

# INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CUERDAS

## 0. Motivación: ¿Por qué cuerdas?

La teoría de cuerdas es uno de nuestros intentos más recientes por entender de qué está hecho nuestro universo.

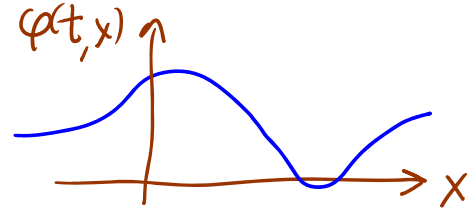
El lenguaje que hasta ahora utilizamos para responder a estas preguntas es el de la teoría cuántica de campos. Para poder contrastarlo con la teoría de cuerdas, nos conviene iniciar con un breve repaso del lenguaje de campos.

Por definición, un campo es una cantidad física que puede tomar un valor distinto en cada punto del espacio, a cada instante del tiempo:  $\varphi(t, \vec{x}) \leftrightarrow \varphi_{\vec{x}}(t)$

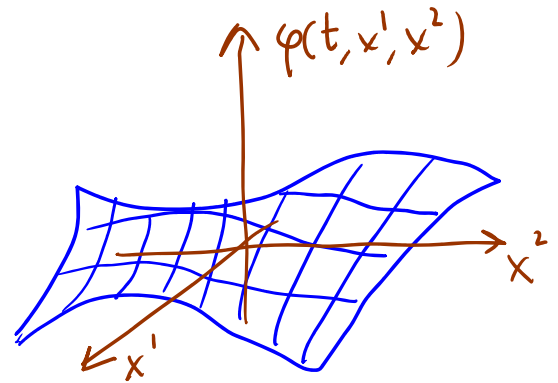
análogo a  $x_n(t)$  en sistema con  $N$  partículas  
 $\uparrow$  índice discreto  $n=1, \dots, N$   
 $\uparrow$  índice continuo  $\in \mathbb{R}^3$

Un 'campo' en  $0+1$  dimensiones  $\varphi(t)$  sería exactamente análogo a un sistema de 1 partícula que se mueve en 1 dim,  $y(t)$ .

Un campo en  $1+1$  dim  $\varphi_x(t)$  es exactamente análogo a una cuerda que puede oscilar en 1 dim transversa,  $y(x,t)$ .



Un campo en  $2+1$  dimensiones  $\varphi(t, x^1, x^2)$  es exactamente análogo a la membrana de un tambor, que oscila en 1 dim transversa,  $y(t, x^1, x^2)$

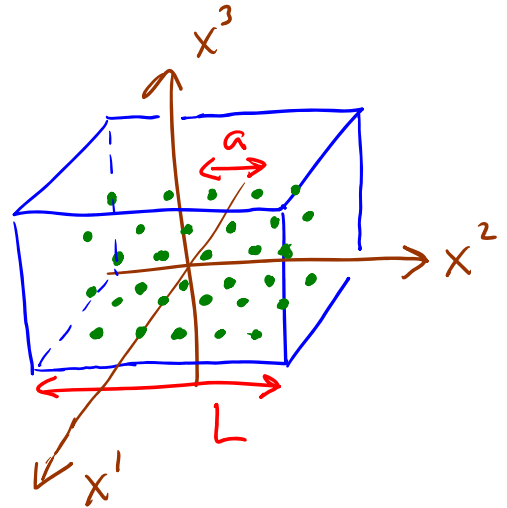


Un campo en  $3+1$  dim  $\varphi(t, \vec{x})$  es entonces análogo a 1 gelatina / jalea que llena 3 dim espaciales y oscila en 1 dim transversa,  $y(t, \vec{x})$ . Ejemplos sencillos serían los campos que describen a la temperatura o la presión o la densidad o la velocidad del aire en un cuarto.

A partir de la definición vemos que cualquier campo (en  $d+1$  dim con  $d \geq 1$ ) es un sistema con un número infinito (y no denumerable) de grados de libertad.



Se le puede pensar como el límite  $L \rightarrow \infty, a \rightarrow 0$  del caso con un volumen finito  $L^3$  en un espacio discretizado con espaciado  $a$ , sistema que tendría  $(L/a)^3$  grados de libertad.



Podemos describir la dinámica de nuestro campo  $\varphi(x) \equiv \varphi(x^\mu) \equiv \varphi(t, \vec{x})$  especificando su acción

$$S[\varphi] = \int dt \underbrace{L[\varphi(t)]}_{\text{Lagrangiano}} = \int dt \int^3 x \underbrace{\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)}_{\text{Densidad Lagrangiana}}.$$

En el caso de un sistema con un número finito de grados de libertad, descriptor por variables canónicas

$$q_n \text{ y } p_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}, \text{ siempre que el procedimiento}$$

de cuantización canónica consiste en promover

$$q_n, p_m \rightarrow \text{Operadores } \hat{q}_n, \hat{p}_m \text{ que}$$

satisfican las relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{q}_n, \hat{q}_m] = 0 = [\hat{p}_n, \hat{p}_m] \quad \forall n, m,$$

$$[\hat{q}_n, \hat{p}_m] = i\hbar \delta_{nm} \quad (\text{trabaja con } \hbar=1).$$

Operadores en el cuadro de Schrödinger,  
o de Heisenberg a tiempos iguales

Nuestro ejemplo favorito es por supuesto el oscilador armónico

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2}_{\Rightarrow p_j = m \dot{x}_j} - \frac{1}{2} m \omega^2 \vec{x}^2, \text{ o, equivalentemente,}$$

$$H \equiv \sum_j p_j \dot{x}_j - L = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \vec{x}^2,$$

donde recordamos que en las definiciones

$$a_j \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( x_j + \frac{i p_j}{m\omega} \right), \quad a_j^* = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( x_j - \frac{i p_j}{m\omega} \right),$$

se tiene

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i \delta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 = [\hat{p}_i, \hat{p}_j]$$

$$\leftrightarrow [\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0,$$

operadores de descenso y ascenso (bajada y subida)

$$\hat{H} = \sum_j \frac{1}{2} \left( \frac{\hat{p}_j^2}{m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}_j^2 \right) = \sum_j \omega \left( \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \frac{1}{2} \right),$$

$\underbrace{\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j}_{\hat{N}_j}$  operador de número

$$[\hat{N}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij} \hat{a}_j^\dagger,$$

de tal modo que el espectro completo es

$$|0\rangle \text{ tal que } \hat{a}_j |0\rangle = 0 \quad \forall j, \text{ con } E_0 = \frac{\omega}{2},$$

$$|\vec{n}\rangle \equiv \prod_j \left( \frac{1}{\sqrt{n_j!}} (\hat{a}_j^\dagger)^{n_j} \right) |0\rangle, \quad E_{\vec{n}} = \sum_j \omega (n_j + \frac{1}{2}).$$

de igual manera, para cuantizar canónicamente a un campo  $\varphi(t, \vec{x})$  promovemos

↑ índice, no variable dinámica

$$\varphi(x), \Pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \rightarrow \text{operadores } \hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x})$$

en cuadro de Schrödinger,

o  $\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x})$  en cuadro de Heisenberg,

↑ densidad de momento canónico

imponiendo las relaciones de conmutación canónicas

$$[\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\varphi}(t, \vec{x}')] = 0 = [\hat{\Pi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')],$$

$$[\hat{\varphi}(t, \vec{x}), \hat{\Pi}(t, \vec{x}')] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}')$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$   
delta de Dirac

El ejemplo más sencillo (con el que llegaremos muy lejos en este curso) es un camp escalar (bajo Lorentz, consistente de un solo número en cada sitio  $\vec{x}$ ) libre ( $\equiv \mathcal{L}$  cuadrática, y por tanto, ec. de movimiento lineal):

$\leftarrow \eta^{\mu\nu} \equiv \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \equiv \eta_{\mu\nu}$  Métrica de Minkowski

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \vec{\nabla}\varphi) = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$$

Lagrangiano de Klein-Gordon

$$\underbrace{\frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2}$$

'Término cinético'  
(Usamos  $c=1$ )

'Término de masa':  $m$  resultará ser la masa de las partículas asociadas a  $\varphi(x)$

Usando la fórmula de Euler-Lagrange,  $\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$ ,  
deducimos la ecuación de movimiento

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi = 0 \quad \text{Ec. de Klein-Gordon}$$

$$-\partial_0^2 + \vec{\nabla}^2 \equiv \partial^2 \equiv \square \quad \text{Laplaciano/D'Alembertiano}$$

Para  $m^2=0$ , esto no es otra cosa que la ec. de ondas, con velocidad de propagación  $= 1$ . Cuando  $m^2 \neq 0$  la ec. de Klein-Gordon todavía describe la propagación de ondas en el campo (en general con velocidad  $\neq 1$ ). Para ver esto, conviene cambiar nuestras variables básicas  $\varphi(t, \vec{x}) \equiv \varphi_x(t)$  a unas nuevas variables  $\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \tilde{\varphi}_p(t)$  obtenidas a través de una transformada de Fourier,

$$\tilde{\varphi}(t, \vec{p}) \equiv \int d^3x e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x}} \varphi(t, \vec{x}) \quad \leftrightarrow \quad \varphi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \tilde{\varphi}(t, \vec{p}),$$

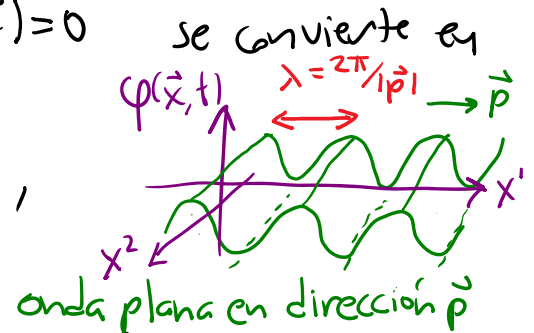
que satisfacen  $\tilde{\varphi}^*(t, \vec{p}) = \tilde{\varphi}(t, -\vec{p})$ , como consecuencia de  $\varphi(x) = \varphi(x)$ .

La ec. de mov.  $(\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 + m^2) \varphi(t, \vec{x}) = 0$

$$(\partial_0^2 + \underbrace{\vec{p}^2}_2 + m^2) \tilde{\varphi}(t, \vec{p}) = 0,$$

es decir,  $\ddot{\tilde{\varphi}}(t, \vec{p}) = -E_{\vec{p}}^2 \tilde{\varphi}(t, \vec{p})$ :

oscilador armónico con frecuencia  $\omega = E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$



$\tilde{\varphi}(t, \vec{p})$  es un

$$E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$

y nuestro campo libre  $\varphi(\vec{x}, t)$  no es entonces más que una colección infinita de osciladores armónicos desacoplados (un sistema completamente análogo a una cuerda de violín o la membrana de un tambor).

En otras palabras, los modos de Fourier / ondas planas  $\tilde{\varphi}(t, \vec{p})$  son los modos normales de oscilación del campo. Con esto entendemos perfectamente la manera en que  $\varphi(t, \vec{x})$  evolucionará a nivel clásico.

Para cuantizar este sistema por el método canónico, convertimos al campo  $\varphi(t, \vec{x})$  y a su momento canónico conjugado  $\Pi(t, \vec{x}) = \dot{\varphi}(t, \vec{x})$  en operadores en el cuadro de Schrödinger  $\hat{\varphi}(\vec{x}), \hat{\Pi}(\vec{x})$ , o en el de Heisenberg,

$$\hat{\varphi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \varphi(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t} \quad \hat{\Pi}(t, \vec{x}) \equiv e^{i\hat{H}t} \Pi(\vec{x}) e^{-i\hat{H}t}$$

e imponemos las relaciones de conmutación habituales (p.6). Sabiendo ya que  $\hat{\varphi}(\vec{p})$  y  $\hat{\Pi}(\vec{p})$  son análogos a los operadores  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  de un oscilador armónico (con masa unidad), naturalmente conviene desarrollar



en operadores de ascenso y descenso:

$$\hat{\tilde{\varphi}}(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} (\hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^{\dagger}))$$

y

$$\begin{aligned} &\uparrow \text{signo } \pm \text{ que } \hat{\tilde{\varphi}}(\vec{p})^{\dagger} = \hat{\tilde{\varphi}}(-\vec{p}) \\ &\Rightarrow \hat{\varphi}(\vec{x})^{\dagger} = \hat{\varphi}(\vec{x}) \text{ (campo real)} \end{aligned}$$

$$\hat{\tilde{\pi}}(\vec{p}) = -i \sqrt{\frac{E_{\vec{p}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{p}} - \hat{a}_{-\vec{p}}^{\dagger}) \quad (\text{cf. } \hat{p} = -i \sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a} - \hat{a}^{\dagger})).$$

A partir de las relaciones de conmutación para  $\hat{\varphi}(\vec{x})$  y  $\hat{\pi}(\vec{y})$  fácil deducir que

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (\text{análogo a } [\hat{a}_i, \hat{a}_j^{\dagger}] = \delta_{ij})$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}'}] = 0 = [\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}, \hat{a}_{\vec{p}'}^{\dagger}].$$

Y el Hamiltoniano clásico

$$H \equiv \int d^3x (\pi \dot{\varphi} - \mathcal{L}) = \int d^3x \left( \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right),$$

al promoverse a operador, toma entonces la forma

$$\hat{H} = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} (\partial_0 \hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \hat{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\varphi}^2 \right]$$

$$\hat{H} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} (\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \hat{a}_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger) E_{\vec{p}}$$

$\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$   
 $\int d^3 p$  diverge por  $\vec{p}$  grande  
 ( $\leftrightarrow$  distancias pequeñas)

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left( E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} [\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] E_{\vec{p}} \right)$$

$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}) = \int d^3 x e^{i\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p})}$   
 volumen del espacio

(cf.  $\hat{H} = \frac{\omega}{2} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger) = \omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$ )

El segundo término en  $\hat{H}$  claramente representa la energía de punto cero del oscilador armónico etiquetado por  $\vec{p}$ , es decir, la energía que tiene ese oscilador cuando se encuentra sin excitar, en su estado fundamental. Sabemos que, en ausencia de la gravedad, solo importan diferencias de energía, por lo que podemos por simplicidad ignorar estas constantes y trabajar con el Hamiltoniano

$$:\hat{H}: \equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}}$$

Define  $E=0$  como la energía del campo sin excitar

↑ "orden normal": colocar  $\hat{a}^\dagger$ 's a la izquierda de  $\hat{a}$ 's

Podemos entonces obtener una base para el espacio de Hilbert de nuestro sistema/campo vibrante comenzando con el estado sin excitar

$|0\rangle \equiv |0, 0, 0, \dots\rangle$  tal que  $\hat{a}_{\vec{p}}|0, 0, 0, \dots\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$   
 (todos los osciladores en su estado base), y aplicando los operadores de ascenso  $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$ . El estado más general es una combinación lineal de estados donde cada uno de los infinitos osciladores ( $\exists$  uno por cada  $\vec{p}$ ) está en alguno de sus infinitos estados de excitación.

Y lo más interesante de todo este asunto es que, usando las expresiones conocidas para la energía y el momento espacial ( $\neq \Pi$ ) del campo,

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{p^2 + m^2} \hat{N}_{\vec{p}}$$

↖ operador de número

$$\hat{\vec{P}} = - \int d^3x \frac{1}{2} \left( \hat{\Pi} \vec{\nabla} \hat{\varphi} + \vec{\nabla} \hat{\varphi} \hat{\Pi} \right)$$

Carga conservada asociada a invariancia bajo traslaciones (Noether)

$$\vec{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p} \hat{N}_{\vec{p}},$$

podemos comprobar que existe un acuerdo total entre el espacio de Hilbert de nuestro campo de Klein-Gordon y el espacio de Hilbert de un número arbitrario de partículas relativistas libres sin espín, con masa  $m$  y momento  $\vec{p}$ :

- $|0\rangle$  tal que  $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p}$ , con  $\langle 0|0\rangle = 1$

Estado con el campo sin e  $\longleftrightarrow$  Vacío  
(tods los osciladores en su estado base:  $|0,0,0,0,\dots\rangle$ ) (estado sin partículas)  
 $E_{\text{tot}} = 0, \quad \vec{P}_{\text{tot}} = 0$

- $|\vec{p}\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$  (con  $\langle \vec{p}'|\vec{p}\rangle = (2\pi)^3 2E_{\vec{p}} \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')$ )

Estado con el oscilador (onda plana)  $\vec{p}$  excitado a su primer nivel  $\longleftrightarrow$  Estado con 1 partícula  
( " $|0,0,0,1,0,0,\dots\rangle$ " ) (con momento  $\vec{p}$ )  
 $E_{\text{tot}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad \vec{P}_{\text{tot}} = \vec{p}$

- $|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \equiv \sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2E_{\vec{p}_2}} \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle$  (con  $\frac{1}{\sqrt{2!}}$  adicionales si  $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ )

Estado con 2 osciladores excitados  $\longleftrightarrow$  Estado con 2 partículas  
 al 1er. nivel ("10,0,0,1,0,0,1,0,0...") con momentos  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$   
 o, si  $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ , 1 oscilador en el 2do. nivel  $E_{\text{TOT}} = E_{\vec{p}_1} + E_{\vec{p}_2}$ ,  $\vec{P}_{\text{TOT}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$   
 ("10,0,0,2,0,0,1,0,0...")  
 partículas No interacción

•  $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\rangle$ , etc.

La correspondencia incluye no solo a los números cuánticos que etiquetan a los estados ( $\vec{p}_n$ 's), sino también a las energías, y por tanto, a la evolución temporal.

Los 2 sistemas resultan ser totalmente indistinguibles!  
 (Similarmente, al cuantizar un campo no escalar — descrito

por varios números en cada lugar, que se mezclan entre sí bajo Lorentz — obtenemos partículas con espín.)

Aprendemos entonces que !! las partículas son en realidad pequeñas excitaciones cuánticas de un campo !!

(se trata de estados con energía definida, de modo que las ondas planas en cuestión No son eigenestados de  $\hat{\Phi}(\vec{p})$  ni  $\hat{\Pi}(\vec{p})$  (ni  $\hat{\Phi}(\vec{x})$  ni  $\hat{\Pi}(\vec{x})$ ).)

El universo está hecho de campos, no de partículas.

En este contexto, es natural llamar a  $\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger}$  y  $\hat{a}_{\vec{p}}$  operadores de creación y aniquilación, respectivamente, porque crean/aniquilan partículas en momento definido. (Habríamos que crear/aniquilar espinos a nivel del formalismo teórico. En la teoría libre, la evolución temporal está controlada por  $\hat{H} \sim \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}$ , que en conjunto mantiene constante el número de partículas.)

Y podemos notar que

$$\hat{\psi}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} \left( \hat{a}_{\vec{p}} e^{i p \cdot x} + \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} e^{-i p \cdot x} \right) \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}}$$

crea una partícula en posición definida:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) |0\rangle &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} e^{-i p \cdot x} \underbrace{\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} |0\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} |\vec{p}\rangle} \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-i p \cdot x} |\vec{p}\rangle \equiv |x\rangle. \end{aligned}$$

operan en el  
caso de Heisenberg

covariante bajo Lorentz, y  $\propto \int \frac{d^3 p}{\vec{p}^2 \ll m^2}$

Como las partículas en esta teoría son libres, el único dato de interés es la amplitud de probabilidad de que una partícula se propague de un punto en el espaciotiempo a otro,

$$\langle t, \vec{x} | t', \vec{x}' \rangle = \langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x') | 0 \rangle.$$

↖ estado en el cuadro de Heisenberg (no evolucionan)

Es útil/habitual concentrarse en el propagador de Feynman

$$G(x, x') \equiv \langle x | x' \rangle \theta(x^0 - x'^0) + \langle x' | x \rangle \theta(x'^0 - x^0)$$

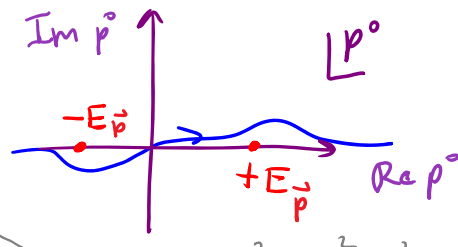
$$\underbrace{\langle x' | x \rangle}_{= \langle x | x' \rangle^*}$$

$$\equiv \langle 0 | T \{ \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x') \} | 0 \rangle$$

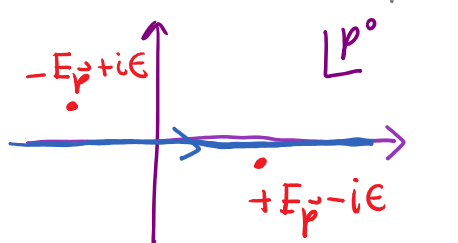
$$\uparrow \text{orden temporal} \equiv \begin{cases} \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x') & \text{si } x^0 > x'^0 \\ \hat{\psi}(x') \hat{\psi}(x) & \text{si } x'^0 > x^0 \end{cases}$$

El resultado del cálculo se puede resumir (consultar textos) utilizando una integral sobre una variable auxiliar  $p^0$  que en general difiere de la energía física  $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$  (y que incluso permitimos que sea compleja, para que al utilizar el teorema de Cauchy podamos pesar el residuo

del polo en  $p^0 = E_{\vec{p}}$  ó  $p^0 = -E_{\vec{p}}$  para obtener el término en  $G(x, x')$  con  $\Theta(x^0 - x'^0)$  o  $\Theta(x'^0 - x^0)$ ):

$$G(x, x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x - x')} \underbrace{\frac{-i}{p^2 + m^2}}_{\equiv \tilde{G}(p)}$$


polos en  $p^2 = -\vec{p}^2 + p^0^2 = -m^2$ , es decir,  $p^0 = \pm E_{\vec{p}}$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip \cdot (x - x')} \frac{-i}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$$


Hasta ahora hemos hablado de un

campo libre  $\leftrightarrow \mathcal{L}$  (ec. de mov. lineal)

$\leftrightarrow$  Modos de Fourier desacoplados

$\leftrightarrow$  Partículas no interactuantes

(En cuerdas, podremos llegar muy lejos solo con este caso.)

Si agregamos a  $\mathcal{L}$  términos cúbicos en  $\varphi$  o más altos,

la ec. de mov. para  $\varphi$  ya no será lineal, y los modos

de Fourier  $\varphi(\vec{p}, t)$  no estarán ya desacoplados ( $\therefore$  no

serán modos normales). Llamamos a esto una teoría

de campo interactuante. La situación se vuelve bastante



confusa porque este cambio no solo hace que las partículas interactúen entre sí, sino también que interactúen "consigo mismas", de tal modo que modifica incluso la definición misma de lo que es una partícula  $|\vec{p}\rangle$  (y  $\therefore$  también del vacío  $|0\rangle$ ) en relación con el campo.

P.ej., en este nuevo contexto se encuentra que  $\hat{\psi}$  no solo crea una partícula:

$$\hat{\psi}(\vec{p})|0\rangle \sim \alpha_1|\vec{p}\rangle + \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 2E(\vec{p}')} \alpha_2(\vec{p}')|\vec{p}-\vec{p}', \vec{p}'\rangle + \dots$$

(Nota que en el formalismo de campos no tiene nada de raro tener una superposición con distintos números de partículas, puesto que se trata simplemente de una indeterminación en el estado del campo deca.)

Y en general, el número de partículas no se mantiene constante: existen procesos físicos de creación/aniquilación.

(Básicamente, el generador de evolución en el tiempo

$\hat{H}$  ahora sí incluye términos del tipo

$$\hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}-\vec{q}}^{\dagger} \quad \text{o} \quad \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}''}, \hat{a}_{\vec{p}+\vec{p}'+\vec{p}''}^{\dagger}, \text{ etc. ,}$$

que No conservan el número de partículas.)

En cualquier teoría de campos, el objetivo principal es calcular las llamadas funciones de correlación o correladores

$$G_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}(x_n) \} | 0 \rangle$$

$\uparrow$  orden temporal  $\uparrow$  vacío (esta es base)  
 $(x_i$ : aumenta de derecha a izquierda)

que físicamente representan esencialmente la amplitud de probabilidad de empezar con cierto número de partículas en algunos puntos del espaciotiempo y terminar con otro número en los sitios restantes. P.ej.,  $G_5(x_1, \dots, x_5)$  contiene información sobre  $1+2 \rightarrow 3+4+5$ . (Salvo que para definir adecuadamente a las partículas necesitamos separarlas mucho y pasar al espacio de momentos: amplitudes de dispersión.)

Toda la información física de la teoría puede extraerse de estas funciones de correlación; "resolver" la teoría equivale a ser capaz de determinar  $G_n$  (o  $\tilde{G}_n$ )  $\forall n$ .

Tomemos como ejemplo

$$S(\varphi) = \int d^4x \left( -\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{g}{4!} \varphi^4 \right)$$

$g$  es la constante de acoplamiento, y  $g$  controla la intensidad de las interacciones. Teoría  $\varphi^4$

Si la teoría está débilmente acoplada (es decir, las constantes de acoplamiento son pequeñas), la teoría está cerca de ser libre, y es posible calcular las  $G_n(x_1, \dots)$  en una expansión perturbativa (una serie en potencias de las constantes de acoplamiento). La receta se basa en diagramas de Feynman, construido a partir de 2 tipos de ingredientes que se leen directamente del Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2}_{\text{propagación libre}} - \underbrace{\frac{g}{4!} \varphi^4}_{\text{interacción}}$$

propagación  $\xrightarrow{p} = \frac{-i}{p^2 + m^2}$

vértice (de 4 patas)  $\times = -ig$  sin 4!

proceso con  $0 \rightarrow 4, 1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 1$  ó  $4 \rightarrow 0$  partículas

P.ej.

$$G_4(x_1, \dots, x_4) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_4) \} | 0 \rangle$$

Suma sobre todos los diagramas con 4 puntos  
= externos (y sin pedazo completamente desconectado de esos puntos)

$$\begin{aligned}
 &= \begin{array}{c} 1 \text{---} 2 \\ 3 \text{---} 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \text{---} 2 \\ | \quad | \\ 3 \quad 4 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \text{---} 2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ 3 \quad 4 \end{array} \quad \mathcal{O}(g^0) \\
 &+ \left. \begin{array}{c} \begin{array}{c} 1 \text{---} 2 \\ \circ \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \text{---} 4 \\ \circ \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \circ \end{array} \\ \begin{array}{c} | \quad | \\ \circ \end{array} \\ \begin{array}{c} | \quad | \\ \circ \end{array} \end{array} \right\} \mathcal{O}(g^1) \\
 &+ \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \times \end{array} \\
 &+ \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \circ \end{array} + \dots \quad \mathcal{O}(g^2) \\
 &+ \text{etc.}
 \end{aligned}$$

Cada diagrama se traduce en una fórmula, pero además nos cuenta la historia de un proceso en el espaciotiempo, donde vemos que en etapas intermedias partículas ("virtuales") aparecen y desaparecen.

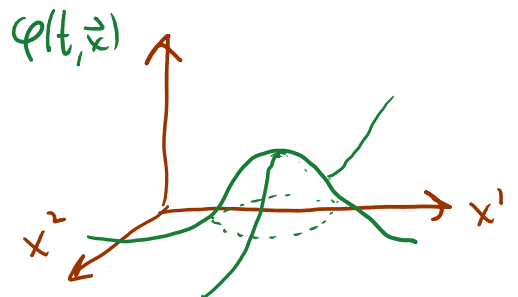
Para  $g \ll 1$ , es una buena aproximación quedarnos solo con unos cuantos diagramas de los más sencillos; pero cuando

la teoría está fuertemente acoplada ( $g \gg 1$ ), la expansión perturbativa se vuelve completamente inútil, y perdemos nuestros métodos de cálculo y de visualización. Importante, aún cuando  $g \ll 1$  la serie perturbativa NO converge: a orden  $n$  en la expansión tenemos un factor  $g^n \ll 1$ , pero el número de diagramas distintos crece como  $\sim n!$ , de modo que, sin importar que tan chiquito es  $g$ , la serie comienza a diverger cuando  $n \sim 1/g$ . Esto indica que dicha serie NO captura toda la física de la teoría - existe efectos "no perturbativos".

Un ejemplo es la existencia en algunas teorías de excitaciones grandes pero localizadas del campo (soluciones no triviales de la ec. de mov. no lineal, estáticas y con energía finita  $E \sim 1/g^2$ )

conocidos como solitones.

Estos estados/objetos físicos de la teoría, que se comportan como partículas grandes y pesadas. La existencia de solitones (junto con varios otros fenómenos)



nos deja claro que el campo es el concepto primario, y las partículas usuales son apenas un tipo de excitaciones de él. **El mundo está hecho de campos.**  
 [Clase 1: 29/01/13]

El lenguaje de teoría cuántica de campos impone algunas restricciones genéricas sobre nuestra descripción del micromundo (p.ej., existencia de antipartículas, simetría CPT, conexión entre espín y estadísticas, cancelación de "anomalías" de normas), pero permite gran arbitrariedad: existe un número infinito de teorías de campo distintas, que difieren por el tipo y número de campos, interacciones, masas y acoplamiento, simetrías, la dimensión del espaciotiempo, etc. (Para nuestros propósitos, vale la pena enfatizar en particular que todo lo que hemos dicho se puede generalizar fácilmente de  $3+1$  a  $D$  dimensiones.)

La teoría de campos específica que resume todo lo que sabemos hasta ahora respecto a la composición

microfísica de nuestro universo es el Modelo Estándar, que tiene las siguientes propiedades.

• Dimensión: 3+1

• Campos: 2 escalares complejos  $\varphi_+, \varphi_0$  Higgs Espín 0

24 (48) campos de Dirac (Weyl)

4 componentes complejos c/u  $u^{c=1,2,3}, d^c; c^c, s^c; t^c, b^c$  Quarks Espín  $\frac{1}{2}$

$\nu_e, e; \nu_\mu, \mu; \nu_\tau, \tau$  Leptones

12 campos vectoriales

cuadrivectores  $W_\mu^{a=1,2,3}, B_\mu$  bosones electrodébiles Espín 1

$\mu=0,1,2,3 \rightarrow G_\mu^{b=1,\dots,8}$  gluones

• Simetría/redundancia local o 'de norma':

$$\mathcal{G}_{ME} = \overset{\leftarrow \det=1}{SU(3)_c} \times \overset{\leftarrow M^T = M^{-1}}{SU(2)_I} \times U(1)_Y$$

'Rotaciones' que actúan sobre los campos, y pueden ser distintas en cada x

P.ej.,  $\exp[i\theta^a(x) \frac{\sigma^a}{2}] \in SU(2)_I$

$SU(3)_c$  está asociado a (y determina) la interacción fuerte, transmitida por el campo gluónico  $G_\mu^b$  y generada/experimentada por objetos con el tipo de carga que llamamos color (índices  $c, b$ ).

$SU(2)_I \times U(1)_Y$  está asociado/determina la interacción electrodébil con la parte de  $SU(2)_I$  transmitida por  $W_\mu^a$  y generada por la carga que llamamos isospín débil, y el factor  $U(1)_Y$  transmitida por  $B_\mu$  y generada por la carga que llamamos hipercarga.

• Representaciones de  $\mathcal{G}_{ME}$ :

$G_\mu^b, W_\mu^a, B_\mu$  transforman como campos de norma (rep. 'adjuntas')

$$\text{p.ej.}, W_\mu^a(x) \frac{\sigma^a}{2} \rightarrow U(x) \left[ W_\mu^a(x) \frac{\sigma^a}{2} + \frac{i}{g_2} \partial_\mu \right] U^\dagger(x)$$

$\uparrow$   
 $\exp[i\theta^a(x) \frac{\sigma^a}{2}] \in SU(2)_I$

Quarks  $\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \\ d^3 \end{pmatrix}, \dots \in$  rep. fundamental (3)  
 de  $SU(3)_c$  (matrices  $3 \times 3$  multiplican desde izquierda) dim

Leptones y Higgs  $\nu_e, e, \dots, \varphi_+, \varphi_0 \in$  rep. trivial (1)  
 de  $SU(3)_c$  (neutros). dim



Quarks de "quiralidad" izquierda  $(\psi_{\mathbf{I}}(x) \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi_{\text{Dirac}}(x))$   
 Matriz de Dirac  $i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$   
 $\swarrow$  espinor de Weyl izquierdo

$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_{\mathbf{I}}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_{\mathbf{I}}, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_{\mathbf{I}} \in \text{rep. fundamental } (\underline{2})$   
 de  $SU(2)_{\mathbf{I}}$

y tienen (hiper)carga  $Y = +1/6$  bajo  $U(1)_Y$ .

Quarks 'derechos'  $(\psi_{\mathbf{D}}(x) \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi_{\text{Dirac}}(x))$   
 $\swarrow$  espinor de Weyl derecho

$u_{\mathbf{D}}, d_{\mathbf{D}}, c_{\mathbf{D}}, s_{\mathbf{D}}, t_{\mathbf{D}}, b_{\mathbf{D}} \in \text{rep. trivial } (\underline{1})$  de  $SU(2)_{\mathbf{I}}$

(neutros), y tienen  $Y = +2/3, -1/3, +2/3, -1/3, +2/3, -1/3$ .

El Modelo Estándar distingue entre derechos e izquierdos, es decir, es una teoría "quiral".

Leptones izquierdos

$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_{\mathbf{I}}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu} \\ \mu \end{pmatrix}_{\mathbf{I}}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau} \\ \tau \end{pmatrix}_{\mathbf{I}} \in \text{rep. fundamental } (\underline{2})$

de  $SU(2)_{\mathbf{I}}$ , y tienen  $Y = -1/2$  bajo  $U(1)_Y$ .

Leptones derechos  $\nu_{e\mathbf{D}}, e_{\mathbf{D}}, \nu_{\mu\mathbf{D}}, \mu_{\mathbf{D}}, \nu_{\tau\mathbf{D}}, \tau_{\mathbf{D}}$

$\in \text{rep. trivial } (\underline{1})$  de  $SU(2)_{\mathbf{I}}$  (neutros), y

tienen  $Y = 0, -1, 0, -1, 0, -1$ .

Notar triplicación de propiedades de quarks y leptones:  
 decir que existen 3 generaciones (cada una debe  
 aparecer completa para tener cancelación de "anomalías").

Higgs  $\Phi \equiv \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \in \text{rep. fundamental } (2) \text{ de } SU(2)_I$   
 y tiene  $Y = +1/2$ .

- Lagrangiano: esencialmente la expresión más general  
 para los campos, grupo y reps. dadas, con el  
 requisito de ser 'renormalizable'.

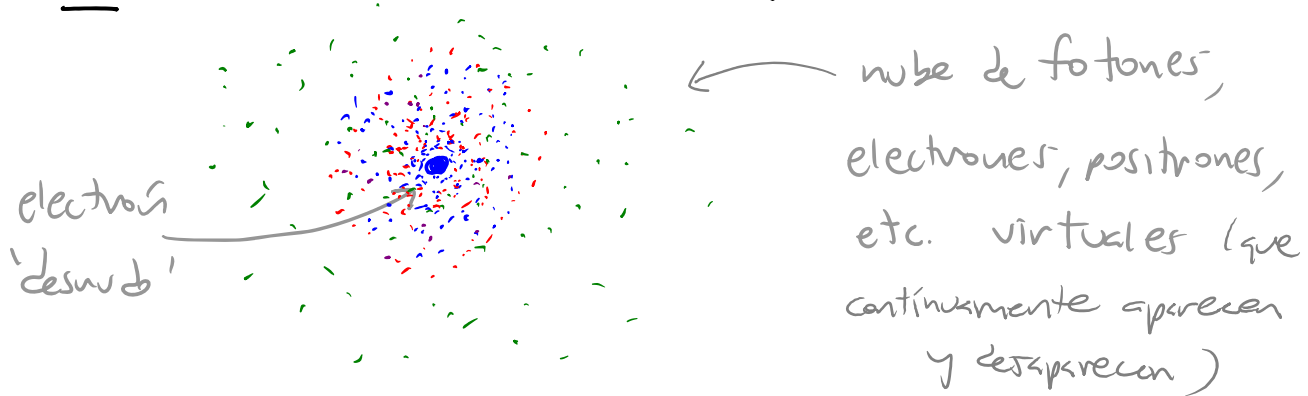
Renormalizar significa reescribir las predicciones  
 de una teoría de campos en términos de parámetros  
 (masas, acoplamientos, etc.) experimentalmente  
 medibles (parámetros 'vertidos' o renormalizados), en  
 lugar de los parámetros abstractos que figuran en  $\mathcal{L}$   
 (parámetros 'desnudos').

Pej., lo que en ausencia de interacciones hubiera sido  
 el propagador de un electrón,  $\longrightarrow$ , en la teoría

Con interacciones (digamos, en QED) es reemplazado por



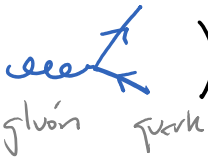
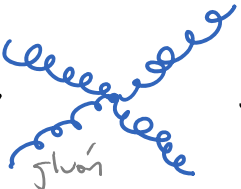
(donde la constante de acoplamiento en cada vértice es proporcional a la carga eléctrica del electrón). Es decir, en términos de los ingredientes básicos de la expansión perturbativa, debemos visualizar a una partícula física (o 'vestida') como un objeto bastante complicado,



cuyas propiedades (masa, carga eléctrica, etc.) dependen de la distancia a la cual lo examinemos.

Se dice que una teoría cuántica de campos es renormalizable si todos los predicamentos se pueden expresar en términos de un número finito de

cantidades "medibles" (p.ej., en el caso de QED, serían la masa y carga del electrón físico, así como la normalización de los campos  $A_\mu(x), e(x)$ ), y no renormalizable si hacen falta un número infinito de datos experimentales (situación que claramente no es muy feliz).

En el caso del ME, la renormalizabilidad solo nos permite tener ciertos vértices de interacción cúbicos (p.ej., ) y cuárticos (p.ej., ).

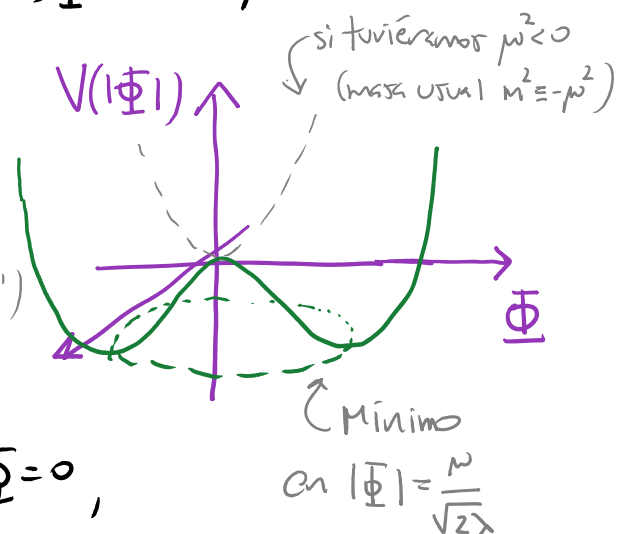
- Simetría del vacío: invariante bajo  $SU(3)_c$ , y solo bajo 1 cierta combinación de las 4 rotaciones independientes en  $SU(2)_I \times U(1)_Y$ .

Para lograr esto,  $\mathcal{L}$  incorpora

$$V(\Phi) = -\mu^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2,$$

$\mu^2 > 0$  ( $m^2 \equiv -\mu^2 < 0$ , "taquión")

de tal forma que el valor energéticamente preferido no es  $\Phi = 0$ ,



que hubieran sido el único valor invariante bajo la simetría electrodébil. Así como la presencia de los sillas, etc. en este salón hace que no sea obvia la invariancia bajo rotaciones espaciales, al adoptar el campo de Higgs un valor esperado en el vacío,

$$\langle 0 | \hat{\Phi} | 0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$


solo queda manifiesta una combinación específica de las 'rotaciones' asociadas a  $W_\mu^3$  y  $B_\mu$ .

Decimos que el vacío rompe (espontáneamente) la simetría electrodébil,

$$SU(2)_\pm \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{EM}.$$

La simetría remanente  $U(1)_{EM}$  tiene asociado como campo de norma a

$$A_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \left( g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu \right),$$


 cter. de reemplazo de  $U(1)_Y$  y  $SU(2)_\pm$

que se mantiene SIN masa. Este resulta ser el

Campo electromagnético, que se acopla a la carga

eléctrica  $Q \equiv T^3 + Y$

↑ generador de  $SU(2)_I = \begin{cases} 0 & \text{en } \frac{1}{2} \text{ de } SU(2)_I \\ \frac{\sigma^3}{2} & \text{en } \frac{3}{2} \text{ de } SU(2)_I \end{cases}$

La combinación ortogonal

$$Z_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu)$$

así como  $W^\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp i W_\mu^2)$ , adquieren masas

$$m_Z = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \frac{\mu}{2\sqrt{\lambda}} \quad \text{y} \quad m_W = g_2 \frac{\mu}{2\sqrt{\lambda}} \quad . \quad \text{Este es}$$

el famoso 'mecanismo de Higgs'.

• Parámetros:

\* 3 constantes de acoplamiento  $g_1, g_2, g_3$

o, equivalentemente,  $\alpha_n \equiv \frac{g_n^2}{4\pi}$ , para interacciones asociadas a  $U(1)_Y, SU(2)_I, SU(3)_C$ , respectivamente.

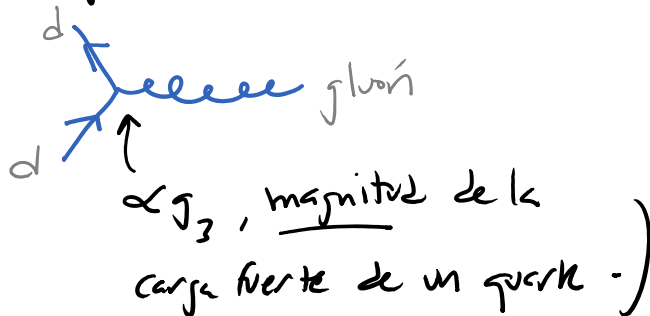
(P.ej., para la interacción fuerte, la derivada

Covariante  $D_\mu \equiv \partial_\mu - ig_3 T^b G_\mu^b$

8 generadores de  $SU(3)_C$  ↑  
 suma sobre índice repetido ←  
 Campo gluónico ←

da lugar a términos en el lagrangiano  $\mathcal{L}_{ME}$  como

$$g_3 \bar{d}_c^b \gamma^\mu T_{cc'}^b d_{c'}$$



Los acoplamientos/cargas  $g_1, g_2, g_3$  de hecho NO son constantes: por efecto de la nube de partículas virtuales, dependen de la energía del proceso.

Para energías  $E \gg$  masas, los acoplamientos 'corren' de acuerdo con

$$\alpha_n(E) = \frac{\alpha_n(E_0)}{1 + \frac{b_n}{2\pi} \alpha_n(E_0) \ln\left(\frac{E}{E_0}\right)}$$

← energía arbitraria de referencia

con  $b_n = \begin{cases} \frac{11}{3} \cdot 3 - \frac{2}{3} N_f & n=3 \\ \frac{11}{3} \cdot 2 - \frac{2}{3} N_f & n=2 \\ 0 - \frac{2}{3} N_f & n=1 \end{cases}$

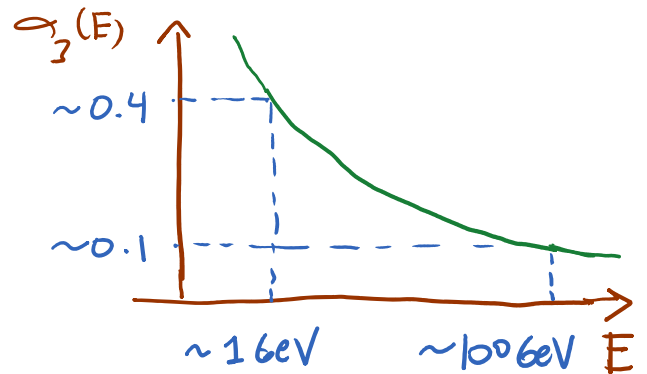
← rango n de SU(n)      ← número de fermiones en rep. fundamental

$n=3 \left. \begin{array}{l} b_n > 0 \Rightarrow \alpha_n(E) \downarrow \\ \text{"Libertad asintótica"} \end{array} \right\}$

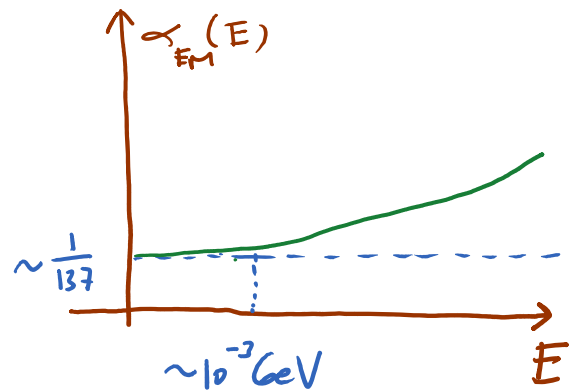
$n=2 \left. \begin{array}{l} \text{"Libertad asintótica"} \end{array} \right\}$

$n=1 \left. \begin{array}{l} b_n < 0 \Rightarrow \alpha_n(E) \uparrow \\ \text{"Esclavitud asintótica"} \end{array} \right\}$

En particular,  
 - QCD se vuelve fuertemente  
 acoplada en  
 $E \lesssim \Lambda_{QCD} \sim 0.2 \text{ GeV}$



- QED por sí sola se vuelve  
 fuertemente acoplada en  
 $E \sim E_{\text{polo de Landau}} \sim 10^{250} \text{ GeV}$



\*  $9+3$  parámetros de masa  $m_e, m_u, \dots, m_{\nu_e}, \dots$ ,  
 que, a través de la historia del Higgs, provienen de  
 'acoplamiento de Yukawa' ( $\sim$  escalar  $\cdot$  fermión  $\cdot$  fermión).

P.ej.,  $m_e \bar{e} e = m_e (\bar{e}_I e_D + \bar{e}_D e_I)$  proviene de

$$\sim \lambda_e (\bar{\nu}_e \bar{e})_I \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix} e_D + \text{conjugado hermitiano},$$

$\leftarrow$  adquiere valor esperado  $\frac{\mu}{\sqrt{2}\lambda}$   
 de tal forma que  $m_e = \lambda_e \frac{\mu}{\sqrt{2}\lambda}$ .

\* 3 ángulos  $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$  y 1 fase en la llamada  
matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa ( $\equiv$  CKM)



o matriz de mezcla de los quarks  
 + 3 ángulos y 1 fase en la llamada matriz de Pontecovo-Maki-Nakagawa-Sakata ( $\equiv$  PMNS)  
 o matriz de mezcla de los leptones,  
 que parametrizan la relación entre los estados de quarks/leptones que tienen masas bien definidas y aquéllas que figuran de manera simple en la interacción débil (unos son combinaciones lineales de los otros).

\* 2 parámetros  $\mu$  y  $\lambda$  del potencial  $V(\Phi)$ ,  
 (o equivalentemente,

1 masa del bosón de Higgs  $m_H = \sqrt{2}\mu^2$   $\swarrow$  clásicamente

$$\left( \Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu/\sqrt{2}\lambda \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) \end{pmatrix} \right)$$

$\uparrow$  valor de fondo       $\uparrow$  fluctuación

y 1 masa del  $Z$   $m_Z = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \frac{\mu}{2\sqrt{\lambda}}$  ) -

Total  $\sim 3 + 12 + 8 + 2 = 25$  parámetros.

El Modelo Estándar funciona estupendamente: sus predicciones han sido confirmadas con muy alta precisión en cientos de experimentos (incluyendo, hasta ahora, los del LHC).

Aún así, tenemos claro que No puede ser la última palabra, porque posee limitaciones como las siguientes.

### "Problemas" Estéticos

- ¿Por qué  $\sim 26$  (16) campos? } ¿Acaso podemos describir el  
 - ¿Por qué 3 generaciones? } universo con menor  
 ingredientes básicos?

- ¿Por qué los  $\sim 25$  parámetros tienen los valores que tienen? P.ej.,  $\frac{m_{\nu_e}}{m_t} \sim 10^{-11}$ ,  $\frac{m_u}{m_t} \sim 10^{-5}$ ,  $\theta_{QCD} < 10^{-9}$ .

¿Explicación para números pequeños?

↗ "Problema de CP fuerte"

- ¿Por qué simetría  $\mathcal{M}_{ME}$ ? ¿Acaso podemos descubrir mayor unificación de las fuerzas?

P.ej., en las Teorías de Gran Unificación (GUT), las interacciones fuerte y electrodébil se combinan en una sola,

$$SU(3)_C \times SU(2)_I \times U(1)_Y \subset SU(5), SO(10), E_8$$

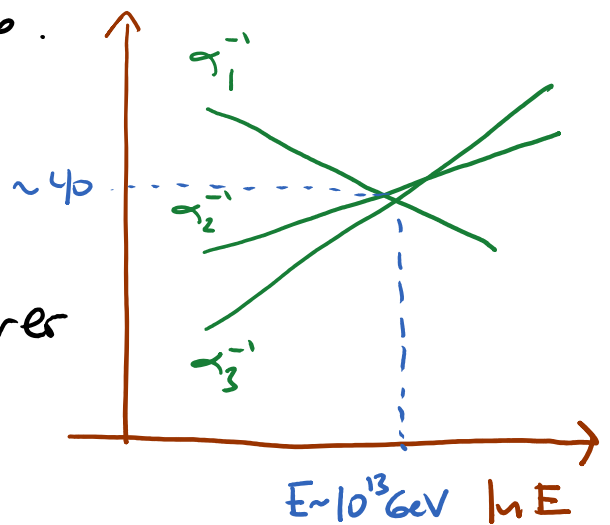
←  
ruptura espontánea a escala  $M_{GUT}$  .

En este caso,  $g_1, g_2, g_3$  no serán independientes.

Pej., en  $SU(5)$ ,  $g_5 = g_3 = g_2 = \sqrt{\frac{5}{3}} g_1$  a  $E = M_{GUT}$ .

El crecimiento creciente de los acoplamiento implicaría entonces que  $g_3 > g_2 > g_1$  a energías más bajas, lo cual concuerda con lo observado.

En más detalle, se encuentra que al extrapolar los valores crecientes de las  $g_n$  hacia mayores energías, casi se cruzan, en  $M_{GUT} \sim 10^{13}$  GeV.



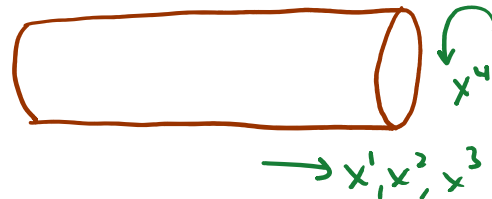
Pero no funciona del todo. (Además, el modelo  $SU(5)$  más sencillo predice decaimiento del protón demasiado rápido.)

Si somos más ambiciosos, buscaríamos unificar también con la interacción gravitacional, cuya escala característica

parece ser la escala de Planck,  $M_P \equiv \frac{1}{\sqrt{G_N}} \sim 10^{19} \text{ GeV}$ .

Una objeción curiosa en esta dirección fue hecha por Kaluza y Klein hace 80-90 años: si postulamos la existencia de una cuerda dimensión especial que es circular con circunferencia  $2\pi R$ ,

$$x^4 \simeq x^4 + 2\pi R$$



entonces al desarrollar los campos en modos de Fourier, el momento 4 debe ser discreto,  $p_4 = \frac{n}{R}$ ,

$$\phi(x^\mu, x^4) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{n}{R}x^4} \varphi_n(x^\mu)$$

↑ serie, en lugar de transformada, de Fourier

y un observador ignorante de la existencia de  $x^4$  interpretaría a cada campo 5-dimensional  $\phi(x^\mu, x^4)$  como una colección de un número infinito de campos 4-dimensionales  $\varphi_n(x^\mu)$ , conocidos como modos de Kaluza-Klein (KK). Si la masa 5-dimensional es

$$m_{(5)}^2 \equiv \underbrace{p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2}_{\equiv m_{(4)}^2} - p_4^2, \quad \text{entonces para el} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\left(\frac{n}{R}\right)^2}$$

observador 4-dimensional) el campo  $\varphi_n$  tiene masa

$$m_{(4)}^2 = m_{(5)}^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2.$$

Si  $R$  es suficientemente pequeño, entonces solo puede detectar el modo con  $n=0$ , que es constante a lo largo de  $x^4$ . Es decir, la quinta dimensión se vuelve indetectable. (Este truncamiento se conoce como reducción dimensional.)

En el caso de campos con índices espaciotemporales, el observador 4-dimensional interpreta los diversos componentes como distintos campos, dependiendo de si el índice se toma a lo largo de las direcciones visibles  $x^\mu$  o la oculta  $x^4$ .

La importancia de esto para la gravedad es que, en el caso de la métrica que describe la dinámica del

espaciotiempo 5-dimensional,  $g_{MN}^{(5)}(x^M, x^N)$   $M, N = \underbrace{0, 1, 2, 3, 4}_M$ ,  
 el observador 4-dimensional encuentra:

- una métrica 4-dim  $g_{\mu\nu}^{(4)}(x^\mu)$  (+ modo KK)

- un campo vectorial  $A_\mu^{(4)}(x^\mu) \sim g_{\mu 4}^{(5)}(x^\mu)$  (+ KK)

- un campo escalar  $\varphi^{(4)}(x^\mu) \sim g_{44}^{(5)}(x^\mu)$  (+ KK)

¡ Y Kaluza mostró que la dinámica de  $A_\mu^{(4)}$

coincide con la del campo electromagnético!

Esta fue la primera propuesta de unificación de la gravedad con otra fuerza fundamental. Propone más dimensiones con formas más complicadas que círculos, se puedan obtener campos de normas no abelianos.

(Desafortunadamente, la carga es precisamente  $n$ , y además no se puedan obtener teorías de normas quirales, como es el caso del Modelo Estándar.)

- Problema de Jerarquía: ¿Por qué la escala de rompimiento electrodébil,  $M_{ED} \sim 10^2 \text{ GeV}$ , es tan

ridículamente pequeña comparada con los supuestos  
 escalas fundamentales  $M_{\text{cut}}$  ó  $M_p \sim 10^{13} - 10^{17}$  GeV?  
 Más técnicamente, esto se manifiesta como una  
 situación muy poco natural en la masa del bosón  
 de Higgs:

$$\underbrace{m_{H,\text{fis}}^2}_{\text{Masa física}} = \underbrace{m_{H,0}^2}_{\text{Masa desnuda}} + \underbrace{\delta m_H^2}_{\text{Correcciones por partículas virtuales en energías arbitrariamente altas}}$$

Esperamos  $\delta m_H^2 \sim M_p^2 \sim (10^{17} \text{ GeV})^2$  o similar,  
 así que para lograr  $m_{H,\text{fis}}^2 \sim (10^2 \text{ GeV})^2$ , hace falta  
 una cancelación en precisión de muchos dígitos.

(Este problema se manifiesta específicamente en el  
 Higgs porque es el único campo escalar. Para  
 fermiones y campos de norma, se conciben vezes  
 por las cuales resulta más natural que sean ligeros.)

Entre las soluciones propuestas, destacan 2:

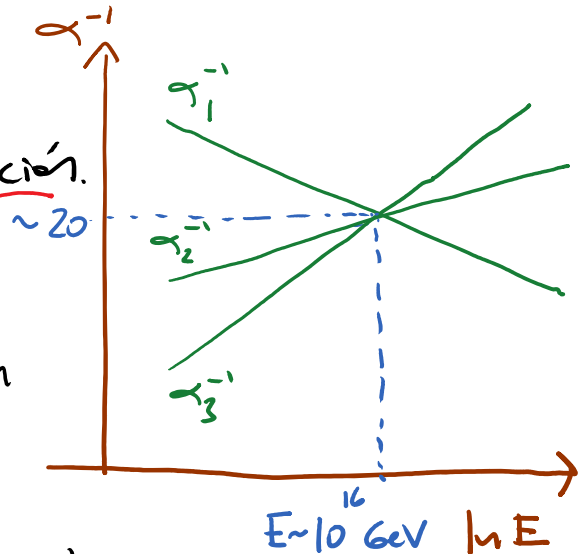
\* Supersimetría, es decir, una simetría novedosa que emparentará bosones con fermiones. Concretamente, por cada bosón (fermión) que conozcamos existirá un fermión (bosón) que no conozcamos, conocida como su 'superpareja' (para el electrón, el selectrón; para el fotón, el fotino; etc.), y la acción será invariante bajo 'rotaciones fermiónicas' que los mezclen. Esto implica en particular que las superparejas tienen la misma masa y los mismos acoplamientos.

En este caso, las contribuciones cuánticas de bosones y fermiones a  $\delta m_H^2$  se cancelan (porque los lazos fermiónicos incluyen un factor de  $-1$ ), y tendríamos  $m_H^2 = m_{H,0}^2$  si la supersimetría no estuviera rota. Pero, por supuesto, tiene que estar rota a cierta escala  $M_{SUSY} > M_{ED}$  (porque no hemos visto aún a las superparejas) y tendríamos entonces  $\delta m_H^2 \sim M_{SUSY}^2$ .



De este modo, resolvemos el problema de jerarquía si  $M_{SUSY} \sim 1 \text{ TeV} = 10^3 \text{ GeV}$ .

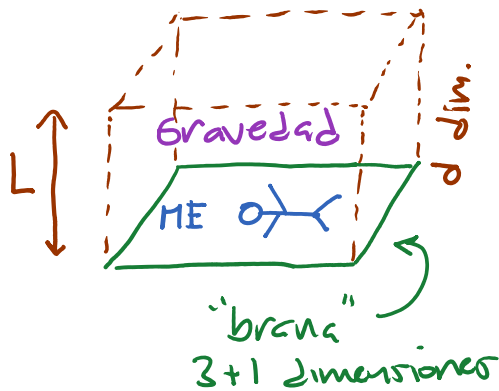
Como regalo adicional, la supersimetría (SUSY) mejora las perspectivas de las teorías de Gran Unificación. P.ej., en la versión SUSY de SU(5), se encuentra un acuerdo perfecto entre los acoplamiento (y el decaimiento del protón puede ser suficientemente lento.)



Y encima, la SUSY es un buen candidato para explicar la materia oscura (que explicaremos más adelante). ¡Así que resolvemos 3 problemas por el precio de 1!

Desafortunadamente, los resultados de LHC hasta ahora van haciendo cada vez más difícil que exista SUSY con  $M_{SUSY} \sim 1-10 \text{ TeV}$ .

\* Mundo Brana: se propone la existencia de  $d$  dimensiones adicionales que son comparativamente grandes ( $L \lesssim 0.1 \text{ mm}$ ), en las que solo se propaga la gravedad, y NO las partículas del Modelo Estándar.



En este caso, la ley de Newton sería

$$F_{\text{grav}} = \begin{cases} G_N^{(4)} \frac{mm'}{r^2} & r \gg L \\ G_N^{(4+d)} \frac{mm'}{r^{2+d}} & r \ll L \end{cases}$$

y  $G_N^{(4)}$  y por lo tanto  $M_p^{(4)}$  serían escalas derivadas, no fundamentales:

$$S_{\text{grav}} = \frac{1}{16\pi G_N^{(4+d)}} \int d^4x d^d y \sqrt{-g^{(4+d)}} R^{(4+d)}$$

Einstein-Hilbert  
(ver p. 50)

$\uparrow$  determinante de la métrica  $4+d$        $\uparrow$  escalar de curvatura  $4+d$   
 $(\sim \partial\partial g^{(4+d)})$

$$= \frac{L^d}{16\pi G_N^{(4+d)}} \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} R^{(4)}$$

$\uparrow$   $\det g_{\mu\nu}^{(4)}$        $\leftarrow$  escalar de curvatura en 4 dim

$$\equiv \frac{1}{16\pi G_N^{(4)}}$$

Con este escenario se puede tener para la verdadera escala de Planck  $M_p^{(4+n)} \sim 1-10 \text{ TeV}$ , con lo cual desaparecería el problema de jerarquía. Desafortunadamente, hasta ahora los resultados del LHC no han encontrado indicios en este sentido.

Claramente, ninguno de estos (y otros) problemas "estéticos" del ME hacen indispensable buscar una nueva teoría.

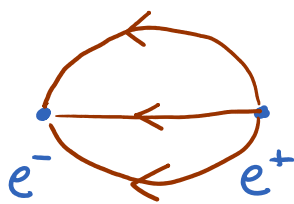
### • Problemas "Prácticos"

- *¿Cómo entender a la interacción fuerte a bajas energías?*

Recordar que en QCD (parte  $SU(3)_c$  de ME),  $\alpha_3(E) \gtrsim 1$  para  $E \lesssim \Lambda_{\text{QCD}} (\sim 200 \text{ MeV})$ . Relacionado con esto, nunca observamos quarks o gluones de manera individual, sino confinados dentro de hadrones (mesones, bariones, glubras, etc.) ¿Cómo podemos describir confinamiento/desconfinamiento de manera cuantitativa?

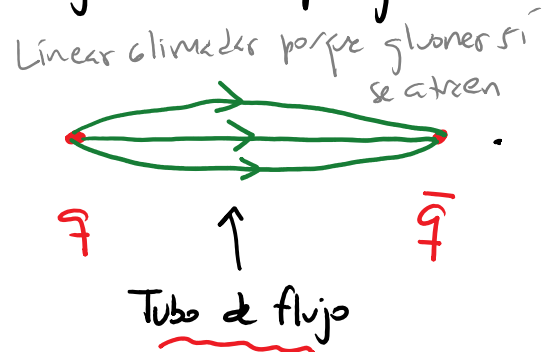
Númericamente, QCD en la red nos permite hacer muchos cálculos exactos (p.ej., masas del protón, etc.); pero no en situaciones dinámicas (p.ej., amplitudes de dispersión). Y en cualquier caso, preferiríamos comprensión analítica.

Una manera intuitiva de entender el confinamiento es a partir de las líneas de flujo del campo gluónico:



Líneas se espacian porque fotones no interactúan entre sí

en QED vs.



Esto sugiere que, en alguna aproximación, los hadrones podrían quizás entenderse en términos de objetos unidimensionales — la llamada cuerda de QCD. Este fue el origen histórico de la teoría de cuerdas (~ finales de los años 60 y principios de los 70), como un intento (pre-QCD) de entender la interacción fuerte. (Casi 30 años

más tarde, retomamos esta meta gracias a la "Correspondencia holográfica" o "norma/gravedad").

- ¿Cómo incorporar las masas y ángulos de mezcla de los neutrinos?
- ¿El Higgs es fundamental o compuesto? ¿Existen uno o varios?

De nuevo, ninguno de estos problemas "prácticos" hace indispensable (hasta ahora) ir más allá del ME.

### Problemas Fundamentales

- ¿Definición de la interacción U(1)<sub>Y</sub> (y la interacción cuántica del Higgs) a altas energías?

Recordar que  $\alpha_1(E)$  crece con la energía, de tal modo que eventualmente la teoría se vuelve fuertemente acoplada. ¿En verdad está bien definida (y en particular, es renormalizable) a nivel no perturbativo?

(Notar que la situación análoga en QCD NO pone en riesgo la definición de la teoría, porque en ese caso el acoplamiento fuerte ocurre a distancias grandes.)

- ¿Cuál es la composición de la materia oscura?

Solo alrededor de la 6ta. parte del contenido de las galaxias y los cúmulos de galaxias (detectada a través de su influjo gravitacional) es materia ordinaria (bariónica). El resto,  $\sim 23\%$  del contenido energético del universo, es materia oscura "fría" (es decir, no relativista), que a lo más siente la interacción débil. No está hecha de los neutrinos del MF. Podría quizás estar hecha de las partículas supersimétricas más ligeras (del tipo conocido genéricamente como "neutralino").

- ¿Cuál es la naturaleza de la energía oscura?

Nuestro universo se encuentra en una fase de expansión acelerada, por efecto de su componente

dominante ( $\sim 73\%$ ), con tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu} \sim -\rho_{\Lambda} g_{\mu\nu}$  (densidad de energía  $\rho_{\Lambda} > 0$ , pero presión  $-p_{\Lambda} < 0$ ). Parece deberse directamente a la famosa constante cosmológica  $\Lambda$ , o a la energía potencial de un campo escalar. En cualquier caso, representa esencialmente la energía del "vacío".

Hemos visto ya (p.10) que desde el punto de vista de la teoría cuántica de campos, el vacío tendrá naturalmente una energía debido a las fluctuaciones de punto cero de todos los osciladores de todos los campos existentes. (Además, podría haber una energía, también  $\propto \eta_{\mu\nu}$ , asociada al campo de Higgs; al "condensado quiral" en QCD, responsable de la ruptura de la "simetría quiral"; etc.)

El misterio entonces no es por qué  $\rho_{\Lambda} \neq 0$ , sino por qué detectamos un valor tan pequeño,

$$\text{ii } \rho_{\Lambda}^{\text{obs}} \sim (10^{-12} \text{ GeV})^4 \sim 10^{-124} M_{\text{P}}^4 \quad !!$$

(La SUSY implicaría cancelaciones entre las energías de punto cero de bosones y fermiones; pero de cualquier manera estaría rota a  $M_{\text{SUSY}} \gtrsim 10^3 \text{ GeV}$ , ¡y se tiene  $\rho_{\Lambda}^{\text{obs}} \sim 10^{-60} M_{\text{SUSY}}^4$ !)

### - ¿Descripción cuántica de la gravedad??

A nivel macroscópico, la gravedad se describe a través de la

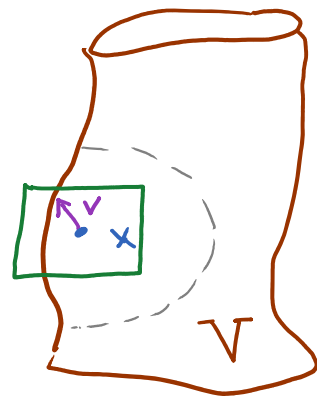
Relatividad General, donde el espaciotiempo es una variedad

diferenciable  $V$  (donde es posible definir coordenadas locales  $x^{\mu}$   $\mu=0,1,\dots,D-1$ , y los vectores son esencialmente desplazamientos infinitesimales:

$v^{\mu}$  es un vector en  $x$  si bajo  $x \rightarrow x'(x)$  se tiene

$$v^{\mu} \rightarrow v'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \Big|_x v^{\nu}, \text{ equipada con una}$$

métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  (noCIÓN de producto interno





$V \cdot W \equiv g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu$ , y de convertir vectores a vectores duales (covectores) y viceversa:

$V_\mu \equiv g_{\mu\nu} V^\nu$ ,  $V^\mu \equiv g^{\mu\nu} V_\nu \equiv (g^{-1})^{\mu\nu} V_\nu$ , que codifica las distancias, ángulos y estructura causal (distinción entre tiempo y espacio) sobre  $V$ .

La métrica nos permite definir una derivada

covariante

$$\nabla_\mu t^\nu_\lambda \equiv \partial_\mu t^\nu_\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu t^\sigma_\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma t^\nu_\sigma,$$

usando los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}).$$

La información esencial sobre la curvatura está contenida en el tensor de Riemann ( $\sim [\nabla_\mu, \nabla_\nu]$ )

$$R_{\mu\nu\rho}^\sigma \equiv \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \Gamma_{\alpha\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma \Gamma_{\alpha\mu}^\rho$$

$$\sim \partial\partial g + \dots$$

Las ecuaciones de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G_N T_{\mu\nu}$$

$\underbrace{R_{\mu\nu}}_{\text{tensor de Ricci}} \equiv R_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda$ 
 $\uparrow$ 
 $\underbrace{R}_{\text{escalar de curvatura}} \equiv R_\lambda{}^\lambda$ 
 $\uparrow$ 
 $T_{\mu\nu}$  (Tensor de energía-momento (o energía-esfuerzos))

determinan la dinámica del campo gravitacional.

Si lado izquierdo (el "tensor de Einstein") se

obtiene al variar la acción de Einstein-Hilbert

$$S_E \equiv \frac{1}{16\pi G_N} \int d^D x \sqrt{-g} R$$

$\uparrow \equiv \det g_{\mu\nu}$ 
  
 $\underbrace{\int d^D x \sqrt{-g} R}_{\text{elemento de volumen invariante}}$

y el lado derecho, de variar la acción de la materia,

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{\text{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

A nivel microscópico, al menos ingenuamente pensaríamos que hay que cuantizar la métrica. Para esto existen cuando menos 2 perspectivas:

I) Una partícula a la vez en primera instancia a  $g_{\mu\nu}(x)$  como un campo más, que puede separarse en un valor de fondo y pequeñas fluctuaciones,

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{G_N} h_{\mu\nu}(x)$$

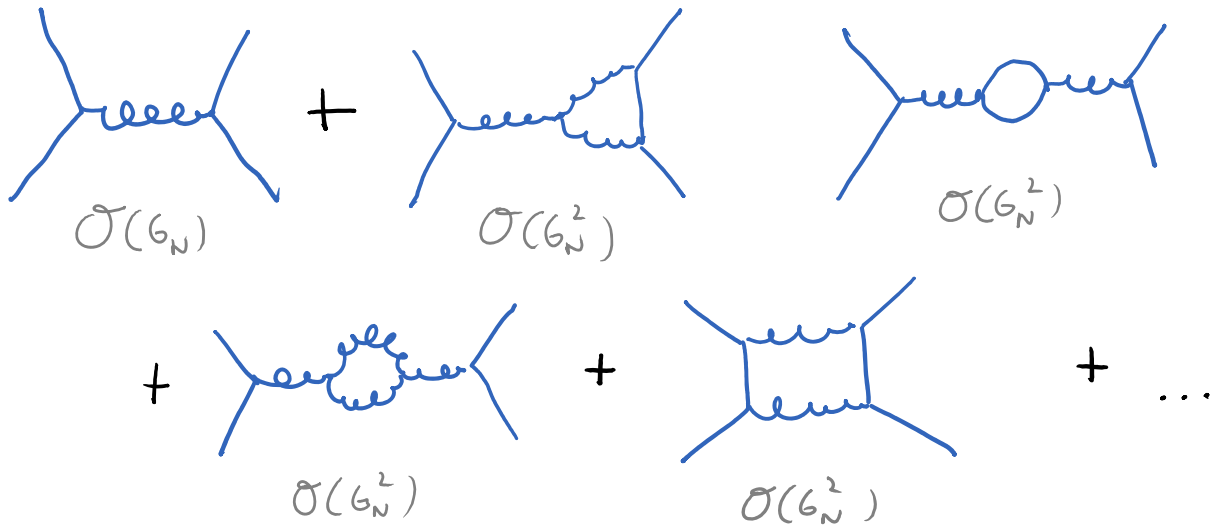
↑ Fondo: espacio plano (p.ej.)
 ↑ Fluctuación: campo del gravitón

Se tiene entonces

$$S = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$$

$$\sim \int d^4x (\underbrace{\partial h \partial h}_{\substack{\text{partícula de} \\ \text{espín 2 sin masa} \\ \text{~~~~~}}}} + \underbrace{\sqrt{G_N} h \partial h \partial h}_{\substack{\text{~~~~~} \\ \sim \sqrt{G_N}}} + \dots + \underbrace{\partial \varphi \partial \varphi}_{\text{~~~~~}} + \underbrace{\sqrt{G_N} h \partial \varphi \partial \varphi}_{\substack{\text{~~~~~} \\ \sim \sqrt{G_N}}})$$

Con estos ingredientes podemos concebir diagramas de Feynman. P.ej., la amplitud de dispersión por 2 partículas de materia estanca cada por



En realidad  $\sqrt{G_N}$  no es por sí sola la constante de acoplamiento, porque tiene dimensión de  $(\text{masa})^{-1}$  (o  $(\text{masa})^{-\frac{D-2}{2}}$  en  $D$  dimensiones). Lo relevante es la combinación adimensional

$$g_N \equiv G_N E^2 = \left( \frac{E}{M_p} \right)^2 \quad (G_N E^{D-2}).$$

↑ es la energética característica del proceso

Con esto vemos que  $g_N \ll 1$  cuando  $E \ll M_p$ , lo cual explica por qué la gravedad es despreciable en nuestros aceleradores de partículas (¡a menos que vivamos en un mundo brana, y  $M_p \sim 1-10 \text{ TeV}$ !).

Pero  $g_N$  crece a altas energías (mucho más

rápido que  $g_1(E)$  de  $U(1)_Y$ , y la teoría resulte ser No renormalizable (al menos perturbativamente). Es decir, para extraer predicciones sensibles se requieren un número infinito de datos experimentales, relacionados con los parámetros  $c_i$  en la acción extendida

$$S \sim \int d^4x \sqrt{-g} \left( R + c_1 G_N R^2 + c_2 G_N R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + c_3 G_N^2 R^3 + \dots \right. \\ \left. + \text{constantes similares en } \mathcal{L}_{\text{mat}} \right).$$

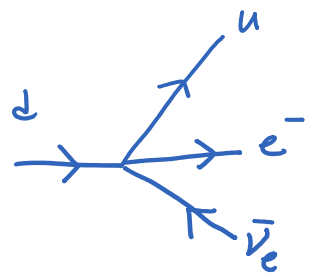
¿Qué podría implicar la no renormalizabilidad perturbativa de la relatividad general? Hay básicamente 2 posibilidades:

a) La teoría es solo "efectiva", es decir, es una aproximación útil a bajas energías, pero no captura correctamente la física existente a energías  $E \gtrsim M_p$ .

Existe un antecedente histórico: para describir

pej. el decaimiento del neutrón,  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ ,  
udd      uud

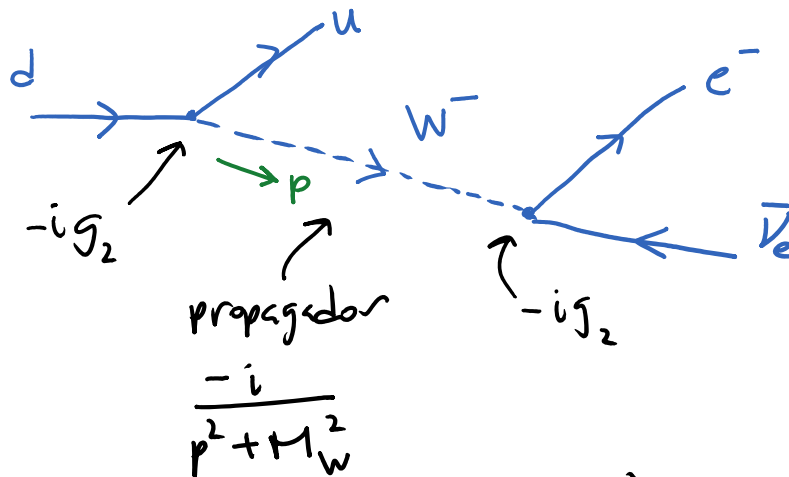
Fermi postuló un vértice cúbico de campos fermiónicos, que en lenguaje moderno sería

$$\sim \int d^4x G_F (\bar{u}_I \gamma^\mu d_I) (\bar{e}_I \gamma_\mu \nu_{eI}) \leftrightarrow$$


↑ constante de Fermi  $\sim 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$

↑ notar:  $(\text{masa})^{-2}$ .

Esto es una buena aproximación a bajas energías, pero es no renormalizable, y fue reemplazado por acoplamiento cúbico  $SU(2)_I$  del Modelo Estándar:

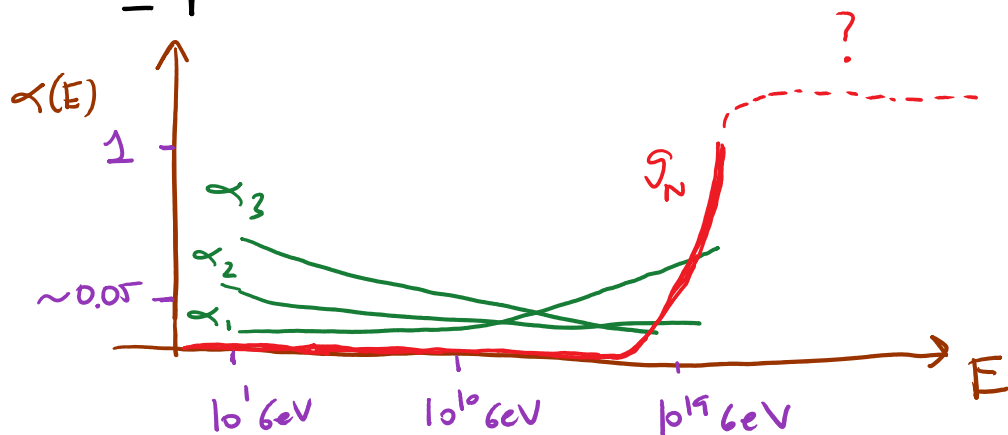


$$\left. \frac{g_2^2}{p^2 + M_W^2} \right\} \rightarrow \begin{cases} \sim \frac{g_2^2}{M_W^2} \sim G_F \text{ para } p^2 \ll M_W^2 \\ \sim \frac{g_2^2}{p^2} (\ll G_F) \text{ para } p^2 \gg M_W^2 \end{cases}$$

Es decir, a la escala  $M_W \sim 10^2 \text{ GeV} \sim \frac{1}{\sqrt{G_F}}$  existen nuevos efectos físicos que 'ablandan' la interacción, de tal modo que ya es (perturbativamente) renormalizable.

Quizás algo similar podría ocurrir para la gravedad (aunque no algo idéntico, porque en RG el vértice problemático ya es cúbico).

b) Quizás es solo el análisis perturbativo el que es inútil; pero la teoría sí está bien definida a nivel no perturbativo:



Es decir, las correcciones en la región de acoplamiento fuerte podrían ser tan drásticas que la teoría acaba estando bien definida para energías arbitrariamente altas. Técnicamente,

el comportamiento regular es lo que se conoce como un "punto fijo" ( $\sim$  invariancia bajo rescalamiento) UV (es decir, a altas energías). Este es el programa conocido como "seguridad asintótica" ("asymptotic safety") [Ver, p.ej., arXiv:1110.6389]. Por culpa del acoplamiento fuerte, es difícil hacer un análisis muy contundente.

[2: 05/02/13]

II) Una relativista enfatiza desde un principio que la gravedad no es una interacción, sino una manifestación de la geometría del espaciotiempo. La métrica  $g_{\mu\nu}(x)$  no es entonces un campo más - define el propio espaciotiempo, y en particular la estructura causal, sobre la que viven los otros campos.

Lo que necesitamos entonces es cuantizar al espaciotiempo, preferiblemente en un formalismo que (como la Rel. Gral.) sea independiente del fondo (por lo menos hasta cierto punto). Es decir, no es deseable



cuantizar a una fluctuación  $h_{\mu\nu}(x)$  ( $\Leftrightarrow$  gravitón) que se propaga sobre un fondo (p.ej. Minkowski) preexistente. Quisiéramos que el valor de fondo de la métrica sea un concepto derivado de la teoría. Esto nos obliga a buscar un enfoque No perturbativo.

La pregunta básica es entonces ¿qué es un espaciotiempo cuántico? ¿Necesitamos aprender a definir campos en una variedad diferenciable SIN métrica? ¿O podría quizás haber fluctuaciones incluso en la topología a distancias pequeñas ("espumas cuánticas")? ¿O algo todavía más novedoso?

Esperáramos que la teoría fuera invariante bajo difeomorfismos (cambiar de coordenadas sobre la variedad). Esto origina al menos 2 problemas:

- i) Las observables tendrán que ser necesariamente no locales. ¿Cuál son? ¿Cómo recuperamos la física local en el límite semiclásico?
- ii) La evolución temporal  $t \rightarrow t + \delta t$  es un difeo,

así que todo estado físico debe ser invariante bajo la acción del generador correspondiente, el Hamiltoniano  $\hat{H}$  ( $\hat{H}|\text{fis}\rangle = 0$  es una construcción que define a los estados físicos).

¿Cómo definiremos entonces al tiempo?

Además, ¿qué significa hablar de "la función de onda del universo"? ¿Hace falta modificar la mecánica cuántica para resolver el "problema de la medición"?

Por todas estas razones, formular una teoría de gravedad cuántica es una empresa conceptual y técnicamente muy complicada. Pero claramente es necesaria: resulta indispensable para entender el origen del universo y las propiedades de los agujeros negros, y, en sentido estricto, incluso para entender cualquier región del espacio a nuestro alrededor, a nivel de su estructura microscópica.

Se cree que las propiedades de los agujeros negros constituyen una pieza importante en la búsqueda de la gravedad cuántica.

Concretamente, a partir de un análisis de teoría cuántica de campos en el fondo curvo fijo de un hoyo negro, Hawking mostró que estos objetos NO son completamente negros, sino que emiten radiación como cuerpos calientes, con temperatura

$$T_H = \frac{\hbar K}{2\pi} \leftarrow \text{"gravedad superficial"}$$

Esto, combinado con una estrecha analogía entre las leyes clásicas de agujeros negros (provenientes de la RG) y las leyes de la termodinámica, condujo a la conclusión de que los hoyos negros tienen también una entropía

$$S_{BH} = \frac{A_h}{4\hbar G_N} \leftarrow \text{área del horizonte}$$

Se considera que cualquier teoría que pretenda dar una descripción cuántica de la gravedad debe ser capaz de reproducir estos resultados con un conteo explícito (mecánica-estadística) de estados microscópicos. (Y de paso, deberás resolver la llamada "paradoja de la información" asociada a la evaporación del agujero negro.)

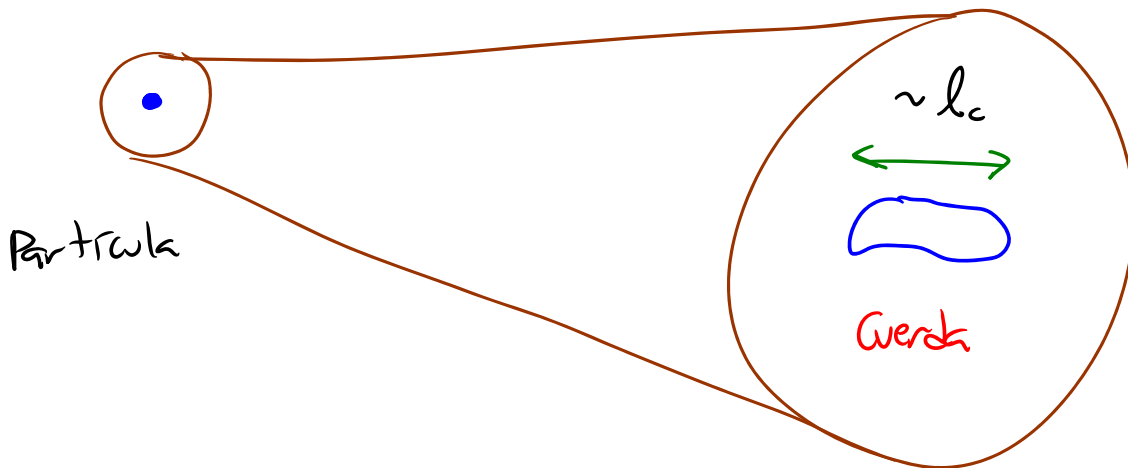


Con este panorama, estamos por fin listos para preguntarnos ¿qué es una teoría de cuerdas?

La respuesta corta: ¡no sabemos! (Se encuentra todavía en construcción. Conocemos pedazos interesantes, pero no tenemos una definición completa.)

La respuesta larga: es una generalización de las teorías cuánticas de campo, cuyo punto de partida es proponer que las excitaciones básicas no son ya partículas (objetos 0-dimensionales), sino cuerdas (objetos 1-dimensionales), que podemos visualizar

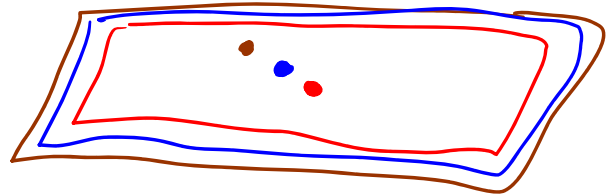
como 'ligas' infinitesimalmente delgadas, que tienen una cierta longitud característica  $l_c$  (en inglés,  $l_s$ ):



Semejante objeto podría, además de moverse como un todo, oscilar en un número infinito de maneras distintas (análogas a las distintas notas de una cuerda de violín). En una descripción cuántica, cada uno de estos modos de vibración resulta tener las propiedades básicas de un tipo específico de partícula (masa, espín, carga). Así que, a partir de lo que en realidad es 1 solo tipo de cuerda, ¡obtenemos lo que parecen ser un número infinito de partículas!

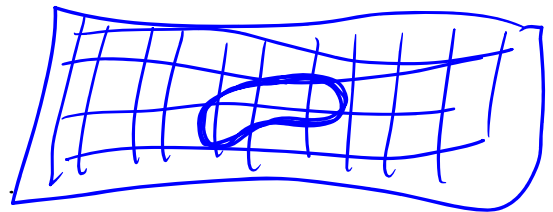
Es importante resaltar que, así como entendemos que las partículas de cada tipo son pequeñas 'onditas' en una 'gelatina' determinada (el campo asociado), las cuerdas representan igualmente pequeñas fluctuaciones de una especie de 'gelatina' mucho más complicada, que es básicamente lo que llamamos el "campo de cuerdas".

En esencia, la propuesta de la teoría de cuerdas es entonces



reemplazar al espacio-tiempo y a los campos usuales (p.ej., los del Modelo Estándar)

por un solo 'multicampo'



('multigelatina') con excitaciones unidimensionales.

L1: 09/02/21



¿Qué ganamos con esta sencilla pero rara modificación?

## I) Virtudes de la Teoría de Cuerdas

- 1) Predicción (o, en realidad, 'retro-dicción') de la existencia de la gravedad: al intentar describir consistentemente

a una cuerda cuántica relativista,  
 (Mecánica cuántica usual)  $\uparrow$   $\uparrow$  (Relatividad especial) usual)

se encuentra automáticamente que uno de sus modos de oscilación tiene masa cero, espín 2, y participa en precisamente los procesos básicos que dan lugar a la Relatividad General. Es decir la teoría de cuerdas necesariamente incluye a un gravitón, una 'ondita' en la métrica.

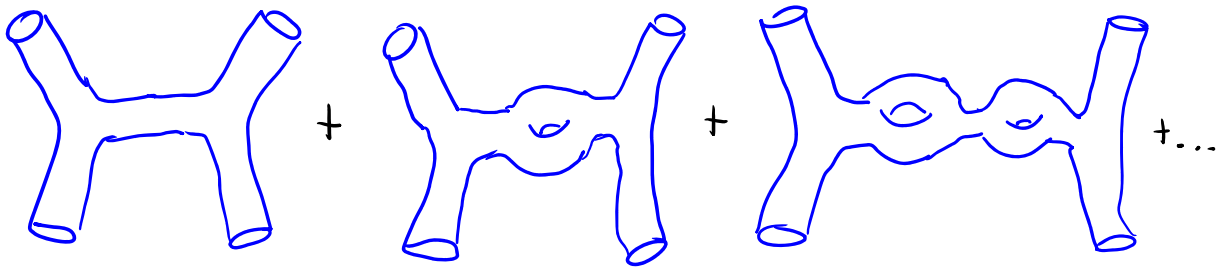
Esto explica por qué afirmamos que el propio espaciotiempo es parte del 'campo de cuerdas'.

## 2) Descripción consistente de la gravedad cuántica

(desarrollada por particularistas): resuelve el problema de la no renormalizabilidad de la gravedad a través de la existencia de nueva física — la idea nueva es que, a la escala energética  $M_c \equiv 1/l_c$ , nos damos cuenta de que el gravitón no es en realidad una partícula, sino apenas un modo de vibración de una cuerda.

En este sentido, se han realizado avances en los 2 niveles requeridos:

i) A nivel perturbativo, la teoría de cuerdas resuelve por completo el problema de cuantizar la gravedad. Existe expansión perturbativa sensata en 'diagramas de Feynman',



( que podría describir, p.ej., a 2 electrones interactuando a través del intercambio de gravitones ). El parámetro adimensional que controla la expansión (y  $\therefore$  codifica la propensión de las cuerdas a 'dividirse' en 2) se conoce como la **constante de acoplamiento de cuerdas**,  $g_c$  (o en inglés,  $g_s$ ). Por supuesto, la expansión perturbativa es útil solo si  $g_c \ll 1$ . Y, al igual que en campos, la expansión perturbativa no converge, lo cual indica que existen efectos no perturbativos.



ii) A nivel no perturbativo, en las últimas 3 décadas se han realizado avances importantes. A pesar de que NO tenemos todavía la última palabra, se han encontrado indicios que sugieren que la teoría de cuerdas podría en verdad resolver por completo el problema de la gravedad cuántica:

- A través de diversas 'dualidades' ( $\equiv$  equivalencias entre teorías aparentemente distintas), hemos podido entender algunas propiedades de la teoría fuertemente acoplada,  $g_c \gg 1$ .
- Hemos logrado entender algunas propiedades microscópicas (entropía, probabilidad de absorción, radiación de Hawking) de ciertas clases de agujeros negros — los objetos paradigmáticos de la Relatividad General.
- Tenemos propuestas para una definición no perturbativa de la teoría, que parecen indicar que la noción usual de espaciotiempo es solo una aproximación válida a 'bajas' energías.

A pesar de estos indicios, no tenemos aún una descripción completa y manifiestamente independiente del fondo (en el sentido más amplio).

Existen por supuesto propuestas alternativas para cuantizar la gravedad. En este tema, la principal competencia de las cuerdas es la teoría conocida como Gravedad Cuántica por Lazos (desarrollada por relativistas). Su objetivo es cuantizar solo a la relatividad general en 3+1 dimensiones, de manera no perturbativa. Su principal logro ha sido desarrollar un formalismo manifiestamente 'independiente del fondo', donde la geometría del espaciotiempo está cuantizada (de tal manera que las áreas y los volúmenes solo pueden tomar ciertos valores discretos). Se han conseguido también avances en la descripción microscópica de los agujeros negros. A la fecha, la principal limitación de esta propuesta es que no ha sido todavía capaz de describir estados donde el espaciotiempo esté solo levemente

curvado, como sucede a nuestro alrededor. Vale la pena también tener en mente que, si bien entendemos perfectamente que a 'bajas' energías ( $E \ll M_p$ ) es una buena aproximación describir a las interacciones del Modelo Estándar despreciando a la gravedad, no resulta obvio que exista algún límite en el cual sea útil cuantizar solamente a la gravedad, sin tomar en cuenta a las otras interacciones...

- 3) Al cuantizar a las cuerdas, se encuentran modos de oscilación que tienen masa cero, espín 1 y las propiedades necesarias para poder describir a las partículas mensajeras de las interacciones del Modelo Estándar. En este contexto, es posible obtener de manera natural algunas propuestas de teorías de Gran Unificación (GUTs).
- 4) Se pueden obtener también estados de vibración de la cuerda con masa cero y espín  $\frac{1}{2}$ , es decir, fermiones como los bloques básicos de materia en el Modelo Estándar.

Existe también manera de obtener ingredientes del tipo de el (o los) Higgs, así que la teoría de cuerdas pudiera QUÍZAS reproducir todos los ingredientes del Modelo Estándar, ¡¡a partir de **1 solo componente básico** !!

5) La teoría de cuerdas incorpora naturalmente la existencia de la supersimetría, y ¡¡ una posible solución al problema de jerarquías, un fuerte candidato para la materia oscura, etc. (Pero, No predice necesariamente que la escala de supersimetría  $M_{SUSY} \sim 1-10 \text{ TeV}$ . )

6) La teoría de cuerdas 'predice' la existencia de 6 (ó 7) dimensiones adicionales. Para esconderlas, debemos postular que son muy pequeñas (como en el "mundo manguera" propuesto por Kaluza y Klein) o que vivimos en un "mundo brana" (idea que de hecho emergió de la teoría de cuerdas de manera natural).

Lo interesante es que, aún después de esconderlas, las dimensiones extra podrían influenciar indirectamente la física que conocemos. P.ej., la existencia de 3 generaciones, <sup>o quiralidad</sup>

podría deberse a la 'forma' (topología) de las dimensiones adicionales.

7) La teoría de cuerdas no tiene ningún parámetro adimensional libre. En particular, la constante de acoplamiento de cuerdas,  $g_c$ , resulta estar determinada por el valor de fondo de un campo escalar, el "dilaton"  $\varphi(t, \vec{x})$  (que como todo lo demás es parte de la 'multijeta' que llamamos "campo de cuerdas"), a través de  $g_c = e^{\varphi}$ .

(Como ya mencionamos, existe 1 solo parámetro dimensional, la longitud de cuerdas  $l_c$ , pero esto simplemente representa una elección de unidades básicas.)

Quizás sería posible entonces que la teoría de cuerdas predijera el valor de los  $\sim 25$  parámetros libres del Modelo Estándar (aunque, a la fecha, esto no parece muy probable).

8) Con el paso de los años se fueron descubriendo distintas teorías de cuerdas (IIA, IIB, I, Heterótica  $SO(32)$  ó  $E_8 \times E_8$ , ...)

pero en 94-95 se entendió que, sorprendentemente, todas ellas son en realidad parte de una teoría única, que tiene el nombre provisional de "Teoría M" (por magia, misterio, membrana, madre, matriz, ...).

Con esto terminamos nuestra enumeración de las propiedades atractivas de las cuerdas. Por supuesto, la teoría presenta también, al menos en su estado actual, algunas limitaciones...

## II) Problemas Abiertos de la Teoría de Cuerdas

- 1) No tenemos aún una definición no perturbativa (es decir, completa) de la teoría que sea general (e, idealmente, manejable). Los avances que nos llevaron a descubrir el hecho de que la teoría es única también nos enseñaron con claridad que las cuerdas NO son en realidad los grados de libertad fundamentales! Después de más de 35 años de estudiarla intensamente,

nuestro objetivo central sigue siendo responder a la pregunta ¿qué es la teoría de cuerdas? y más concretamente ¿de qué están hechas las cuerdas??

A la fecha, la avenida más prometedora para responder esta pregunta es la llamada correspondencia holográfica (o 'norma/gravedad' o 'AdS/CFT'), la cual establece una muy sorprendente equivalencia entre teorías cuánticas CON y SIN gravedad, y barra la frontera entre la teoría de cuerdas y las teorías de campos (no dice que las primeras son, esencialmente, versiones drásticamente resucitadas de las segundas).

2) ¿Cómo podemos obtener una descripción manifiestamente 'independiente del fondo', donde el espaciotiempo sea un concepto 'emergente'? Nuevamente, nuestra mejor apuesta a la fecha es la correspondencia norma/gravedad.

3) Al menos a nivel perturbativo, existe un enorme número de soluciones a las ecs. de mov. de cuerdas, que determinan

los 'valores de fondo' de los diversos campos (incluyendo a la métrica). Al igual que en la Relatividad General, cada solución representaría un posible universo. ¿Cuántas y cuáles de las soluciones aproximadas que tenemos corresponden a soluciones exactas? ¿1? ¿300? ¿ $10^{500}$ ?

4) Quisiéramos encontrar al menos 1 solución que a 'bajas' energías ( $E \ll M_c$ ) reproduzca exactamente al Modelo Estándar (+ pequeñas correcciones), para hacer contacto definitivo con la física que conocemos.

A pesar de que se conocen muchas soluciones con estructuras muy parecidas al Modelo Estándar (incluyendo, p.ej., el grupo de norma  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  y 3 generaciones de fermiones quirales), no se tiene aún ninguna que esté en total acuerdo con la lista completa de ingredientes y el valor de los  $\sim 25$  parámetros requeridos.

5) Nos falta conocer el mecanismo de ruptura de la supersimetría (existen varias propuestas).

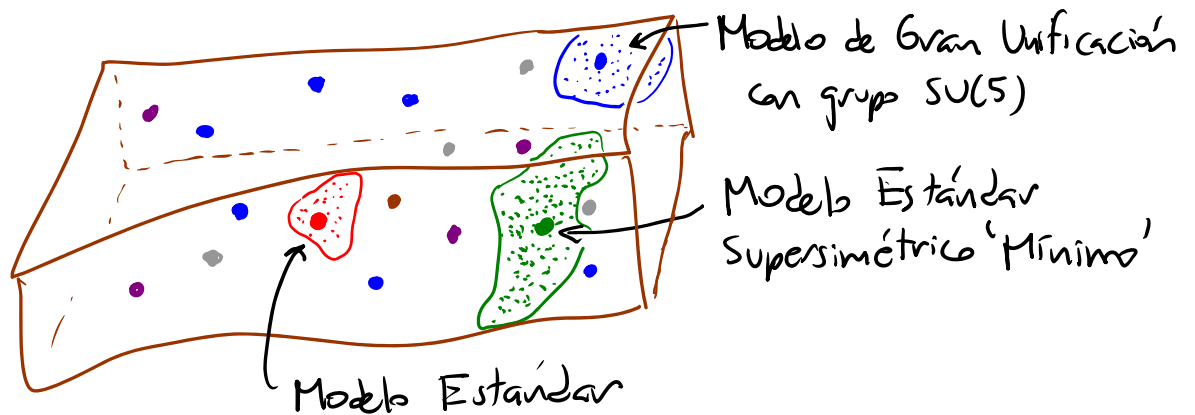


6) Nos falta entender mejor a las dimensiones adicionales.  
¿Por qué 4 visibles + 6 (o 7) ocultas? ¿Existe algún mecanismo que fije su forma y tamaño?

7) NO hay todavía predicciones experimentales definitivas. Esto se debe en parte a que, como hemos dicho, la teoría está todavía en etapa de desarrollo. Pero, en lo que respecta a la falta de predicciones, hace falta aclarar un frecuente malentendido...

Para ello, recordemos que al definir una teoría de partículas/campos, se tiene una gran (aunque no total) arbitrariedad: hace falta elegir a mano la dimensión del espaciotiempo, el tipo y número de campos que se incluyen, las simetrías, los valores de masas, constantes de acoplamiento, etc.

El conjunto de todas las teorías de partículas/campos posibles es entonces un espacio de dimensión infinita:



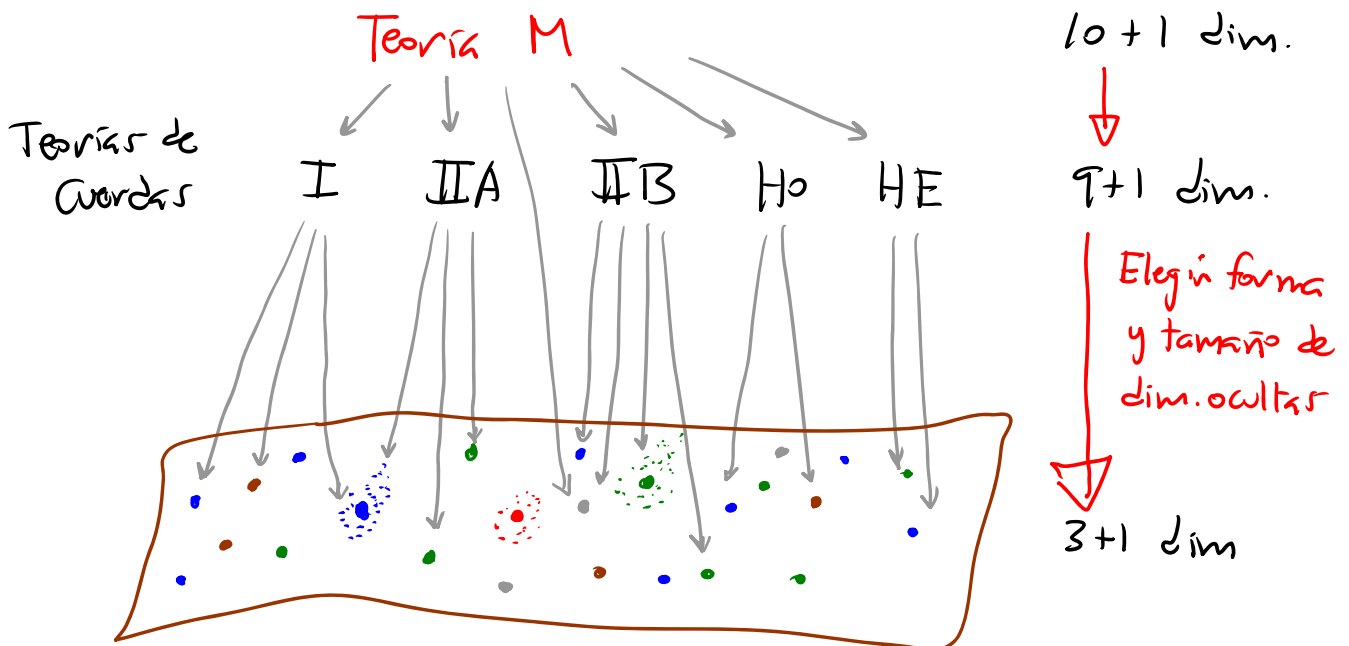
Es solo después de elegir un punto específico en este espacio (lo cual requiere en particular seleccionar valores específicos de los diversos parámetros de la teoría en cuestión) que podemos hacer predicciones detalladas capaces de ser comparadas con datos experimentales. Algunas veces es posible también hacer predicciones más genéricas que aplican a toda una clase de teorías. Y existe solo un número muy limitado de propiedades genéricas que aplican incluso a todas las teorías de particular posibles: la existencia de antipartículas, la conexión espín-estadística y la 'invariancia CPT.'

Ahora, ¿cómo se compara la situación en aerds?

En ese caso la teoría es única, pero tiene muchas soluciones.

Para intentar hacer contacto con la física que observamos,

debemos escoger a mano aquellas soluciones en las cuales las dimensiones adicionales están escondidas de algún modo. El punto a resaltar es que, después de hacer una elección específica, obtenemos un modelo que, a 'bajas' energías, coincide con una cierta teoría de partículas específica:



De esta manera, podemos sin duda seguir haciendo física tal como la hemos hecho hasta ahora: una vez que hemos elegido a mano todo lo que hay que elegir, tenemos un modelo concreto de nuestro universo, que sí hace predicciones específicas, y puede por tanto ser validado o refutado por los datos experimentales. Lo que NO tenemos (paradoja)

son predicciones completamente genéricas. Pero el punto que estamos enfatizando es que, por lo menos al nivel de conocimiento actual, querer refutar/confirmar experimentalmente la teoría de cuerdas completa es análogo a querer descartar/validar todas las teorías de partículas (campos) juntas. Solo será posible si eventualmente obtenemos predicciones verdaderamente genéricas, o si encontramos que en realidad existen solo unas pocas soluciones exactas.

A nivel de la física en  $3+1$  dim. y a 'bajas' energías, la 'fenomenología' de cuerdas es esencialmente un subconjunto de la 'fenomenología' de particular. En este contexto, la teoría de cuerdas debe ser entendida simplemente como un nuevo lenguaje teórico, análogo al lenguaje general de la teoría de campos (en lugar de a un ejemplo específico como el Modelo Estándar), que resulta útil para construir modelos unificadores de la estructura microscópica de nuestro universo, incluyendo a la gravedad, a partir



de un conjunto sencillo de principios (ino de resultados!)

Resumiendo todo lo dicho hasta aquí: en su vertiente fenomenológica, la teoría de cuerdas es a la fecha nuestro más prometedor candidato para obtener lo que arrogantemente se llama una "teoría de todo".

Pero es importante señalar que, independientemente de si eventualmente logra o no alcanzar esta ambiciosa meta, en el transcurso de los años ha desarrollado ya una vertiente 'teórica' de enorme utilidad, constituyéndose en un conjunto de herramientas que han hecho ya contacto con un buen número de ideas y problemas importantes de la física teórica moderna (teorías de norma, acoplamiento fuerte, supersimetría, gran unificación, agujeros negros, mundos brana, no conmutatividad,  $N$  grande, cosmología... ) e incluso matemáticas.

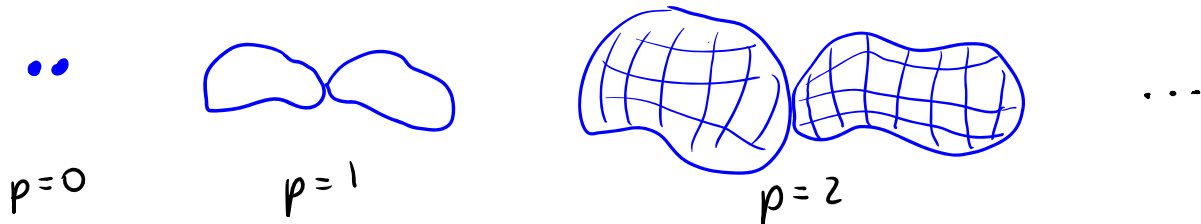
Estos 'logros teóricos' son a mi juicio la principal razón por la cual la teoría de cuerdas ha sido intensamente

estudiada durante más de 35 años.

( Y lo que es más, una en particular de estas herramientas, la ya mencionada correspondencia holográfica, parece capaz de ayudarnos a entender al menos a primas de QCD en el regimen de acoplamiento fuerte, o a teorías de campo similares a algunos sistemas de materia condensada. )

Por último, podemos plantearnos una pregunta que resulta bastante natural: si estamos dispuestos a considerar que los objetos básicos pudieran no ser 0-dimensionales (partículas), sino 1-dimensionales (cuerdas), ¿por qué no contemplar también la posibilidad de que fueran en realidad 2-dimensionales ('membranas'), o más en general, p-dimensionales ('p-branas') ?

Entre mayor sea el valor de  $p$ , más "blandas" serán las interacciones, en el sentido de que el punto donde un objeto básico hace contacto con otro es cada vez de menor importancia en comparación con el objeto en su conjunto:



Pero por otro lado, a mayor  $p$  el objeto básico tendrá más grados de libertad intrínsecos, de tal forma que los casos  $p \geq 2$  resultan muy difíciles de cuantizar.

En este sentido las cuerdas ( $p=1$ ) son el caso óptimo.

A pesar de ello, sabemos desde hace casi 2 décadas que

- La teoría "de cuerdas" (Teoría M) incluye p-branas con  $p=0, 1, \dots, 9$  que están todas emparentadas entre sí a través de 'dualidades'.
  - Las "cuerdas" son membranas enrolladas en  $x^{10}$ ; las "D<sub>p</sub>-branas" se describen con cuerdas...
- ¿Teoría de Branas??

En los capítulos 1-3 de este curso nos enfocaremos en la descripción de la teoría de cuerdas (y supercuerdas) en la aproximación perturbativa. En el camino, nos toparemos con los objetos no perturbativos conocidos como D-branas (capítulo 4). Las dualidades, otras branas y la Teoría M los encontraremos al final, en el capítulo 5.

# 1. Cuerdas Básicas I

## \* Partículas Puntuales

Para describir a una partícula relativista libre a nivel cuántico, existen 2 caminos distintos:

① Cuantizar un campo (lo que, por razones históricas, se hace a veces como "segunda cuantización")

Los grados de libertad básicos (en el ejemplo de espín 0)

$$\text{son } \varphi(x) \equiv \varphi(x^\mu) \equiv \varphi(t, \vec{x})$$

↪ tiempo y espacio entran en el mismo pie

y su dinámica se describe

en la acción (de Klein-Gordon)

$$S[\varphi] = \int d^D x \left( -\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right)$$

↪ con patines (serif):  
convención para  
la acción en el  
espaciotiempo  $\int d^D x$

$$\equiv \underbrace{\eta^{\mu\nu}}_{\text{en fondo plano}} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi$$

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$$

↑

En las pp. 5-16, hemos visto cómo, al cuantizar este campo canónicamente  $(\varphi, \pi \rightarrow \hat{\varphi}, \hat{\pi})$ , se obtienen estados con un número arbitrario de partículas, y es



posible calcular el propagador de Feynman

$$G(x, x') \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') \} | 0 \rangle$$

↑ orden temporal

↑ vacío: estado sin partículas

↙ incluye  $\int d p^0$

$$= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{i p \cdot (x - x')} \frac{-i}{p^2 + m^2}$$

↙  $-(p^0)^2 + \vec{p}^2$

Feynman descubrió un método alternativo de cuantización, que da los mismos resultados que la cuantización canónica: la llamada cuantización por integral funcional o integral de trayectorias, que usaremos mucho en este curso.



En este método, No utilizamos operadores:  $\varphi(x)$  (y  $\pi(x)$ ) es en todo momento una función ordinaria. Lo que Feynman mostró es que la evolución temporal se puede reexpresar en la forma

$$\langle \varphi_f(\vec{x}) | e^{-i\hat{H}(t_f-t_i)} | \varphi_i(\vec{x}) \rangle = N \int \mathcal{D}\varphi(x) e^{iS[\varphi]}$$

$\varphi(t_f, \vec{x}) = \varphi_f(\vec{x})$   
 $\varphi(t_i, \vec{x}) = \varphi_i(\vec{x})$

*de. de normalización*

$\int_{t_i}^{t_f} \int d^{D-1}x \mathcal{L}$

donde  $\int \mathcal{D}\varphi(x)$  denota una integral "sobre todas las funciones  $\varphi(x)$ ". Más concretamente, sabemos que si discretizamos el espaciotiempo en

p.ej. una red con espaciamiento  $\epsilon$ ,

$$x_n^\mu \equiv \epsilon n^\mu \quad n^\mu \in \mathbb{Z}^D$$

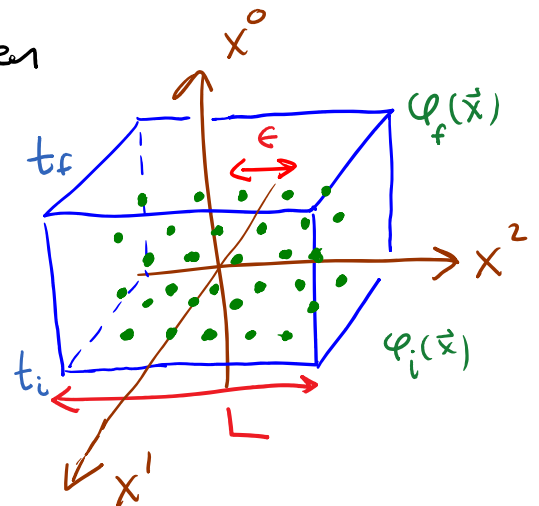
y actuamos el espacio dentro de una caja  $(D-1)$ -dimensional de

lado  $L$ , nuestro campo  $\varphi(x^\mu)$  se reduce a un número grande pero finito de datos  $\varphi_n \equiv \varphi(x_n^\mu)$ .

Definimos la integral funcional (o de trayectorias,

o de caminos) sobre  $\varphi(x)$  como una integral múltiple

$$\int \mathcal{D}\varphi(x) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} \prod_{n^\mu} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_{n^\mu} = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ L \rightarrow \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_2 \dots$$



(y de la mano de esto, en el integrando escribiremos la acción en versión discretizada).

NOTA: Siendo más precisos, la anterior fórmula para la evolución temporal, que involucra a la "versión lagrangiana" de la integral funcional,  $\int \mathcal{D}\varphi \exp[i \int d^D x \mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}, \nabla\varphi)]$ , es válida solo cuando el Hamiltoniano del campo es cuadrático en el momento  $\Pi$ , con un coeficiente que es independiente del campo. Lo que es válido en total generalidad es la "versión Hamiltoniana"

$$\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\Pi \exp[i \int d^D x (\Pi \dot{\varphi} - \mathcal{H})].$$

Cuando nos topamos con una integral con inserciones como  $\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(x') e^{iS[\varphi]}$ , esperamos alguna conexión con una expresión en el lenguaje canónico que involucra a los operadores correspondientes  $\hat{\varphi}(x)$  y  $\hat{\varphi}(x')$ . Pero éstos en general no conmutan, así que debe ser que la integral funcional hace contacto con los operadores en cierto orden específico.



Se puede mostrar que se trata del orden temporal,  
y más en detalle, que la fórmula para funciones de  
correlación en términos de la integral de trayectorias  
(sea libre o no la teoría) es

$$G_n(x_1, \dots, x_n) \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x_1) \dots \hat{\varphi}(x_n) \} | 0 \rangle$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\substack{\text{condiciones} \\ \text{inicial/final} \\ \text{se cancelan}}} \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) e^{iS[\varphi]} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx \mathcal{L}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{iS[\varphi]}} \end{aligned}$$

En particular, en la teoría libre se encuentra que

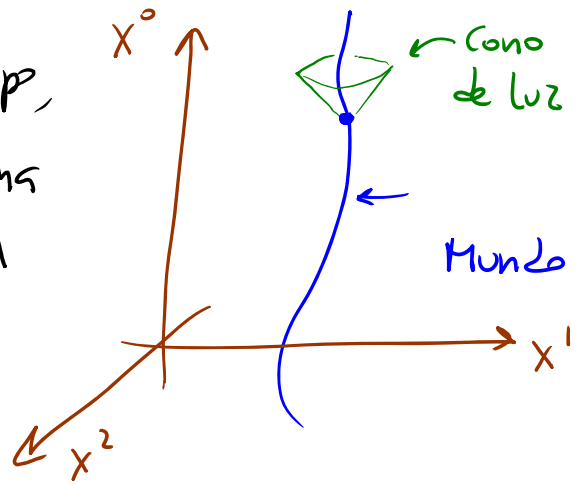
$$\begin{aligned} G_2(x, x') &= \frac{\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(x') e^{i \int d^D x \frac{1}{2} \varphi (\partial^2 - m^2) \varphi}}{\int \mathcal{D}\varphi e^{i \int d^D x \frac{1}{2} \varphi (\partial^2 - m^2) \varphi}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{integral} \\ \text{gaussianas} \\ \text{(es básicamente} \\ \text{la única que} \\ \text{sabemos hacer!)} \end{array} \\ &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip \cdot (x-x')} \frac{-i}{p^2 + m^2}, \end{aligned}$$

en acuerdo con el propagador de Feynman (libre) que  
escribimos en la p. 16 (y p. 81). Veremos ahora otro  
camino por el cual podemos recuperar este resultado.

[3: 12/02/13]

## ② Cuantizar una partícula ("primera cuantización")

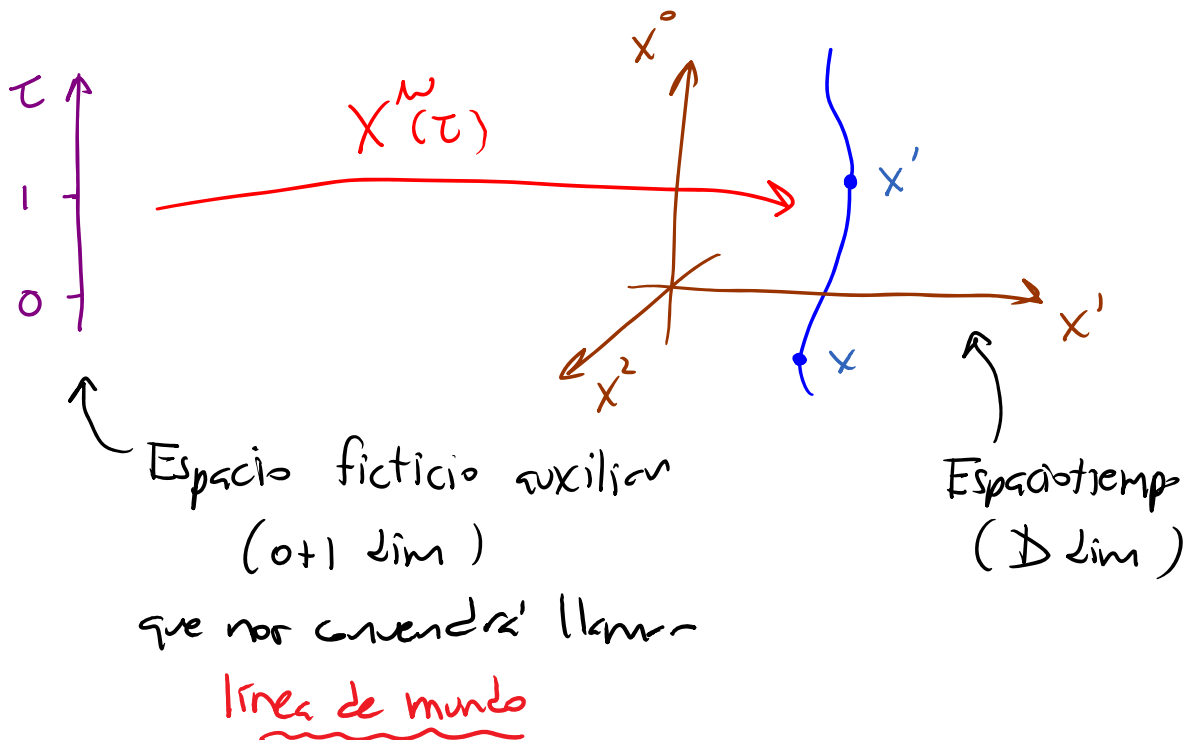
Conforme transcurre el tiempo, una partícula clásica traza una curva (tipo tiempo) en el espaciotiempo, que se conoce como su línea de mundo.



Podemos describirla especificando la función  $\vec{X}(x^0)$  en un sistema de coordenadas dado (p.ej., inercial), pero esta descripción no es covariante bajo cambios de coordenadas (p.ej., bajo transformaciones de Lorentz), porque trata a  $x^0$  de manera distinta a  $\vec{X}$ .

Podemos obtener una descripción manifiestamente covariante si nos inventamos un parámetro auxiliar (arbitrario)  $\tau$  para etiquetar a los distintos puntos a lo largo de la línea de mundo, y especificamos la trayectoria de la partícula dando  $X^\mu(\tau)$ :

$\tau$  y  $\vec{X}$  en el mismo pie



Ojo con nuestra notación:  $x^\mu$  minúscula denota un punto cualquier en el espaciotiempo, y  $X^\mu$  mayúscula denota a las funciones que describen el encaje de la línea de mundo de la partícula en el espaciotiempo.

La acción de la partícula relativista libre es

$$S[X] = -m \int dt \sqrt{1 - (\partial_t \vec{x})^2}$$

$$= -m \int d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu}$$

$\tau = X^0 = t$

sin paréntesis  
(sans serif): convención  
para acción en líneas de mundo  $\int d\tau$

$\zeta^0$ , más en general,  $g_{\mu\nu}(X(\tau))$

$$= -m \times (\text{tiempo propio})$$

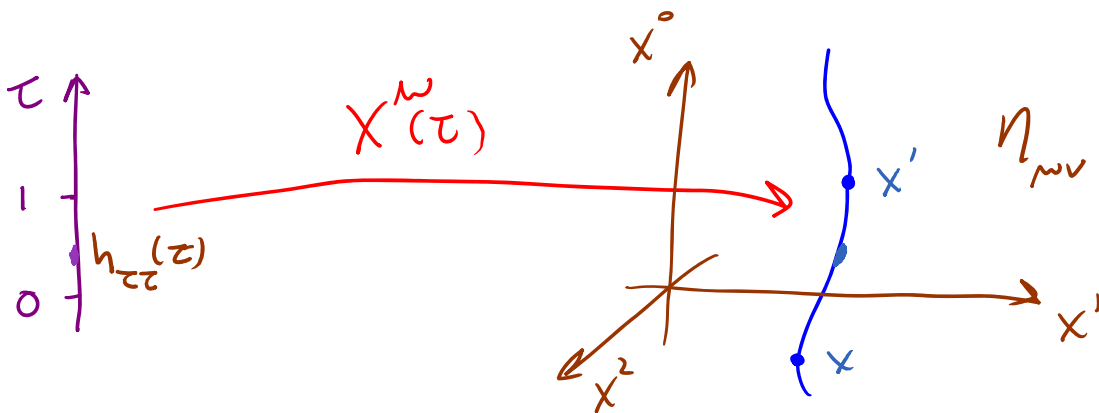
z: 11/08/21

$$= -m \int d\tau \sqrt{-h} \equiv \det h_{\tau\tau} = h_{\tau\tau}$$

"volumen" invariante (p.50)

con  $h_{\tau\tau}(z) \equiv \eta_{\mu\nu} \partial_{\tau} X^{\mu} \partial_{\tau} X^{\nu}$  la métrica inducida

sobre la línea de mundo, es decir, la retracción (pullback) de la métrica  $\eta_{\mu\nu}$  del espaciotiempo:



$S[X]$  es invariante bajo Poincaré (= Lorentz + traslaciones),

$$X^{\mu}(\tau) \rightarrow X'^{\mu}(\tau) = \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu}(\tau) + b^{\mu}, \quad \eta_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$$

(o más en general, bajo cambios de coordenadas arbitrarios en el espaciotiempo,  $X^{\mu} \rightarrow X'^{\mu}(x)$ ,

$$\partial_\tau X^\mu \rightarrow \partial_\tau X'^\mu = \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu} \partial_\tau X^\nu \quad \text{vector} \equiv \text{tensor de rango } (1,0)$$

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\lambda}{\partial X'^\mu} \frac{\partial X^\rho}{\partial X'^\nu} g_{\lambda\rho} \quad \text{tensor } (0,2)$$

y también bajo cambios de coordenadas en la línea de mundo,  $\tau \rightarrow \tau'(z)$

$$X^\mu(z) \rightarrow X'^\mu(\tau') = X^\mu(z) \quad \text{escalar}$$

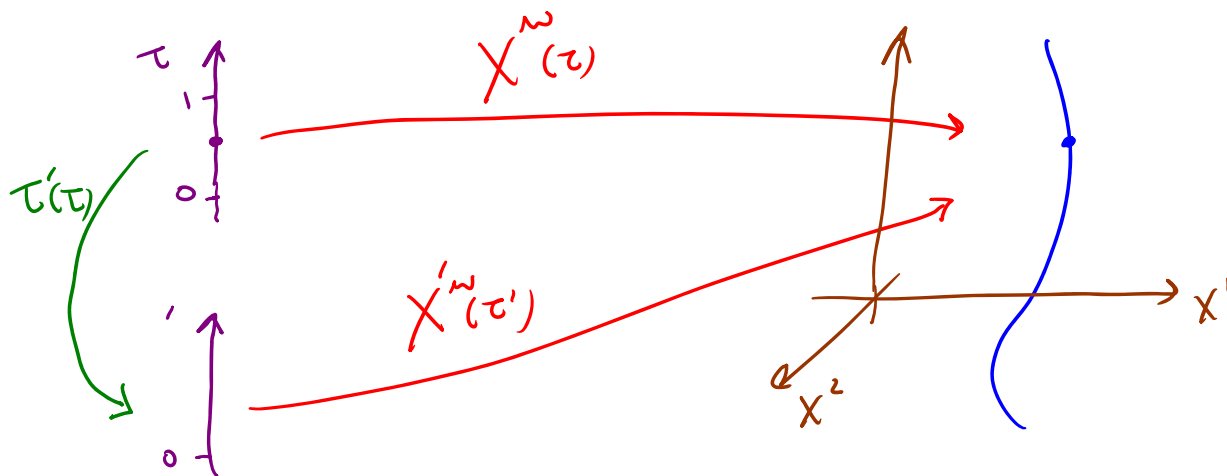
$$\Rightarrow \partial_\tau X^\mu \rightarrow \partial_{\tau'} X'^\mu = \frac{\partial \tau}{\partial \tau'} \partial_\tau X^\mu \quad \text{vector dual} \equiv \text{tensor } (0,1)$$

Esta es una "simetría local" desde el punto de vista de la línea de mundo, y  $\therefore$  tenemos una teoría de norma, es decir, una teoría redundante, con más variables que grados de libertad físicos, como resultado de haber promovido el tiempo  $t$  a una variable  $X^0(z)$ . (Es bien conocido que QED, QCD y el ME son también teorías de norma, redundantes por usar p.ej.  $A_\mu(x)$  para describir a las 2 polarizaciones transversales físicas.)

El punto aquí es simplemente que  $X^\mu(z)$  y  $X'^\mu(\tau') = X^\mu(z)$  son 2 funciones diferentes que describen



la misma trayectoria física:



Que tengamos esta redundancia por supuesto No es sorprendente: es el precio que pagamos por habernos inventado el parámetro  $\tau$  para lograr una descripción covariante.

La redundancia que vemos en  $S[X^\mu(\tau)]$  es simplemente un recordatorio de que, entre las  $D$  funciones  $X^\mu(\tau)$  que usamos, solo  $D-1$  representan grados de libertad físicos.

Esto genera novedades al cuantizar. Si queremos hacerlo canónicamente, necesitamos primero calcular los momentos conjugados

$$P_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_\tau X^\mu)} = + \frac{m \partial_\tau X_\mu}{\sqrt{-(\partial_\tau X)^2}}$$

$$L = -m \sqrt{-(\partial_\tau X)^2}$$

Podemos notar aquí que no todos los  $p_\mu$  son independientes, puesto que satisfacen la constricción ("de primera clase")

$$p^2 \equiv p_\mu p^\mu = -m^2$$

↑ conmutan bajo  
paréntesis de Poisson

Esta es por supuesto la esperada "condición de capa de masa" (mass shell), que nos dice que, dado  $\vec{p}$ , conocemos  $p^0$  (y NO podemos despejar  $\dot{X}^\mu(p)$ ).

Podemos ahora calcular el Hamiltoniano,

$$H \equiv p_\mu \dot{X}^\mu - L = \frac{m \dot{X}_\mu \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} - (-m\sqrt{-\dot{X}^2}) = 0!$$

Esto nos dice que la evolución en  $\tau$  NO está determinada de manera única, lo cual es razonable porque  $\tau$  es un invento.

Tenemos ahora una disyuntiva: podemos primero eliminar la redundancia y después cuantizar, o primero cuantizar y después eliminar la redundancia. La primera opción requiere "fijar la norma", es decir,

imponer una condición que elimine la redundancia, especificando de una vez por todas una elección de  $\tau$ .  
 Pej., podemos decir que  $X^0 = \tau$ . En este caso volvemos a la situación familiar (desde mecánica cuántica no relativista): solo quedan como variables dinámicas  $\vec{X}(t)$ , cuantizamos imponiendo

$$[\hat{X}^i, \hat{p}^j] = i \delta^{ij},$$

de modo que una base para nuestro espacio de Hilbert está dada por  $\{|\vec{p}\rangle\}$ , y obtenemos la evolución temporal esperada a partir de

$$S = -m \int dt \sqrt{1 - \dot{\vec{X}}^2}$$

$$\begin{aligned} \leftrightarrow H &= \underbrace{\vec{p}}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{X}}}} \cdot \dot{\vec{X}} - L = \frac{m \dot{\vec{X}}}{\sqrt{1 - \dot{\vec{X}}^2}} \cdot \dot{\vec{X}} - (-m \sqrt{1 - \dot{\vec{X}}^2}) \\ &= \frac{m}{\sqrt{1 - \dot{\vec{X}}^2}} = \underbrace{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}_{\equiv E_{\vec{p}}} \neq 0. \end{aligned}$$

La segunda opción es cuantizar con todo y redundancia, promoviendo las  $D$  variables  $X^\mu$  y sus momentos  $p_\mu$  a operadores, e imponiendo

$$[\hat{X}^\mu, \hat{P}_\nu] = i \delta_{\nu}^{\mu} \leftarrow \text{delta de Kronecker} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases},$$

o lo que es lo mismo,

$$[\hat{X}^\mu, \hat{P}^\nu] = i \eta^{\mu\nu} \leftarrow \text{métrica inversa} = \begin{cases} -1 & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ 1 & \text{si } \mu = \nu = i \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}.$$

Una base para nuestro espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  es entonces

$$|p\rangle \equiv |p^\mu\rangle \text{ tal que } \hat{P}_\nu |p\rangle = p_\nu |p\rangle.$$

Esta descripción es manifiestamente covariante bajo Lorentz, pero el precio que pagamos es que  $\mathcal{H}$  es demasiado grande: la mayoría de los estados que contiene NO son físicos.

Para distinguir los que sí son físicos, debemos imponer la constricción ("de primera clase")  $p^2 + m^2 = 0$  a nivel cuántico, exigiendo que

$$\boxed{(\hat{p}^2 + m^2) |fís\rangle = 0}.$$

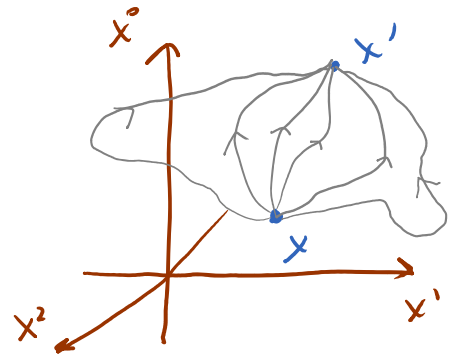
(Esto es análogo a la cuantización "de Gupta-Bleuler" para QED en la norma de Lorentz, si acaso la conoces.)  
 Los estados físicos forman entonces parte de un espacio de Hilbert reducido  $\mathcal{H}_{\text{fís}}$  con base dada por  $\{ |E_{\vec{p}}, \vec{p}\rangle \}$  (si elegimos  $p^0 = +E_{\vec{p}}$  en lugar de  $-E_{\vec{p}}$ , como condición física adicional, que claramente es covariante bajo Lorentz), de modo que recuperamos la física correcta.

En este esquema, es importante tener presente que la evolución temporal importante no es con respecto a  $T$  (arbitrario), sino a  $X^0$  (en algún marco de referencia elegido), a través del operador de traslación en el espaciotiempo  $\exp(i\hat{p} \cdot X)$ . Al calcular el propagador, obtenemos el resultado esperado.

Es posible también cuantizar a  $X^{\mu}(z)$  por medio de la integral de trayectoria. Siguiendo a Feynman, esperaríamos que el propagador libre

está dado por

$$G_2(x', x) \sim \int_{X^w(0)=x^w}^{X^w(1)=x'^w} \mathcal{D}X^w(z) e^{iS[X]}$$



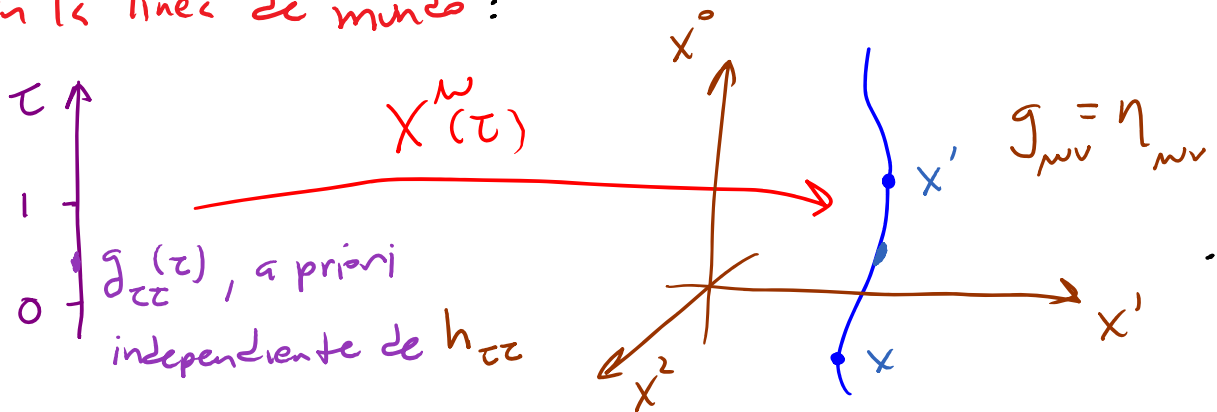
Notar que las variables de integración son claramente distintas a las que tenemos en la descripción en "segunda cuantización",  $\int \mathcal{D}\phi(x)$ . Desde la perspectiva de la línea de mundo, podemos de hecho interpretar a la expresión de arriba como una teoría cuántica de campos en 0+1 dimensiones, con  $D$  "campos" escalares  $X^m$ .

A través de un análisis un poco largo, se puede recuperar el propagador conocido (p. 81) a partir de este integral  $\int \mathcal{D}X^m$ . Para no alentarlos demasiado,

aquí solo resaltarémos los pasos principales (una descripción detallada puede encontrarse p.ej. en [Polyskov, cap. 9]).

Un primer obstáculo es que  $\int \mathcal{D}X^m e^{iS[X]}$  no es

una integral gaussiana. Para remediar esto, conviene inventarse una nueva variable auxiliar  $g_{zz}(z)$  (no confundir con  $g_{\mu\nu}(x)$ ), que juega el papel de métrica intrínseca en la línea de mundo:



(Bajo  $z \rightarrow z'(\tau)$ , se tiene entonces

$$g_{zz}(z) \rightarrow g'_{zz}(z') = \frac{\partial z}{\partial z'} \frac{\partial z}{\partial z'} g_{zz}(z) \quad \text{tensor } (0,2).$$

Con ella podemos reescribir la acción de la partícula de modo que sea cuadrática en  $\dot{X}$ :

$$\bar{S}[X, g] = -\frac{m}{2} \int d\tau \sqrt{-g_{zz}} \left( g^{zz} \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu + 1 \right)$$

$\uparrow \equiv (g_{zz})^{-1}$

(Es habitual escribir esto en términos no de  $g_{zz}$ ,

sino de la "unopata", "mónada" o "einbein"  $e \equiv \sqrt{-g_{zz}}$ .)

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 unopata              tetrada              vierbein      en  $D=4$

Esta acción es también invariante bajo Poincaré (más en general, bajo difeos en espaciotiempo) y bajo reparametrizaciones en la línea de mundo, y es equivalente a  $S[X]$  en el sentido de que la ecuación de movimiento para  $g_{zz}(z)$  (que aparece sin derivadas, y es por tanto un "campo" no dinámico),

$$\frac{\delta \bar{S}}{\delta g_{zz}} = \partial_z \left( \frac{\partial \bar{L}}{\partial (\partial_z g_{zz})} \right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial g_{zz}} = 0$$

$\uparrow$  "derivada funcional"

$\swarrow$  Ecuación algebraica

$$\Rightarrow + \frac{1}{2} (-g_{zz})^{-3/2} \partial_z X^\mu \partial_z X_\mu + \frac{1}{2} (-g_{zz})^{-1/2} = 0$$

$$\Rightarrow g_{zz} = + \partial_z X^\mu \partial_z X_\mu \equiv h_{zz},$$

$\uparrow$  métrica intrínseca                       $\uparrow$  métrica inducida

y tenemos



$$\begin{aligned} \overline{S}[X, g_{zz} = h_{zz}] &= -\frac{m}{2} \int dz \sqrt{-\dot{X}^2} \left( \frac{1}{\dot{X}^2} \dot{X}^2 + 1 \right) \\ &= -m \int dz \sqrt{-\dot{X}^2} \\ &= S[X] \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\swarrow$   $\partial_z X^\mu \partial_z X_\mu \equiv \dot{X}^2$

Podemos notar que

$$\overline{S} = -\frac{m}{2} \int dz \sqrt{-g_{zz}} \left( g^{zz} \partial_z X^\mu \partial_z X_\mu + 1 \right)$$

describe el "campo" escalar libre no masivos (es decir, Klein-Gordon sin masa), en un fondo curvo no dinámico 0+1 dim (con cte. cosmológica).

Ahora escribiremos

$$G_2(x', x) \sim \int \mathcal{D}g_{zz}(z) \int \mathcal{D}X^\mu(z) e^{i\overline{S}[X, g]}$$

$\downarrow$  integral no gaussianas!       $\uparrow$  integral gaussianas

pero quedan todavía 2 sutilezas. Una es que

sería un error definir  $\int \mathcal{D}X^\mu(z)$  o  $\int \mathcal{D}g_{zz}(z)$

simplemente dividiendo el intervalo  $0 \leq z \leq 1$  en

$N$  subintervalos iguales de duración  $\Delta\tau = \frac{1}{N}$  y postulando que (p.ej.)

$$\int \mathcal{D}X^\mu(z) \equiv \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \int d^D X_{N-1} \cdots d^D X_1, \quad \text{con } X_n^\mu \equiv X^\mu(\tau_n).$$

Esto violaría la invariancia bajo  $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$ .

El procedimiento correcto es construir la integral invariante usando la métrica apropiada para las  $X^\mu(z)$ , que se hereda de la métrica intrínseca en la línea de mundo,  $g_{\tau\tau}(z)$ .

Concretamente, sabemos que sobre una variedad  $d$ -dimensional con coordenadas  $\{x^i\} \ i=1, \dots, d$ , la métrica  $\gamma_{ij}(x)$  define en particular la norma de los vectores ( $\sim$  desplazamientos infinitesimales)  $\delta x^i$ ,

$$\|\delta x\| \equiv \sum_{i,j=1}^d \gamma_{ij} \delta x^i \delta x^j,$$

y determina la integral invariante bajo difeos

$$\int \prod_i dX^i \sqrt{|g|} \equiv \int \prod_i dX^i \sqrt{|\det \gamma_{ij}|}$$

A nosotros nos interesa definir (en particular) la integral  $\mathcal{D}X^{\mu} \sim \prod_{i=1}^N dX_i^{\mu} \dots dX_{N-1}^{\mu}$  (con  $N \equiv 1/\Delta\tau$ ),  
 $\uparrow \equiv X^{\mu}(\tau_i) \quad \leftarrow X^{\mu}(\tau_{i-1})$

de modo que estamos lidiando con una variedad

$d = \mathcal{D}(N-1)$  dimensional. En este espacio, la única

definición local posible para la norma de un vector

$\delta X_n^{\mu} \left( \xrightarrow{\Delta\tau \rightarrow 0} \delta X^{\mu}(\tau) \right)$  que es invariante bajo

Poincaré y reparametrizaciones de  $\tau$  es

$$\|\delta X\|^2 \equiv \sum_{n=1}^{N-1} \Delta\tau \sqrt{-g_{\frac{\tau}{\tau}}(\tau_n)} \eta_{\mu\nu} \delta X_n^{\mu} \delta X_n^{\nu}$$

salvo  
una cte.

$$\xrightarrow{\Delta\tau \rightarrow 0} \int_0^1 d\tau \sqrt{-g_{\frac{\tau}{\tau}}(\tau)} \eta_{\mu\nu} \delta X^{\mu}(\tau) \delta X^{\nu}(\tau)$$

De aquí podemos leer la métrica  $\gamma_{ij}$  en el espacio de funciones  $X^{\mu}(\tau)$ : por definición,

$$\|\delta X\|^2 \equiv \sum_{\substack{\mu, \nu \\ m, n}} \gamma_{\mu, \nu}^{m, n} \delta X_m^{\mu} \delta X_n^{\nu}$$

así que nuestra métrica es diagonal,

$$Y_{\substack{\mu, \nu \\ m, n}} = \eta_{\mu\nu} \delta_{m,n} \Delta\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_n)}.$$

Concluimos entonces que la integral funcional invariante debe utilizar

$$\sqrt{|\det Y|} = \prod_{\mu=1}^D \prod_{n=1}^{N-1} (\Delta\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_n)})^{1/2} :$$

$$\mathcal{D}_g X^{\mu} \equiv \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \int (\Delta\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_1)})^{D/2} d^D X_1 \cdots (\Delta\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_{N-1})})^{D/2} d^D X_{N-1}$$

Medida de integración 'ultralocal' (deseable para preservar las propiedades usuales de la integral funcional)

De manera similar, la medida invariante  $\mathcal{D}_g g_{\tau\tau}(\tau)$  se deduce a partir de la norma

$$\| \delta g_{\tau\tau} \|^2 \equiv \int d\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau)} g^{\tau\tau}(\tau) g^{\tau\tau}(\tau) \delta g_{\tau\tau}(\tau) \delta g_{\tau\tau}(\tau).$$

La segunda sutileza es que, debido a la invariancia bajo reparametrizaciones de  $\tau$ , la integral