martes, 12 de febrero de 2013
04:53 a.m.

posible calcular el propagador de Feynman

$$G(x,x') \equiv \langle 0 | T \{ \hat{\varphi}(x) \hat{\varphi}(x') \} | 0 \rangle$$

orden temporal

vacío: estado sin partículas

incluye $\int dp^0$

$$= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{ip\cdot(x-x')} \frac{-i}{p^2+m^2}$$

$-(p^0)^2 + \vec{p}^{\,2}$

Feynman descubrió un método alternativo de cuantización, que da los mismos resultados que la cuantización canónica: la llamada <u>cuantización por integral funcional o integral de trayectoria</u>, que usaremos mucho en este curso.

En este método, <u>NO</u> utilizamos operadores: $\varphi(x)$ (y $\Pi(x)$) es en todo momento una <u>función ordinaria</u>. Lo que Feynman mostró es que la evolución temporal se puede reexpresar en la forma

martes, 12 de febrero de 2013
05:43 a.m.

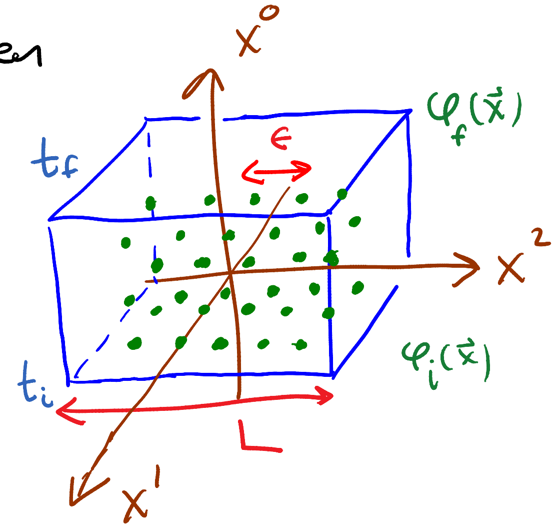
$$\langle \varphi_f(\vec{x}) | e^{-i\hat{H}(t_f - t_i)} | \varphi_i(\vec{x}) \rangle = \mathcal{N} \int_{\varphi(t_i,\vec{x})=\varphi_i(\vec{x})}^{\varphi(t_f,\vec{x})=\varphi_f(\vec{x})} \mathcal{D}\varphi(x)\, e^{i \overbrace{S[\varphi]}^{\int_{t_i}^{t_f} dt \int d^{D-1}x\, \mathcal{L}}}$$

cte. de normalización

donde $\int \mathcal{D}\varphi(x)$ denota una integral "sobre todas las funciones $\varphi(x)$". Más concretamente, sabemos que si discretizamos el espaciotiempo en p.ej. una red con espaciamiento ϵ,

$$x_n^\mu \equiv \epsilon n^\mu \qquad n^\mu \in \mathbb{Z}^D$$

y acotamos el espacio dentro de una caja $(D-1)$-dimensional de lado L, nuestro campo $\varphi(x^\mu)$ se reduce a un número grande pero finito de datos $\varphi_n \equiv \varphi(x_n^\mu)$.



Definimos la integral funcional (o de trayectoria, o de camino) sobre $\varphi(x)$ como una integral múltiple

$$\int \mathcal{D}\varphi(x) = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ L \to \infty}} \prod_{n^\mu} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_{n^\mu} = \lim_{\substack{\epsilon \to 0 \\ L \to \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi_2 \cdots$$

(y de la mano de esto, en el integrando escribimos la acción en versión discretizada).

NOTA: Siendo más precisos, la anterior fórmula para la evolución temporal, que involucra a la "versión lagrangiana" de la integral funcional, $\int \mathcal{D}\varphi \exp[i\int d^Dx \mathcal{L}(\varphi,\dot{\varphi},\vec{\nabla}\varphi)]$, es válida solo cuando el Hamiltoniano del campo es cuadrático en el momento Π, con un coeficiente que es independiente del campo. Lo que es válido en total generalidad es la "versión Hamiltoniana"

$$\int \mathcal{D}\varphi \mathcal{D}\Pi \exp\left[i\int d^Dx (\Pi\dot{\varphi}-\mathcal{H})\right].$$

Cuando nos topamos con una integral con inserciones como $\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x)\varphi(x') e^{iS[\varphi]}$, esperamos alguna conexión con una expresión en el lenguaje canónico que involucra a los operadores correspondientes $\hat{\varphi}(x)$ y $\hat{\varphi}(x')$. Pero éstos en general NO conmutan, así que debe ser que la integral funcional hace contacto con los operadores en cierto orden específico.

martes, 12 de febrero de 2013
08:04 a.m.

Se puede mostrar que se trata del orden temporal, y más en detalle, que la fórmula para funciones de correlación en términos de la integral de trayectoria (sea libre o no la teoría) es

$$G_n(x_1, \ldots x_n) \equiv \langle 0 | T\{\hat\varphi(x_1) \cdots \hat\varphi(x_n)\} | 0 \rangle$$

Condiciones inicial/final se cancelan

$$= \frac{\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)\, e^{iS[\varphi]}}{\int \mathcal{D}\varphi\, e^{iS[\varphi]}} .$$

$\int_{-\infty}^{\infty} dt \int d^{D-1}x\, \mathcal{L}$

En particular, en la teoría libre se encuentra que

$$G_2(x, x') = \frac{\int \mathcal{D}\varphi\, \varphi(x)\varphi(x')\, e^{i\int d^Dx \frac{1}{2}\varphi(\partial^2 - m^2)\varphi}}{\int \mathcal{D}\varphi\, e^{i\int d^Dx \frac{1}{2}\varphi(\partial^2 - m^2)\varphi}}$$

integral gaussiana (¡es básicamente la única que sabemos hacer!)

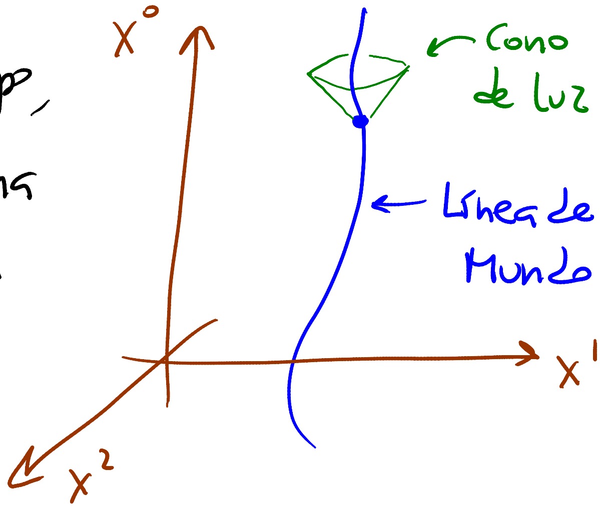
$$= \int \frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\, e^{ip\cdot(x-x')} \frac{-i}{p^2 + m^2} ,$$

en acuerdo con el propagador de Feynman (libre) que escribimos en la p.16 (y p.81). Veremos ahora otro camino por el cual podemos recuperar este resultado.

L3: 12/02/13

② Cuantizar una partícula ("primera cuantización")

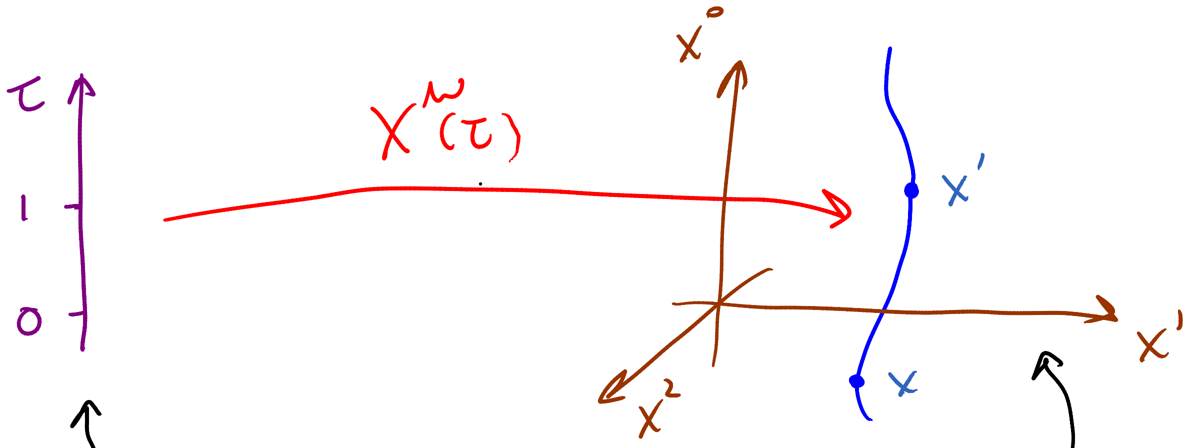
Conforme transcurre el tiempo, una partícula clásica traza una curva (tipo tiempo) en el espaciotiempo, que se conoce como su línea de mundo.



Podemos describirla especificando la función $\vec{x}(x^0)$ en un sistema de coordenadas dado (p.ej., inercial), pero esta descripción no es covariante bajo cambios de coordenadas (p.ej., bajo transformaciones de Lorentz), porque trata a x^0 de manera distinta a $\vec{x}$

Podemos obtener una descripción manifiestamente covariante si nos inventamos un parámetro auxiliar (arbitrario) τ para etiquetar a los distintos puntos a lo largo de la línea de mundo, y especificamos la trayectoria de la partícula dando $X^\mu(\tau)$:

t y $\vec{x}$ en el mismo pie



Espacio ficticio auxiliar
(0+1 dim)
que nos convendrá llamar
línea de mundo

Espaciotiempo
(D dim)

Ojo con nuestra notación: x^μ minúscula denota un punto cualquiera en el espaciotiempo, y $X^\mu(\tau)$ mayúscula denota a las funciones que describen el encaje de la línea de mundo de la partícula en el espaciotiempo.

La acción de la partícula relativista libre es

$$S[X] = -m\int dt\,\sqrt{1-(\partial_t\vec{X})^2}$$

$\tau = X^0 = t$

$$= -m\int d\tau\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\,\partial_\tau X^\mu\,\partial_\tau X^\nu}$$

¿o, más en general, $g_{\mu\nu}(X(\tau))$

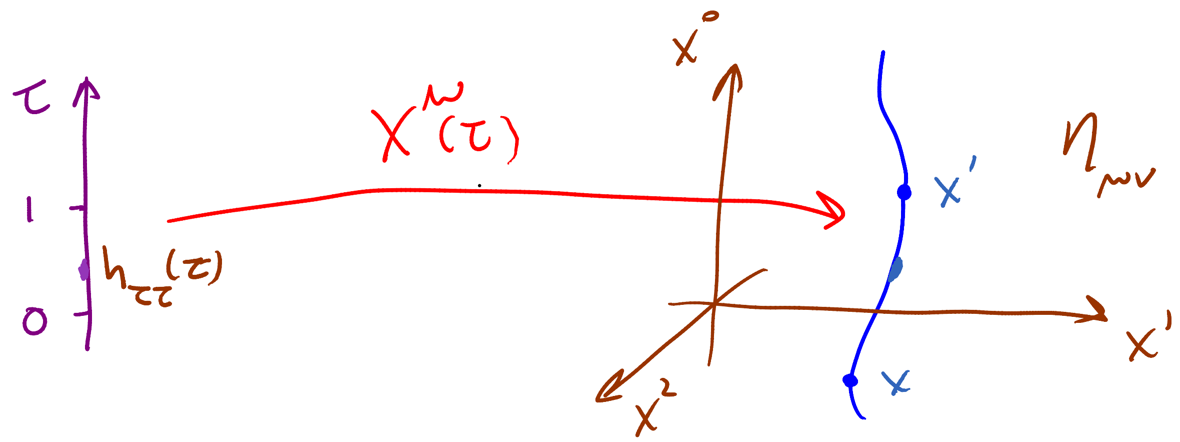
sin patines (sans serif): convención para acción en línea de mundo $\int d\tau$

martes, 12 de febrero de 2013
09:34 a.m.

$$= -m \times (\text{tiempo propio})$$

$$= -m \underbrace{\int d\tau \sqrt{-h}}_{\text{“volumen” invariante (p. 50)}} \qquad \equiv \det h_{\tau\tau} = h_{\tau\tau}$$

con $h_{\tau\tau}(\tau) \equiv \eta_{\mu\nu} \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu$ la métrica inducida sobre la línea de mundo, es decir, la retracción (pullback) de la métrica $\eta_{\mu\nu}$ del espaciotiempo:



$S[X]$ es invariante bajo Poincaré (= Lorentz + translaciones),

$$X^\mu(\tau) \to X'^\mu(\tau) = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu(\tau) + b^\mu, \qquad \eta_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$$

(o más en general, bajo cambios de coordenadas arbitrarios en el espaciotiempo,

martes, 12 de febrero de 2013
10:29 a.m.

$$\partial_\tau X^\mu \longrightarrow \partial_\tau X'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\partial_\tau X^\nu \qquad \text{vector} \equiv \text{tensor de rango } (1,0)$$

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x^\rho}{\partial x'_\nu} g_{\lambda\rho} \qquad \text{tensor } (0,2)\Big),$$

y también bajo cambios de coordenadas en la línea de mundo, $\tau \to \tau'(\tau)$

$$X^\mu(\tau) \longrightarrow X'^\mu(\tau') = X^\mu(\tau) \qquad \text{escalar}$$

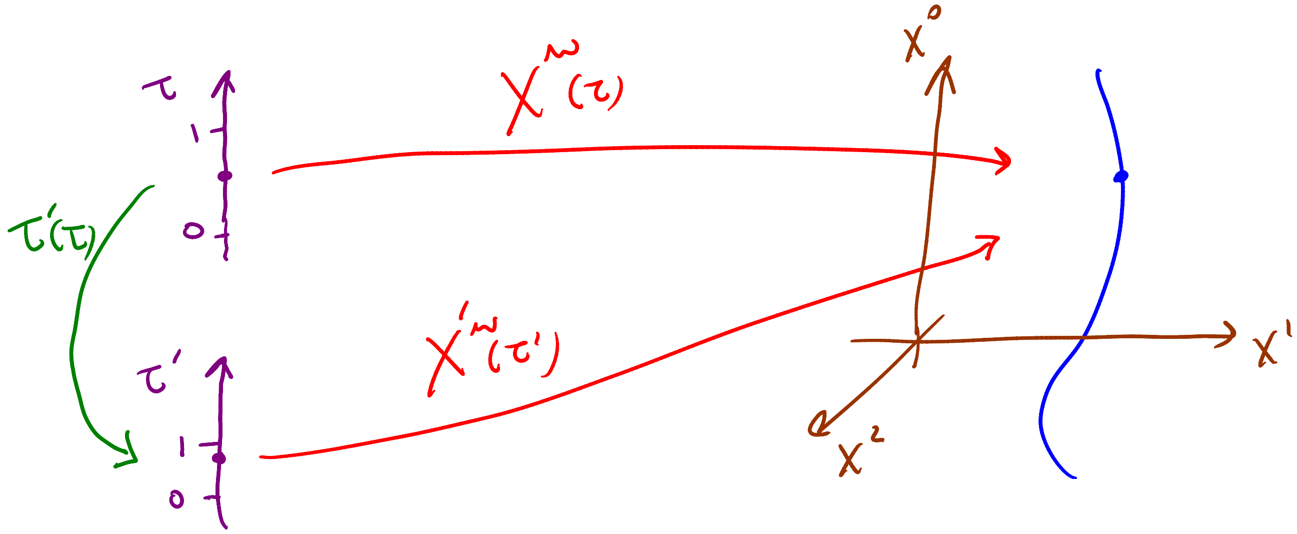
$$\left(\Rightarrow \partial_\tau X^\mu \longrightarrow \partial_{\tau'} X'^\mu = \frac{\partial \tau}{\partial \tau'}\partial_\tau X^\mu \quad \text{vector dual} \equiv \text{tensor } (0,1)\right).$$

Ésta es una simetría local desde el punto de vista de la línea de mundo, y $\therefore$ tenemos una teoría de norma, es decir, una teoría redundante, con más variables que grados de libertad físicos, como resultado de haber promovido el tiempo t a una variable $X^0(\tau)$. (Es bien conocido que QED, QCD y el ME son también teorías de norma, redundantes por usar p.ej. $A_\mu(x)$ para describir a las 2 polarizaciones transversales físicas.)

El punto aquí es simplemente que $X^\mu(\tau)$ y $X'^\mu(\tau') = X^\mu(\tau)$ son 2 funciones diferentes que describen

martes, 12 de febrero de 2013
10:38 a.m.

la misma trayectoria física:



Que tengamos esta redundancia por supuesto NO es sorprendente: es el precio que pagamos por habernos inventado el parámetro τ para lograr una descripción covariante.

La redundancia que vemos en $S[X^\mu(\tau)]$ es simplemente un recordatorio de que, entre las D funciones $X^\mu(\tau)$ que usamos, solo D−1 representan grados de libertad físicos.

Esto genera novedades al cuantizar. Si queremos hacerlo canónicamente, necesitamos primero calcular los momentos conjugados

$$P_\mu \equiv \frac{\partial L}{\partial(\partial_\tau X^\mu)} = + \frac{m\,\partial_\tau X_\mu}{\sqrt{-(\partial_\tau X)^2}} \,.$$

martes, 12 de febrero de 2013
11:12 a.m.

Podemos notar aquí que no todos los p_μ son independientes, puesto que satisfacen la constricción ("de primera clase")

¿conmutan bajo paréntesis de Poisson

$$\boxed{p^2 \equiv p_\mu p^\mu = -m^2} \,.$$

Esta es por supuesto la esperada "condición de capa de masa" (mass shell), que nos dice que, dado $\vec{p}$, conocemos p^0 (y NO podemos despejar $\dot{X}^\mu(p)$).

Podemos ahora calcular el Hamiltoniano,

$$H \equiv p_\mu \dot{X}^\mu - L = \frac{m \dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2}} \dot{X}^\mu - \left(-m\sqrt{-\dot{X}^2}\right) = 0 \; !$$

Esto nos dice que la evolución en τ NO está determinada de manera única, lo cual es razonable porque τ es un invento.

Tenemos ahora una disyuntiva: podemos primero eliminar la redundancia y después cuantizar, o primero cuantizar y después eliminar la redundancia. La primera opción requiere "fijar la norma", es decir, imponer una condición que elimine la redundancia, especificando de una vez por todas una elección de τ. P.ej., podemos decir que $X^0 = \tau$. En este caso volvemos a la situación familiar (desde Mecánica Cuántica no relativista): sólo quedan como variables dinámicas $\vec{X}(t)$, cuantizamos imponiendo

$$[\hat{X}^i, \hat{p}^j] = i\,\delta^{ij},$$

de modo que una base para nuestro espacio de Hilbert está dada por $\{|\vec{p}\rangle\}$, y obtenemos la evolución temporal esperada a partir de

$$S = -m\int dt\,\sqrt{1-\dot{\vec{X}}^2}$$

$$\leftrightarrow \quad H = \underbrace{\vec{p}}_{\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}}\cdot\dot{\vec{X}} - L = \frac{m\dot{\vec{X}}}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2}}\cdot\dot{\vec{X}} - \left(-m\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2}\right)$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1-\dot{\vec{x}}^2}} = \underbrace{\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}}_{\equiv E_{\vec{p}}} \neq 0.$$

martes, 12 de febrero de 2013
01:25 p.m.

La segunda opción es cuantizar con todo y redundancia, promoviendo las D variables X^μ y sus momentos p_μ a operadores, e imponiendo

$$[\hat{X}^\mu, \hat{P}_\nu] = i\,\delta^\mu_\nu \leftarrow \text{delta de Kronecker} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu=\nu \\ 0 & \text{si } \mu\neq\nu \end{cases},$$

o lo que es lo mismo,

$$[\hat{X}^\mu, \hat{p}^\nu] = i\eta^{\mu\nu} \leftarrow \text{métrica inversa} = \begin{cases} -1 & \text{si } \mu=\nu=0 \\ 1 & \text{si } \mu=\nu=i \\ 0 & \text{si } \mu\neq\nu \end{cases}.$$

Una base para nuestro espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es entonces

$$|p\rangle \equiv |p^\mu\rangle \quad \text{tal que} \quad \hat{P}_\nu|p\rangle = p_\nu|p\rangle.$$

Esta descripción es manifiestamente covariante bajo Lorentz, pero el precio que pagamos es que $\mathcal{H}$ es demasiado grande: la mayoría de los estados que contiene NO son físicos.

Para distinguir los que sí son físicos, debemos imponer la constricción ("de primera clase") $p^2+m^2=0$ a nivel cuántico, exigiendo que

$$\boxed{(\hat{p}^2+m^2)|\text{fís}\rangle = 0}\,.$$

(Esto es análogo a la cuantización "de Gupta-Bleuler" para QED en la norma de Lorentz, si acaso la conoces.)

Los estados físicos forman entonces parte de un espacio de Hilbert reducido $\mathcal{H}_{fís}$ con base dada por $\{|E_{\vec{p}}, \vec{p}\rangle\}$ (si elegimos $p^0 = +E_{\vec{p}}$ en lugar de $-E_{\vec{p}}$, como condición física adicional, que claramente es covariante bajo Lorentz), de modo que recuperamos la física correcta.

En este esquema, es importante tener presente que la evolución temporal importante no es con respecto a τ (arbitrario), sino a X^0 (en algún marco de referencia elegido), a través del operador de translaciones en el espaciotiempo $\exp(i\hat{p}\cdot X)$.

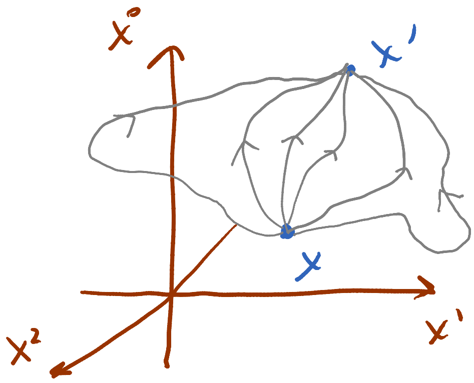
Al calcular el propagador, obtenemos el resultado esperado.

Es posible también cuantizar a $X^\mu(\tau)$ por medio de la integral de trayectoria. Siguiendo a Feynman, esperaríamos que el propagador libre

martes, 12 de febrero de 2013
02:06 p.m.

esté dado por

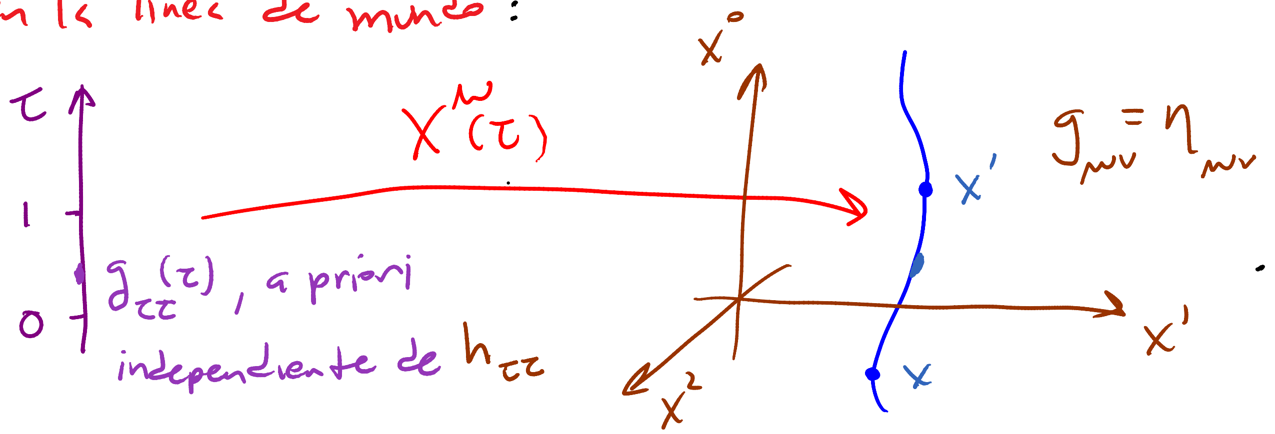
$$G_2(x',x) \sim \int_{X^\mu(0)=x^\mu}^{X^\mu(1)=x'^\mu} \mathcal{D}X^\mu(\tau)\, e^{iS[X]}$$



Notar que las variables de integración son claramente distintas a las que teníamos en la descripción en "segunda cuantización", $\int \mathcal{D}\varphi(x)$. Desde la perspectiva de la línea de mundo, podemos de hecho interpretar a la expresión de arriba como una teoría cuántica de campos en 0+1 dimensiones, con D "campos" escalares X^μ.

A través de un análisis un poco largo, se puede recuperar el propagador conocido (p. 81) a partir de esta integral $\int \mathcal{D}X^\mu$. Para no alentarnos demasiado, aquí sólo resaltaremos los pasos principales (una descripción detallada puede encontrarse p.ej. en [Polyakov, cap. 9]).

Un primer obstáculo es que $\int \mathcal{D}X^\mu e^{iS[X]}$ no es una integral gaussiana. Para remediar esto, conviene inventarse una nueva variable auxiliar $g_{\tau\tau}(\tau)$ (no confundir con $g_{\mu\nu}(x)$), que juega el papel de métrica intrínseca en la línea de mundo:



(Bajo $\tau \to \tau'(\tau)$, se tiene entonces

$$g_{\tau\tau}(\tau) \longrightarrow g'_{\tau\tau}(\tau') = \frac{\partial\tau}{\partial\tau'}\frac{\partial\tau}{\partial\tau'}\, g_{\tau\tau}(\tau) \quad \text{tensor } (0,2).)$$

Con ella podemos reescribir la acción de la partícula de modo que sea cuadrática en $\dot{X}$:

$$\bar{S}[X,g] = -\frac{m}{2}\int d\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}}\left(g^{\tau\tau}\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu + 1\right)$$

$$g^{\tau\tau} \equiv (g_{\tau\tau})^{-1}$$

(Es habitual escribir esto en términos no de $g_{\tau\tau}$,

martes, 12 de febrero de 2013
02:52 p.m.

sino de la "unopata", "mónada" o "einbein" $e \equiv \sqrt{-g_{\tau\tau}}$.)

cuatropata — tétrada — vierbein en $D=4$

Esta acción es también invariante bajo Poincaré (más en general, bajo difeos en espaciotiempo) y bajo reparametrizaciones en la línea de mundo, y es equivalente a $S[X]$ en el sentido de que la ecuación de movimiento para $g_{\tau\tau}(\tau)$ (que aparece sin derivadas, y es por tanto un "campo" no dinámico),

$$\frac{\delta \bar{S}}{\delta g_{\tau\tau}} = \partial_\tau\left(\cancel{\frac{\partial \bar{L}}{\partial(\partial_\tau g_{\tau\tau})}}\right)^{0} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial g_{\tau\tau}} = 0$$

"derivada funcional" — Ecuación algebraica

$$\Longrightarrow \quad +\frac{1}{2}(-g_{\tau\tau})^{-3/2}\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu + \frac{1}{2}(-g_{\tau\tau})^{-1/2} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad g_{\tau\tau} = +\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu \equiv h_{\tau\tau},$$

métrica intrínseca — métrica inducida

y tenemos

martes, 12 de febrero de 2013
03:07 p.m.

$$\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu \equiv \dot{X}^2$$

$$\bar{S}[X, g_{\tau\tau}=h_{\tau\tau}] = -\frac{m}{2}\int d\tau \sqrt{-\dot{X}^2}\left(\frac{1}{\dot{X}^2}\dot{X}^2 + 1\right)$$

$$= -m\int d\tau \sqrt{-\dot{X}^2}$$

$$= S[X] \, .$$

Podemos notar que

$$\bar{S} = -\frac{m}{2}\int d\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}}\left(g^{\tau\tau}\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu + 1\right)$$

describe D "campos" escalares libres no masivos (es decir, Klein-Gordon sin masa), en un fondo curvo no dinámico 0+1 dim (con cte. cosmológica).

Ahora escribiríamos

$$G_2(x', x) \sim \int \mathcal{D}g_{\tau\tau}(\tau) \int \mathcal{D}X^\mu(\tau)\, e^{i\bar{S}[X,g]} \, ,$$

¡integral no gaussiana! ← integral gaussiana

pero quedan todavía 2 sutilezas. Una es que sería un error definir $\int \mathcal{D}X^\mu(\tau)$ o $\int \mathcal{D}g_{\tau\tau}(\tau)$ simplemente dividiendo el intervalo $0 \leq \tau \leq 1$ en

N subintervalos iguales de duración $\Delta\tau = \frac{1}{N}$ y postulando que (p.ej.)

$$\int \mathcal{D}X^\mu(\tau) \equiv \lim_{\Delta\tau\to 0} \int d^D X_{N-1} \cdots d^D X_1 \quad , \quad \text{con } X^\mu_n \equiv X^\mu(\underbrace{\tau_n}_{n\Delta\tau}) .$$

Esto violaría la invariancia bajo $\tau \to \tau'(\tau)$.

El procedimiento correcto es construir la integral invariante usando la métrica apropiada para las $X^\mu(\tau)$, que se hereda de la métrica intrínseca en la línea de mundo, $g_{\tau\tau}(\tau)$.

Concretamente, sabemos que sobre una variedad d-dimensional con coordenadas $\{x^i\}$ $i=1,\ldots,d$, la métrica $\gamma_{ij}(x)$ define en particular la norma de los vectores (~desplazamientos infinitesimales) δx^i,

$$\|\delta x\| \equiv \sum_{i,j=1}^{d} \gamma_{ij}\, \delta x^i \delta x^j \quad ,$$

y determina la integral invariante bajo difeos

$$\int \prod_i dx^i \sqrt{|\gamma|} \equiv \int \prod_i dx^i \sqrt{|\det \gamma_{ij}|}\ .$$

A nosotros nos interesa definir (en particular) la integral $\mathcal{D}X^\mu \sim d^D X_1^\mu \cdots d^D X_{N-1}^\mu$ (con $N \equiv 1/\Delta\tau$),

$\equiv X^\mu(\tau_1)$ $\quad X^\mu(\tau_{N-1})$

de modo que estamos lidiando con una variedad $d = D(N-1)$ dimensional. En este espacio, la única definición local posible para la norma de un vector δX_n^μ $\left(\xrightarrow[\Delta\tau\to 0]{} \delta X^\mu(\tau)\right)$ que es invariante bajo Poincaré y reparametrizaciones de τ es

$$\|\delta X\|^2 \equiv \sum_{n=1}^{N-1} \Delta\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_n)}\, \eta_{\mu\nu}\, \delta X_n^\mu \delta X_n^\nu$$

salvo una cte.

$$\xrightarrow[\Delta\tau\to 0]{} \int_0^1 d\tau \sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau)}\, \eta_{\mu\nu}\, \delta X^\mu(\tau)\, \delta X^\nu(\tau)\ .$$

De aquí podemos leer la métrica γ_{ij} en el espacio de funciones $X^\mu(\tau)$: por definición,

$$\|\delta X\|^2 \equiv \sum_{\substack{\mu,\nu \\ m,n}} \gamma_{\substack{\mu\ \ \nu \\ m,\,n}}\, \delta X_m^\mu\, \delta X_n^\nu\ ,$$

así que nuestra métrica es diagonal,

$$\gamma_{\substack{\mu \\ m},\substack{\nu \\ n}} = \eta_{\mu\nu}\,\delta_{m,n}\,\Delta\tau\sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_n)}\,.$$

Concluimos entonces que la integral funcional invariante debe utilizar

$$\sqrt{|\det\gamma|} = \prod_{\mu=1}^{D}\prod_{n=1}^{N-1}\left(\Delta\tau\sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_n)}\right)^{1/2} :$$

$$\mathcal{D}_g X^\mu \equiv \lim_{\Delta\tau\to 0}\int \underbrace{\left(\Delta\tau\sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_1)}\right)^{D/2} d^D X_1 \cdots \left(\Delta\tau\sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau_{N-1})}\right)^{D/2} d^D X_{N-1}}_{\text{Medida de integración `ultralocal' (deseable para preservar las propiedades usuales de la integral funcional)}}\,.$$

De manera similar, la medida invariante $\mathcal{D}_g\, g_{\tau\tau}(\tau)$ se deduce a partir de la norma

$$\|\delta g_{\tau\tau}\|^2 \equiv \int d\tau\sqrt{-g_{\tau\tau}(\tau)}\; g^{\tau\tau}(\tau)\, g^{\tau\tau}(\tau)\,\delta g_{\tau\tau}(\tau)\,\delta g_{\tau\tau}(\tau)\,.$$

La segunda sutileza es que, debido a la invariancia bajo reparametrizaciones de τ, la integral