Introducción a la Teoría de Cuerdas

Tarea 2 — Hacer de inmediato, aunque no se entrega

1. Conmutadores y Orden Normal
a) Para la cuerda cerrada, muestra que las relaciones de conmutación $[x^\mu, p^\nu] = i\eta^{\mu\nu}$, $[\alpha^\mu_m, \alpha^\nu_n] = m\eta^{\mu\nu}\delta_{m,-n} = [\tilde{\alpha}^\mu_m, \tilde{\alpha}^\nu_n]$ implican las relaciones de conmutación canónicas entre los campos escalares $X^\mu(\sigma,\tau)$ y sus momentos conjugados $\Pi_\mu(\sigma,\tau)$.
b) Usando estos conmutadores, y trabajando con coordenadas complejas en el marco conforme z, determina la relación entre el producto $X^\mu(z,\bar{z})X^\nu(z',\bar{z}')$ en orden radial y en orden normal de creación/aniquilación. Comprueba a partir de tu resultado que el orden normal conforme (en esta teoría, y con respecto a z) efectivamente coincide con el orden normal usual.
c) Empleando directamente la definición que dimos en clase para el orden normal conforme del producto de ≥ 3 operadores (basada en copiar la estructura del teorema de Wick), muestra explícitamente que el producto $: X^{\mu_1}(z_1,\bar{z}_1)\cdots X^{\mu_4}(z_4,\bar{z}_4) :$ es una función armónica (es decir, solución a la ecuación de Laplace (= ondas), *no Poisson*,) de cada una de las posiciones z_i.

2. Función de Green para Laplace en 2 Dimensiones
a) En clase mostramos que $\partial\bar{\partial}\ln|z|^2 = 2\pi\delta^{(2)}(z,\bar{z})$ usando el teorema de Green (es decir, integrando una derivada total). Compruébalo ahora también regulando primero $\ln|z|^2 \to \ln(|z|^2+\epsilon)$ y mostrando que el resultado de aplicar $\partial\bar{\partial}$ es precisamente una delta de Dirac con la normalización correcta. (No pierdas de vista que, por el Jacobiano del cambio de variables, hay un posiblemente inesperado factor de 2 en la relación entre d^2z y $d\sigma^1 d\sigma^2$, y también entre $\delta^{(2)}(z,\bar{z})$ y $\delta(\sigma^1)\delta(\sigma^2)$.)

3. EPOs y Pesos Conformes
Determina la expansiones de los siguientes productos de operadores cuando $z \to z'$:
a) $\partial X^\mu(z) : \exp[ik\cdot X(z',\bar{z}')] :$
b) $: \exp[ik\cdot X(z,\bar{z})] : : \exp[ik'\cdot X(z',\bar{z}')] :$.
Calcula los pesos conformes $(h,\tilde{h})$ y determina bajo qué condiciones son primarios los siguientes operadores:
c) $\partial^n X^\mu(z)$
d) $: \exp[ik\cdot X(z,\bar{z})] :$
e) $: \partial X^\mu(z)\exp[ik\cdot X(z,\bar{z})] :$

4. Carga Central y Derivada Schwarziana
a) Evalúa la carga central en el álgebra de Virasoro para la teoría con los D campos de Klein-Gordon no masivos X^μ calculando directamente

$$L_m\left(L_{-m}|0;0\rangle\right) - L_{-m}\left(L_m|0;0\rangle\right)$$

para cualquier $|m|\geq 2$, usando las expresiones explícitas para los L_m en términos de los α^μ_n.
b) La extraña regla de transformación para el tensor de energía-momento bajo trans-

formaciones conformes es consecuencia de la manera como decidimos regularizar (restringiendo por simplicidad al caso con un solo campo escalar, $D = 1$, y poniendo $\alpha' = 1$)

$$\begin{aligned} T(z) &\equiv -:\partial X \partial X(z): \\ &\equiv -\lim_{\delta \to 0} \left(\partial X(z+\delta/2) \partial X(z-\delta/2) + \frac{1}{2\delta^2} \right). \end{aligned}$$

A partir de esta definición, y usando el hecho de que bajo la transformación conforme $z \to z'(z)$ el campo X transforma como un escalar, y por lo tanto

$$\partial_z X(z) = (\partial z'/\partial z) X'(z'),$$

comprueba que efectivamente

$$T(z) = \left(\frac{\partial z'}{\partial z} \right)^2 T'(z') + \frac{c}{12} \left[\frac{\partial^3 z'/\partial z^3}{\partial z'/\partial z} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 z'/\partial z^2}{\partial z'/\partial z} \right)^2 \right],$$

con $c = 1$.