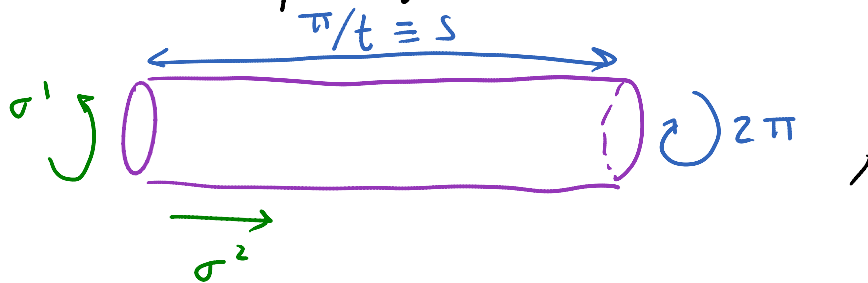


$\eta_{c^2}^{(0)}$ es divergente en $t \rightarrow \infty$ solo por el taquión de cuerdas abiertas. Es divergente también en $t \rightarrow 0$, y a diferencia de lo que pasó en T^2 , aquí no hay un grupo modular para restringir la integración. Pero la idea básica en el toro era intercambiar $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$. Haciendo eso aquí y reescalando por $1/t$ obtenemos



es decir, una cuerda cerrada que se propaga una distancia

grande (efecto IR):

$$\eta_{c^2}^{(0)} = (8\pi^2 \alpha')^{-13} \int_0^\infty \frac{ds}{2\pi} \eta\left(\frac{is}{2\pi}\right)^{-24} = \sum_I \left(\text{diagram} \right)$$

para $s \rightarrow \infty$: $e^{2s} + 24 e^0 + O(e^{-2s})$

\uparrow \uparrow
 taquión dilatación/gravitón

Veremos esta cuenta más adelante (\leftrightarrow D-branas)...
 En amplitudes con más lazos (ver Polchinski Vol. I
 Cap. 9 ó D'Hoker y Phong, Rev. Mod. Phys. 60 (1988), 917)
 se encuentra una situación similar: posibles divergencias
 provienen solo de la frontera del espacio de
 módulos, y cuando existen, tienen una interpretación
 como efectos IR, es decir, de distancias grandes.

En resumen, las amplitudes de la cuerda bosónica **|| NO**
 tienen **divergencias UV !!** y son unitarias.

La situación en la supercuerda parece ser similar,
 pero es técnicamente más complicada (por la
 existencia de 'supermódulos'). NO hay divergencias
 a 1 lazo (Green, Schwarz '85; Gross, Martinec, Harvey,
 Rohm '87) ni a 2 lazos (D'Hoker, Phong '01-'05),
 y se espera que no las haya en general, pero
 no se han hecho cuentas explícitas. L16: 21/05/13

Cuerdas en Fondos no Triviales

Hemos visto antes que el vértice del gravitón simétrico
↓

$$V_h(\varepsilon; k) = \underbrace{-g N_c}_{\frac{K}{2\pi}} \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} : \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu e^{ik \cdot X} :_g \underbrace{\varepsilon_{\mu\nu}}_{\equiv h_{\mu\nu}(X)},$$

donde, para garantizar la invariancia bajo difeos, el orden normal $: :_g$ se define restando la contracción

$$\Delta^{-1}(\sigma, \sigma') = -\frac{\alpha'}{2} \ln [d^2(\sigma, \sigma')]]$$

↑ distancia geodésica entre σ y σ'

(que en la norma plana $g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}$ $g_{zz} = 0 = g_{\bar{z}\bar{z}}$ se reduce

a $-\frac{\alpha'}{2} \ln |z - z'|^2$), y la invariancia de Weyl

requiere que $k^2 = 0$, $k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0$, $\varepsilon^\mu{}_\mu = 0$,

representa una fluctuación infinitesimal por encima de la métrica de fondo $\eta_{\mu\nu}$.

A partir de esto entendimos que el
Espacio Curvo \leftrightarrow 'Estado Coherente' de Gravitones
es descrito entonces por

$$\int \mathcal{D}X^{\mu} e^{-S_p[X]} e^{\mathcal{V}_h[X]}, \text{ es decir,}$$

$$S_p[X] \rightarrow S_g[X] = S_p[X] - \mathcal{V}_h[X]$$

$$= \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} \underbrace{(\eta_{\mu\nu} + 2\kappa h_{\mu\nu}(X))}_{\equiv g_{\mu\nu}(X)}$$

La misma idea aplica para los otros modos de
oscilación de la cuerda. En particular, el

vértice del antisimetrizón

$$\mathcal{V}_B(\epsilon; k) = -\frac{\kappa}{2\pi\alpha'} \frac{1}{\alpha'} \int d^2\sigma i \epsilon^{ab} : \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} e^{ik \cdot X} : \underbrace{\epsilon_{\mu\nu}}_{\equiv B_{\mu\nu}(X)}$$

antisimétrico
↓

por rotación de Wick ↑

↑ $\epsilon^{12} = +1$
densidad tensorial

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{ab} \text{ es tensor} \right)$$

$$\left(\text{con } k^2 = 0, \epsilon_{\mu\nu} k^{\nu} = 0 \right),$$

y del dilatón,

$$V_\varphi(k) = -\frac{K}{2\pi} \frac{1}{\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} : \left(g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} + \frac{26}{12} \alpha' \mathcal{R} \right) e^{ik \cdot X} :_g$$

↓
por invariancia de Weyl $\equiv \varphi(X)$

(con $k^2=0$),

[ver p.ej. Polchinski 3.6]

se exponencian para dar lugar a la acción que describe a cuerdas en el formo más general de campos no masivos:

$$S_\sigma[X] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \left\{ \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X) \leftarrow \text{campo gravitacional} \right. \\ \left. + i \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X) \leftarrow \text{campo de Kalb-Ramond} \right. \\ \left. + \alpha' \sqrt{g} \mathcal{R} \Phi(X) \right\} \leftarrow \text{campo dilatónico}$$

"Modelo σ
no lineal"

Notar que un formo dilatónico constante $\Phi(X) = \Phi_0$ contribuye

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \mathcal{R} \Phi_0 = \Phi_0 \chi, \text{ es decir (cf. p. 349)}$$

ii la constante de acoplamiento de cuerdas está determinada por valor de formo del dilatón, $g_c = e^{\Phi_0}$!!

en general, $x_0^\mu(\sigma)$

Desarrollando $X^\mu(\sigma) = x_0^\mu + \underline{X}^\mu(\sigma)$, tenemos infinitas interacciones:

$$\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X) = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \left[g_{\mu\nu}(x_0) + \overset{1 \text{ pto}}{\partial_{\lambda_1} g_{\mu\nu}(x_0)} X^{\lambda_1} + \frac{1}{2} \overset{2 \text{ pto}}{\partial_{\lambda_1} \partial_{\lambda_2} g_{\mu\nu}(x_0)} X^{\lambda_1} X^{\lambda_2} + \dots \right]$$

↑ funciones de acoplamiento ↓

S_σ es, de hecho, la teoría (estrictamente) renormalizable más general para D campos escalares en 2 dimensiones: usando la unidad de longitud en la hoja de mundo $[\sigma] = l$, tenemos $[\partial_a] = l^{-1}$, $[g_{ab}] = l^0 = [X]$, y por tanto los términos con 2 derivadas y un número arbitrario de X 's son estrictamente renormalizables o "marginales" ($[] = l^{-2}$) por tanto de potencias. Es decir, las constantes de acoplamiento correspondientes, como $\partial_{\lambda_1} \dots \partial_{\lambda_n} g_{\mu\nu}(x_0)$, son adimensionales (tal como e en QED, g_{YM} en QCD, o λ en ϕ^4 en 4 dim).

Los únicos otros términos renormalizables ($\text{dim} \leq 2$) serían

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{M}} d^2\sigma \sqrt{g} \phi(X) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{campo} \\ \text{taquiónico} \end{array} \quad \begin{array}{l} [\phi] = l^{-2} \quad \therefore \\ \text{súper-renormalizable} \\ \text{o "relevante"} \end{array}$$

y, en teorías con cuerdas abiertas,

$$\int_{\partial\mathcal{M}} ds \phi(X) \quad \text{y} \quad i \int_{\partial\mathcal{M}} ds t^a \partial_a X^\mu A_\mu(X) \quad \left(\text{con } ds = dt \sqrt{g_{tt}} \right)$$

\uparrow taquión \uparrow fotón
 súper-renormalizable renormalizable

S_0 es invariante bajo

1) Difeos en el espaciotiempo $x^\mu \rightarrow x'^\mu(x)$.

2) Transformación de norma de $B_{\mu\nu}$:

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$$

(porque $\epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \partial_\nu \Lambda_\mu = \epsilon^{ab} \partial_b (\partial_a X^\mu \Lambda_\mu)$ es una derivada total), $\underbrace{\partial_b \Lambda_\mu}$

que, en presencia de $\partial M \neq \emptyset$, debe complementarse con

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{2\pi\alpha'} \Lambda_\mu \quad (\Rightarrow F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} - \frac{1}{2\pi\alpha'} (\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu))$$

↑ esta no es una transf. de norma de A_μ ↑

3) Transformación de norma usual $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda$.

4) Difeos en la hoja de mundo $\sigma^a \rightarrow \sigma'^a(\sigma)$.

5) ¿Weyl? $g_{ab}(\sigma) \rightarrow g'_{ab}(\sigma) = e^{\omega(\sigma)} g_{ab}(\sigma)$.

Los términos de $g_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ son invariantes de Weyl

a nivel clásico. ¿Lo siguen siendo a nivel cuántico?? El

término de Φ no es invariante de Weyl (ni siquiera

a nivel clásico! (Es invariante solo si Φ es constante.)

Aún en un fondo plano (\leftrightarrow teoría libre en la hoja de mundo)
vimos que las medidas $D_g X^{\mu}$, $D_g b_{ab}$, $D_g c^a$ dependen de $\omega(\sigma)$,
de tal manera que la invariancia de Weyl se preserva
solo si $c^{\text{TOT}}=0$ ($\leftrightarrow D=26$). En un fondo no trivial,

Interacciones \Rightarrow Renormalización \Rightarrow Anomalía de Weyl
en la hoja de mundo \Rightarrow Adicional \Rightarrow en general

Consideremos por simplicidad un fondo puramente
gravitacional:

$$S_0[X] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^{\mu} \partial_b X^{\nu} g_{\mu\nu}(X)$$

y separemos

$$X^{\mu}(\sigma) = X_0^{\mu}(\sigma) + Y^{\mu}(\sigma)$$

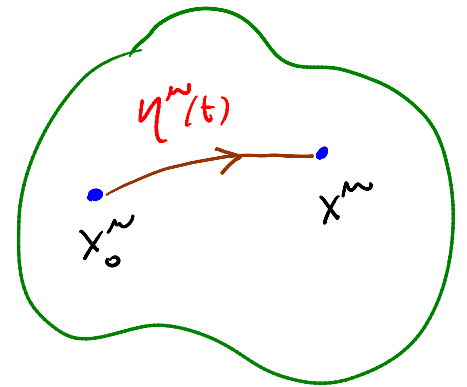
\uparrow
Valor de fondo que
satisface ec. de mpv.

\uparrow
fluctuación
cuántica: $\int DX^{\mu}(\sigma) \rightarrow \int DY^{\mu}(\sigma)$

La descripción en términos de $Y^{\mu}(\sigma)$ no es covariante
bajo difeos en el espaciotiempo, porque $Y^{\mu}(\sigma)$ no es
un vector.

Mejores coordenadas: considerar una geodésica $\eta^\mu(t)$ $t \in [0, 1]$ tal que

$$\eta^\mu(0) = X_0^\mu, \quad \eta^\mu(1) = X^\mu,$$



y usar como coordenada (local) a

$$\xi^\mu \equiv \dot{\eta}^\mu(0)$$

Coordenadas Normales de Riemann

Usando la ec. de la geodésica se encuentra que

$$\eta^\mu(t) = X_0^\mu + \xi^\mu t - \frac{1}{2} \Gamma_{\nu\rho}^\mu \xi^\nu \xi^\rho t^2 + \mathcal{O}(\xi^3)$$

$$\Rightarrow \eta^\mu = \xi^\mu - \frac{1}{2} \Gamma_{\nu\rho}^\mu \xi^\nu \xi^\rho + \mathcal{O}(\xi^3),$$

$$\partial_a X^\mu = \partial_a X_0^\mu + \underbrace{\nabla_a \xi^\mu}_{\text{ver abajo}} + \frac{1}{3} R_{\lambda\sigma\nu}^\mu(X_0) \partial_a X_0^\lambda \xi^\sigma + \mathcal{O}(\xi^3)$$

$$g_{\mu\nu}(X) = g_{\mu\nu}(X_0) + \frac{1}{3} R_{\mu\lambda\sigma\nu}(X_0) \xi^\lambda \xi^\sigma + \mathcal{O}(\xi^3),$$

de tal manera que

$$S_\sigma[X] = S_\sigma[X_0] \quad \swarrow \text{No hay término lineal en } \xi$$

$$+ \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma^2} \sqrt{g} g^{ab} \left\{ g_{\mu\nu}(X_0) \nabla_a \xi^\mu \nabla_b \xi^\nu + R_{\mu\lambda\rho\nu}(X_0) \partial_a X_0^\lambda \partial_b X_0^\rho \xi^\lambda \xi^\rho + \mathcal{O}(\xi^3) \right\}$$

$$\equiv \partial_a \xi^\mu + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu(X_0) \partial_a X_0^\lambda \xi^\sigma$$

Para diagonalizar al término cinético $g_{\mu\nu}(x_0) \nabla_a \zeta^{\mu} \nabla_b \zeta^{\nu}$, conviene hacer un último cambio de variables, definiendo

$$\zeta^m \equiv e^m_{\mu}(x_0) \zeta^{\mu}, \text{ donde } e^m_{\mu} \text{ es la } \underline{\text{muchas-pata o vielbein}} \text{ (} \leftrightarrow \text{ tetrada o vierbein en 4dim)}$$

$m=0, \dots, b-1$

$$\text{tal que } e^m_{\mu} e^n_{\nu} \eta_{mn} = g_{\mu\nu} \leftrightarrow g^{\mu\nu} e^m_{\mu} e^n_{\nu} = \eta^{mn}.$$

Tenemos entonces

$$g_{\mu\nu}(x_0) \nabla_a \zeta^{\mu} \nabla_b \zeta^{\nu} = \eta_{mn} \underbrace{\nabla_a \zeta^m \nabla_b \zeta^n}_{\substack{\text{conexión de espín} \\ \equiv e^m_{\nu} \nabla_{\mu} e^{\nu\lambda}}} \\ \equiv \partial_a \zeta^m + \underbrace{\omega_{\mu}^{ml} \partial_a x_0^{\mu}}_{\substack{\text{campo de norma } \text{So}(D-1,1) \\ \equiv A_a^{ml}}} \zeta^l$$

A orden cero en la curvatura del espaciotiempo, cada ζ^m es un campo escalar sin masa (justo como lo era X^{μ} en el fondo plano).

La expansión perturbativa en curvatura es válida si $g_{\mu\nu}(x)$ varía lentamente en unidades de cuerdas. En esta expansión, α' juega el papel de \hbar : cuenta los lazos. El parámetro de expansión es $\sim \alpha'/L^2 \leftarrow$ radio de curvatura.

Nos interesa determinar la manera en que la función

$$Z[g] \equiv e^{-W[g]} \equiv \int \mathcal{D}_g X^m e^{-S_\sigma[X,g]}$$

(donde la medida $\mathcal{D}_g X^m$ se define a partir de la norma

$$\| \delta X \|^2 = \int d^2\sigma \sqrt{g} \delta X^m \delta X^{\nu} g_{m\nu}(X))$$

depende del factor de Weyl.

Recordando la definición del tensor de energía-momento

clásico $T_{ab}^{(cl)} = \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_\sigma}{\delta g^{ab}},$

conviene definir a nivel cántico (como en la p. 286)

$$\langle T_{ab} \rangle \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta W}{\delta g^{ab}} = - \frac{1}{Z} \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta Z}{\delta g^{ab}},$$

que recibe una contribución tanto de la acción $S_\sigma[X,g]$ como

de la medida $\mathcal{D}_g X^m$. Igual que siempre, la invariancia de $W[g]$ bajo difeos $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \nabla_a J_b + \nabla_b J_a$

$$\Rightarrow 0 = \int d^2\sigma \sqrt{g} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W}{\delta g^{ab}} \right) (\nabla^a J^b + \nabla^b J^a),$$

que integrando por partes implica la ec. de conservación

$$\boxed{\nabla^a \langle T_{ab} \rangle = 0} \quad (1)$$

De manera similar, la invariancia (si la hay) bajo transformaciones de Weyl $g_{ab} \rightarrow g_{ab} + \delta\omega g_{ab}$

$$\Rightarrow 0 = \int d^2\sigma \sqrt{g} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W}{\delta g^{ab}} \right) \delta\omega g_{ab} ,$$

es decir, $\boxed{\langle T^a_a \rangle = 0} \quad (2)$

Como hemos visto, la invariancia de Weyl / conforme es necesaria para la consistencia de nuestra teoría de cuerdas, así que debemos exigir que se cumpla (2).

Pero, como veremos ahora (y como sucedió también en el fondo plano), (2) resulta ser incompatible con (1) a menos que el fondo satisfaga ciertos requisitos.

Conviene trabajar nuevamente en la norma

conforme $g_{ab}(\sigma) = e^{\omega(\sigma)} \delta_{ab}$

$$\longleftrightarrow g_{zz} = 0 = g_{\bar{z}\bar{z}}, \quad g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} e^{\omega(z, \bar{z})}$$

(siempre accesible localmente, usando solo difeos).

Para calcular $\langle T_{ab} \rangle$, variamos esta métrica a

$$\begin{pmatrix} \delta g_{zz} & \delta g_{z\bar{z}} + \delta g_{\bar{z}z} \\ \delta g_{z\bar{z}} + \delta g_{\bar{z}z} & \delta g_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix}.$$

Dado que la medida $D_g X^w$ depende solo de la determinante

\sqrt{g} de esta métrica, cuya variación con respecto a δg_{zz} o $\delta g_{\bar{z}\bar{z}}$ es cero (a primer orden),

concluimos que $\frac{\delta W}{\delta g_{zz}}$ y $\frac{\delta W}{\delta g_{\bar{z}\bar{z}}}$ reciben

contribución de S_0 pero no de $D_g X^w$, es decir,

$$\langle T_{zz} \rangle = \langle T_{zz}^{(cl)} \rangle, \quad \langle T_{\bar{z}\bar{z}} \rangle = \langle T_{\bar{z}\bar{z}}^{(cl)} \rangle.$$

Por el contrario, $\langle T_{z\bar{z}} \rangle \neq \langle T_{z\bar{z}}^{(cl)} \rangle$,

lo cual hace posible que exista una anomalía de Weyl.

En nuestro ejemplo del fondo puramente gravitacional, hemos desarrollado $S_g[X, g]$ en términos

de X_0^μ y ξ^m , obteniendo las reglas de Feynman

$$\begin{array}{c} m \\ \text{---} \\ z \end{array} \begin{array}{c} n \\ \text{---} \\ z' \end{array} \equiv -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z-z'|^2 \leftarrow \text{propagador} \\ \langle \xi^m(z, \bar{z}) \xi^n(z', \bar{z}') \rangle$$

$$\begin{array}{c} \partial X_0^\mu \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \bar{\partial} X_0^\nu \\ \text{---} \\ R \end{array} \begin{array}{c} m \\ \text{---} \\ n \end{array} \equiv \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \left\{ R_{\mu\nu\sigma\rho} (X_0) \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu \right\} (z, \bar{z})$$

← fuente externa

(además de un vértice de 2 patas que involucra a la conexión de espín, pero no será relevante aquí porque a 1 lazo no puede dar lugar a un resultado covariante bajo difeos en el espaciotiempo).

A 1 lazo tenemos entonces

$$\langle T_{z\bar{z}}(z) \rangle = T_{z\bar{z}}^{(cl)}(z) \times \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ R \end{array} \begin{array}{c} \partial X_0 \\ \bar{\partial} X_0 \end{array}$$

↑ incluye $\frac{1}{\alpha'} \partial \xi^m \partial \bar{\xi}^n \eta_{mn}$ (y otros términos que no contribuyen)

← Términos cúbicos o más altos en ξ^m no figuran a este orden

que en espacio de momentos resulta en

The diagram shows a green torus with a red 'x' on the left and a purple dot on the right. A blue arrow labeled 'p' points left from the top, and another blue arrow labeled 'p+q' points right from the bottom. To the right of the torus, the expression $R \partial X_\alpha \bar{\partial} X^\alpha(-q)$ is written, followed by a comma and the text 'es decir,'.

$$\langle T_{zz}^{(d)}(q) \rangle = \int \frac{d^2 p}{2\pi} \frac{p_z (p_z + q_z)}{p^2 (p+q)^2} \{ R_{\mu\nu} \partial X_\alpha^\mu \bar{\partial} X_\alpha^\nu \}(-q) .$$

La integral resulta ser finita (sin necesidad de regularización),

$$\langle T_{zz}(q) \rangle = \frac{1}{4} \frac{g_z}{g_{\bar{z}}} \{ R_{\mu\nu} \partial X_\alpha^\mu \bar{\partial} X_\alpha^\nu \}(-q) .$$

Usando este resultado y la ec. de conservación (1),

$$\bar{\partial} \langle T_{zz}(z) \rangle + \partial \langle T_{\bar{z}\bar{z}}(z) \rangle = 0 \iff g_{\bar{z}} \langle T_{zz}(q) \rangle + g_z \langle T_{\bar{z}\bar{z}}(q) \rangle = 0 ,$$

concluimos que

$$\langle T_{\bar{z}\bar{z}}(q) \rangle = -\frac{1}{4} \{ R_{\mu\nu} \partial X_\alpha^\mu \bar{\partial} X_\alpha^\nu \}(-q) ,$$

es decir, existe una anomalía de Weyl a menos que

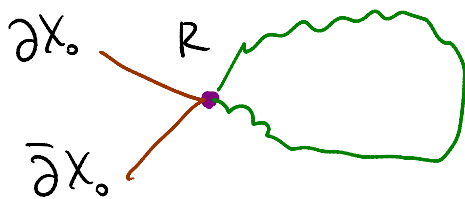
$$\boxed{R_{\mu\nu} = 0} \iff \text{¡ ec. de Einstein en el vacío !}$$

La existencia de esta anomalía está estrechamente relacionada con la aparición de una divergencia UV:

al calcular

$$\begin{aligned}
 e^{-W[g]} &\equiv \int \mathcal{D}_g X^\mu e^{-S_\sigma[X, g]} \\
 &= e^{-S_\sigma[X_0, g]} \int \mathcal{D}_g \xi^m e^{-\tilde{S}_\sigma[\xi, g]} \\
 &\quad \uparrow \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu g_{\mu\nu}(X_0)
 \end{aligned}$$

a un lazo, tenemos la contribución divergente



$$= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z R_{\mu\nu\rho\sigma}(X_0) \partial X_0^\mu \bar{\partial} X_0^\nu (-\alpha' \eta^{\rho\sigma} \ln \epsilon)$$

parámetro de corte UV \nearrow

que se absorbe renormalizando la métrica:

$$\begin{aligned}
 g_{\mu\nu}(X_0) &\equiv \underbrace{g_{\mu\nu}^{(d)}(X_0)}_{\text{métrica desnuda}} = \underbrace{g_{\mu\nu}^{(r)}(X_0)}_{\text{métrica renormalizada}} + \underbrace{\delta g_{\mu\nu}(X_0)}_{\text{contratérmino}} \\
 &= \alpha' R_{\mu\nu}(X_0) \ln \epsilon + \dots
 \end{aligned}$$

Esta renormalización elimina la divergencia de $W[g]$; pero (como en QED o QCD) introduce dependencia de escala de distancia/momento en la hoja de mundo (\leftrightarrow la escala de renormalización), que se puede codificar en la funcional beta

$$\beta_{\mu\nu}^g \equiv \frac{\partial g_{\mu\nu}^{(d)}}{\partial \ln \epsilon} = \alpha' R_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha'^2).$$

Si $\beta_{\mu\nu}^g \neq 0$ (divergencias \Rightarrow no hay invariancia bajo reescalamientos rígidos), entonces

$W[g_{ab} = e^{\omega(\sigma)} \delta_{ab}]$ depende de $\omega(\sigma)$, y $\therefore \langle T^a_a \rangle \neq 0$.

El resultado para un fondo $g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi$ general es:

$$\begin{aligned} \langle T^a_a \rangle = & -\frac{1}{2\alpha'} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \beta_{\mu\nu}^g \\ & -\frac{i}{2\alpha'} \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \beta_{\mu\nu}^B \\ & -\frac{1}{2} \mathcal{R} \beta^\Phi, \end{aligned}$$

\leftarrow cada funcional
 \leftarrow beta multiplica
 \leftarrow al operador de vértice correspondiente

donde (para campos que varían lentamente)

$$\beta_{\mu\nu}^g = \alpha' \left[R_{\mu\nu} + 2 \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{4} H_{\mu\lambda\rho} H_\nu{}^{\lambda\rho} \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2),$$

derivada covariante
en el espaciotiempo

$\partial_\mu B_{\lambda\rho} - \dots$

$$\beta_{\mu\nu}^B = \alpha' \left[-\frac{1}{2} \nabla^\rho H_{\rho\mu\nu} + \nabla^\rho \Phi H_{\rho\mu\nu} \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2),$$

$$\beta^\Phi = \frac{D-26}{6} + \alpha' \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 \Phi + \nabla_\rho \Phi \nabla^\rho \Phi - \frac{1}{24} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} \right] + \mathcal{O}(\alpha'^2).$$

habíamos visto ya
(p. 288) en fondo plano
(incluye contribución
de fantasmas)

contribución clásica
(a través de $S_\sigma[X_0]$)

Tenemos entonces invariancia de Weyl solo si el fondo satisface las restricciones (ecs. de movimiento)

$$\beta_{\mu\nu}^g = 0$$

~ ¡Ecuación de Einstein!

$$\beta_{\mu\nu}^B = 0$$

~ ¡Ecuación de Maxwell generalizada!

$$\beta^\Phi = 0$$

~ ¡Ecuación de Klein-Gordon!

Concluimos entonces que, sorprendentemente,

!! INVARIANCA CONFORME \Rightarrow DINÁMICA DE CUERDAS !!
(en hoja de mundo) (en espaciotiempo)

Una manera de entender el origen de este milagro es la siguiente. En una teoría de campos en el espaciotiempo, especificamos un 'vacío' separando

$$\varphi^I(x) = \underbrace{\varphi_0^I(x)}_{\text{valor de fondo}} + \underbrace{\phi^I(x)}_{\text{fluctuación cuántica}} \quad I=1,2,\dots,\# \text{ de campos,}$$

para después calcular funciones de correlación

$$\langle \phi^{I_1}(x_1) \dots \phi^{I_n}(x_n) \rangle$$

En el caso $n=1$ (renormalizado), obtenemos

$$\langle \phi^I(x) \rangle = 0 \quad \forall I \text{ solo si los valores de fondo}$$

$\varphi_0^I(x)$ son solución a las ecr. de mov. clásicas

(o, a nivel cuántico, un extremo del 'potencial efectivo').

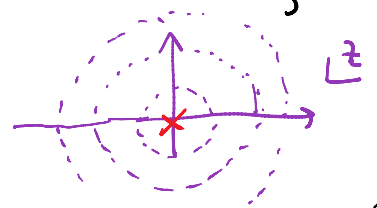
De la misma manera, preguntar en cuerdas si el fondo satisface las ecs. de mov. es equivalente a pedir que las amplitudes de 2 pata se anulen,

$$\langle V^I(z, \bar{z}) \rangle = 0 \quad \forall I.$$

Pero, a nivel árbol (es decir, en la esfera), esto es consecuencia de la invariancia conforme: colocando el vértice en el origen, $z=0$, la invariancia bajo el reescalamiento $z \rightarrow z' = \lambda z$ implica que

$$\langle V(0,0) \rangle_{S^2} = \underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial z'} \right)^h \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}'} \right)^{\tilde{h}}}_{|\lambda|^{-2}} \langle V(0,0) \rangle_{S^2} \Rightarrow \langle V(0,0) \rangle_{S^2} = 0.$$

porque $h = \tilde{h} = 1$
para estado físico



Un argumento similar muestra que en el disco (la mitad superior del plano complejo) los renacuajos de cuerda abierto se anulan, $\langle V(0,0) \rangle_{D^2} = 0$, pero no necesariamente los de cuerda cerrada, $\langle V(z, \bar{z}) \rangle_{D^2}$.

