

Las superficies con topologías más complicadas no permiten la transformación $z \rightarrow \lambda z$.

Entendemos entonces que la **invariancia conforme** es equivalente a las **ecs de mov. de cuerdas** a nivel árbol, es decir, clásicas.

Notar que una de estas ecuaciones es

$$\beta^{\Phi} = \frac{D-26}{6} + \text{contribución de fondo no trivial} = 0$$

Así que fondo plano $\Rightarrow D=26$; pero

fondo no trivial que varíe rápidamente \Rightarrow positivamente $D \neq 26$.

Ejem., el fondo dilatónico lineal

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu}(x) = 0, \quad \Phi(x) = V_{\mu} X^{\mu}$$

(integral funcional gaussiana)

$$\uparrow \text{ con } V_{\mu} V^{\mu} = \frac{26-D}{6\alpha'}$$

resulta ser solución exacta de las condiciones de Weyl,

es decir, de las ec. de mov. clásicas: este fondo define una teoría de campo conforme en 2 dim, con carga central $c^X = D + 6\alpha' V_\mu V^\mu = 26 \Rightarrow c^{\text{TOT}} = 0$. ✓

Curiosamente, si $V_\mu = \sqrt{\frac{26-D}{6\alpha'}} \delta_\mu^{D-1}$, ¡entonces

$X^{D-1}(\sigma)$ se puede reinterpretar como el modo de Weyl $\omega(\sigma)$ en teoría de cuerdas no crítica en $D-1$ dimensiones (a esto nos referiremos en la p. 291)!

El caso $D \leq 2$ se ha resuelto usando un modelo matricial — ver p.ej. hep-th/9108019. Se aprendió en particular que

que en superficies con género $m \gg 1$ las amplitudes $M_m \sim (2m)! g_c^{2m}$, lo cual

nos hace esperar que los efectos no perturbativos en teoría de cuerdas sean de $\mathcal{O}(e^{-1/g_c})$

— cf. teoría $\lambda\phi^4$, donde a orden λ^n hay

$\sim n!$ diagramas \Rightarrow efectos no perturbativos $\mathcal{O}(e^{-1/\lambda})$.

Las condiciones $\beta^{\alpha} = \beta^{\beta} = \beta^{\Phi} = 0$ son equivalentes a las ecs. de movimiento que provienen de la misma acción efectiva que dedujimos en la p. 389:

$$S_{\text{ef}} = \frac{1}{2K_0^2} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left\{ -\frac{2}{3\alpha'} (D-26) + R + 4 \partial_{\mu} \Phi \partial^{\mu} \Phi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2K^2} \int d^D x \sqrt{-g} e^{-2\tilde{\Phi}}}$$

$$\text{con } \tilde{\Phi} \equiv \Phi - \Phi_0$$

$$2K^2 \equiv 2K_0^2 e^{2\Phi_0} = 16\pi G_N$$

$$\underbrace{(2\pi)^{D-3} \ell_c^{D-2} g_c^2}$$

Esta es la acción en el marco de cuerdas: por definición $g_{\mu\nu}(x)$ es la métrica que la cuerda "siente". Como vimos en las pp. 388-9, es posible pasar al marco de Einstein a través de la redefinición de campos

$$g_{\mu\nu}^{\text{E}}(x) \equiv e^{\frac{4}{D-2}\tilde{\Phi}} g_{\mu\nu}(x), \text{ para obtener}$$

$$S_{\text{ef}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g^E} \left\{ -\frac{2(D-26)}{3\alpha'} e^{4\tilde{\Phi}/(D-2)} + R^E - \frac{4}{D-2} \partial_{\mu}\tilde{\Phi}(\partial^{\mu}\tilde{\Phi})^E \right. \\ \left. - \frac{1}{12} e^{-8\tilde{\Phi}/(D-2)} H_{\mu\nu\lambda} (H^{\mu\nu\lambda})^E + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$

Ésta (con $D=26$) es precisamente la acción que obtuvimos antes a partir de las amplitudes de dispersión. Notar que la acción efectiva completa incluye 2 tipos distintos de correcciones:

Correcciones de cuerdas (objetos no puntuales) \longleftrightarrow Expansión en α' (correcciones cuánticas en teoría 2-dimensional)

p.ej., $\beta_{\mu\nu}^{\mathcal{J}} = \alpha' R_{\mu\nu} + \frac{\alpha'^2}{2} R_{\mu\lambda\sigma\rho} R_{\nu}{}^{\lambda\sigma\rho} + \dots$

Correcciones cuánticas (superficies de género más alto) \longleftrightarrow Expansión en $g_c = e^{\frac{\Phi_0}{c}}$


Ambos tipos de correcciones pueden ser relevantes para determinar cuáles son los fondos válidos (\leftrightarrow 'vacíos' posibles) en la teoría de cuerdas completa.

Sabemos cómo obtener correcciones cuánticas en S_{ef} a partir de cálculos de amplitudes de dispersión.

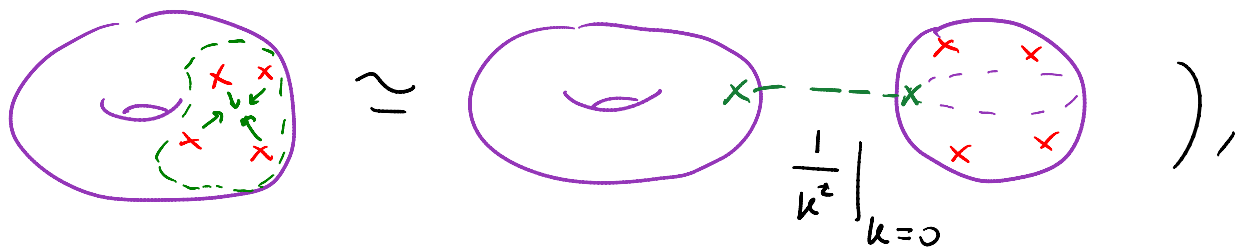
Y, de hecho, nuestros cálculos en el toro muestran que el fondo trivial $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu} = 0$, $\Phi = \Phi_0$ (que dásicamente es consistente si $D=26$)

No es un fondo válido a nivel cuántico por al menos 2 razones:

- 1) A un lazo encontramos una constante cosmológica positiva (divergente por taquión) \Rightarrow ¿espaciotiempo de Sitter?
- 2) A un lazo encontramos un renacuajo para el

dilatón,  $\varphi \neq 0$ (que ocasionaba

divergencia en cualquier amplitud a 1 lazo,



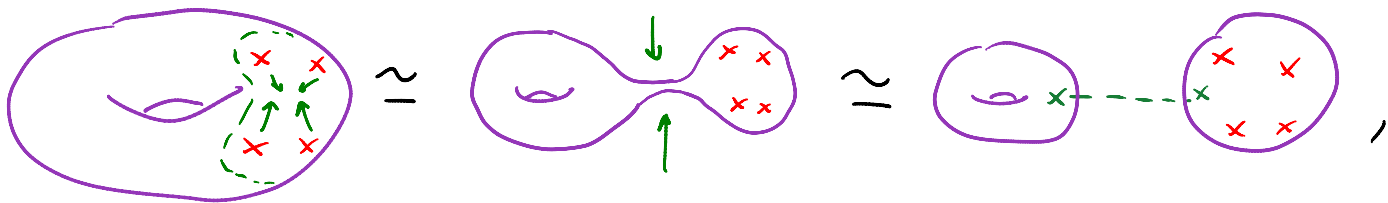
lo cual indicaba que la solución a las ecs. de mov. corregidas ($\sim \nabla^2 \Phi = g_c^2 J$) involucra un $\Phi(x)$ no trivial.

Pero ... ¿cómo podemos obtener correcciones cuánticas a las ecs. de movimiento de cuerdas a partir de la anomalía conforme ??

Arriba calculamos los β 's a nivel árbol (esfera); PERO ellos expresan divergencias UV, que dependen solo de la estructura local y son \therefore independientes de la topología. ¿De dónde provienen entonces las supuestas correcciones cuánticas?

El punto es que, como hemos visto, la integración sobre los módulos t_i, z_n puede dar lugar a divergencias adicionales, que representan nuevas contribuciones a la anomalía conforme.

P.ej., en



usando el mismo parámetro de corte ϵ , la divergencia es $\propto g_c^2 \Lambda \ln \epsilon \underbrace{\eta_{\mu\nu} \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu}_{\text{vértice del dilatón}}$, insertado en la esfera.

Es posible entonces cancelar esta divergencia con 'renormalización' adicional (por encima de la renormalización 2-dim habitual):

$$g_{\mu\nu} \equiv \hat{g}_{\mu\nu}^{(2)} = \hat{g}_{\mu\nu}^{(r)} + \delta g_{\mu\nu}$$

$$\underbrace{\delta g_{\mu\nu}^{\text{usual}}}_{\propto R_{\mu\nu} \ln \epsilon} + \underbrace{\delta g_{\mu\nu}^{\text{módulo 5}}}_{-g_c^2 \Lambda g_{\mu\nu} \ln \epsilon}$$

cuyo efecto es

$$e^{-S_\sigma} \rightarrow e^{-\left(S_\sigma - g_c^2 \Lambda \ln \epsilon \frac{V}{2}\right)}$$

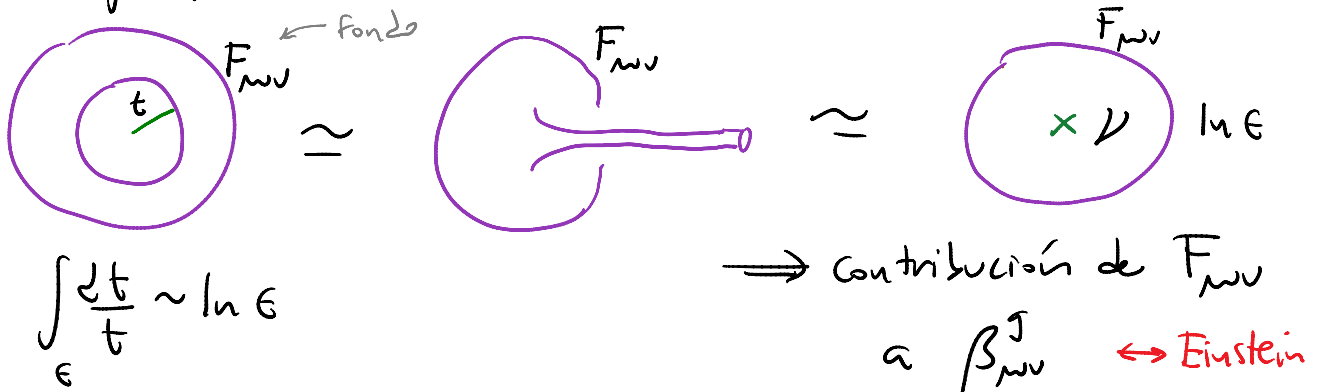
↖ inserción en la esfera
cancela divergencia en el toro

y que modifica la condición para ausencia de anomalía de Weyl

$$\beta_{\mu\nu}^g = \alpha' R_{\mu\nu} - \Lambda g_c^2 g_{\mu\nu} = 0$$

¡ ec. de Einstein con constante cosmológica !

Otro ejemplo: con cuerdas abiertas,



Esta idea aplica en general: las condiciones para la ausencia de la anomalía de Weyl son del tipo

$$\beta^{\text{TOTAL}} = \beta^{\text{usual}} + \beta^{\text{módulos}} = 0$$

Mecanismo de
Fischler-Susskind

Esto implica que la teoría 2-dimensional es invariante conforme a nivel clásico, pero por correcciones cuánticas es no invariante conforme en cada superficie (con módulos fijos) por separado, aunque sí "conforme" en conjunto.

L17: 28/05/13