Introducción a la Teoría de Cuerdas

Tarea 1 — Hacer de inmediato, aunque no se entrega

1. Integral funcional

a) Si nunca has trabajado con la integral de trayectoria, te recomiendo hacer explícitamente la que determina el propagador $\langle x'; t'|x; t\rangle$ para una partícula libre no relativista con masa m que se mueve en una dimensión, en presencia de un potencial armónico $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. De acuerdo con lo que dijimos en clase, dicha integral funcional se define como una integral múltiple, obtenida por discretización del intervalo temporal en subintervalos iguales de duración $\Delta t \equiv (t' - t)/N$, con $N \to \infty$. Como puedes ver por ejemplo en el libro de Feynman y Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, el asunto es que cada integral es gaussiana, y al hacerla, lo que te queda es nuevamente un integrando gaussiano para la siguiente integral en la secuencia.

b) Examinemos el cambio de variable funcional de la p. 107 de los apuntes. Digamos que quieres hacer una integral funcional (gaussiana o no) sobre todas las funciones $W(\tau)$ definidas en el intervalo $\tau \in [0, 1]$, con condiciones de frontera $W(0) = 0 = W(1)$. La formulación inicial de la medida de integración sería

$$DW(\tau) \equiv \lim_{N\to\infty} dW_1 dW_2 \ldots dW_{N-1} \ ,$$

con $W_n \equiv W(\tau_n)$, $\tau_n \equiv n/N$. Muestra que, salvo por una constante de proporcionalidad, esto es en verdad equivalente a la definición alternativa que usamos en los apuntes, donde primero desarrollamos en una base,

$$W(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(\tau) \ ,$$

con $f_k(\tau) \equiv \sqrt{2}\sin(k\pi\tau)$, y luego afirmamos que

$$DW(\tau) \propto dc_1 dc_2 \ldots \ .$$

c) Usando a la integral funcional como herramienta, es bastante fácil deducir las reglas de Feynman para el cálculo perturbativo de correladores $G_N(x_1, \ldots, x_N)$ en una teoría cuántica de campos. Si nunca has visto la deducción, te sugiero echarle un vistazo, por ejemplo en las pp. 51-61 de mis apuntes de Campos II, o más fácil, en las pp. 217-224 de mis apuntes del curso de cuerdas para licenciatura.

2. Parametrización de Cuerdas y Acción de Nambu-Goto

a) Para describir una cuerda cerrada utilizamos D funciones $X^\mu(\tau, \sigma)$, con $\sigma \in [0, 2\pi]$. Eligiendo una parametrización específica, escribe las funciones que corresponden a una cuerda estática que se encuentra en el plano x^1-x^2 y tiene forma circular, con radio r. Haz un diagrama espaciotemporal mostrando la hoja de mundo de dicha cuerda.

b) Repite para una cuerda circular cuyo radio r crece progresivamente con el tiempo desde $r(x^0 = -R) = 0$ hasta $r(x^0 = 0) = R$ y luego decrece de nuevo hasta

$r(x^0 = R) = 0$, de manera tal que su hoja de mundo es una esfera de radio R.
c) Eligiendo una parametrización específica, escribe ahora las funciones $X^\mu(\tau,\sigma)$ que corresponden a una cuerda circular, con radio r, que se encuentra en el plano x^1-x^2 y que gira sobre sí misma con velocidad angular ω.
d) Muestra que puedes hacer un cambio de coordenadas en la hoja de mundo para lograr que la cuerda quede estática. Esto ilustra el hecho de que el movimiento longitudinal de la cuerda *no* es físico.
e) La acción natural para la cuerda relativista es la de Nambu-Goto. Para las cuerdas descritas en **a)** y **b)**, muestra que la integral da el área de la hoja de mundo (pudiera resultar conveniente usar p.ej. coordenadas esféricas para el espaciotiempo). Para que obtengas resultados fácilmente reconocibles, considera el caso en el cual hacemos una rotación de Wick $x^0 \to x^D \equiv ix^0$ en el espaciotiempo, de manera que métrica es euclidiana, $G_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu}$.
f) Determina las ecuaciones de Euler-Lagrange que provienen de la acción de Nambu-Goto. ¿Bajo qué condiciones esperarías que coincidan con las ecuaciones de movimiento para la acción de Polyakov en la norma plana? Compruébalo.
g) De acuerdo con lo que hemos visto en clase, ¿cómo calcularías la energía E en el espaciotiempo (no en la hoja de mundo) para la cuerda? Determina dicha energía para la cuerda descrita en **a)**, y verifica que el resultado confirma el significado físico de la tensión $T \equiv 1/2\pi\alpha'$.

3. Cuerdas Enrolladas
a) Considera una cuerda cerrada que se propaga en un espaciotiempo plano pero con una dirección que (en vez de ser infinita) es un círculo de radio R, $x^1 \simeq x^1 + 2\pi R$. En este caso existe una familia infinita de posibles condiciones 'de borde' (es decir, de periodicidad), que reflejan el hecho de que la cuerda puede estar enrollada alrededor del círculo un número arbitrario de veces. Denotando a este *número de enrollamiento* $e \in \mathbf{Z}$, donde $e > 0$ ($e < 0$) se refiere a una cuerda enrollada en la dirección $+x^1$ ($-x^1$), escribe la expansión en modos del campo X^1 para cada valor de e, tanto en términos de las coordenadas originales τ, σ como de las coordenadas complejas $z, \bar{z}$. Determina los coeficientes α_0^1 y $\tilde{\alpha}_0^1$ en términos de e y p^1. Explica por qué en este caso p^1 solo puede tomar ciertos valores discretos (y especifica cuáles son esos valores).

4. Cuerdas Abiertas y D-branas
a) Muestra que, para una cuerda abierta con condiciones puramente de Neumann ($\partial_\sigma X^\mu = 0$ en $\sigma = 0, \pi\ \forall\mu$), las constricciones implican que cada extremo se mueve permanentemente a la velocidad de la luz. ¿Cómo cambia el enunciado si algunas condiciones son de Dirichlet?
b) En clase vimos que las cuerdas abiertas siempre deben entenderse como objetos auxiliares que describen excitaciones de D-branas. Si estas branas son en verdad objetos físicos, resulta natural considerar situaciones donde más de una D-brana está presente. En presencia de 2 D-branas existen cuerdas abiertas de 4 tipos, puesto que cada extremo de la cuerda puede estar adherido a la primera o a la segunda D-brana. Todos estos tipos de cuerdas abiertas representan excitaciones del sistema de 2 D-

branas. Denotemos n-n' a una cuerda que empieza (cuando $\sigma = 0$) en la D-brana número n y termina (cuando $\sigma = \pi$) en la número n'. Considera el caso donde las 2 D-branas tienen exactamente la misma dimensionalidad (valor de p) y orientación, pero están situadas en lugares distintos $x^i = c_1^i$ y $x^i = c_2^i$. Escribe la expansión en modos para todas las funciones de encaje X^μ de una cuerda 1-2 en este contexto, tanto en términos de las coordenadas originales τ, σ como de las coordenadas complejas $z, \bar{z}$.

c) Considera ahora el caso de 2 D-branas que no coinciden en dimensionalidad u orientación, de tal forma que existe una dirección, llamémosla x^1, que es paralela a la primera D-brana pero perpendicular a la segunda. Las cuerdas tipo 1-2 (2-1) satisfacen entonces condiciones de borde Neumann (Dirichlet) en $\sigma = 0$ y Dirichlet (Neumann) en $\sigma = \pi$. Imponiendo estas condiciones, determina la expansión en modos para X^1 en el caso de una cuerda abierta tipo 1-2.

d) Regresemos al caso donde tenemos una sola Dp-brana. Si es estática y está extendida a lo largo de $x^1, \ldots, x^p$, las cuerdas abiertas asociadas a ella satisfacen las condiciones de frontera que mencionamos en clase,

$$\partial_\sigma X^\alpha = 0 \quad (\alpha = 0, \ldots, p), \qquad X^i = c^i \quad (i = p+1, \ldots, D-1),$$

en $\sigma = 0, \pi$ para todo τ. Pero, si las D-branas son en verdad objetos físicos, esperaríamos también poder tener alguna D-brana que está inclinada con respecto a nuestros ejes coordenados, y/o que está en movimiento. Esto es por supuesto equivalente a comenzar con la D-brana de arriba y girar nuestra cabeza o pasar caminando junto a ella. Haciendo los cambios de coordenadas que corresponden a una rotación en el plano $(p, p+1)$, o un empujón en la dirección $p+1$, determina las condiciones de frontera que satisfacen las cuerdas abiertas asociadas a una D-brana rotada o en movimiento.

e) ¿Qué ocurre si en lugar de lo anterior consideras rotaciones entre 2 direcciones longitudinales (Neumann), o 2 direcciones transversales (Dirichlet), o empujones a lo largo de alguna dirección longitudinal? Nota que esto implica que una D-brana que llena todo el espacio ($p = D-1$) es en verdad invariante bajo Lorentz (y obviamente es también invariante bajo translaciones).