

Por último, podemos determinar el volumen del GKC notando que los vectores de Killing conformes (ortonormales en el producto interno correspondiente) son los modos cero

$$C_{0,1}^a = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{0,2}^a = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow C_{0,1}^a = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_{0,2}^a = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \begin{pmatrix} -\tau_1/\tau_2 \\ 1/\tau_2 \end{pmatrix},$$

de manera que

$$\frac{1}{\text{GKC}} \sim \left\langle C^1(\check{\sigma}) C^2(\check{\sigma}) \right\rangle_{T^2(z)}^{c-\underline{c}} \quad \leftarrow \text{solo parte de modo cero}$$

$$\sim \int dC_{0,1} dC_{0,2} \left[C_{0,1} \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} + C_{0,2} \frac{(-\tau_1/\tau_2)}{2\pi\sqrt{\tau_2}} \right] \left[C_{0,1} \cdot 0 + C_{0,2} \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}\tau_2} \right]$$

$$\sim \frac{1}{\tau_2^2}$$

Juntándolo todo tenemos

$$\mathcal{M}_{T^2}^0 \sim \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2} \frac{1}{\text{Im}\tau} (\text{Im}\tau)^2 |\eta(\tau)|^4 (\text{Im}\tau)^{D/2} \text{Im}(\tau)^{-D} |\eta(\tau)|^{-2D}$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 GKC $\frac{\pi^2}{i=1} (b, \frac{\partial g}{\partial \tau_i})$ $\langle 1 \rangle^{\frac{b,c}{2}}$ $\int d^D x_0$ $\langle 1 \rangle^X$ (omitiendo V_D)

(notar que los fantasmas cancelan las 2 X's no físicas ✓), es decir,

$$\mathcal{M}_{T^2}^0 = (4\pi^2 \alpha')^{-13} \int_{\mathcal{F}} \frac{d^2\tau}{4(\text{Im}\tau)^2} (\text{Im}\tau)^{-12} |\eta(\tau)|^{-48} \quad (D=26)$$

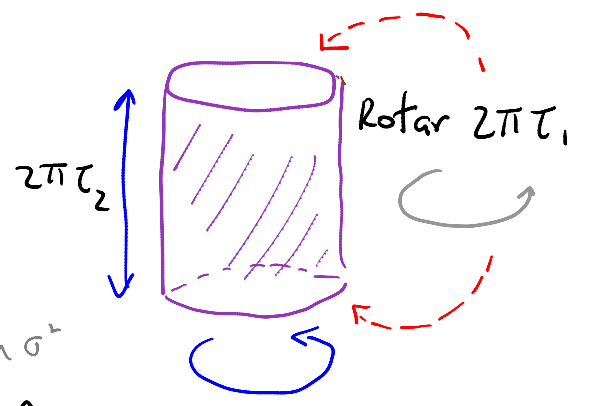
Es útil volver a obtener este resultado de otra manera, empleando cuantización canónica. Dado que para cualquier

sistema

$$\langle f | e^{-\hat{H}T} | i \rangle = \int_{\varphi(t=0)=\varphi_i}^{\varphi(t=T)=\varphi_f} \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(e^{-\hat{H}T}) = \int_{\varphi(t=0)=\varphi(t=T)} \mathcal{D}\varphi e^{-S[\varphi]}$$

veamos que la integral funcional en el toro $T^2(\tau)$ define la función de partición

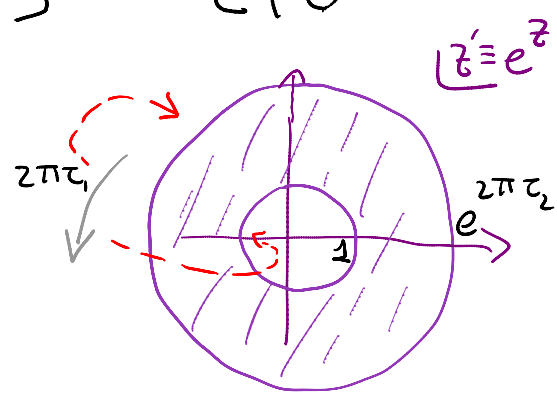


$$\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)}^x = \text{Tr}_x \left[e^{-2\pi\tau_2 \hat{H} + 2\pi\tau_1 \hat{P}} \right] \equiv Z^x(\tau)$$

↙ transición en σ^+
↘ transición en σ^-

obnde $\hat{H} = \hat{L}_0 + \hat{\tilde{L}}_0 - \frac{1}{24}(c^x + \tilde{c}^x)$

$\hat{P} = \hat{L}_0 - \hat{\tilde{L}}_0$ p. 221



es decir,

$$Z^x(\tau) = \left(\frac{q}{\bar{q}} \right)^{-D/24} \text{Tr}_x \left(\frac{\hat{L}_0}{q} \frac{\hat{\tilde{L}}_0}{\bar{q}} \right) \quad \text{con } q \equiv e^{2\pi i\tau}$$

$\tau = \tau_1 + i\tau_2$

Usando $\hat{L}_0 = \frac{\alpha' \hat{p}^2}{4} + \sum_{n, \mu} \hat{\alpha}_{-n}^\mu \hat{\alpha}_{n\mu}$ (similar para $\hat{\tilde{L}}_0$)

$\equiv \sum_n n \hat{N}_{\mu n}$

↖ operadores de número

y

$$\text{Tr}_x(\hat{O}) \equiv \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \sum_{N_{\mu n}} \langle N_{\mu_1}, N_{\mu_2}, \dots, jk | \hat{O} | N_{\mu_1}, N_{\mu_2}, \dots, jk \rangle$$

↖ $\forall \mu, n$

tenemos

$$\text{Tr}_x \left(\hat{g} \hat{L}_0 \hat{g}^{-1} \hat{L}_0 \right) = \underbrace{(2\pi)^D \delta^{(D)}(0)}_{V_D} \underbrace{\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-\pi \tau_2 \alpha' k^2}}_{\frac{1}{(2\pi)^D} \left(\frac{2\pi}{2\pi \tau_2 \alpha'} \right)^{D/2}} \underbrace{\prod_{\mu, \nu} \left[\sum_{N_{\mu, \nu}, \tilde{N}_{\mu, \nu}=0}^{\infty} \hat{g}^{\nu N_{\mu, \nu}} \hat{g}^{-\nu \tilde{N}_{\mu, \nu}} \right]}_{\left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \right]^D \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \bar{q}^n) \right]^D} \underbrace{\left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \right]^D \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \bar{q}^n) \right]^D}_{|\eta(\tau)|^{-2D} (q \bar{q})^{D/24}}$$

así que

$$Z^x(\tau) = V_D (4\pi^2 \alpha' \tau_2)^{-D/2} |\eta(\tau)|^{-2D},$$

lo cual coincide con el resultado de la integral funcional ^{p.397} (y verificamos por tanto el resultado para det Δ_σ).

La misma idea aplica para los fantasmas, excepto que para un campo fermióni ψ [ver p.ej. Polchinski Vol 1, Apéndice A]

$$\int_{\psi(\tau) = \psi(0)} \mathcal{D}\psi e^{-S[\psi]} = \text{Tr} \left((-1)^{\hat{F}} e^{-\hat{H}\tau} \right), \quad \int \mathcal{D}\psi e^{-S[\psi]} = \text{Tr} \left(e^{-\hat{H}\tau} \right)$$

\uparrow \uparrow \uparrow

donde $\hat{F} \equiv \sum_{n>0} (c_{-n} b_n + b_{-n} c_n) + c_0 b_0 + \text{modos derechos} \equiv \text{Número Fermiónico}$:

$$(-1)^{\hat{F}} |\downarrow\rangle = +|\downarrow\rangle, \quad \{(-1)^{\hat{F}}, \hat{b}_{-n}\} = 0 = \{(-1)^{\hat{F}}, \hat{c}_{-n}\}$$

Para ver que esto funciona, calculemos

$$\text{Tr}_{b,c} \left(e^{-2\pi\tau_2 \hat{H}^f + 2\pi\tau_1 i \hat{P}^f} \right) = q^{-\frac{c^f}{24}} \bar{q}^{-\frac{\tilde{c}^f}{24}} \text{Tr}_{b,c} \left(\begin{matrix} \hat{L}_0^f & \hat{\tilde{L}}_0^f \\ \mathbb{1} & \mathbb{1} \end{matrix} \right)$$

Recordando que hay 4 estados base

$$|\downarrow\downarrow\rangle, \quad |\uparrow\downarrow\rangle \equiv c_0 |\downarrow\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\uparrow\rangle \equiv \tilde{c}_0 |\downarrow\downarrow\rangle,$$

$$|\uparrow\uparrow\rangle \equiv c_0 \tilde{c}_0 |\downarrow\downarrow\rangle$$

y usando $c^f = -26 = \tilde{c}^f$,

$$\hat{L}_0^f = \sum_{n>0} n (\underbrace{\hat{c}_{-n} \hat{b}_n}_{\equiv \hat{N}_n^c} + \underbrace{\hat{b}_{-n} \hat{c}_n}_{\equiv \hat{N}_n^b}) - 1 \quad (\text{similar para } \hat{\tilde{L}}_0^f)$$

obtenemos

$$\text{Tr}_{b,c} \left(e^{-2\pi\tau_2 \hat{H}^f + 2\pi\tau_1 i \hat{P}^f} \right) = \underbrace{(1+1+1+1)}_{\text{estados base}} (q \bar{q})^{\frac{13}{12} - 1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+q^n)^2 (1+\bar{q}^n)^2}$$

$\downarrow N_n^c=0$ $\downarrow N_n^b=0$
 $\uparrow N_n^c=1$ $\uparrow N_n^b=1$

$\neq 0$.

Esto solo puede ser $\langle 1 \rangle_{T^2(\mathbb{Z})}^{c,b}$ con condiciones de borde antiperiódicas en σ^2 , porque así no existen modos cero.

Por otro lado,

$$\text{Tr}_{b,c} \left[(-1)^{\hat{F}} e^{-2\pi\tau_2 \hat{H}^f + 2\pi i \tau_1 \hat{P}^f} \right] = (1-1-1+1) (q\bar{q})^{\frac{13}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) (1-\bar{q}^n)^2 = 0$$

↑ ↑

Como esperamos para $\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)}^{c,b}$ en condiciones de borde periódicas, para las axles sí existen modos cero.

Para obtener un resultado distinto de cero necesitamos una inserción por cada modo cero:

$$\langle b(z_1) c(z_2) \tilde{b}(\bar{z}_3) \tilde{c}(\bar{z}_4) \rangle_{T^2(\tau)}^{c,b} = \text{Tr} \left[(-1)^{\hat{F}} \hat{b}_0 \hat{c}_0 \hat{\tilde{b}}_0 \hat{\tilde{c}}_0 e^{-2\pi\tau_2 \hat{H}^f + 2\pi i \tau_1 \hat{P}^f} \right]$$

aniquila $\left| \uparrow \right\rangle$

$$= (1+0+0+0) (q\bar{q})^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^4 = |\eta(\tau)|^4$$

↑ ↑ ↑

que nuevamente coincide con la integral funcional. ✓

En conjunto tenemos, como antes,

$$\eta_{T^2}^0 = (4\pi^2 \alpha')^{-13} \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau d\bar{\tau}}{4(\text{Im}\tau)^2} (\text{Im}\tau)^{-12} |\eta(\tau)|^{-48}$$

(notar que $d\tau d\bar{\tau} = 2d\tau_1 d\tau_2$)

\swarrow $SL(2, \mathbb{Z})$

La integral debe ser invariante modular (pp. 392-3), pues de otra manera habría una anomalía "gravitacional" global.

Es fácil verificar que bajo $\tau \rightarrow \tilde{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$

$$\text{tenemos } d^2\tau \rightarrow d^2\tilde{\tau} = \frac{d^2\tau}{|c\tau + d|^4} \quad \text{y} \quad \text{Im}\tau \rightarrow \text{Im}\tilde{\tau} = \frac{\text{Im}\tau}{|c\tau + d|^2}$$

así que $\frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2}$ es invariante.

$$\text{Además, } \eta(\tau+1) = e^{i\pi/12} \eta(\tau), \quad \eta(-1/\tau) = \sqrt{-i\tau} \eta(\tau),$$

$$\text{Im}(\tau+1) = \text{Im}(\tau), \quad \text{Im}(-1/\tau) = \frac{\text{Im}\tau}{|\tau|^2},$$

así que $\text{Im}\tau |\eta(\tau)|^4$ es invariante modular.

Concluimos entonces que en $D=26$ (y solo en $D=26$)

$$M_{T^2}^0 \sim \int \frac{d^2\tau}{(\text{Im}\tau)^2} (\text{Im}\tau |\eta(\tau)|^4)^{-12} \text{ es invariante. } \checkmark$$

Para interpretar nuestros resultados, conviene regresar a la expresión antes de calcular la traza:

$$\begin{aligned} M_{T^2}^0 &= \int_{\mathbb{F}} \frac{d^2\tau}{4\tau_2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-\pi\tau_2 \alpha' k^2} \sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} q^{h_E^{-1}} \bar{q}^{\tilde{h}_E^{-1}} \\ &= \int \frac{d^2\tau}{4\tau_2} (4\pi\alpha'\tau_2)^{-D/2} \sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} q^{h_E^{-1}} \bar{q}^{\tilde{h}_E^{-1}} \end{aligned}$$

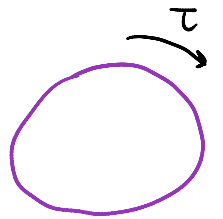
donde la suma es sobre los estados $|E\rangle$ en el espacio de Hilbert 'transversal' H_{\perp} , que incluye solo a $D-2$ conjuntos de osciladores $\alpha_n^i, \tilde{\alpha}_n^i$ (y excluye entonces al modo cero k^{μ} , los fantasmas $c_n, b_n, \tilde{c}_n, \tilde{b}_n$, y los 2 conjuntos de osciladores 'longitudinales' $\alpha_n^0, \tilde{\alpha}_n^0$) y $\hat{L}_0^{\perp} |E\rangle = h_E |E\rangle$.




(en nuestro caso $\hat{L}_0^\perp = \sum_{n>0} \underbrace{\hat{\alpha}_{-n}^i \hat{\alpha}_n^i}_{\hat{N}_n^i} \equiv \hat{N}^\perp$ así que $h_E = N_E^\perp$).

Para el caso de una partícula puntual de masa m , la amplitud a un lazo es (pp. 103, 111)

$$\mathcal{M}_S^0 = \int_0^\infty \frac{dT}{2T} \int_{X^\mu(0)=X^\mu(1)} \mathcal{D}X^\mu(\tau) e^{-\frac{m}{2} \int_0^1 d\tau \left(\frac{\dot{X}^2}{T} + T \right)}$$



volumen del grupo de Killing (no existía para )

$$= V_D \int_0^\infty \frac{dT}{2T} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-\frac{T}{2}(k^2 + m^2)}$$

omitir \nearrow

$$= \int_0^\infty \frac{dT}{2T} (2\pi T)^{-D/2} e^{-\frac{T}{2} m^2}$$

Para comparar con la teoría de cuerdas, donde cada $|E\rangle \in H_\perp$ con $h_E = \tilde{h}_E$ ($\leftrightarrow N_E = \tilde{N}_E$, la condición de emparejamiento de niveles) corresponde a una 'partícula' con masa

$$m_E^2 = \frac{2}{\alpha'} (h_E + \tilde{h}_E - 2),$$

Consideremos una suma sobre el resultado para la partícula puntual,

$$\sum_{\substack{|E\rangle \in H_{\perp} \\ h_E = \tilde{h}_E}} M_{S'}^0(m_E^2) = \int_0^{\infty} \frac{dT}{2T} (2\pi T)^{-D/2} \sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} e^{-\frac{T}{\alpha'}(h_E + \tilde{h}_E - 2)\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{i(h_E - \tilde{h}_E)\theta}}_{\delta_{h_E, \tilde{h}_E}}$$

$(h_E - \tilde{h}_E \in \mathbb{Z})$ es necesario en cuerdas para asegurar la invariancia modular)

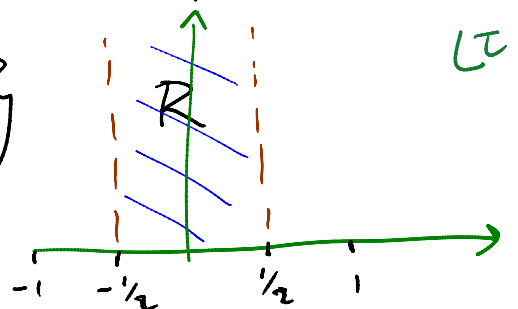
Definiendo $\tau \equiv \frac{\theta}{2\pi} + \frac{iT}{2\pi\alpha'}$ y $q \equiv e^{2\pi i\tau}$ esto es

$$\sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} M_{S'}^0(m_E^2) \delta_{h_E, \tilde{h}_E} = \int_{\mathcal{R}} \frac{d^2\tau}{4\tau_2} (4\pi\alpha'\tau_2)^{-D/2} \sum_{|E\rangle \in H_{\perp}} q^{h_E - 1} \bar{q}^{\tilde{h}_E - 1},$$

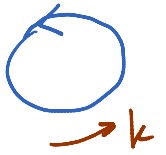
que coincide exactamente con el resultado de cuerdas

$M_{T^2}^0$, excepto por la región de integración

$$\mathcal{R} = \left\{ \tau \mid \text{Im}\tau > 0, -\frac{1}{2} \leq \text{Re}\tau \leq \frac{1}{2} \right\} \neq \mathcal{F}.$$



En particular, la región $\tau_2 = \text{Im} \tau \rightarrow 0$ ($T \rightarrow 0$),
que en el caso de partículas da lugar a
divergencias ultravioleta ($|k^\mu| \rightarrow \infty$),

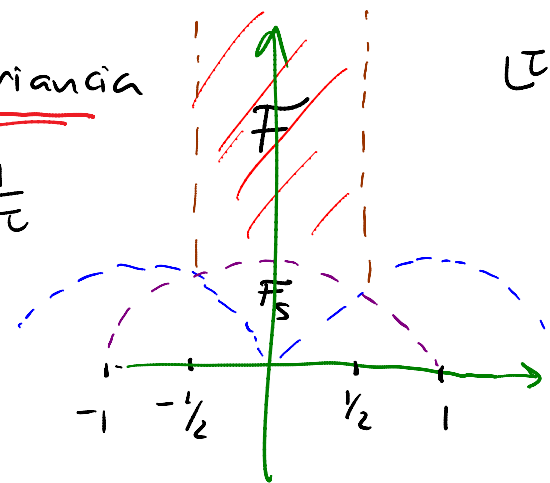


¡está ausente en la amplitud de cuerdas!!

La razón, como vimos, es la invariancia modular. Usando $S: \tau \rightarrow \tilde{\tau} = -\frac{1}{\tau}$

(que corresponde al difeo grande

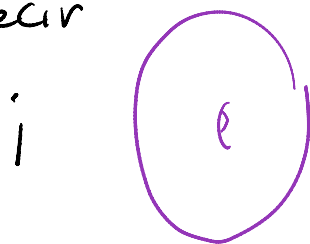
$(\sigma_1, \sigma_2) \leftrightarrow (\sigma_2, -\sigma_1)$) tenemos



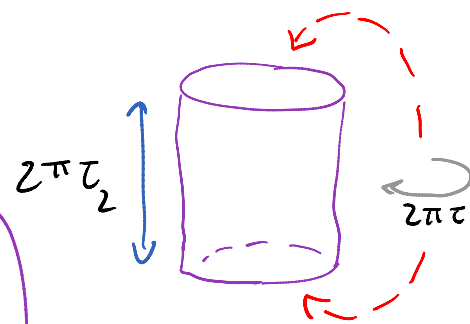
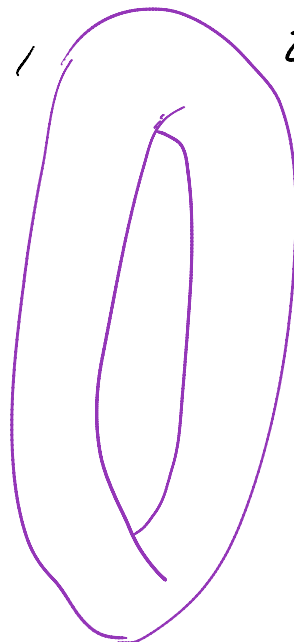
que, p.ej., $\tau = i\tau_2 \rightarrow 0$ es equivalente

a $\tilde{\tau} = -\frac{1}{i\tau_2} = i\tilde{\tau}_2 \rightarrow \infty$,

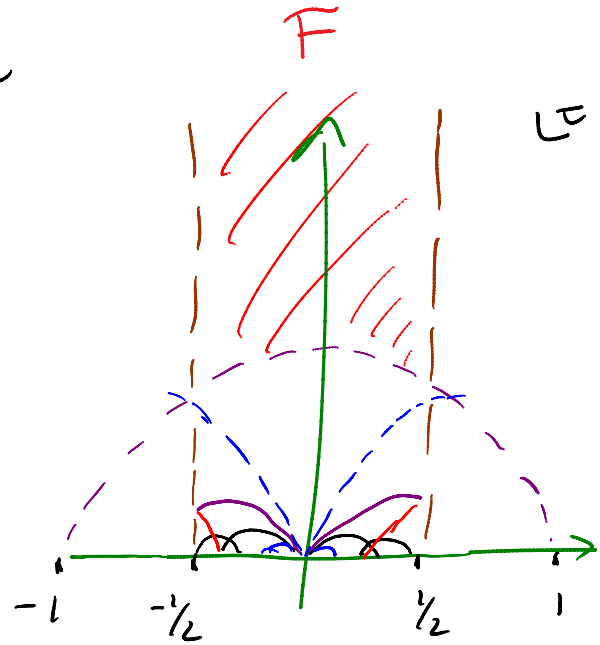
es decir



\approx



La región de integración R que es relevante para el caso de partículas de hecho contiene un número infinito de copias de la región F que cuerdas incorpora.



Vemos entonces que la estructura de la teoría de cuerdas impone automáticamente un corte UV (cota inferior para $\tau_2 \sim$ cota superior para $|k^w|$), invariante de Lorentz, de manera autoconsistente (lo cual no es trivial, dado que existen campos de norma).

El comportamiento en el límite opuesto, IR, $\tau_2 \rightarrow \infty$ ($\leftrightarrow T \rightarrow \infty \leftrightarrow |k^w| \rightarrow 0$), está dominado por los estados con masas más bajas, justamente como en el caso de partículas:

$$M_{T^2}^0 = \int_{\mathcal{F}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{2\tau_2} (4\pi\alpha'\tau_2)^{-13} \sum_{|E\rangle \in \mathcal{H}_1} \left(e^{-2\pi\tau_2 + 2\pi i\tau_1} \right)^{h_E - 1} \left(e^{-2\pi\tau_2 - 2\pi i\tau_1} \right)^{\tilde{h}_E - 1}$$

$$> \int \frac{d\tau_2}{2\tau_2} (4\pi\alpha'\tau_2)^{-13} \left[1 \cdot e^{4\pi\tau_2} + 24^2 e^0 + \mathcal{O}(e^{-4\pi\tau_2}) \right]$$

$h_E = \tilde{h}_E = 0$: taquión

$h_E = \tilde{h}_E = 1$: gravitón/dilatón/antisimetría

\Rightarrow divergencia IR

convergente

En una teoría donde el vacío sea estable no habrá taquión, y $M_{T^2}^0$ será una cantidad finita, que representa

la densidad de energía del vacío ρ_0 (\leftrightarrow constante cosmológica Λ) a un lazo:

$$e^{-\rho_0 V_D} = \langle 0 | e^{-\hat{H}T} | 0 \rangle,$$

\uparrow Hamiltoniano en segunda cuantización

que para una partícula con masa m se puede escribir en términos de la integral funcional sobre el campo $\varphi(x)$ correspondiente:

$$\langle 0 | e^{-\hat{H}T} | 0 \rangle = \int D\varphi e^{-\int d^D x \varphi (-\partial^2 + m^2) \varphi + \text{interacciones}}$$

de aquí vemos que

$$\rho_0 = -\ln \frac{1}{\sqrt{\text{Det}(-\partial^2 + m^2)}} + \text{interacciones}, \text{ y por tanto}$$

$$\rho_0^{(1/2)} = +\frac{1}{2} \ln [\text{Det}(-\partial^2 + m^2)] = \frac{1}{2} \text{Tr} [\ln(-\partial^2 + m^2)]$$

(signo sería - si la partícula fuera fermión)

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \ln(k^2 + m^2) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dT}{T} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-\frac{T}{2}(k^2 + m^2)}$$

$$= M_{S'}^0(m^2) \quad \left(= \int \frac{d^{D-1} k}{(2\pi)^{D-1}} \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + m^2} \right)$$

Energía de punto cero de osciladores armónicos

O, más fácil, en términos de diagramas:

$$e^{-\rho_0^{(1)} V_D} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{\bigcirc \bigcirc \dots \bigcirc}_n \Rightarrow \rho_0^{(1)} = \frac{1}{V_D} \bigcirc = M_{S'}^0(m^2)$$

Así que en cuerdas tenemos energía del vacío

$\rho_0^{(1)} = M_{T^2}^0$, que en ausencia del tapujón sería finito

y $\sim l_c^{-D}$, por análisis dimensional.

(= 0 si el espectro fuera supersimétrico, porque la contribución de cada bosón sería cancelada por su superpareja fermiónica;

$\sim m_{\text{susy}}^D$ si supersimetría está rota a escala m_{susy} .

En la naturaleza, $0 < \Lambda \ll m_{\text{susy}}^D \leq l_c^{-D}$. X ?)

¿Otras amplitudes a 1 lazo?

$M_{T^2}^{(n)}$ se calcula usando el propagador

$$\Delta^{-1}(z, z') = -\frac{\alpha'}{2} \ln \left| \theta_1 \left(\frac{z-z'}{2\pi} \mid \tau \right) \right|^2 + \alpha' \frac{[\text{Im}(z-z')]^2}{4\pi\tau_2} + \underbrace{f(\tau, \bar{z})}_{\text{no contribuye}}$$

(en coordenadas $z = \sigma + i\tau$ donde $g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}$, $g_{zz} = 0 = g_{\bar{z}\bar{z}}$)

con

$$\theta_1 \left(\frac{z}{2\pi} \mid \tau \right) \equiv i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n-1/2)^2/2} e^{i(n-1/2)z}$$

la función teta (zeta) de Jacobi,

o, lo que resulta ser equivalente,

$$\theta_1\left(\frac{z}{2\pi} \mid \tau\right) = 2q^{1/8} \operatorname{sen}\left(\frac{z}{2}\right) \prod_{m=1}^{\infty} (1-q^m)(1-e^{iz}q^m)(1-e^{-iz}q^m).$$

$\Delta^{-1}(z, z')$ obedece las condiciones de periodicidad

$z \simeq z + 2\pi$, $z \simeq z + 2\pi\tau$, y satisface la ec. de Green

$$-\frac{2}{\tau'} \partial \bar{\partial} \Delta^{-1}(z, z') = 2\pi \delta^{(2)}(z-z') - \frac{1}{4\pi\tau_2}$$

↑ carga de fondo

(↔ omisión de modo cero)

(Recordando que el orden normal :: se define a través de

$$:X^{\mu}(z, \bar{z})X^{\nu}(z', \bar{z}') : \equiv X^{\mu}(z, \bar{z})X^{\nu}(z', \bar{z}') - \left(-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln |z-z'|^2\right),$$

vemos que la autocontracción

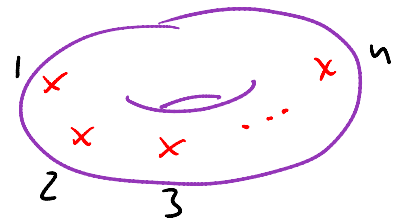
$$\left\langle :X^{\mu}(z, \bar{z})X^{\nu}(z, \bar{z}) : \right\rangle_{T^2(\tau)} = -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \lim_{z \rightarrow z'} \left[\ln \left| \theta_1\left(\frac{z-z'}{2\pi} \mid \tau\right) \right|^2 - \ln |z-z'|^2 \right]$$

$\underbrace{\theta_1(0 \mid \tau) + (z-z') \partial_z \theta_1(0 \mid \tau) + \dots}$

es finita pero distinta de cero.

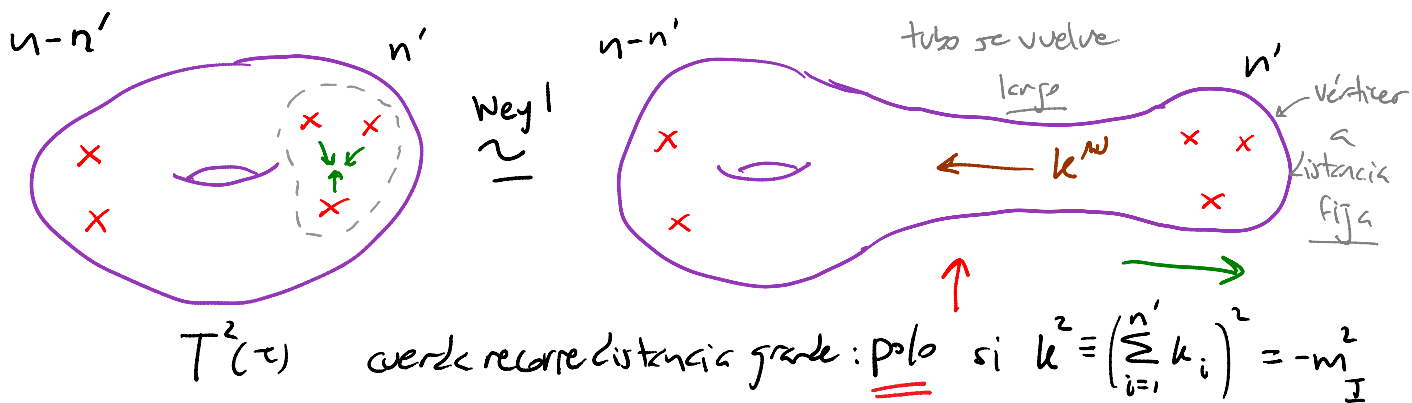
Esto permite en particular que $M_{T^2}^{(1)} \neq 0$.

Al calcular amplitudes $\mathcal{M}_{T^2}^{(n)}$, se encuentra nuevamente que las divergencias (o posibles divergencias) provienen siempre de la frontera del espacio de módulos generalizado



$$\mathcal{M}_{T^2}^{(n)} \equiv \frac{\text{toros con } n \text{ puntos marcados}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}}$$

frontera que ahora incluye no solo $\text{Im} \tau \rightarrow \infty$, sino también los límites cuando $n' \geq 2$ vértices se aproximan:

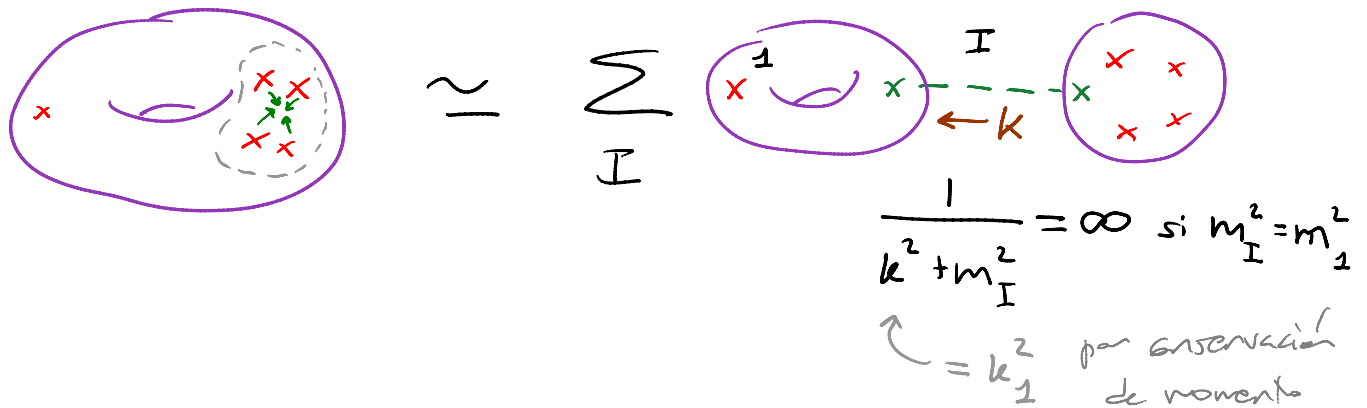


$$\sim \sum_I \mathcal{M}_{T^2}^{(n-n'+1)} \frac{1}{k^2 + m_I^2} \mathcal{M}_{S^2}^{(n'+1)}$$

(En las pp. 380-1 encontramos de manera idéntica a nivel árbol polos en $M_{S^2}^{(n=4)}$ con $n \geq 2$, que entendimos también usando la EPO.)

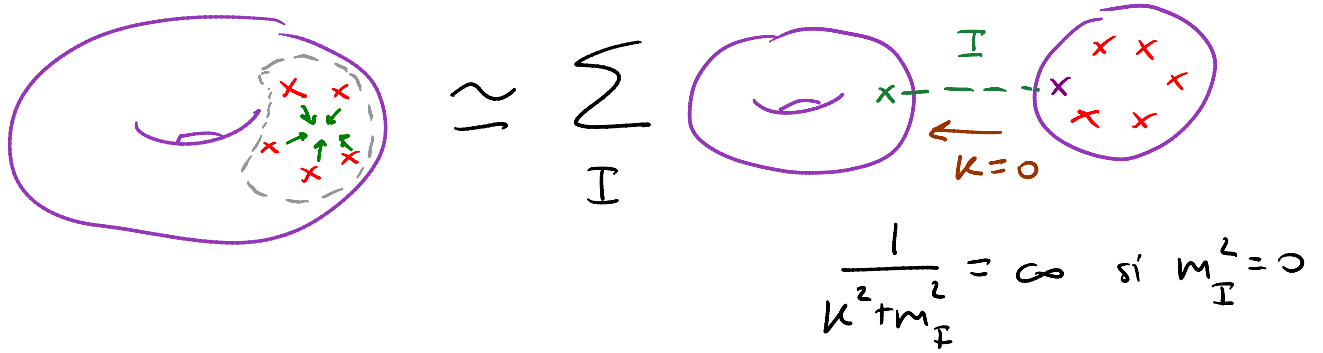
Un punto importante es que el teorema óptico se satisface solo si $D=26$: la teoría con $D < 26$ es consistente a nivel árbol, pero pierde unitariedad a 1 lazo.

El caso $n' = n - 1$ es especial:



Esta divergencia nuevamente es IR: como en una teoría de partículas/campos, $\text{loop} \neq 0$ representa una corrección a la masa libre (generalmente compleja \leftrightarrow inestable).

El caso $n'=n$ es también problemático, aunque por una razón distinta:



$\Rightarrow M_{T^2}^{(n)}$ diverge si $M_{T^2}^{(1)} = \text{genus-1 surface with puncture and disk} \neq 0$ para un

estado I no masivo, es decir, si existe un renacuajo: una cuerda emitida por el vacío (recuerdan que $M_{S^2}^{(1)} = 0$ automáticamente). Esto de hecho resulta ser el caso para el dilatón.

En la acción efectiva habría un término lineal en Φ :

$$S_{ef}[\Phi] = S_{\text{árbol}} + \int d^D x \mathcal{J} \Phi + \dots$$

(de hecho, $\frac{1}{2k^2} \int d^D x \sqrt{-G_E} e^{\frac{4D}{D-2} \Phi} \wedge$)

Pero entonces $\bar{\Phi} = 0$ no es una solución de la ecuación de movimiento $\partial^2 \bar{\Phi} = J$.

Si desarrollamos alrededor de una verdadera

solución $\Phi_{sol}(x)$, $\Phi(x) = \Phi_{sol}(x) + \varphi(x)$,

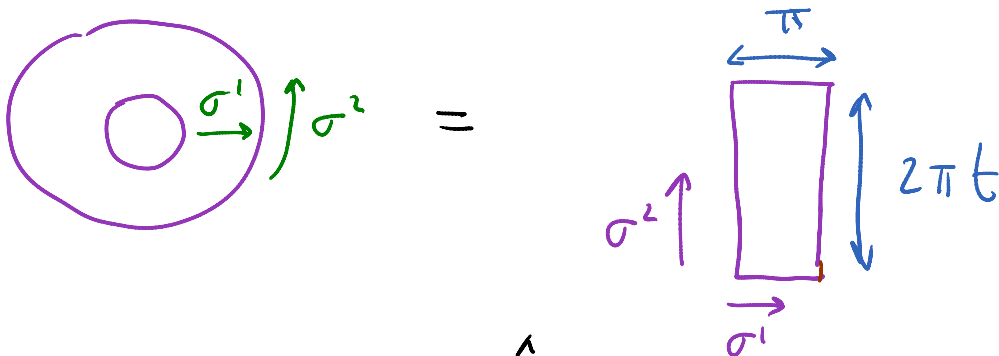
eliminamos el renacuajo, y por tanto la condensado de dilatación divergencia.

En resumen, en este caso

Divergencia IR \leftrightarrow Renacuajo de campo sin masa \leftrightarrow Corrección al fondo.

Ideas similares operan en otros diagramas.

P.ej., para el anillo (lazo de cuerda abierta):



$$\eta_{c^2}^{(1,0)} = \int_0^\infty \frac{dt}{2t} \text{Tr}_{\mathcal{H}_\perp} \left[e^{-2\pi t \hat{L}_0} \right] = \int_0^\infty \frac{dt}{2t} (8\pi^2 \alpha' t)^{-D/2} \eta(it)^{-(D-2)}$$