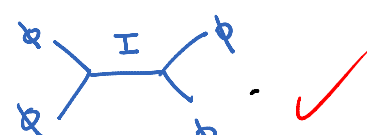


De hecho, $\forall s, t, u < -4$ tenemos (ver GSW p.387)

$$\int d^2z |z|^{-\frac{s}{2}-4} |1-z|^{-\frac{t}{2}-4} = 2\pi \frac{\Gamma(-\frac{s}{4}-1) \Gamma(-\frac{t}{4}-1) \Gamma(-\frac{u}{4}-1)}{\Gamma(-\frac{s}{4}-\frac{t}{4}-2) \Gamma(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2) \Gamma(-\frac{u}{4}-\frac{s}{4}-2)}$$

función gamma de Euler \rightarrow

El lado derecho está bien definido fuera de la región $s, t, u < -4$, y contiene solo polos simples en

$$\left. \begin{aligned} s &= -4, 0, 4, 8, \dots \\ t &= -4, 0, 4, 8, \dots \\ u &= -4, 0, 4, 8, \dots \end{aligned} \right\} \leftrightarrow \text{espectro de cuerda cerrada libre, tal como esperamos a nivel árbol}$$


Esta es entonces la amplitud física. El origen de los polos se puede entender usando la EPO:

$$\mathcal{M}^{\phi\phi\phi\phi} \propto \int d^2z_4 \left\langle :e^{ik_1 \cdot X(\infty)} : : e^{ik_2 \cdot X(1)} : : e^{ik_3 \cdot X(0)} : : e^{ik_4 \cdot X(z_4)} : \right\rangle_X$$

$$\underbrace{\left\langle :e^{ik_3 \cdot X(0)} : : e^{ik_4 \cdot X(z_4)} : \right\rangle_X}_{|z_4=0| \sim |k_3 \cdot k_4| : e^{ik_3 \cdot X(0)} e^{ik_4 \cdot X(z_4)} :}$$

$$: e^{i(k_3+k_4) \cdot X(0)} : + \frac{1}{2} |z_4|^2 (-k_{4\nu} k_{3\nu}) : \partial X^\mu \partial X^\nu e^{i(k_3+k_4) \cdot X(0)} : + \dots$$

\downarrow polo en $s = -4$: taquión (como ya vimos) \downarrow polo en $s = 0$: gravitón/dilatón

$$\Gamma\left(-\frac{s}{4}-1\right) \rightarrow \frac{4}{\alpha'} \frac{1}{(k_1+k_2)^2 - \frac{4}{\alpha'}} \quad \text{y} \quad \Gamma\left(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2\right) \rightarrow 1,$$

de modo que el requisito es que

$$(g_c N)^4 e^{-2\Phi_0} < 1 \quad \frac{8\pi}{\alpha'} = \left[(g_c N)^3 e^{-2\Phi_0} < 1 \right]^2$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{-2\Phi_0} < 1 \Big|_{s^2}^{x, b, \tilde{b}, \tilde{c}} = \frac{8\pi}{\alpha' (g_c N)^2} .}$$

Usando esto, concluimos finalmente que

$$\boxed{\mathcal{M}_{s^2}^{\phi\phi\phi}(k_1, k_2, k_3) = \frac{8\pi g_c N}{\alpha'} \quad \text{y}}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_{s^2}^{\phi\phi\phi\phi}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{16\pi^2 (g_c N)^2}{\alpha'} \frac{\Gamma\left(-\frac{s}{4}-1\right)\Gamma\left(-\frac{t}{4}-1\right)\Gamma\left(-\frac{u}{4}-1\right)}{\Gamma\left(-\frac{s}{4}-\frac{t}{4}-2\right)\Gamma\left(-\frac{t}{4}-\frac{u}{4}-2\right)\Gamma\left(-\frac{s}{4}-\frac{u}{4}-2\right)}$$

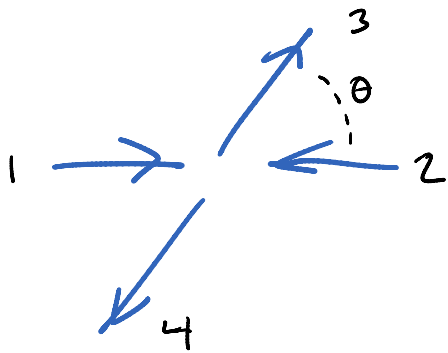
Esta última se conoce como la amplitud de Shapiro-Virasoro

El resultado análogo para cuerdas abiertas es la amplitud

de Veneziano $\mathcal{M}_{D^2}^{\phi\phi\phi\phi} \sim \frac{\Gamma(-1-s)\Gamma(-1-t)}{\Gamma(-2-s-t)}$, que históricamente

condujo al descubrimiento de la teoría de cuerdas.

En el marco del centro de masa,



$$S = \alpha' E^2,$$

$$\frac{t}{s} = \left(\frac{4m^2}{E^2} - 1 \right) \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\frac{u}{s} = \left(\frac{4m^2}{E^2} - 1 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad \left(m^2 = -\frac{4}{\alpha'} \right).$$

En un experimento de dispersión dura, $E \rightarrow \infty$ con θ fijo, es decir, $s \rightarrow \infty$ con $\frac{t}{s}$ (y $\therefore \frac{u}{s}$) fijo, usando la

fórmula de Stirling $\Gamma(x) \sim x^x \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-x} = \sqrt{2\pi} e^{\uparrow x \ln x - x - \frac{1}{2} \ln x}$,

encontramos que la amplitud se comporta como

$$M_{\phi\phi\phi\phi}(s, t) \sim e^{-sf(\theta)} \quad f(\theta) \approx -\sin^2 \frac{\theta}{2} \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \ln \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

muy suprimida con respecto al resultado en teoría de campos (\leftrightarrow objetos puntuales), $M(s \rightarrow \infty, t \ll s) \sim s^{-p}$.

Históricamente, también tiene importancia el límite de Regge

$$M_{\phi\phi\phi\phi}(s \rightarrow \infty, t \text{ fijo}) \sim s^{2\alpha(t)} \frac{\Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(1+\alpha(t))} \quad \alpha(t) \equiv \frac{t}{4} + 1.$$

$E \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0$

Otras amplitudes tienen una estructura similar.

P.ej., usando el vértice del gravitón (dilatón/antisimétrico)

$$V_h(\epsilon; k) = g_c N \left(\frac{2}{\alpha'}\right) \int d^2z \epsilon_{\mu\nu} : \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ik \cdot X} :$$

podemos calcular \leftarrow por mapeo estado \leftrightarrow operador
misma cte. que en V_h

$$M_{S^2}^{h\phi\phi}(k_1, \epsilon; k_2, k_3) = \left(g_c N \frac{2}{\alpha'}\right) \left(g_c N\right)^2 e^{-2\Phi_0} |\check{z}_1 - \check{z}_2|^2 |\check{z}_1 - \check{z}_3|^2 |\check{z}_2 - \check{z}_3|^2$$

$$\epsilon_{\mu\nu} \left\langle : \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu e^{ik_1 X(\check{z}_1)} : : e^{ik_2 X(\check{z}_2)} : : e^{ik_3 X(\check{z}_3)} : \right\rangle_{S^2}$$

factores adicionales de momento $(y \frac{1}{\check{z}_i})$

$$M_{S^2}^{h\phi\phi}(k_1, \epsilon; k_2, k_3) = -\pi g_c N \epsilon_{\mu\nu} (k_2 - k_3)^\mu (k_2 - k_3)^\nu$$

(Se puede verificar que esto satisface la condición de unitariedad)

$$2\text{Im} \left(\text{Diagram 1} \right) = \left(\text{Diagram 2} \right) 2\pi \delta(k_h^2) \left(\text{Diagram 3} \right)$$

De manera similar (tarea 5)

$$M_{S^2}^{hhh}(k_1, \epsilon_1; k_2, \epsilon_2; k_3, \epsilon_3) = \pi g_c N \epsilon_{1\mu\nu} \epsilon_{2\nu\rho} \epsilon_{3\rho\sigma} t^{\mu\nu\rho} t^{\sigma\nu\rho'}$$

con $t^{\mu\nu\rho} \equiv (k_2 - k_3)^\mu \eta^{\nu\rho} + (k_3 - k_1)^\nu \eta^{\rho\mu} + (k_1 - k_2)^\rho \eta^{\mu\nu} + \frac{\alpha'}{8} (k_2 - k_3)^\mu (k_3 - k_1)^\nu (k_1 - k_2)^\rho$

Notar que

$$\mathcal{M}^{hhh} \sim g_c \mathcal{N} \left[\underset{\uparrow}{k^2} + \underbrace{\alpha' k^4 + \alpha'^2 k^6}_{\text{despreciables a bajas energías,}} \right]$$

término de 2 derivadas
en acción espaciotemporal
para $h_{\mu\nu}(x)$

despreciables a bajas energías,
 $|k| \ll m_c \equiv l_c^{-1}$

En más detalle, las amplitudes $\phi\phi\phi$, $h\phi\phi$ y hhh que hemos calculado coinciden con las que se obtendrían con las reglas de Feynman habituales a partir de la acción efectiva en el espaciotiempo

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}}[\phi, h] = \int d^26 x \left\{ & -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{\alpha'} \right) \phi^2 - \frac{1}{2} \partial_\mu h_{\nu\lambda} \partial^\mu h^{\nu\lambda} \right. \\ & - \frac{1}{3!} \left(\frac{8\pi}{\alpha'} g_c \mathcal{N} \right) \phi^3 + 2\pi g_c \mathcal{N} h^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \\ & - 4\pi g_c \mathcal{N} \left[-\frac{1}{2} \partial^\mu h^{\nu\lambda} \partial^\rho h_{\nu\lambda} h_{\mu\rho} \right. \\ & \quad + \partial^\mu h^{\nu\lambda} \partial_\nu h_{\lambda\rho} h_{\mu\rho} \\ & \quad \left. \left. - \partial^\mu h^{\nu\lambda} \partial_\mu h_{\nu\rho} h_{\lambda\rho} + \mathcal{O}(\alpha') \right] \right\} \end{aligned}$$

que de hecho coincide a su vez con lo que se obtiene al desarrollar a orden cúbico la acción

$$S_{\text{ef}}[\phi, g] = \int d^{26}x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{\alpha'}\right) \phi^2 - \frac{2K}{3\alpha'} \phi^3 - \frac{1}{2K^2} R + \mathcal{O}(\alpha') \right\},$$

↙ !! Einstein-Hilbert !!

donde $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + 2K h_{\mu\nu}(x)$ campo canónicamente normalizado y estamos trabajando en la norma $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$, $h^\lambda{}_\lambda = 0$.

↖ correcciones a $|k| \gtrsim 1/l_c$

Además hemos reconocido a $K \equiv 2\pi g_c N$

como la constante gravitacional usual, $2K^2 \equiv 16\pi G_N$.
Notando que $[K^2] = L^{D-2}$ ($\stackrel{D=26}{\Rightarrow} l_p \sim g_c^{1/12} l_c$),

definimos N tal que $2K^2 = (2\pi)^{23} g_c^2 l_c^{24}$

Para obtener gravedad en 3+1 dim, podemos suponer que las 22 dimensiones adicionales son compactas y pequeñas:

$$\frac{1}{2K_{(26)}^2} \int d^{26}x \sqrt{-g} R = \frac{V_{22}}{2K_{(26)}^2} \int d^4x \underbrace{\sqrt{-g^{(4)}}}_{\text{modo de KK constante}} R^{(4)} + \dots \quad \Rightarrow \quad K_{(4)}^2 \equiv \frac{K_{(26)}^2}{V_{22}}.$$

Los términos de $\mathcal{O}(\alpha' k^4)$ y $\mathcal{O}(\alpha'^2 k^6)$ en \mathcal{M}^{hh} codifican correcciones específicas a la relatividad general, del tipo $\sim \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}x \sqrt{-g} (\alpha' R^2 + \alpha'^2 R^3)$.

↖ en diversas contracciones de índices

Al calcular amplitudes con $N \geq 4$ gravitones, se reproducen uno por uno los términos de $\mathcal{O}(h^N)$ en $\frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}x \sqrt{-g} R$,

más correcciones adicionales del tipo $\frac{1}{2\kappa^2} \int d^{26}x \sqrt{-g} \alpha'^{N-1} R^N$

Todas estas correcciones son despreciables a bajas energías y curvaturas. !! Así que en verdad cuerdas \Rightarrow relatividad general !!

De manera similar, es posible calcular los acoplamientos $h\varphi\varphi$, hBB , $\varphi\varphi\varphi$, etc. La acción que resume las interacciones de los campos no masivos entre sí resulta ser

$$S_{\text{ef}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^D x \sqrt{-g_E} \left\{ R_E - \frac{4}{D-2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{12} e^{-\Phi/(D-2)} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$

↖ lo para la supercuerda

(con $D=26$), donde $H_{\mu\nu\rho} \equiv \partial_\mu B_{\nu\rho} - \partial_\nu B_{\mu\rho} - \partial_\rho B_{\mu\nu}$ y el subíndice E resulta que estamos usando la métrica en el "marco de Einstein" $g_{\mu\nu}^E(x)$, es decir, aquella con acción $\int d^D x \sqrt{-g_E} R_E$.

La métrica $g_{\mu\nu}(x)$ que la cuerda siente directamente, a

través de la acción $S_p[X] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z g_{\mu\nu}(x) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu$, se relaciona con $g_{\mu\nu}^E(x)$ a través de una transformación de Weyl en el espaciotiempo (redefinición de campo, no simetría):

$$g_{\mu\nu}(x) = e^{4\Phi(x)/D-2} g_{\mu\nu}^E(x), \text{ y usándolo se tiene}$$

$$S_{\text{ef}} = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^Dx \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left\{ R + 4(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} + \mathcal{O}(\alpha') \right\}.$$

Como veremos más adelante, el hecho de que en este "marco de cuerdas" el dilatón aparece a través del factor $e^{-2\Phi}$ en todos los términos está estrechamente relacionado con el factor $e^{-2\Phi_0}$ en las amplitudes a nivel árbol ($\chi=2$): Φ_0 es el valor de fondo del campo $\Phi(x)$...

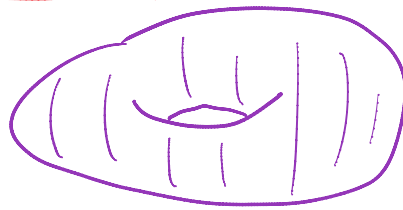
Calculando amplitudes de dispersión para la cuerda abierta (con posibles factores de Chan-Paton) se obtiene para el campo de norma la acción de Maxwell (o Yang-Mills)

$$S_{\text{ef}}^a = -\frac{1}{4g_{\text{YM}}^2} \int d^Dx \sqrt{-g} e^{-\Phi} \left\{ \text{Tr} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] + \mathcal{O}(\alpha') \right\}$$

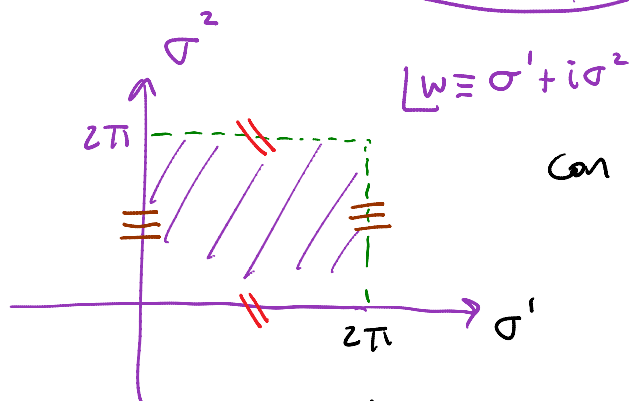
$g_{\text{YM}}^2 \leftarrow 2\alpha' g_c N^2 \leftarrow \chi=1 \leftarrow \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$

Amplitudes a un lazo

El toro T^2



puede parametrizarse como



con $w \simeq w + 2\pi$, $w \simeq w + 2\pi i$

(\leftrightarrow funciones de transición).

Nuestros campos $X^{\mu}(\sigma)$ y $g_{ab}(\sigma)$ deben ser periódicos.

¿Módulos? $\delta g_{\bar{w}w}$ periódica tal que $\partial_{\bar{w}} \delta g_{w\bar{w}} = 0$

$$\Rightarrow \delta g_{w\bar{w}} = \epsilon \text{ constante} \therefore \boxed{M=2}$$

De hecho, notando que bajo una transformación de Weyl

$$g_{ab}(\sigma) \text{ arbitraria} \rightarrow \check{g}_{ab}(\sigma) = e^{w(\sigma)} g_{ab}(\sigma)$$

tenemos $\sqrt{\check{g}} \check{R} = \sqrt{g} (R - \nabla^2 w)$, vemos que podemos elegir

$w(\sigma)$ para obtener globalmente una métrica plana

$$\check{g}_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 + \tau_2^2 \end{pmatrix} \leftrightarrow ds^2 = |d\sigma' + \tau d\sigma^2|^2$$

$\tau \equiv \tau_1 + i\tau_2$

(Notar que $\check{R} = 0$ es consistente con $\chi = \frac{1}{4\pi} \int d\sigma^2 \sqrt{\check{g}} \check{R} = 0$.)

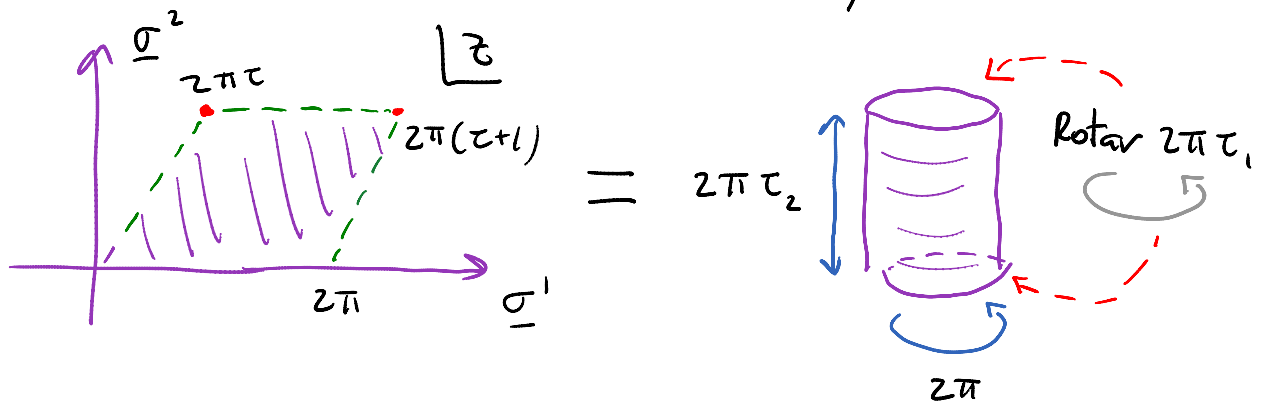
Con esta métrica, el toro tiene área $\int \sqrt{g} = 4\pi^2 \tau_2$.

El caso $\tau = i$ corresponde a $\check{g}_{ab} = \delta_{ab}$ ($\Leftrightarrow \check{g}_{\bar{w}\bar{w}} = \frac{1}{2}$).

Definiendo $z \equiv \sigma^1 + \tau \sigma^2$ (es decir, $z \equiv \underline{\sigma}^1 + i \underline{\sigma}^2$, con $\underline{\sigma}^1 = \sigma^1 + \tau_1 \sigma^2$ y $\underline{\sigma}^2 = \tau_2 \sigma^2$), tenemos la métrica estándar

$$ds^2 = dz d\bar{z} \quad (\Leftrightarrow \check{g}_{z\bar{z}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \check{g}_{\underline{a}\underline{b}} = \delta_{\underline{a}\underline{b}}), \text{ PERO la}$$

periodicidad sería entonces $z \simeq z + 2\pi$, $z \simeq z + 2\pi \tau$:



(Esto es análogo a la partícula: $g_{\tau\tau} = \sqrt{T}$, $\tau \in [0, 1]$

vs. $g_{\underline{\tau}\underline{\tau}} = 1$, $\underline{\tau} = \tau T \in [0, T]$.)

Claramente podemos restringir atención a $\tau_2 = \text{Im} \tau \geq 0$

($\tau_2 \rightarrow -\tau_2$ es el mismo toro, visto de cabeza).

Además, podemos notar que τ , $\tau+1$ y $-\frac{1}{\tau}$ describen toros equivalentes bajo $\text{Diff} \times \text{Weyl}$:

$$T: \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^1 \\ \tilde{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^1 - \sigma^2 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \Rightarrow ds^2 = \underbrace{|\underbrace{d\tilde{\sigma}^1 + (\tau+1)d\tilde{\sigma}^2}_{\equiv \tilde{\tau}}|}^2$$

$$S: \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^1 \\ \tilde{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 \\ -\sigma^1 \end{pmatrix} \Rightarrow ds^2 = \frac{1}{|\tau|^2} \underbrace{|\underbrace{d\tilde{\sigma}^1 + (-\frac{1}{\tau})d\tilde{\sigma}^2}_{\equiv \tilde{\tau}}|}^2$$

Estas 2 transformaciones generan el grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$:

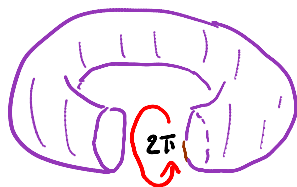
$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}^1 \\ \tilde{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \end{pmatrix} \Rightarrow ds^2 \propto |d\tilde{\sigma}^1 + \tilde{\tau} d\tilde{\sigma}^2|^2$$

con $\tilde{\tau} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ $ad - bc = 1$

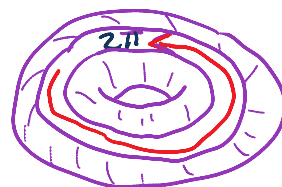
Estos son difeos del toro (respetan la periodicidad), de modo que $\tilde{\tau} \simeq \tau$. Pero notar que se trata de difeomorfismos "grandes", no conectados a la identidad.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = TST \text{ (generador alternativo)}$$

describen



y



, respectivamente,

que se conocen como "torceduras (twists) de Dehn".

El punto es entonces que, en el caso del toro, el grupo de difeo Dif No es conexo. Para S^2 (y D^2) tenemos

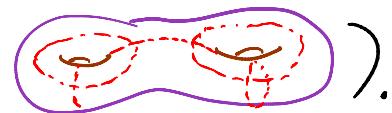
$\text{Dif} = \text{Dif}_0$, pero en general $\text{Dif}_0 \subset \text{Dif}$
 ↖ componente que contiene a la identidad

y definimos el grupo modular o grupo de clase de mapeo

$$\text{GM} \equiv \frac{\text{Dif}}{\text{Dif}_0}$$

(= $S_p(2m, \mathbb{Z})$) para género m , generados por

las torceduras de Dehn



$\int \mathcal{D}g_{ab} \propto \int \mathcal{D}\xi$ cancela solo Dif_0/GKC , de manera que

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} F[g_{ab}] = \frac{1}{\text{GKC}} \underbrace{\frac{\text{Dif}_0}{\text{Dif}}}_{\frac{1}{\text{GM}}} \int dt_1 \dots dt_m \mu(t_i) F[\check{g}_{ab}(t_i)]$$

← $\equiv \frac{\text{Métricas}}{\text{Dif}_0 \times \text{Weyl}}$

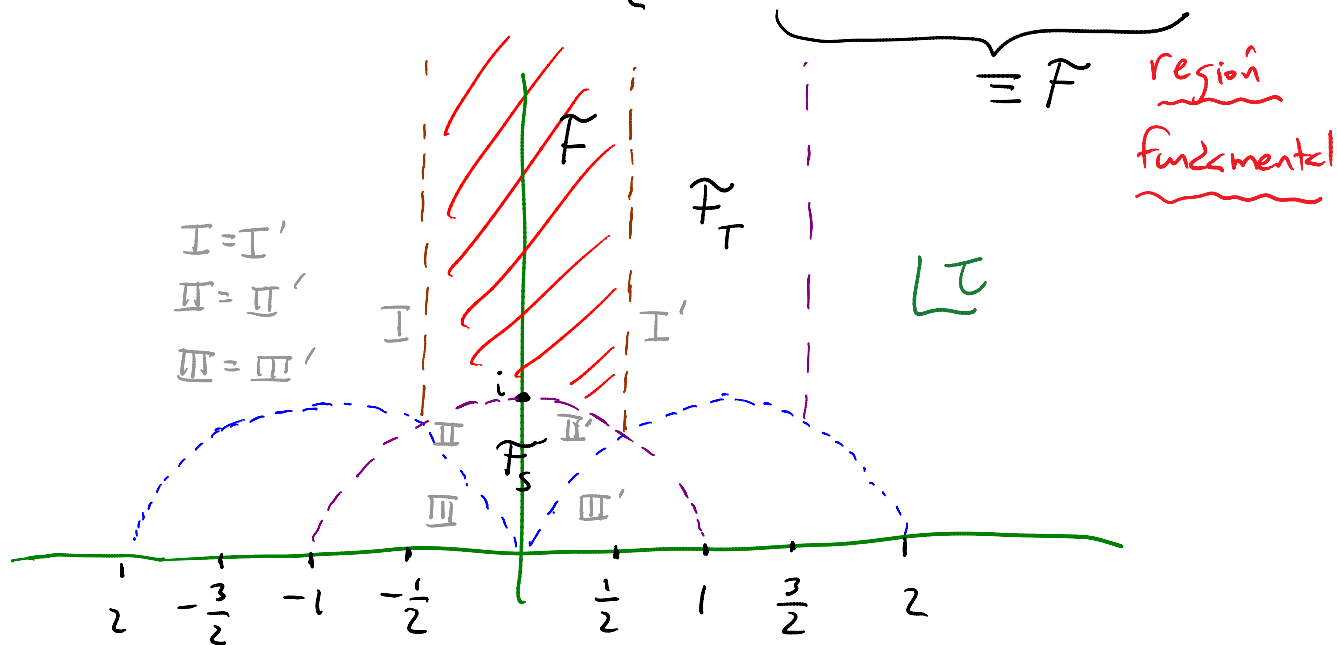
Espacio de Teichmüller



$$\int dt_1 \dots dt_m \leftarrow \equiv \frac{\mathbb{T}}{\text{GM}} \text{Espacio de Módulos.}$$

En el caso del toro, $\mathbb{T} = \{\tau \mid \text{Im } \tau > 0\}$,

y podemos tomar $M = \left\{ \tau \mid |\tau| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \text{Re } \tau \leq \frac{1}{2} \right\}$.



Tendremos entonces

$$\frac{\int Dg_{ab}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} \dots = \frac{1}{6Kc} \int_F d^2\tau \mu(\tau) \dots$$

↑ deber en inserciones de b

¿Vectores de Killing conformes? δz periódicos tales que $\frac{2}{\delta} \delta z = 0$

$$\Rightarrow \delta z = \epsilon \text{ constante} \therefore \boxed{K=2}$$

(Riemann-Roch: $K - M = 3\chi = 0$ ✓)

$G_K c = U(1) \times U(1)$ (traslaciones en $\underline{\sigma}^1, \underline{\sigma}^2$) es compacto.

Como ahora $\frac{1}{G_{KC}} \neq 0$, incluso la amplitud de cero puntos
(\leftrightarrow energía del vacío) puede ser no nula (\leftrightarrow corrección
cuántica esperada a 1 loop), así que calculemos

$$M_{T^2}^{(0)} \equiv \frac{e^{-0 \cdot \Phi_0}}{G_{KC}} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}} d\tau_1 d\tau_2 \left\langle \prod_{i=1}^2 \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{D}^2} d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} \frac{\partial g_{bc}}{\partial \tau_i} g^{cd} b_{da} \right) \right\rangle_{T^2(\tau)}$$

$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix} \right) \in GM,$

por difeo grande aquí y en lo sucesivo,
 que no cambia τ tomamos $g_{ab} = g_{ab}^V(\tau)$

$\left(\text{análogo a } \right)$

Veamos cada parte por separado.

$$\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)}^X \equiv \int \mathcal{D}_g X^m e^{-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}^2} d^2\sigma \sqrt{g} X \cdot \Delta_\sigma X}$$

[15: 14/05/13]

$\Delta_\sigma \equiv -\frac{1}{2\pi\alpha'} g^{ab} \partial_a \partial_b$

La medida se define (como vimos en detalle en el caso de la partícula, pp. 99-100) a partir de la norma

$$\|\delta X\|^2 = \int_{\mathcal{D}^2} d^2\sigma \sqrt{g} \delta X \cdot \delta X \quad (\text{invariante bajo difeos}).$$

Elegimos normalizar la integral funcional de tal forma que

$$\int \mathcal{D}_g(\delta X^m) e^{-\frac{1}{2} \|\delta X\|^2} = 1.$$

Desarrollando $X^{\sim}(\sigma) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^2} x_{\vec{n}}^{\sim} \varphi_{\vec{n}}(\sigma)$,

donde $\varphi_{\vec{n}}(\sigma) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_2}} e^{i\vec{n} \cdot \sigma}$ son un conjunto

completo de autofunciones (periódicas) de Δ_{σ} ,

$$\Delta_{\sigma} \varphi_{\vec{n}}(\sigma) = \lambda_{\vec{n}} \varphi_{\vec{n}}(\sigma) \quad \text{con} \quad \lambda_{\vec{n}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} g^{ab} n_a n_b = \frac{(n_2 - n_1 \tau)(n_2 - n_1 \bar{\tau})}{2\pi\alpha' \tau_2},$$

que satisfacen la condición de ortogonalidad

$$(\varphi_{\vec{n}}, \varphi_{\vec{n}'}) \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g} \varphi_{\vec{n}} \varphi_{\vec{n}'} = \delta_{\vec{n}, \vec{n}'},$$

tendremos $\|\delta X\|^2 = \sum_{\vec{n}} \delta x_{\vec{n}} \cdot \delta x_{\vec{n}}$, de modo que

$$\mathcal{D}_g X^{\sim} \equiv \prod_{\vec{n}, \mu} \frac{dx_{\vec{n}}^{\mu}}{\sqrt{2\pi}}$$

Tendremos entonces

$$\langle 1 \rangle_{T^2(\tau)}^X = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^D} \int \prod_{\vec{n}} dx_{\vec{n}} \prod_{\vec{n} \neq 0} \left[\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^D} \int \prod_{\vec{n}} dx_{\vec{n}} e^{-\frac{1}{2} \lambda_{\vec{n}} (x_{\vec{n}})^2} \right]^{-D/2}$$

$$X^{\sim}(\sigma) = X^{\sim} + \underline{X^{\sim}}(\sigma) \rightarrow V_D = (2\pi)^D \delta^{(D)}(0) \left[\prod_{\vec{n} \neq 0} \frac{1}{2\pi\alpha' \tau_2} (n_2 - n_1 \tau)(n_2 - n_1 \bar{\tau}) \right]^{-D/2}$$

$$\prod_{\vec{n} \neq 0} \lambda_{\vec{n}} \equiv \underline{\det \Delta_{\sigma}}$$

Con "regularización por función zeta" (que usamos en la p. 211 para la partícula, $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \Big|_{s=0} \equiv \zeta(s) \Big|_{s=0} = -\frac{1}{2}$)

[ver Polchinski, Commun. Math. Phys. 104, 37-47 (1986), apéndice A], se obtiene (como verificaremos más adelante)
 $\underline{\det \Delta_{\sigma}} \sim \tau_2^2 |\eta(\tau)|^4$, donde

$$\eta(\tau) \equiv q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n) \quad \text{con } q \equiv e^{2\pi i \tau}$$

es la función eta de Dedekind (holomorfa $\forall \tau_2 \geq 0$).

Para la integral sobre fantasmas, necesitamos primero calcular las inserciones. Usando

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial \tau_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g_{ab}}{\partial \tau_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\tau_1 \end{pmatrix} \quad \text{tenemos}$$

$$M_1^{ad} \equiv g^{ab} \frac{\partial g_{bc}}{\partial \tau_1} g^{cd} = \frac{1}{\tau_2} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\tau_2^2} \begin{pmatrix} -2\tau_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2^{ad} \equiv g^{ab} \frac{\partial g_{bc}}{\partial \tau_2} g^{cd} = \frac{1}{\tau_2} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1^2 + \tau_2^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\tau_2} = \frac{2}{\tau_2^3} \begin{pmatrix} \tau_1^2 & -\tau_1 \\ -\tau_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollando $b_{ab}(\sigma) = \sum_{\mathbf{I}} b_{\mathbf{I}} B_{ab}^{\mathbf{I}}(\sigma)$

\nwarrow números anti conmutativos
 \nearrow tensor (commutativo)
 \nearrow simétrico, sin traza

con $(B^{\mathbf{I}}, B^{\mathbf{J}}) \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g} g^{ab} g^{cd} B_{ac}^{\mathbf{I}} B_{bd}^{\mathbf{J}} = \delta^{\mathbf{I}\mathbf{J}}$

tenemos $\mathcal{D}b_{ab}(\sigma) \equiv \prod_{\mathbf{I}} db_{\mathbf{I}}$

Nos interesan los ($M=2$) modos cero ortogonales.

Fácil en coordenadas $\begin{cases} \underline{\sigma}^1 = \sigma^1 + \tau_1 \sigma^2 \\ \underline{\sigma}^2 = \tau_2 \sigma^2 \end{cases}$, donde $g_{\underline{a}\underline{b}} = \delta_{\underline{a}\underline{b}}$:

$$B_{\underline{a}\underline{b}}^{0,1} \equiv \frac{1}{2\pi\sqrt{2\tau_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_{\underline{a}\underline{b}}^{0,2} \equiv \frac{1}{2\pi\sqrt{2\tau_2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformando de vuelta a las coordenadas σ^1, σ^2 , esto es

$$B_{ab}^{0,1} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\tau_2}} \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 \\ \tau_1 & \tau_1^2 - \tau_2 \end{pmatrix} \quad B_{ab}^{0,2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\tau_2}} \begin{pmatrix} 0 & \tau_2 \\ \tau_2 & 2\tau_1\tau_2 \end{pmatrix}$$

La contribución de modos cero es $\left\langle \prod_{i=1}^2 \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} M_i^{ad} b_{da}^{(\sigma)} \right\rangle_{T^2(\tau)}$

es entonces

$$\left(\frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{g} \right)^2 \int db_{0,1} db_{0,2} \left[M_1^{ad} (b_{0,1} B_{da}^{0,1} + b_{0,2} B_{da}^{0,2}) M_2^{bc} (b_{0,1} B_{cb}^{0,1} + b_{0,2} B_{cb}^{0,2}) \right]$$

$$\sim \tau_2^2 (M_1^{ad} B_{da}^{0,2}) (M_2^{bc} B_{cb}^{0,1}) \sim \tau_2^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_2} \tau_2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_2} \tau_2} \right) = \frac{1}{\tau_2}$$

Falta ahora determinar la contribución de los modos no constantes, $\langle 1 \rangle_{T^2(\sigma)}^{\underline{b}, \underline{c}} \equiv \int \mathcal{D}b_{-a}^{\underline{b}}(\sigma) \mathcal{D}c^{\underline{a}}(\sigma) e^{-S_f[b, c]}$

Recordar (pp. 367, 366) que

$$S_f = \frac{1}{2\pi} (b, P_1 c) \equiv \frac{1}{2\pi} (P_1^\dagger b, c)$$

donde $(P_1 c)_{ab} \equiv \nabla_a c_b + \nabla_b c_a - g_{ab} \nabla_c c^c = (g_{bc} \nabla_a + g_{ac} \nabla_b - g_{ab} \nabla_c) c^c$

($(P_1 c)^{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\partial} c^{\bar{z}\bar{z}}$ en norma conforme), $(,)$ denota

el producto interno invariante bajo difeos, y

$(P_1^\dagger)^{dab} = -g^{da} \nabla^b - g^{db} \nabla^a + g^{ab} \nabla^d$ es el operador adjunto a

P_1 ($(P_1^\dagger b)^{\bar{z}\bar{z}} = \bar{\partial} b_{\bar{z}\bar{z}}$ en norma conforme).

Elegimos $B_{ab}^{\bar{I}}(\sigma)$ tales que $P_1 P_1^\dagger B_{ab}^{\bar{I}} = \lambda_{\bar{I}}^2 B_{ab}^{\bar{I}}$.
mapes tensores a tensores ↗

Desarrollamos de manera similar $c^{\underline{a}}(\sigma) = \sum_J c^J C_J^{\underline{a}}(\sigma)$,

con $(C_{\bar{I}}, C_{\bar{J}}) = \delta_{\bar{I}\bar{J}}$ y $P_1^\dagger P_1 C_J^{\underline{a}} = \lambda_J^2 C_J^{\underline{a}}$.
mapes vectores a vectores ↗

Notando que

$$(P_I P_I^\dagger)(P_I C_J) = P_I (P_I^\dagger P_I C_J) = \lambda_J'^2 (P_I C_J) \quad y$$

$$(P_I^\dagger P_I)(P_I^\dagger B^I) = P_I^\dagger (P_I P_I^\dagger B^I) = \lambda_I^2 (P_I^\dagger B^I),$$

veamos que para $\lambda_I, \lambda_J' \neq 0$, existe una relación biunívoca entre los 2 conjuntos de autofunciones:

$$B_{ab}^I = \frac{1}{\lambda_I} (P_I C_I) \quad \lambda_I = \lambda_I' \neq 0,$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} \langle 1 \rangle_{T(z)}^{b,c} &\sim \prod_{I \neq 0} \left\{ \int db_I dc^I \exp \left[-\frac{1}{2\pi} \lambda_I b_I c^I \right] \right\} \\ &\sim \prod_{I \neq 0} \lambda_I = \sqrt{\det P_I^\dagger P_I} = \sqrt{\det P_I P_I^\dagger} \end{aligned}$$

Y usando $(P_I^\dagger P_I)^d_c = -2 \delta_c^d \underbrace{\nabla_a \nabla^a}_{\sim \Delta_\sigma}$

concluimos que $\sqrt{\det P_I^\dagger P_I} \sim \det \Delta_\sigma \sim \tau_2^2 |\eta(\tau)|^4$ p. 397