Introducción a la Teoría de Cuerdas

Tarea 4 — Hacer de inmediato, aunque no se entrega

1. Mapeo Estado $\leftrightarrow$ Operador para Cuerda Abierta

a) Imitando el procedimiento que seguimos en clase para la cuerda cerrada, determina el diccionario que traduce entre estados y operadores para la cuerda abierta.

b) Comprueba en particular que el operador de vértice del fotón es, como dijimos en clase, proporcional a $(\partial + \bar{\partial})X^\alpha$, o lo que es lo mismo, a $\partial_\tau X^\alpha$. En el borde (que es donde se evalua este operador), X^α satisface la condición de frontera Neumann, $\partial_\sigma X^\alpha$=0, por lo que podría parecer que el vértice del fotón pudiera tomarse como $(\partial_\tau + b\partial_\sigma)X^\alpha$, con b una constante arbitraria. El valor de b es en efecto irrelevante para calcular amplitudes de dispersión de fotones en el fondo usual. Pero distintos valores de b darían resultados distintos al describir un fondo $A_\alpha(x)$ no trivial: en este caso, el operador de vértice se exponencía y aparece directamente en la acción, de cuya variación *deducimos* la condición de borde (que en presencia de $A_\alpha(x)$ ya no será puramente Neumann, como veremos más abajo). Convéncete de que, felizmente, esta ambigüedad no existe, porque el mapeo estado $\leftrightarrow$ operador da $b = 0$ de manera inequívoca.

c) ¿Cuál es el operador de vértice para los escalares no masivos que describen la posición transversal de una Dp-brana? ¿Cuál esperarías entonces que sea la manera de describir un fondo no trivial de dichos campos?

d) Considera una Dp-brana en la que se enciende un potencial electromagnético de fondo $A_\alpha(x)$. Escribe la acción completa para las cuerdas abiertas que describen excitaciones de dicha D-brana, y extremizándola, deterimina la condición de frontera (dependiente de E) que deben satisfacer los extremos a lo largo de las direcciones x^α.

e) En clase vimos que los extremos de cada cuerda abierta portan carga eléctrica bajo $A_\mu(x)$. Considera el caso particular donde se tiene un campo eléctrico constante E en la dirección x^1. En presencia de este campo, la cuerda gana energía electrostática si separa sus extremos a lo largo de x^1. Por otra parte, esta separación cuesta energía, porque para lograrla es preciso estirar la cuerda, o lo que es lo mismo, crear más cuerda. Comparando estas 2 cantidades, muestra que hay un valor crítico del campo eléctrico, E_{max}, por encima del cual hay una ganancia neta de energía al crear cuerdas y estirarlas a lo largo de x^1. Para $E > E_{\text{max}}$, la D-brana es entonces inestable ante este proceso de creación de cuerdas. (Este fenómeno tiene cierta relación con el llamado efecto Schwinger en QED.)

2. Resultados para Teoría b-c generalizada

a) La acción $S_f = (1/2\pi)\int d^2z\, b\bar{\partial}c$, donde b y c son campos primarios anticonmutativos, sigue siendo invariante conforme si generalizamos los pesos conformes de los campos a $h_b = \lambda$, $h_c = 1 - \lambda$ (y $\tilde{h}_b = 0 = \tilde{h}_c$), con λ un número real arbitrario. En clase, al fijar la norma en la integral funcional sobre $g_{ab}(\sigma)$ con el procedimiento de Faddeev-Popov, usamos el caso particular $\lambda = 2$. Otra aplicación importante son los fermiones que usaremos el próximo semestre para la supercuerda

(en el llamado formalismo RNS), que tienen $\lambda = 1/2$, y se renombran habitualmente $b \to \psi \equiv (\psi_1 + i\psi_2)/\sqrt{2}$, $c \to \bar{\psi} \equiv (\psi_1 - i\psi_2)/\sqrt{2}$, de modo que las teorías de ψ_1 y la de ψ_2 son invariantes conformes por separado. Para λ arbitrario, ¿cuáles son las ecuaciones de movimiento, el propagador, y la definición de orden normal conforme?
b) Escribe la expansión en modos para b y c (tanto las expresiones que permiten obtener los campos a partir de los modos, como los modos a partir de los campos).
c) El teorema de Noether arroja en este caso el tensor de energía-momento

$$T(z) =: (\partial b)c : -\lambda \partial(: bc :) \ .$$

Calcula la carga central. ¿Cuál es el resultado en el caso particular $\lambda = 1/2$, y cuál es entonces la carga central de la teoría solo con ψ_1 (o equivalentemente, ψ_2)?
d) Calcula los modos de Virasoro en términos de los modos de b y c, incluyendo la posible constante de orden.
e) Otra generalización posible es reemplazar a b y c con campos primarios *conmutativos* (sin modificar los pesos conformes), que convencionalmente se denotan β y γ. Esto solo cambia algunos signos en las expresiones de incisos anteriores, pero $T(z)$ tiene exactamente la misma forma (con los reemplazos adecuados). Calcula la carga central.
f) Cuando hablemos de la supercuerda, cada campo X^μ tendra como superpareja a un campo fermiónico ψ que es una copia de lo que arriba llamamos ψ_1 (además de, por supuesto, la correspondiente contraparte derecha/antianalítica), y los fantasmas b, c que encontramos al fijar la norma (con $\lambda = 2$), tendrán como superparejas a los 'superfantasmas' conmutativos β, γ con $\lambda = 3/2$ (asociados a una condición de norma sobre la superpareja de la métrica intrínseca, el llamado gravitino). Tomando a todos estos campos en cuenta, ¿cuál es entonces la dimensión crítica de la supercuerda (en un fondo plano)?

3. Teorema de Gauss-Bonnet
a) Comprueba que el teorema de Gauss-Bonnet funciona para el caso de la esfera con la métrica usual, para el disco con la métrica plana, y para el disco con la métrica de un hemisferio.
b) Este teorema afirma que la acción que denominamos S_χ es completamente independiente de nuestra elección de métrica. Muestra explícitamente que en particular es invariante de Weyl.
c) En clase vimos que el número (o característica) de Euler para el cubo es $\chi = 2$. Convéncete de que puedes, por ejemplo, subdividir sus caras en triángulos sin que el resultado para χ cambie.
d) Pensando en algún polihedro homeomorfo a la superficie de interés, convéncete de que agregar un hoyo la superficie en verdad decrece χ en 1, mientras que agregar una manija hace que el valor decrezca por 2.