Introducción a la Teoría de Cuerdas

Tarea 3 — Hacer de inmediato, aunque no se entrega

1. Estados físicos de la cuerda abierta

a) Para la cuerda bosónica abierta libre con $a = 1$ y D arbitraria, comprueba que el estado

$$|\psi\rangle \equiv \left\{\alpha_{-1}\cdot\alpha_{-1} + \left(\frac{D-4}{5}\right)\alpha'(k\cdot\alpha_{-1})^2 + \left(\frac{D-1}{5}\right)\sqrt{2\alpha'}k\cdot\alpha_{-2}\right\}|0;k\rangle,$$

con $k^2 = -1/\alpha'$, es físico y tiene norma negativa si $D > 26$, como dijimos en clase (ver p. 239 de los apuntes).

b) Tomando ahora $D = 26$ y a arbitraria, escribe el estado más general (con un momento k^μ dado) en el nivel $N = 2$, es decir, una combinación lineal de los estados posibles (físicos o no) con coeficientes arbitrarios.

c) Determina las condiciones que deben satisfacer los coeficientes de b) para que el estado en cuestión sea físico (sin importar si es nulo o no).

d) Identifica los estados nulos, y muestra que hay más de ellos cuando $a = 1$.

e) Comprueba que si $a \leq 1$, no hay estados con norma negativa.

f) En clase (pp. 262-289) comprobamos que la anomalía de Weyl está ausente solo si la carga central total de la teoría es igual a cero. Dado que los fantasmas contribuyen $c^f = -26$, claramente la parte de materia debe tener carga central 26. Si empleamos campos escalares *libres* (como corresponde para describir un espaciotiempo *plano*) X^μ, $\mu = 0, ..., D-1$, sabemos que cada uno contribuye $+1$ a la carga central total c^X, de donde concluimos que $D = 26$. Pero nota que esto no restringe la *signatura* del espaciotiempo, porque X^0 y X^i contribuyen a c^X con el mismo signo. ¿Es posible entonces tener 2 o más direcciones temporales?

2. Espectro de N D-branas paralelas

a) En clase (pp. 255) y en la Tarea 1 vimos que, en presencia de N Dp-branas paralelas, hay N^2 tipos de cuerdas abiertas, y los campos asociados a los estados de vibración de dichas cuerdas se vuelven por tanto matrices N $\times$ N. Considera el caso N $= 2$, con las D-branas situadas en posiciones c_1^i y c_2^i. ¿Qué condiciones de frontera satisfacen las cuerdas abiertas 1-1, 1-2, 2-1 y 2-2?

b) Escribe las expansiones en modos para los campos X^μ correspondientes.

c) Determina los modos de Virasoro.

d) Deduce la condición de capa de masa para los estados físicos, y comprueba la forma en que se modifica m^2 para las cuerdas 1-2 y 2-1 debido a la distancia entre las 2 D-branas.

e) De lo que vimos en clase, queda claro que, si viviéramos sobre un bonche de N D3-branas paralelas, nuestra dinámica estaría descrita por una teoría de norma con grupo de norma U(N), al estilo de lo que necesitamos para eventualmente reproducir al Modelo Estándar. Pero mostramos que todos los campos asociados a las cuerdas entre estas N D3-branas son matrices N $\times$ N, y transforman en la representación *adjunta* del grupo de norma, es decir, $a(x) \to \mathcal{U}(x)a(x)\mathcal{U}^{-1}$ (con "a" de adjunta).

Esto (suplementado con la $i\partial_\alpha$ que obtuvimos de la equivalencia por estados nulos) es apropiado para los bosones de norma (como los gluones), pero los campos de materia en el Modelo Estándar (como los quarks) transforman en la representación *fundamental*, es decir, son vectores con N entradas tales que $f(x) \to \mathcal{U}(x)f(x)$ (con "f" de fundamental). Sus adjuntos transforman entonces en la representación *antifundamental*, es decir, $f^\dagger(x) \to f^\dagger(x)\mathcal{U}^{-1}(x)$. Ante una pregunta, afirmé escuetamente que este tipo de campos pueden obtenerse agregando al sistema un segundo tipo de Dp-branas (con $p \neq 3$).
Por simplicidad, digamos que utilizamos una sola Dp. En esta situación, además de (los N^2 sectores de) las cuerdas '3-3' que conectan a las D3-branas entre sí, tendríamos cuerdas p-p que conectan a la Dp-brana consigo misma, y también p-3 y 3-p que conectan a la Dp-brana con las D3. Explica en qué representación del grupo $U(\mathrm{N})$ transforman los campos asociados a cada uno de estos tipos de cuerdas abiertas.
f) Nota que las cuerdas p-3 y 3-p satisfacen, en algunas direcciones, condiciones Neumann en un extremo y Dirichlet en el otro. Recordando el análisis que hicimos de este caso en la Tarea 1, identifica en cuántas dimensiones viven entonces los campos correspondientes a este tipo de cuerdas. Si quieres que el resultado sea 3, ¿necesitas elegir $p > 3$, o $p < 3$?

3. Fantasmas de Faddeev-Popov
a) En las pp. 275-6 calculamos el correlador de 2 puntos $\langle b(z)c(z')\rangle$. ¿Cómo modificarías el argumento para obtener $\langle b(z)b(z')\rangle$ y $\langle c(z)c(z')\rangle$? Hazlo, y comprueba que estos correladores se anulan.
b)A partir de la acción $S_f[b,c,g]$ que obtuvimos para los fantasmas en la p. 273, verifica que el tensor de energía-momento es el que escribimos en la p. 280.
b) Haciendo la expansión del producto de operadores entre T^f y b, comprueba que su peso conforme es 2. Determina de la misma forma los pesos conformes de c y $:bc:$.
c) Comprueba que la fórmula genérica para anticonmutadores de la p. 278 es correcta, y calcula con ella $\{b_m, b_n\}$ y $\{c_m, c_n\}$.
d) La condición de que los campos c^a y b_{ab} sean (en las coordenadas originales τ,σ) reales/hermitianos se traduce en que sus modos de Fourier/Laurent satisfacen $(b_n)^\dagger = b_{-n}$, $(c_n)^\dagger = c_{-n}$. Muestra que esto implica que $|\downarrow\rangle^\dagger = \langle\uparrow|$, donde $\langle\uparrow|$ es por definición tal que es aniquilado por c_0 hacia la izquierda, y similarmente, $|\uparrow\rangle^\dagger = \langle\downarrow|$, donde $\langle\downarrow|$ es aniquilado por b_o hacia la izquierda. En otras palabras, el producto interno en este espacio de Hilbert es tal que $\langle\uparrow|\downarrow\rangle = 1$, $\langle\downarrow|\downarrow\rangle = 0$, $\langle\uparrow|\uparrow\rangle = 0$.
e) Usando lo anterior, comprueba que $b_{-n}c_{-n}|\downarrow\rangle$ tiene norma negativa.
f) Calcula el producto $b(z)c(z')$ en orden normal de creación/aniquilación, y comprueba que no coincide con el mismo producto en orden normal conforme.