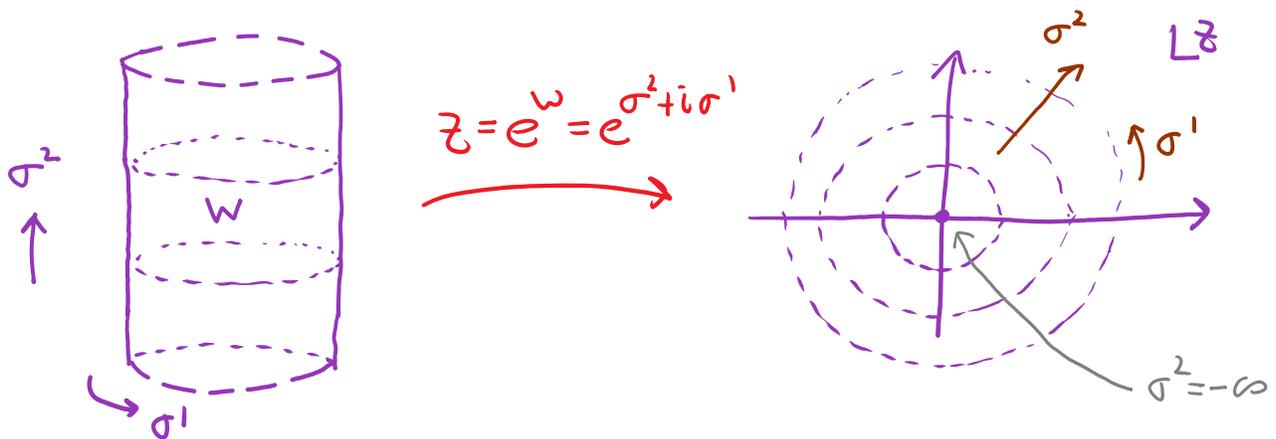
En este lenguaje, una transformación conforme corresponde a un mapeo analítico/holomorfo

$$w \rightarrow w' = w'(w), \quad \bar{w} \rightarrow \bar{w}'(\bar{w}),$$

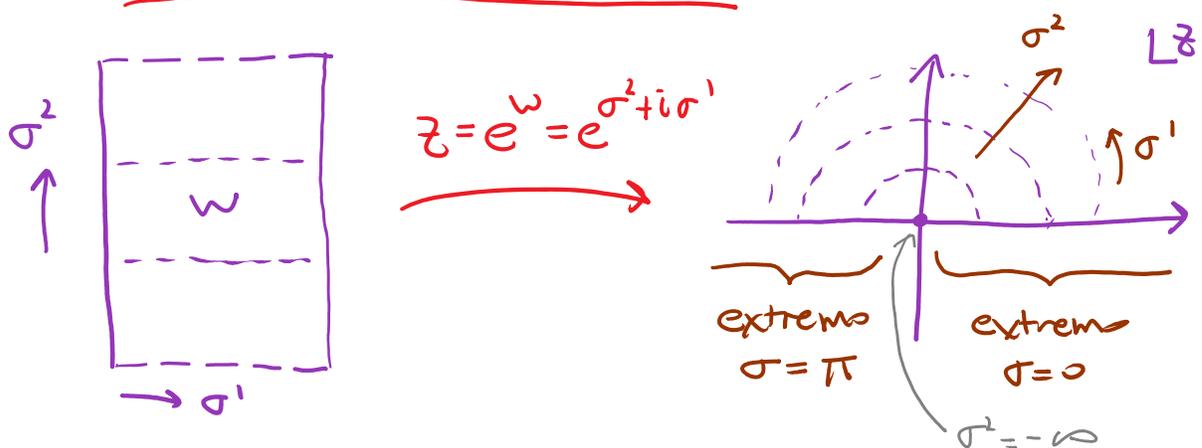
$$\text{con } X^{\mathcal{N}}(w, \bar{w}) \rightarrow X'^{\mathcal{N}}(w', \bar{w}') = X^{\mathcal{N}}(w, \bar{w}) \quad (\text{escalar})$$

(y $S_p' = S_p$, por el mismo argumento de antes).

Nos convendrá, de hecho, cambiar de hoja de mundo por medio de una transformación conforme específica $z = e^w$, que para la cuerda cerrada tiene el efecto de mapear el cilindro (infinito) al plano complejo \mathbb{C} ,



y para la cuerda abierta, mapea la tira (infinita) a la mitad superior del plano complejo,



Notar que las translaciones en el tiempo σ^2 en la hoja de mundo original se convierten en reescalamiento en el plano complejo, así que lo que desde el punto de vista de w es el Hamiltoniano H , el generador de la evolución temporal, se reinterpreta en

\bar{z} como el generador \mathbb{D} de dilataciones ($z \rightarrow \lambda z$). $\swarrow \in \mathbb{R}^+$

Por esta razón, al cuantizar la teoría en el plano complejo coordinatizado con z , elegiremos imponer las relaciones de conmutación a $|z|$ constante (es decir, a σ^2 constante). Este procedimiento se conoce como cuantización radial.

La acción tiene por supuesto la misma forma que antes, que abreviaremos en lo sucesivo como

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X \cdot \bar{\partial} X ,$$

donde $\partial \equiv \partial_z$, $\bar{\partial} \equiv \partial_{\bar{z}}$.

Al extremizarla, $\delta S_p / \delta X_\mu = 0$, obtenemos la ecuación de movimiento

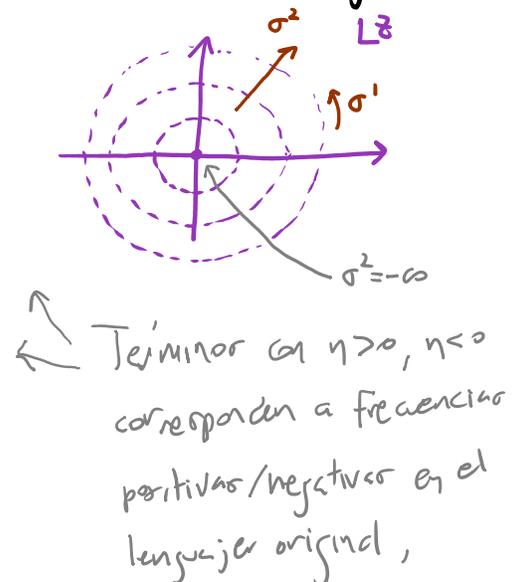
$$\partial \bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z}) = 0 \quad \text{Laplace/ondas,}$$

que nos informa de inmediato que $\partial X^\mu(z)$ es analítica, y $\bar{\partial} X^\mu(\bar{z})$ antianalítica.

Esto nos permite desarrollar a estas funciones en una expansión de Laurent (no puramente de Taylor, por el carácter singular que tiene el origen $z=0$):

$$\partial X^{\omega}(z) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n^{\omega}}{z^{n+1}},$$

$$\bar{\partial} X^{\omega}(\bar{z}) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}_n^{\omega}}{\bar{z}^{n+1}}.$$



Integrando, obtenemos entonces

$$X^{\omega}(z, \bar{z}) = X^{\omega}(z) + \tilde{X}^{\omega}(\bar{z}), \quad \text{con } e^{\text{Filt}} \tau$$

$$X^{\omega}(z) = \frac{1}{2} X^{\omega} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left(-\alpha_0^{\omega} \ln z + \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^{\omega}}{n z^n} \right),$$

$$\tilde{X}^{\omega}(\bar{z}) = \frac{1}{2} X^{\omega} + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \left(-\tilde{\alpha}_0^{\omega} \ln \bar{z} + \sum_{n \neq 0} \frac{\tilde{\alpha}_n^{\omega}}{n \bar{z}^n} \right).$$

Es fácil verificar que esta expansión de Laurent coincide perfectamente con la expansión de Fourier que dedujimos para la cuerda cerrada en la p. 155.

Igual que antes, para la cuerda cerrada la condición de periodicidad

$$X^M(e^{2\pi i} z, e^{-2\pi i} \bar{z}) = X^M(z, \bar{z})$$

nos obliga a tener $\alpha_0^M = \tilde{\alpha}_0^M$.

Para adquirir algo de práctica con estas variables complejas, repetiremos ahora la deducción de la carga de Noether asociada a traslaciones espacio-temporales (pp. 151-2).

Bajo $X^M(z, \bar{z}) \rightarrow X^M(z, \bar{z}) + \epsilon^M(z, \bar{z})$ tenemos

$$\delta S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z (\partial X^M \bar{\partial} \epsilon_M + \partial \epsilon_M \bar{\partial} X^M)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int d^2z \left[\underbrace{\left(\frac{i}{\alpha'} \partial X^M\right)}_{\equiv J_z^M} \bar{\partial} \epsilon_M + \partial \epsilon_M \underbrace{\left(\frac{i}{\alpha'} \bar{\partial} X^M\right)}_{\equiv J_{\bar{z}}^M} \right]$$

\uparrow
 dejando fuera,
 por convención

$$\stackrel{\text{partes}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \int d^2z (\bar{\partial} J_z^M + \partial J_{\bar{z}}^M) \epsilon_M(z, \bar{z}) = 0$$

\uparrow
 si usamos la
 ec. de movimiento
 para $X^M(z, \bar{z})$

$\Rightarrow (J_z^M, J_{\bar{z}}^M)$ son \mathcal{D} corrientes conservadas en la hoja de mundo,

$$\underbrace{\bar{\partial} J_z^M}_{\propto \partial X^M} + \underbrace{\partial J_{\bar{z}}^M}_{\propto \bar{\partial} X^M} = 0 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Así se ve el enunciado} \\ \partial_a J^{M a} = g^{ab} \partial_a J_b^M = 0 \\ \text{en estas coordenadas} \end{array}$$

LB: 06/09/21

Podemos notar que, en este caso, es posible de hecho definir $2(\times \mathcal{D})$ corrientes respectivamente analíticas/antianalíticas que se conservan por separado:

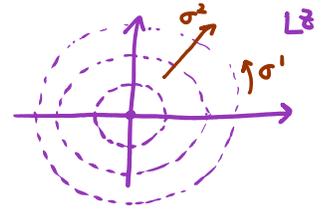
$$\tilde{j}^M \equiv (J_z^M, 0) = \frac{i}{\alpha'} \partial X^M, \quad \bar{j}^M \equiv (0, J_{\bar{z}}^M) = \frac{i}{\alpha'} \bar{\partial} X^M$$

satisfieren

$$\bar{\partial} \tilde{j}^M = 0, \quad \partial \bar{j}^M = 0.$$

Sabemos que la carga conservada es el momento espaciotemporal. Usando $z = e^w$

$$\begin{aligned} J_\tau^M &= i J_{\sigma^1}^M = i (J_w^M + J_{\bar{w}}^M) \\ &= i (\partial_z J_z^M + \bar{\partial}_{\bar{z}} J_{\bar{z}}^M), \quad \text{esto es} \end{aligned}$$



$$p^{\omega} = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{J_z^{\omega}}{2\pi i} = \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma'}{2\pi} (\bar{z} J_z^{\omega} + z J_{\bar{z}}^{\omega}) ,$$

↖ por normalización elegida (p.176)

$$\text{y dado que } z = e^{\sigma^2 + i\sigma^1} \Rightarrow dz = iz d\sigma^1 ,$$

$$\bar{z} = e^{\sigma^2 - i\sigma^1} \Rightarrow d\bar{z} = -i\bar{z} d\sigma^1 ,$$

$$p^{\omega} = \frac{1}{2\pi i} \oint (dz J_z^{\omega} - d\bar{z} J_{\bar{z}}^{\omega})$$

↺ indica sentido de z (opuesto a \bar{z})

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint (dz j^{\omega} - d\bar{z} \tilde{j}^{\omega}) .$$

Recordando ahora que $\partial X^{\omega}(\bar{z}) = -i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n^{\omega}}{\bar{z}^{n+1}}$

$$j^{\omega} \equiv J_z^{\omega} \equiv \frac{i}{\alpha'} \partial X^{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \frac{\alpha_n^{\omega}}{z^{n+1}} ,$$

$$\tilde{j}^{\omega} \equiv J_{\bar{z}}^{\omega} \equiv \frac{i}{\alpha'} \bar{\partial} X^{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \frac{\tilde{\alpha}_n^{\omega}}{\bar{z}^{n+1}} ,$$

tenemos entonces

$$p^{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \left(\oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{\alpha_n^{\omega}}{z^{n+1}} - \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \frac{\tilde{\alpha}_n^{\omega}}{\bar{z}^{n+1}} \right)$$

y usando el teorema de Cauchy, nos quedamos por último con el residuo de los polos simples ($n=0$),

$$p^{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \left(\alpha_0^{\omega} + \tilde{\alpha}_0^{\omega} \right) = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^{\omega} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\alpha}_0^{\omega},$$

en acuerdo con el resultado de la p.152 y 155.

Para una cuerda abierta asociada a una Dp-brana extendida a lo largo de x^1, \dots, x^p , las condiciones de borde son

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{\sigma} X^{\alpha} \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0 \\ \partial_{\tau} X^i \Big|_{\sigma=0, \pi} = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \partial X^{\alpha}(z) \Big|_{z=\bar{z}} = \bar{\partial} X^{\alpha}(\bar{z}) \Big|_{z=\bar{z}} \\ \partial X^i(z) \Big|_{z=\bar{z}} = -\bar{\partial} X^i(\bar{z}) \Big|_{z=\bar{z}} \end{array} \right.$$

$\leftarrow \alpha=0, \dots, p$
 $\leftarrow i=p+1, \dots, D-1$

$i(\partial_{\omega} - \partial_{\bar{\omega}}) = i(\tau\partial - \bar{\tau}\bar{\partial})$
 $i(\partial_{\omega} + \partial_{\bar{\omega}}) = i(\tau\partial + \bar{\tau}\bar{\partial})$

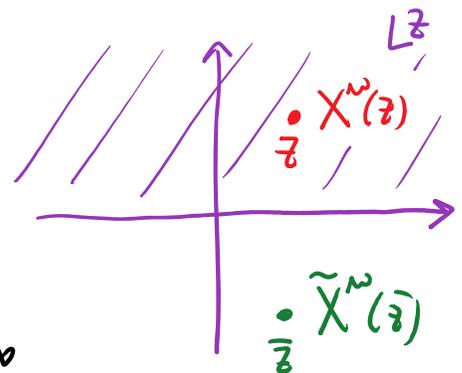
Usando las expansiones de Laurent de la p.175, esto implica igual que antes

$$\alpha_n^\alpha = \tilde{\alpha}_n^\alpha, \quad \alpha_n^i = -\tilde{\alpha}_n^i \quad \forall n,$$

de modo que en lugar de ondas viajeras tenemos ondas estacionarias.

Una manera conveniente de reexpresar esta conexión es implementar las condiciones de frontera a través de lo que en electro llamamos el método de imágenes, y en cuerdas se llama usualmente el truco de duplicación

("dubbling trick"). Comenzando con $X^\mu(\bar{z})$ definida en la mitad superior del plano, y $\tilde{X}^\mu(\bar{z})$ en la mitad inferior, extendemos $X^\mu(z)$ a todo el plano definiendo



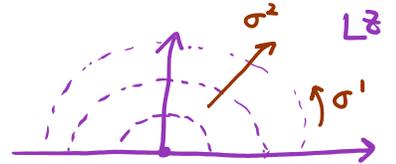
$$X^\alpha(\bar{z}) \equiv +\tilde{X}^\alpha(\bar{z}), \quad X^i(\bar{z}) \equiv -\tilde{X}^i(\bar{z}).$$

Las condiciones de borde $\partial X^\alpha(z) \Big|_{z=\bar{z}} = \bar{\partial} \tilde{X}^\alpha(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}=\bar{z}}$,

Esto es justo
equivalente
a $\alpha_n = \pm \tilde{\alpha}_n$

$\partial X^i(z) \Big|_{z=\bar{z}} = -\bar{\partial} \tilde{X}^i(\bar{z}) \Big|_{\bar{z}=\bar{z}}$ se traducen entonces simplemente en el enunciado de que $\partial X^M(z)$ sea una función continua ($X^M(z)$ diferenciable) al cruzar el eje real $z=\bar{z}$.

Podemos notar que en este caso



$$p^\alpha = \int_0^\pi d\sigma \frac{J_\tau^\alpha}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i} \left(\underbrace{\int d\bar{z} J_{\bar{z}}^\alpha}_{\frac{i}{\alpha} \partial X^\alpha(z)} - \int d\bar{z} J_{\bar{z}}^\alpha \right) \underbrace{\left(\frac{i}{\alpha} \bar{\partial} \tilde{X}^\alpha(\bar{z}) \right)}$$

y dado que

$$-\int d\bar{z} \bar{\partial} \tilde{X}^\alpha(\bar{z}) = +i \int_0^\pi d\sigma' e^{\sigma' - i\sigma'} \partial X^\alpha(e^{\sigma' - i\sigma'})$$

$\partial X^\alpha(\bar{z})$ por truco de duplicación

$$\begin{aligned} \sigma' &\equiv 2\pi - \sigma' & \int_\pi^{2\pi} \\ &= i \int_\pi^{2\pi} d\sigma' e^{\sigma' + i\sigma'} \partial X^\alpha(e^{\sigma' + i\sigma'}) \end{aligned}$$

$\underbrace{\int d\bar{z}'}_{\partial X^\alpha(z')}$

podemos reescribir

$$p^\alpha = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \underbrace{\frac{i}{\alpha'} \partial X^\alpha(z)}_{\frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_n \frac{\alpha_n^\alpha}{z^{n+1}}} = \frac{\alpha_0^\alpha}{\sqrt{2\alpha'}}.$$

Concluimos entonces que para la cuerda abierta

$$X^\alpha(z, \bar{z}) = X^\alpha - i\alpha' p^\alpha \ln|z|^2 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\alpha}{n} (z^{-n} + \bar{z}^{-n})$$

$$X^i(z, \bar{z}) = c^i + 0 + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^i}{n} (z^{-n} - \bar{z}^{-n}),$$

expresión que naturalmente coincide con la que tenemos en la p. 167.

Avanzamos ahora hacia la cuantización de la cuerda.

Para cuantizar canónicamente, promovemos

$$X^\mu(\tau, \sigma), \Pi_\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \partial_\tau X^\mu(\tau, \sigma) \rightarrow \hat{X}^\mu(\tau, \sigma), \hat{\Pi}_\mu(\tau, \sigma),$$

e imponemos las relaciones de conmutación a τ constante

$$[\hat{X}^\mu(\tau, \sigma), \hat{\Pi}_\nu(\tau, \sigma')] = i \delta_\nu^\mu \delta(\sigma - \sigma'),$$

o lo que es lo mismo,

$$[\hat{X}^\mu(\tau, \sigma), \partial_\tau \hat{X}^\nu(\tau, \sigma')] = i 2\pi \alpha' \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma').$$

Como es de esperarse, esto implica que los coeficientes

$$x^\mu, p^\mu, \alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu, \hat{p}^\mu, \hat{\alpha}_n^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\mu$$

satisfacen las relaciones de conmutación

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu}$$

$$[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = m \delta_{m, -n} \eta^{\mu\nu}$$

$$[\hat{\tilde{\alpha}}_m^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\nu] = m \delta_{m, -n} \eta^{\mu\nu}$$

← grados de libertad
de partícula

$$\left. \begin{array}{l} [\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \\ [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] = m \delta_{m, -n} \eta^{\mu\nu} \\ [\hat{\tilde{\alpha}}_m^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\nu] = m \delta_{m, -n} \eta^{\mu\nu} \end{array} \right\} [\hat{a}_m^\mu, \hat{a}_n^\nu] = 2\pi \delta_{m, n} \eta^{\mu\nu}$$

(ver p. 155)

Verificaremos esto explícitamente en la Tarea 2.

Como ya habíamos mencionado, en las coordenadas z, \bar{z} lo anterior equivale a hacer cuantización radial, donde las relaciones de conmutación se imponen a $|z|$ constante.

Con estos operadores podemos construir el espacio de Hilbert completo, comenzando con

← eigenestados de \hat{p}^μ (para tener energía definida)

$|0, p\rangle$

↑ estado base de los infinitos osciladores $\hat{\alpha}_n^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\mu \forall \mu, n$
(aniquilado por $\hat{\alpha}_{n>0}^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_{n>0}^\mu$)

y actuando en los operadores de creación $\hat{\alpha}_{-n}^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_{-n}^\mu$.
↑ $n>0$ ↑

Recordemos por supuesto que, entre todos estos estados, solo serán físicos aquellos que satisfacen las constricciones a nivel cuántico, que básicamente tomarán la forma

$$\sim \hat{T}_{ab}(\tau, \sigma) | \text{físico} \rangle = 0 \quad \forall \tau, \sigma. \quad (\text{pero, ver más adelante.})$$

2 componentes independientes } ↑ número infinito de condiciones

Podemos además calcular correladores

$$\langle 0 | T \{ \hat{X}^{\mu_1}(\tau_1, \sigma_1) \dots \hat{X}^{\mu_n}(\tau_n, \sigma_n) \} | 0 \rangle, \quad \leftarrow p^\mu = 0$$

↑ orden temporal

que, en virtud de que la teoría en la hoja de mundo es libre, quedan determinados por completo una vez que obtenemos el propagador (\equiv función de correlación de 2 puntos)

$$\langle 0 | T \{ \hat{X}^{\mu}(\tau, \sigma) \hat{X}^{\nu}(\tau', \sigma') \} | 0 \rangle,$$

o, en coordenadas complejas,

$$\langle 0 | R \{ \hat{X}^{\mu}(z, \bar{z}) \hat{X}^{\nu}(z', \bar{z}') \} | 0 \rangle.$$

↑ orden radial (campos valores en puntos más
lejanos del origen aparecen más a la izquierda)

Pero nosotros, en el resto del curso, preferiremos aprender a llevar a cabo este tipo de cálculos en cuantización por integral de trayectorias.

En ese contexto, los $X^{\mu}(z, \bar{z})$ son funciones ordinarias, no operadores, y sumamos sobre todos ellos en la integral $\int \mathcal{D}X^{\mu}(z, \bar{z})$, sin restringirnos a aquellos que satisfacen la ecuación de movimiento. Esto pone en riesgo la definición de los coeficientes $x^{\mu}, p^{\mu}, \alpha_n^{\mu}, \tilde{\alpha}_n^{\mu}$, que en la descripción canónica figuraban en la expansión de la solución más general a la ecuación de movimiento.

Pero una propiedad importante es que, dentro de

La integral funcional, la ecuación de movimiento si se satisface "en promedio", lo cual es de hecho indispensable para que exista el contrato que ya vamos con el formalismo canónico (p. 84):

↙ |z| aumenta hacia la izquierda

$$\langle 0 | R \{ \hat{\sigma}_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \hat{\sigma}_N(z_N, \bar{z}_N) \} | 0 \rangle$$

funciones locales
construidas en X^μ y/o
sus derivadas

ec. de mov. es relevante aquí

$$= \frac{\int \mathcal{D}X \sigma_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \sigma_N(z_N, \bar{z}_N) e^{-S[X]}}{\int \mathcal{D}X e^{-S[X]}}$$

$$\equiv \frac{\langle \sigma_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \sigma_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle}{\langle 1 \rangle}$$

ec. de mov. debe ser relevante aquí también

Concretamente, tenemos

$$0 = \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X^\mu(z, \bar{z})} \left(e^{-S[X]} \sigma_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \sigma_N(z_N, \bar{z}_N) \right)$$

$$0 = \int \mathcal{D}X \left(- \underbrace{\frac{\delta S}{\delta X^\mu(z, \bar{z})}}_{\frac{1}{2\pi\alpha'} \partial \bar{\partial} X^\mu(z, \bar{z})} \sigma_1 \dots \sigma_N + \underbrace{\frac{\delta \sigma_1(z_1, \bar{z}_1)}{\delta X^\mu(z, \bar{z})}}_{\propto \delta^{(2)}(z-z_1)} \sigma_2 \dots \sigma_N + \dots \right) e^{-S[X]}$$

p.ej. $\frac{\delta X^\nu(z_1, \bar{z}_1)}{\delta X^\mu(z, \bar{z})} = \delta_{\mu\nu}^{\nu} \delta^{(2)}(z-z_1)$

es decir, se cumplen las ecuaciones de Schwinger-Dyson

$$\partial \bar{\partial} \langle X^\mu(z, \bar{z}) \sigma_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \sigma_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \sum_{r=1}^N \underbrace{\langle \sigma_1 \dots \frac{\delta \sigma_r}{\delta X^\mu} \dots \sigma_N \rangle}_{\propto \delta^{(2)}(z-z_r)}$$

"términos de contacto"

de modo que

$$\partial \bar{\partial} \langle X^\mu(z, \bar{z}) \sigma_1(z_1, \bar{z}_1) \dots \sigma_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle = 0 \text{ si } z \neq z_r \forall r.$$

Este es el sentido en el cual la ecuación de movimiento se cumple dentro de la integral de trayectoria.

Usando esta propiedad, podemos desarrollar

$$\partial X^\mu(z) = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n^\mu}{z^{n+1}}, \quad \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{\alpha}_n^\mu}{\bar{z}^{n+1}},$$

dentro de $\langle \rangle$. Equivalentemente, podemos definir

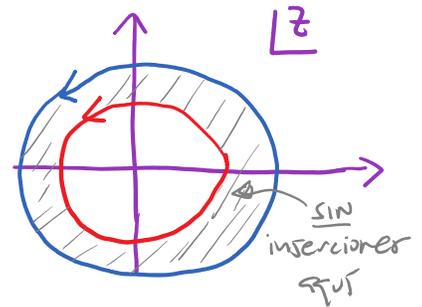
$$\alpha_n^{\mu} \equiv i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^n \partial X^{\mu}(z),$$

$$\tilde{\alpha}_n^{\mu} \equiv -i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^n \bar{\partial} X^{\mu}(\bar{z})$$

dentro de la integral funcional sobre todos los X^{ν} .

Por Cauchy, estas integrales dan el mismo resultado para cualquier contorno que incluye el origen, y en particular,

para 2 círculos $|z| = e^{\sigma^2}$ y $|\bar{z}| = e^{\sigma'^2}$ con $\sigma^2 \neq \sigma'^2$.



Es decir, α_n^{μ} y $\tilde{\alpha}_n^{\mu}$ son independientes del tiempo $\sigma^2 = i\tau$, o lo que es lo mismo, son cargas conservadas.

Esto en realidad es obvio: los α 's y $\tilde{\alpha}$'s son los coeficientes de Laurent/Fourier de los campos X^{μ} , y son independientes del tiempo $\tau \leftrightarrow |z|$ como consecuencia de la ecuación de movimiento. (Lo mismo aplica para los coeficientes a, a^* en la expansión del campo de K6.)

Ahora, ¿cómo determinaríamos aquí las relaciones de conmutación entre los α 's, $\tilde{\alpha}$'s, que son simples

números?

Nos conviene primero calcular el propagador

$$\langle X^{\mu}(z_1, \bar{z}_1) X^{\nu}(z_2, \bar{z}_2) \rangle \equiv \int \mathcal{D}X \quad X^{\mu}(1) X^{\nu}(2) e^{-\frac{1}{2\pi\alpha'} \int \mathcal{L}_2 \partial X \cdot \bar{\partial} X}$$

$$\stackrel{\text{partes}}{=} -\frac{1}{2} \int \mathcal{L}_2 X \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{\pi\alpha'} \partial \bar{\partial}\right)}_{\equiv \Delta_2} X$$

Lg: 08/09/21

Esta integral es análoga (idéntica) a la integral múltiple

$$\int dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad x_n x_{n'} \exp\left[-\sum_{m,m'} x_m \Delta_{mm'} x_{m'}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial u_n} \frac{\partial}{\partial v_{n'}} \left[\int dx_1 \dots dx_n \quad e^{-\sum_{m,m'} x_m \Delta_{mm'} x_{m'} + \sum_m x_m J_m} \right]_{J_m=0} \quad \forall_m$$

Integral gaussiana (que sabemos hacer completando el cuadrado)

De igual forma, podemos agregar aquí un término fuente

$$\int \mathcal{L}_2 J_{\mu}(z, \bar{z}) X^{\mu}(z, \bar{z}), \text{ para reescribir}$$

↑ una fuente lineal para cada campo

$$\langle X^\mu(1) X^\nu(2) \rangle = \int \mathcal{D}X X^\mu(1) X^\nu(2) e^{-\frac{1}{2} \int \mathcal{L}_2 X \cdot \Delta_2 X}$$

$$= \frac{\delta}{\delta J_\mu(1)} \frac{\delta}{\delta J_\nu(2)} \left[\int \mathcal{D}X e^{-\frac{1}{2} \int \mathcal{L}_2 X \cdot \Delta_2 X + \int \mathcal{L}_2 J \cdot X} \right]_{J=0}$$

$\uparrow_{z_1, \bar{z}_1}$ $\uparrow_{z_2, \bar{z}_2}$ $\equiv Z[J]$ función
generatriz

Para completar el cuadrado, definiremos

$$X^\mu(z, \bar{z}) = Y^\mu(z, \bar{z}) + \int \mathcal{L}_2 \bar{z}' \Delta^{-1}(z, \bar{z}; z', \bar{z}') J^\mu(z', \bar{z}'),$$

con Δ^{-1} la función de Green que satisface

$$\Delta_z \Delta^{-1}(z, \bar{z}; z', \bar{z}') = \delta^{(2)}(z - z'). \Rightarrow \Delta_z \left(\int \mathcal{L}_2 \bar{z}' \Delta^{-1}(z, \bar{z}; z', \bar{z}') J^\mu(z', \bar{z}') \right) = J^\mu(z, \bar{z})$$

solución a la ec. de mov. G1 fuente

Tenemos entonces

$$-\frac{1}{2} \int \mathcal{L}_2 X \cdot \Delta_2 X = -\frac{1}{2} \int \mathcal{L}_2 Y \cdot \Delta_2 Y$$

$$-\frac{1}{2} \int \mathcal{L}_2 Y \cdot \Delta_2 \underbrace{\int \mathcal{L}_2 \bar{z}' \Delta^{-1} J}_{J(z, \bar{z})} - \frac{1}{2} \int \mathcal{L}_2 \bar{z}' \underbrace{\int \mathcal{L}_2 \bar{z}'' \Delta^{-1} J}_{J(z, \bar{z})} \cdot \Delta_2 Y$$

partes

$$-\frac{1}{2} \int \mathcal{L}_2 \bar{z}' \int \mathcal{L}_2 \bar{z}' \Delta^{-1} J \cdot \Delta_2 \underbrace{\int \mathcal{L}_2 \bar{z}'' \Delta^{-1} J}_{J(z, \bar{z})}$$

es decir,

$$X^w = Y^w + \int \mathcal{D}z' \Delta^{-1} J$$

$$-\frac{1}{2} \int \mathcal{D}z X \cdot \Delta_z X = -\frac{1}{2} \int \mathcal{D}z Y \cdot \Delta_z Y - \int \mathcal{D}z Y \cdot J - \frac{1}{2} \int \mathcal{D}z \mathcal{D}z' J \cdot \Delta_z^{-1} J$$

y además

se cancelan

se suman

$$\int \mathcal{D}z J \cdot X = \int \mathcal{D}z J \cdot Y + \int \mathcal{D}z J \cdot \int \mathcal{D}z' \Delta^{-1} J$$

de modo que

$$\int \mathcal{D}z \left(-\frac{1}{2} X \cdot \Delta_z X + J \cdot X \right) = -\frac{1}{2} \int \mathcal{D}z Y \cdot \Delta_z Y + \frac{1}{2} \int \mathcal{D}z \mathcal{D}z' J(z, \bar{z}) \cdot \Delta^{-1}(z, \bar{z}; z', \bar{z}') J(z', \bar{z}').$$

← no hay ya término lineal en Y

Con esto concluimos que

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}X e^{-\frac{1}{2} \int X \cdot \Delta_z X + \int J \cdot X} \\ &= e^{\frac{1}{2} \iint J \cdot \Delta^{-1} J} \int \mathcal{D}Y e^{-\frac{1}{2} \int Y \cdot \Delta_z Y} \\ &\quad \left[\text{hemos usado } \mathcal{D}X^w = \mathcal{D}Y^w \right] \\ &= \langle 1 \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{\text{Det } \Delta_z}} \right)^D \quad (\text{p. 108}) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\langle X^{\mu}(1) X^{\nu}(2) \rangle &= \frac{\delta}{\delta J_{\mu}(1)} \frac{\delta}{\delta J_{\nu}(2)} Z[J] \Big|_{J=0} \\
&= \frac{\delta}{\delta J_{\mu}(1)} \frac{\delta}{\delta J_{\nu}(2)} \left[\underbrace{\exp\left(\frac{1}{2} \int dz dz' J(z) \cdot \Delta^{-1}(z, z') J(z')\right)}_{1 + \frac{1}{2} \int dz dz' J(z) \cdot \Delta^{-1}(z, z') J(z') + \dots} \right]_{J=0} \langle 1 \rangle \\
\frac{\delta J_{\lambda}(z)}{\delta J_{\nu}(z_2)} &= \delta_{\lambda}^{\nu} \delta^{(2)}(z - z_2) \quad (\text{análogo a } \frac{\partial J_n}{\partial J_m} = \delta_{n,m}) \\
&= \eta^{\mu\nu} \Delta^{-1}(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2) \langle 1 \rangle . \\
&\quad \uparrow \text{ignorar por ahora (constante)}
\end{aligned}$$

Este es un resultado muy conocido en teoría cuántica de campos: **el propagador libre es la función de Green asociada al operador diferencial en la parte cuadrática de la acción.**

Podríamos haber llegado a la misma conclusión mucho más rápido observando que

$$0 = \int \mathcal{D}X \frac{\delta}{\delta X_{\mu}(z_1, \bar{z}_1)} \left[e^{-S[X]} X^{\nu}(z_2, \bar{z}_2) \dots \right]$$

\uparrow posibles inserciones en $z_r \neq z_1$

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X \cdot \bar{\partial} X$$

$$0 = \int \mathcal{D}X \left(\frac{1}{\pi\alpha'} \partial \bar{\partial} X^\mu(z_1, \bar{z}_1) X^\nu(z_2, \bar{z}_2) + \eta^{\mu\nu} \delta^{(2)}(z_1 - z_2) \right) e^{-S} \dots,$$

es decir, podemos sacar las derivadas de $\int \mathcal{D}X$

$$-\frac{1}{\pi\alpha'} \partial \bar{\partial} \langle X^\mu(z_1) X^\nu(z_2) \dots \rangle = \eta^{\mu\nu} \delta^{(2)}(z_1 - z_2) \langle \dots \rangle.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv \Delta_z}$ recuerda, ec. de Schwinger-Dyson, p. 187

En el caso sin inserciones, $\dots = 1$, esto coincide con lo que obtuvimos arriba: el propagador es la función de Green.

De la discusión usual del campo de Klein-Gordon, podemos explicitamente al propagador en espacio de momentos (p. 16):

$$-\underbrace{(\partial_{\sigma_1}^2 + \partial_{\sigma_2}^2)}_{4|z|^2 \partial \bar{\partial}} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{e^{i p \cdot (\sigma - \sigma')}}{\underbrace{p^2 - i\epsilon}_{(p^1)^2 + (p^2)^2}} = \underbrace{\delta^{(2)}(\sigma - \sigma')}_{2|z|^2 \delta^{(2)}(z - z')}$$

A nosotros nos será directamente útil la expresión en espacio de posiciones,

$$\int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{e^{i p \cdot (\sigma - \sigma')}}{p^2} \sim \ln |\sigma - \sigma'|^2$$

\uparrow por análisis dimensional

Podemos mostrar directamente que

$$\partial\bar{\partial} \ln|z|^2 = \partial\left(\frac{1}{z}\right) = \bar{\partial}\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi \delta^{(2)}(z)$$

$$= 0 \text{ para } z \neq 0$$

usando el teorema de Gauss/Stokes/Green

$$\int_R dx dy (\underbrace{\partial_x v^x + \partial_y v^y}_{\partial_a v^a}) = \oint_{\partial R} (\underbrace{v^x dy - v^y dx}_{ds n_a v^a}),$$

que en coordenadas complejas $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$ dice que

$$\int_R d^2z (\partial_z v^z + \partial_{\bar{z}} v^{\bar{z}}) = i \oint_{\partial R} (v^z d\bar{z} - v^{\bar{z}} dz).$$

Tenemos entonces

$$\int d^2z \underbrace{\partial\bar{\partial} \ln|z|^2}_{\frac{1}{z} \equiv v^z \quad (v^{\bar{z}}=0)} \stackrel{\text{Gauss}}{=} i \oint d\bar{z} \frac{1}{z} = i(-2\pi i) = 2\pi,$$

$$\stackrel{?}{=} 2\pi \delta^{(2)}(z) \quad \checkmark$$

lo cual confirma el resultado prometido.



$$\frac{1}{2\pi} \partial \bar{\partial} \ln |z|^2 = \delta^{(2)}(z) \quad \Delta_{\bar{z}} = -\frac{1}{\pi \alpha'} \partial \bar{\partial}$$

Sobremos pues que $\Delta^{-1}(z; z') = -\frac{\alpha'}{2} \ln |z - z'|^2$,

y por tanto

L7:12/03/13

$$\langle X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z - z'|^2 \langle 1 \rangle .$$

Para todo lo sucesivo, nos será muy conveniente definir el orden normal conforme

en orden temporal / radial,
dentro de $\int dx$

$$: X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \equiv X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') + \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z - z'|^2$$

↑ restamos el propagador

(que como veremos después, está relacionado con el orden normal usual - de operadores de creación / aniquilación - en el formalismo canónico).

Con esta definición tenemos en subíndice

$$\langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \rangle = 0 .$$

Por otro lado,

$$\langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle \neq 0 \quad \text{en general, pero}$$

$$\begin{aligned}
 \partial \bar{\partial} \langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle & \\
 \uparrow \text{inserciones en } z_r \neq z & \\
 \equiv \underbrace{\partial \bar{\partial} \langle X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') \dots \rangle}_{\substack{\text{p. 173} \\ = -\pi \alpha' \eta^{\mu\nu} \delta^{(2)}(z-z') \langle \dots \rangle}} + \underbrace{\partial \bar{\partial} \langle \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z-z'| \dots \rangle}_{\pi \alpha' \eta^{\mu\nu} \delta^{(2)}(z-z') \langle \dots \rangle} & \\
 = 0 . &
 \end{aligned}$$

El hecho de que $\langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle$ es una función que satisface la ecuación de Laplace con respecto a z (y también z') implica que (a diferencia de la función $\langle X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') \dots \rangle$) es la suma de una parte analítica y una anti-analítica, y podemos desarrollarlas alrededor de $z=z'$:

$$\begin{aligned}
 \langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle &= \langle : \underbrace{X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}')}_{\equiv X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}')} : \dots \rangle \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-z')^n}{n!} \langle : \partial^n X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\bar{z}-\bar{z}')^n}{n!} \langle : \bar{\partial}^n X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle .
 \end{aligned}$$

Nótese que esta es una expansión de Taylor, no de Laurent, pues de otro modo no sería solución a Laplace en $z=z'$.

Con esto vemos en particular que

$$\lim_{z \rightarrow z'} \langle : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle = \langle : X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}') : \dots \rangle$$

es no singular, a diferencia de $\lim_{z \rightarrow z'} \langle X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') \dots \rangle$.

En conjunto, tenemos entonces la expansión (válida dentro de funciones de correlación)

$$\begin{aligned} X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') &= -\frac{\alpha'}{2} \ln |z-z'| + : X^{\mu}(z, \bar{z}) X^{\nu}(z', \bar{z}') : \\ &= -\frac{\alpha'}{2} \ln |z-z'| + : X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}') : \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ (z-z')^n : \partial^n X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}') : + (\bar{z}-\bar{z}')^n : \bar{\partial}^n X^{\mu} X^{\nu}(z', \bar{z}') : \right\}. \end{aligned}$$

Este es un ejemplo particular de un concepto más general en teoría de campo: la expansión del producto de operadores (FPO = OPE),

$$O_i(z, \bar{z}) O_j(z', \bar{z}') \xrightarrow{z \rightarrow z'} \sum_k f_{ij}^k(z-z', \bar{z}-\bar{z}') O_k(z', \bar{z}').$$

En el caso general, se trata solo de una expansión asintótica

(se vuelve mejor y mejor conforme $|z-z'| \rightarrow 0$, aunque no converge cuando $z \neq z'$); pero en teoría de campos conformes de hecho converge (con un radio de convergencia dado por la distancia a la inserción más cercana).

Para tener estas mismas propiedades en el producto de 3 o más operadores (funciones) locales, el orden normal se debe definir por analogía con el teorema de Wick, que relaciona los productos en orden temporal (el cual es en sí mismo implementado por la integral funcional) y normal (en el sentido usual, de \hat{a}^r y \hat{a}^{+r}):

$$X^{\omega_1}(1) \dots X^{\omega_n}(n) = :X^{\omega_1}(1) \dots X^{\omega_n}(n):$$

$$+ :X^{\omega_1}(1) X^{\omega_2}(2) X^{\omega_3}(3) \dots X^{\omega_n}(n): + \text{otros términos con 1 contracción}$$

$$\text{Contracción} \equiv -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu_1 \mu_2} \ln |z_1 - z_2|^2 \quad (\text{propagador})$$

$$+ :X^{\omega_1}(1) X^{\omega_2}(2) X^{\omega_3}(3) X^{\omega_4}(4) X^{\omega_5}(5) \dots : + \text{términos con 2 contracciones}$$

10.13/05/21

+ términos con ≥ 3 contracciones.

(Más formalmente, para cualquier función $F[X]$, podemos escribir

$$F[X] = \exp\left(-\frac{\alpha'}{4} \int dz d\bar{z}' \ln|z-z'|^2 \frac{\delta}{\delta X^\mu(z, \bar{z})} \frac{\delta}{\delta X^\nu(z', \bar{z}')}\right) : F[X] : .$$

Con esto podemos calcular cualquier F_{po} . P.ej.,

$$:\partial X \cdot \partial X(z) : \partial X^\mu(z') = :\partial X \cdot \partial X(z) \partial X^\mu(z') :$$

operador
compuesto
local

$$+ :\partial X \cdot \partial X(z) \partial X^\mu(z') : + :\partial X \cdot \partial X(z) \partial X^\mu(z') :$$

$$\partial \partial' \left(-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z-z'|^2 \right) : \partial X_\nu(z) :$$

ídem

$$-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \partial \left(-\frac{1}{z-z'} \right)$$

$$\frac{1}{(z-z')^2}$$

Notar que el término

$$:\partial X \cdot \partial X(z) \partial X^\mu(z') :$$

no se agrega, porque ya está incluido en $:\partial X \cdot \partial X :$

$$= -\alpha' \frac{1}{(z-z')^2} : \partial X^\mu(z) : + :\partial X \cdot \partial X(z) \partial X^\mu(z') :$$

↑ desarrollar en Taylor alrededor de $z=z'$

$$= -\frac{\alpha'}{(z-z')^2} \partial X^{\mu}(z') - \frac{\alpha'}{(z-z')} \partial^2 X^{\mu}(z') + \text{términos finitos cuando } z \rightarrow z'.$$

Como veremos en la Tarea 2, se puede mostrar similarmente

que

$$: e^{ik \cdot X(z, \bar{z})} : : e^{ik' \cdot X(z', \bar{z}')}$$

$$= : e^{ik \cdot X(z, \bar{z})} e^{ik' \cdot X(z', \bar{z}')} : \exp \left[i^2 k \cdot k' \left(-\frac{\alpha'}{2} \ln |z-z'|^2 \right) \right].$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{|z-z'|^{-\alpha' k \cdot k'}}$

En la formulación canónica podemos definir de la manera usual el orden normal de creación/aniquilación, que en este curso denotaremos

$$\begin{aligned} \circ \circ &\equiv \text{colocar los operadores de creación } \hat{\alpha}_{-m}^{\mu} \\ &\text{a la izquierda de los de aniquilación } \hat{\alpha}_n^{\nu} \quad (\forall m, n > 0) \\ &\text{y } \hat{x}^{\mu} \text{ a la izquierda de } \hat{p}^{\mu}. \end{aligned}$$

En la Tarea 2 confirmaremos también que las 2 definiciones de orden normal coinciden (es decir, $: : = \circ \circ$) para nuestra teoría

$$S_p = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X \cdot \bar{\partial} X \quad (\text{no necesariamente})$$