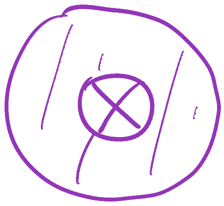
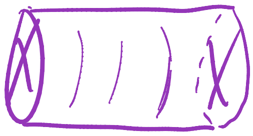
$\chi = 0$:

$T^2 \quad K=2 \Rightarrow M=2$

$C^2 \quad K=1 \Rightarrow M=1$



$M^2 \quad K=1 \Rightarrow M=1$



$K^2 \quad K=1 \Rightarrow M=1$

$\chi < 0$: $\quad K=0 \Rightarrow M = 6m+3b+3c-6$

En los casos con $\chi \leq 0$ tendremos entonces

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab}\,\mathcal{D}X^\mu}{\text{Dif}\times\text{Weyl}}\, e^{-S_p[X,g]} \cdots$$

$$= \int_{M_\mu} dt_1\cdots dt_M \;\Delta_{FP}(\check{g}(t)) \int \mathcal{D}_{\check{g}}X^\mu\, e^{-S_p[X,\check{g}]} \cdots$$

Faddeev-Popov

Estas 2 sutilezas se manifiestan de una manera específica en la descripción con fantasmas:

1) Notar que bajo $z \to z + \delta z(z, \bar{z})$, tenemos

$$\delta g_{\bar{z}\bar{z}} = 2 \check{\nabla}_{\bar{z}} \left(\check{g}_{\bar{z}z} \delta z + \check{g}_{\bar{z}\bar{z}} \delta \bar{z} \right),$$ así que

en la norma conforme $\check{g}_{ab} = e^{\omega(\sigma)} \delta_{ab} \; (\leftrightarrow \check{g}_{\bar{z}\bar{z}} = 0)$

los vectores de Killing conformes satisfacen

$$\delta g_{\bar{z}\bar{z}} = 2 \check{g}_{\bar{z}z} \check{\nabla}_{\bar{z}} \delta z = e^{\omega} \partial_{\bar{z}} \delta z = 0,$$ es decir,

son vectores analíticos definidos globalmente, y por tanto están en correspondencia uno a uno con los modos cero de $c(z)$ $\left(\text{para los cuales } S_f = \frac{1}{2\pi} \int d^2z \, b \bar{\partial} c = 0 \right)$.

(Esto es cierto en cualquier norma; el operador que reemplaza a $\bar{\partial}$ es $\check{P}_1$ tal que

$$(\check{P}_1 \delta\sigma)_{ab} \equiv \frac{1}{2} \left(\check{\nabla}_a \delta\sigma_b + \check{\nabla}_b \delta\sigma_a - \check{g}_{ab} \check{\nabla}_c \delta c^c \right)$$

— ver más adelante.)

2) Notar que $t_i \to t_i + \delta t_i$

$$\Longrightarrow \quad \check{g}_{ab} \to \check{g}_{ab} + \delta g_{ab}\,, \quad \text{con}$$

$$\delta g_{ab} \perp \underbrace{\delta\omega\, \check{g}_{ab}}_{\text{Weyl}}\,,\ \underbrace{\check{\nabla}_a \delta\sigma_b + \check{\nabla}_b \delta\sigma_a}_{\text{difeo}} \quad \forall\ \delta\omega(\sigma),\ \delta\sigma^a(\sigma)$$

donde la ortogonalidad se define con base en al producto interno natural para tensores con 2 índices (p. 262):

$$(\delta g, \delta g') \equiv \int d^2\sigma \sqrt{\check{g}}\, \check{g}^{ab} \check{g}^{cd} \delta g_{ac} \delta g'_{bd}$$

En la norma conforme esto implica

$$\delta g_{z\bar{z}} = 0\,, \quad \check{\nabla}_{\bar{z}} \delta g_{zz} = \partial_{\bar{z}} \delta g_{zz} = 0\,,$$

cuyas soluciones están en correspondencia uno a uno con los modos cero de $b(z)$ $\left(S_f = -\frac{1}{2\pi}\int d^2z\, \bar{\partial} b\, c\right)$

(Cierto en cualquier norma; el operador que asume el papel de $\partial_{\bar{z}}$ es $P_1^{\dagger}$ — ver más adelante.)

lunes, 06 de marzo de 2006
07:07 p.m.

• Problema: cuando existen modos cero de campos anticonmutativos, la integral funcional da cero: desarrollando p.ej.

$$c(z,\bar{z}) = \sum_n \underset{\uparrow\text{ anticonmutativo}}{c_n}\, C^{(n)}(z,\bar{z})$$

conjunto completo de campos vectoriales (conmutativos)

con $\bar{\partial} C^{(0)} = 0$, podemos ver que

$$\int \underbrace{\mathcal{D}c(z,\bar{z})}_{\equiv \prod_n dc_n} e^{-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\, b\,\bar{\partial} c} \propto \int dc_0\, e^{-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\, b\,\cancelto{0}{\bar{\partial} C^{(0)}} c_0} = 0$$

p.271: $\int d\theta = 0$

Para obtener un resultado $\neq 0$ se requiere de la inserción de un factor de c (en cualquier punto)

$$\int \mathcal{D}c(z,\bar{z})\; c(z',\bar{z}')\, e^{-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\, b\,\bar{\partial} c} \propto \int dc_0\; c_0 \neq 0$$

• Solución: de hecho, Faddeev-Popov dará las inserciones necesarias...

Nos interesa entonces calcular la determinante de Faddeev-Popov

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab}(\sigma)\mathcal{D}X^{\mu}(\sigma)}{\text{Dif}\times\text{Weyl}} e^{-S_p[X,g]} \prod_{j=1}^{N} N_j \int d^2\sigma_j \sqrt{g}\, V_j(\sigma_j; k_j)$$

$$= \int d^M t \; \Delta_{FP}(\check{g}(t);\check{\sigma}) \int \mathcal{D}X^{\mu}(\sigma)\, e^{-S_p[X,\check{g}]} \prod_{j=1}^{K/2} N_j \sqrt{\check{g}}\, V_j(\check{\sigma}_j) \prod_{j=\frac{K}{2}+1}^{N} N_j \int d^2\sigma_j \sqrt{\check{g}}\, V_j(\check{\sigma}_j)$$

definida a través de

$$1 = \underbrace{\int d^M t \int \mathcal{D}\xi^a(\sigma)\mathcal{D}\omega(\sigma)}_{\text{Necesarios para abrir todas las métricas}} \delta^{(\infty)}\left(g^{\xi,\omega}_{ab}(\sigma) - \check{g}_{ab}(\sigma)\right) \underbrace{\delta^{(K)}\left(\sigma_j^{\xi_a} - \check{\sigma}_j^a\right)}_{\text{Necesarios para eliminar GKC}} \underbrace{\left|\frac{\partial(g^{\xi,\omega,t}, \sigma_j^{\xi_a})}{\partial(\xi,\omega,t)}\right|}_{\equiv \Delta_{FP}(\check{g}(t),\check{\sigma})}$$

Por las deltas de Dirac, necesitamos al jacobiano solo sobre la condición de norma, así que podemos restringir nuestra atención a una transformación infinitesimal

$$g^{\xi,\delta\omega,\delta t}_{ab}(\sigma) = \check{g}_{ab}(\sigma) + \delta g_{ab}(\sigma)$$

$$\sigma_j^{\xi_a} = \check{\sigma}_j^a + \delta\sigma^a(\check{\sigma}_j)$$

($\Rightarrow$ Δ_{FP} es independiente de $\xi^a \equiv \delta\sigma^a$, $\delta\omega$, δt)

Utilizaremos la descomposición ortogonal

$$\delta g_{ab} = \delta\omega\, \check{g}_{ab} + \check{\nabla}_a \delta\sigma_b + \check{\nabla}_b \delta\sigma_a + \delta t^i \partial_t \check{g}_{ab}(t)$$

$$= \left(\delta\omega + \check{\nabla}_c \delta\sigma^c\right)\check{g}_{ab} + \underbrace{\check{\nabla}_a \delta\sigma_b + \check{\nabla}_b \delta\sigma_a - \check{g}_{ab}\check{\nabla}_c \delta\sigma^c}_{\equiv (\check{P}_1 \delta\sigma)_{ab}} + \delta t_i \frac{\partial \check{g}_{ab}}{\partial t_i} . \qquad (*)$$

Tenemos

$$\Delta^{-1}_{FP}(\check{g},\check{\sigma}) = \int d^M(\delta t)\, \mathcal{D}(\delta\sigma^a)\, \mathcal{D}(\delta\omega)\, \delta^{(\infty)}\left(\delta g_{ab}(\sigma)\right)\, \delta^{(K)}\left(\delta\sigma^a(\check{\sigma}_j)\right)$$

(porque el jacobiano en una variedad coincide con el jacobiano en el espacio tangente), es decir,

$$\Delta^{-1}_{FP}(\check{g},\check{\sigma}) = \int d^M(\delta t)\, \mathcal{D}(\delta\sigma^a)\, \mathcal{D}(\delta\omega)\, \overbrace{\mathcal{D}\beta^{ab}\, d^K s}^{\text{variables auxiliares}}\, \exp\left[2\pi i\, s^a_j\, \delta\sigma^a(\check{\sigma}_j)\right]$$

$$\exp\left[2\pi i \int d^2\sigma \sqrt{\check{g}}\, \beta^{ab} \left\{ \underbrace{\left(\delta\omega + \check{\nabla}_c \delta\sigma^c\right)\check{g}_{ab} + (\check{P}_1 \delta\sigma)_{ab} + \delta t_i \frac{\partial \check{g}_{ab}}{\partial t_i}}_{\text{usando } (*) \text{ para } \delta g_{ab}} \right\} \right] .$$

La integral sobre $\delta\omega(\sigma)$ simplemente restringe

$\mathcal{D}\beta^{ab}(\sigma) \rightarrow \mathcal{D}\beta'^{ab}(\sigma)$, de modo que podemos escribir

$\equiv$ tensores simétricos sin traza

martes, 07 de marzo de 2006
01:21 a.m.

$$\Delta_{FP}^{-1} = \int d^M(\delta t)\, \mathcal{D}(\delta\sigma)\, \mathcal{D}\beta'_{ab}\, d^K s\; \exp[2\pi i s_j^a \delta\sigma^a(\check{\sigma}_j)]$$

$$\exp\Big[2\pi i \underbrace{\Big(\beta', \check{P}_1 \delta\sigma + \delta t_i \frac{\partial \check{g}}{\partial t_i}\Big)}_{\text{producto interno definido en la p. 363}}\Big]$$

Ahora podemos invertir la integral del lado derecho ($\det^{-1}$) reemplazando variables bosónicas por fermiónicas:

$$\delta\sigma^a \to c^a, \quad \beta'_{ab} \longrightarrow \frac{i}{8\pi^2} b_{ab} \quad s_j^a \to \frac{i}{2\pi} \eta_j^a, \quad \delta t_i \to \lambda_i \Rightarrow$$

$$\Delta_{FP}(\check{g}, \check{\sigma}) = \int \mathcal{D}b_{ab}\, \mathcal{D}c^a\, d^M\lambda\, d^K\eta\; \exp[-\eta_j^d c^d(\check{\sigma}_j)]$$

$$\exp\Big[\underbrace{-\frac{1}{4\pi}(b, \check{P}_1 c)}_{\equiv S_f[b,c,\check{g}]} - \frac{1}{4\pi}\Big(b, \lambda_i \frac{\partial \check{g}}{\partial t_i}\Big)\Big]$$

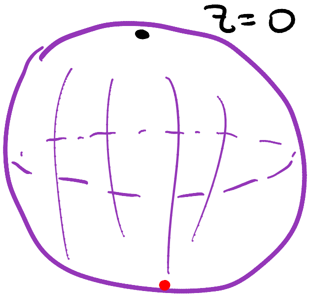
Integrando sobre λ y η, obtenemos finalmente

$$\boxed{\Delta_{FP}(\check{g}, \check{\sigma}) = \int \mathcal{D}_{\check{g}} b_{ab}\, \mathcal{D}_{\check{g}} c^a\, e^{-S_f[b,c,\check{g}]} \prod_{i=1}^{M} \frac{1}{4\pi}\Big(b, \frac{\partial \check{g}}{\partial t_i}\Big) \prod_{j,d} c^d(\check{\sigma}_j)}$$

Amplitudes de Cuerda Cerrada a Nivel Árbol

Esfera $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

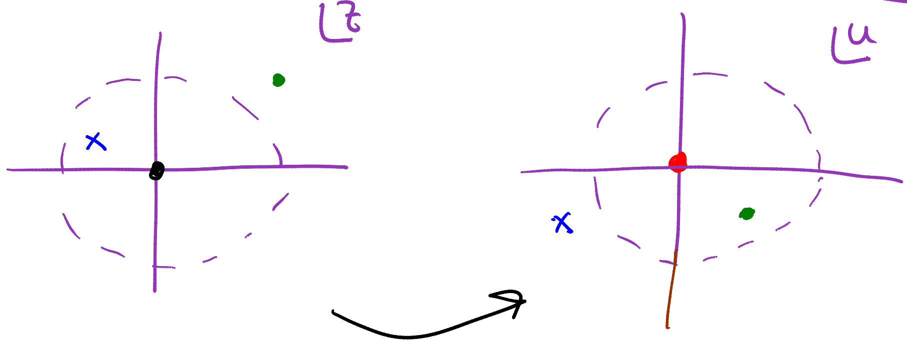
$z=0$



$z=\infty$

2 regiones de coordenadas:

$\mathbb{C}_z$ $\qquad$ $\mathbb{C}_u$



$u = \frac{1}{z}$ función de transición

• S^2 como variedad Riemanniana: métrica global en norma conforme $\quad$ $u=\frac{1}{z}$ es un difeo

$$g_{z\bar z}(z,\bar z) \longleftrightarrow g_{u\bar u}(u,\bar u) = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial \bar z}{\partial \bar u}\, g_{z\bar z}(z,\bar z) = |z|^4 g_{z\bar z}(z,\bar z)$$

P.ej., métrica usual $g_{z\bar z} = \frac{2r^2}{(1+|z|^2)^2} \longleftrightarrow g_{u\bar u} = \frac{2r^2}{(1+|u|^2)^2}$, bien definida en $u=0$.

• S^2 como variedad compleja: métrica plana en cada región $g_{z\bar z} = \frac{1}{2} = g_{u\bar u}$, interpretando a $u = \frac{1}{z}$ como una transformación conforme.

miércoles, 08 de marzo de 2006
05:36 p.m.

• ¿Módulos? δg_{zz} tal que $\partial_{\bar z}\delta g_{zz}=0$, definidos globalmente:

$$\delta g_{uu} = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \delta g_{zz} = z^4 \underbrace{\delta g_{zz}}_{\lesssim z^{-4} \text{ para } z\to\infty}$$ finito aún cuando $z\to\infty$

+ analiticidad $\Longrightarrow$ $\delta g_{zz}=0 \quad \forall z$

Así que NO hay módulos (todas las métricas son equivalentes bajo Dif × Weyl) $\boxed{M=0}$

• ¿Vectores de Killing conformes?

δz tal que $\partial_{\bar z}\delta z=0$, definidos globalmente:

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial z}\delta z = -z^{-2}\delta z$$ finito aún cuando $z\to\infty$

$$\Longrightarrow \quad \delta z = \epsilon_0 + \epsilon_1 z + \epsilon_2 z^2 \qquad (\leftrightarrow L_{-1}, L_0, L_1)$$

$\therefore$ $\boxed{K=6}$ (Riemann-Roch: $K-M=3\chi$ ✓)

Versión finita: $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in (P)SL(2,\mathbb{C}) = GKC$

Grupo lineal fraccionario o de Moebius

↳ infinitesimal si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\epsilon_1}{2} & \epsilon_0 \\ -\epsilon_2 & 1-\frac{\epsilon_1}{2}\end{pmatrix}$

Consideremos la amplitud de dispersión de N taquiones.
Usando el vértice $V_\phi(k) = N_\phi \int d^2z \, :e^{ik\cdot X(z,\bar{z})}:$

con $N_\phi \equiv g_c N$, sabemos que la amplitud involucra

$$e^{-2\Phi_0} (g_c N)^N \frac{1}{GKC} \int d^2z_1 \cdots d^2z_N \left\langle :e^{ik_1\cdot X(z_1,\bar{z}_1)}: \cdots :e^{ik_N\cdot X(z_N,\bar{z}_N)}: \right\rangle^X_{S^2},$$

donde

$$\langle \cdots \rangle^X_{S^2} \equiv \int \mathcal{D}X^\mu(z,\bar{z})_{S^2} \, e^{-\frac{1}{2}\int d^2z \, X\cdot\Delta_z X} \cdots$$

con $\Delta_z \equiv -\frac{1}{\pi\alpha'}\partial\bar{\partial}$

Notar que si separamos $X^\mu(z,\bar{z}) = \underbrace{x^\mu}_{\text{modo constante}} + \underline{X}^\mu(z,\bar{z})$,

de manera que $\mathcal{D}X^\mu = d^Dx \, \mathcal{D}\underline{X}^\mu$, encontramos que las amplitudes siempre incluirán

$$\int d^Dx \, e^{i(k_1+k_2+\ldots+k_N)\cdot x} = (2\pi)^D \delta^{(D)}(k_1+k_2+\ldots+k_N),$$

como Dios manda. No escribiremos este factor explícitamente de aquí en adelante ($\not\in \mathcal{M}$).

Conocemos el propagador (p. 195)

$$\langle X^\mu(z,\bar z)\, X^\nu(z',\bar z')\rangle = \underbrace{-\frac{\alpha'}{2}\ln|z-z'|^2}_{\Delta^{-1}(z,z')}\,\eta^{\mu\nu}\langle 1\rangle,$$

así que podemos calcular

$$\langle :e^{ik_1\cdot X(z_1,\bar z_1)}::e^{ik_2\cdot X(z_2,\bar z_2)}:\cdots:e^{ik_N\cdot X(z_N,\bar z_N)}:\rangle^X_{S^2}$$

$$= \underbrace{\prod_{i<j} e^{i^2 k_i\cdot k_j\left[-\frac{\alpha'}{2}\ln|z_i-z_j|^2\right]}}_{|z_i-z_j|^{\alpha' k_i\cdot k_j}}\ \underbrace{\langle :\prod_{j=1}^N e^{ik_j\cdot X(z_j,\bar z_j)}:\rangle^X_{S^2}}_{\langle 1\rangle^X_{S^2}}$$

(Alternativamente: sabemos que completando el cuadrado

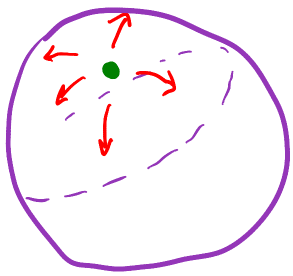
$$\langle e^{\int d^2z\, J(z)\cdot X(z)}\rangle^X_{S^2} = e^{\frac{1}{2}\int d^2z\, d^2z'\, J(z)\cdot\Delta^{-1}(z,z')J(z')}\langle 1\rangle^X_{S^2}$$

y nos interesa aquí el caso $J^\mu(z,\bar z)\equiv i\sum_{j=1}^N k_j^\mu\,\delta^{(2)}(z-z_j)$

— con autocontracciones eliminadas por el orden normal.)

NOTA: Recordar que $\Delta^{-1}(z,z') = -\frac{\alpha'}{2}\ln|z-z'|^2$ es por definición la función de Green que satisface

$$\underbrace{\Delta_z}_{-\frac{1}{\pi\alpha'}\partial\bar\partial} \Delta^{-1}(z,z') = \delta^{(2)}(z-z')$$



y se le puede por tanto interpretar como el potencial electrostático asociado a una carga puntual.

PERO, ahora que nuestra hoja de mundo es compacta, no podemos tener una carga aislada: la ley de Gauss implica que la carga total debe ser cero.

En la construcción usual de la función de Green,

$$G(\sigma,\sigma') = \sum_I \frac{f_I(\sigma) f_I(\sigma')}{\lambda_I},$$

con $\Delta_\sigma f_I(\sigma) = \lambda_I f_I(\sigma)$, $\int d^2\sigma \sqrt{g}\, f_I f_J = \delta_{IJ}$, claramente debemos excluir el modo cero

$$f_0(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\int d^2\sigma \sqrt{g}}} \quad \text{(que es ahora normalizable)},$$

porque $\lambda_0 = 0$. La función de Green resultante $\underline{G}$ satisface entonces $\Delta_\sigma \underline{G}(\sigma, \sigma') = \frac{1}{\sqrt{g}} \delta^{(2)}(\sigma - \sigma') - \frac{1}{\int d^2\sigma \sqrt{g}}$.

El término adicional se puede interpretar como una distribución de carga uniforme que neutraliza a la carga puntual.

En la esfera, la solución a esta ecuación es del tipo

$$\underline{G}(z, z') = -\frac{\alpha'}{2} \ln|z - z'|^2 + F(z, \bar{z}) + F(z', \bar{z}'),$$

pero felizmente se puede mostrar que los términos adicionales no contribuyen a las funciones de correlación, por conservación de momento (ver Polchinski pp. 170-172).

miércoles, 08 de marzo de 2006
09:15 p.m.

Notar que $$I \equiv \int d^2 z_1 \cdots d^2 z_N \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{\alpha' k_i \cdot k_j}$$

es, como prometimos, invariante bajo $SL(2,\mathbb{C})$:

$$z \to z' = \frac{az+b}{cz+d} \implies d^2 z = \frac{d^2 z'}{|a-cz'|^4}, \quad z_i - z_j = \frac{z_i' - z_j'}{(a-cz_i')(a-cz_j')},$$

así que

$$I = \int \frac{d^2 z_1' \cdots d^2 z_N'}{\prod_i |a-cz_i'|^4} \prod_{i<j} \frac{|z_i' - z_j'|^{\alpha' k_i \cdot k_j}}{|a-cz_i'|^{\alpha' k_i \cdot k_j} |a-cz_j'|^{\alpha' k_i \cdot k_j}}$$

Los factores adicionales que involucran p.ej. a z_1' son

$$|a-cz_1'|^{-4-\alpha' k_1 \cdot \underbrace{(k_2+\ldots+k_N)}_{=-k_1}} = |a-cz_1'|^{\underbrace{-4+\alpha' k_1^2}_{=0}} = 1,$$

por conservación de momento

condición de capa de masa para taquión ✓

de modo que $I = I'$: como esperábamos, tenemos invariancia bajo el grupo de simetría residual, GKC.

(Pero notar, como en la p. 325, que este requisito nos impide calcular amplitudes <u>fuera</u> de la capa de masa.)

Dados 3 puntos fijos $\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3$, existe una transformación $SL(2,\mathbb{C})$ única que mapea

$$\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} z_1, z_2, z_3$$

así que (en el caso $N \geq 3$) podemos reinterpretar

$$\int d^2 z_1\, d^2 z_2\, d^2 z_3 = \int d(GKC)\, \underbrace{\mu(\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3)}_{\text{"Faddeev-Popov" (Jacobiano)}}$$

Si integramos sobre todas las z_j $(j=1,\ldots,N)$, estaríamos entonces contando cada configuración física un número infinito de veces, obteniendo un resultado $\propto \int d(GKC) = \infty$.

Así que, como ya habíamos visto antes, lo que debemos hacer es fijar $z_1 = \check{z}_1$, $z_2 = \check{z}_2$, $z_3 = \check{z}_3$, para eliminar la redundancia por completo, y poder cancelar $\frac{1}{GKC}$ contra $\int d(GKC)$.

(Notar que esto implica que las amplitudes con $N \leq 2$ dan como resultado cero, como debiera ser el caso para $\mathcal{M} \propto T$ a nivel árbol: no hay energía del vacío , ni "renacuajo" , ni corrección al propagador .)

$N=0$ $\quad$ $N=1$ $\quad$ $N=2$

Debemos ahora determinar el jacobiano $\mu(\check{z}_1, \check{z}_2, \check{z}_3)$:

dado que para $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{\epsilon_1}{2} & \epsilon_0 \\ -\epsilon_2 & 1-\frac{\epsilon_1}{2} \end{pmatrix}$ tenemos

$$\check{z}_i \to z_i = \check{z}_i + \delta z_i \qquad \text{con} \quad \delta z_i = \epsilon_0 + \epsilon_1 \check{z}_i + \epsilon_2 \check{z}_i^2 ,$$

vemos que

$$d^2(\delta z_1) d^2(\delta z_2) d^2(\delta z_3) = \underbrace{d^2\epsilon_0\, d^2\epsilon_1\, d^2\epsilon_2}_{d^2(\delta b)\, 4\, d^2(\delta a)\, d^2(\delta c)} \underbrace{\left| \det\left(\frac{\partial(\delta z_1, \delta z_2, \delta z_3)}{\partial(\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2)} \right) \right|^2}_{\underbrace{\left| \det \begin{pmatrix} 1 & \check{z}_1 & \check{z}_1^2 \\ 1 & \check{z}_2 & \check{z}_2^2 \\ 1 & \check{z}_3 & \check{z}_3^2 \end{pmatrix} \right|^2}_{\left| (\check{z}_1 - \check{z}_2)(\check{z}_1 - \check{z}_3)(\check{z}_2 - \check{z}_3) \right|^2}} ,$$

de donde

$$d^2 z_1\, d^2 z_2\, d^2 z_3 = d(GKC)\, |\check{z}_1 - \check{z}_2|^2\, |\check{z}_1 - \check{z}_3|^2\, |\check{z}_2 - \check{z}_3|^2 .$$

(Hemos usado aquí nuevamente el hecho de que el jacobiano en una variedad coincide con el jacobiano en su espacio tangente; es fácil verificar que

$$z_i = \frac{a\check{z}_i + b}{c\check{z}_i + \frac{1+bc}{a}} \Rightarrow \det\left(\frac{\partial(z_1,z_2,z_3)}{\partial(a,b,c)}\right) = \frac{-2(\check{z}_1-\check{z}_2)(\check{z}_1-\check{z}_3)(\check{z}_2-\check{z}_3)}{a(c\check{z}_1+d)^2(c\check{z}_2+d)^2(c\check{z}_3+d)^2},$$

que efectivamente coincide con el resultado anterior en el punto $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ✓)

Hemos mostrado entonces explícitamente que

$$\frac{1}{6KC}I = \int d^2z_4 \cdots d^2z_n\, |\check{z}_1-\check{z}_2|^2 |\check{z}_1-\check{z}_3|^2 |\check{z}_2-\check{z}_3|^2 \prod_{i<j} |z_i - z_j|^{\alpha' k_i \cdot k_j}$$

Y este es justamente el resultado que se obtiene a partir de nuestra fórmula general con fantasmas (p. 367): usando los vértices <u>fijos</u> $:c\tilde{c}\, e^{ik_i\cdot X}(\check{z}_i, \bar{\check{z}}_i):$ $i=1,2,3$, la amplitud incluye

$$\langle c(\check{z}_1)c(\check{z}_2)c(\check{z}_3)\rangle^{b,c}_{S^2} \langle \tilde{c}(\bar{\check{z}}_1)\tilde{c}(\bar{\check{z}}_2)\tilde{c}(\bar{\check{z}}_3)\rangle^{\tilde{b},\tilde{c}}_{S^2},$$

jueves, 09 de marzo de 2006
12:37 a.m.

que da resultado $\neq 0$ solo gracias a la contribución de los modos cero ($\leftrightarrow$ vectores de Killing conformes):

$$\langle c(\check{z}_1)c(\check{z}_2)c(\check{z}_3)\rangle^{b,c}_{S^2} \equiv \int \mathcal{D}b\mathcal{D}c\, e^{-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\, b\bar{\partial}c}\, c(\check{z}_1)c(\check{z}_2)c(\check{z}_3)$$

$c(z,\bar{z}) = \sum_n c_n C^{(n)}(z,\bar{z})$

$$\propto \int dc_0\, dc_1\, dc_2\, (c_0 + c_1\check{z}_1 + c_2\check{z}_1^2 + \ldots)(c_0 + c_1\check{z}_2 + c_2\check{z}_2^2 + \ldots)(c_0 + c_1\check{z}_3 + c_2\check{z}_3^2 + \ldots)$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & \check{z}_1 & \check{z}_1^2 \\ 1 & \check{z}_2 & \check{z}_2^2 \\ 1 & \check{z}_3 & \check{z}_3^2 \end{pmatrix} = -(\check{z}_1-\check{z}_2)(\check{z}_1-\check{z}_3)(\check{z}_2-\check{z}_3) \quad ✓$$

- Amplitud de 3 puntos:

$$\frac{1}{G_K C} I = |\check{z}_1-\check{z}_2|^{2+\alpha' k_1\cdot k_2}\,|\check{z}_1-\check{z}_3|^{2+\alpha' k_1\cdot k_3}\,|\check{z}_2-\check{z}_3|^{2+\alpha' k_2\cdot k_3},$$

y usando $\alpha' k_1\cdot k_2 = \frac{\alpha'}{2}[\underbrace{(k_1+k_2)^2}_{k_3^2} - k_1^2 - k_2^2] = -2$ ← capa de masa

(y lo mismo para $\alpha' k_1\cdot k_3$ y $\alpha' k_2\cdot k_3$) tenemos

$\frac{1}{G_K C} I = 1$ (independiente de $\check{z}_i$ ✓), así que

$$\underbrace{\mathcal{M}^{\phi\phi\phi}_{S^2}(k_1,k_2,k_3)}_{} = \underbrace{(g_c N)^3 e^{-2\Phi_0}}_{\propto\, g_c} \underbrace{\langle 1\rangle^{X,b,c,\tilde{b},\tilde{c}}_{S^2}}_{\text{determinantes}} \sim g_c\,.$$

$S = 1 + \underbrace{i(2\pi)^D\delta^{(D)}(k)\mathcal{M}}_{T}$

– Amplitud de 4 puntos:

$$\frac{1}{GKC} I = |\check z_1 - \check z_2|^{2+\alpha' k_1\cdot k_2} |\check z_1 - \check z_3|^{2+\alpha' k_1\cdot k_3} |\check z_2 - \check z_3|^{2+\alpha' k_2\cdot k_3}$$

$$\int d^2 z_4 \, |\check z_1 - z_4|^{\alpha' k_1\cdot k_4} |\check z_2 - z_4|^{\alpha' k_2\cdot k_4} |\check z_3 - z_4|^{\alpha' k_3\cdot k_4}$$

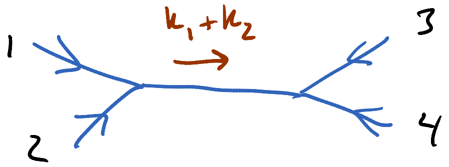
Por simplicidad, tomaremos $\check z_1 \to \infty$, $\check z_2 = 1$, $\check z_3 = 0$.

Factores con $\check z_1$ $\longrightarrow$ $|\check z_1|^{4+\alpha' k_1\cdot \underbrace{(k_2+k_3+k_4)}_{-k_1}} = |\check z_1|^{4-\alpha' k_1^2} = 1$

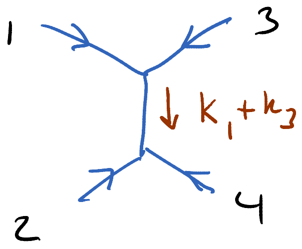
$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{GKC} I = \int d^2 z_4 \, |z_4 - 0|^{\alpha' k_3\cdot k_4} \, |z_4 - 1|^{\alpha' k_2\cdot k_4} .$$

Conviene reescribir en términos de las variables de Mandelstam (invariantes cinemáticas)

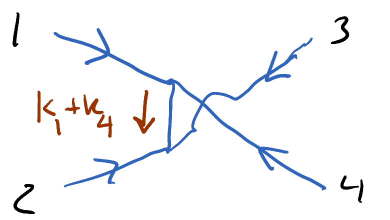
$s \equiv -\alpha'(k_1+k_2)^2$ $\qquad$ $t \equiv -\alpha'(k_1+k_3)^2$ $\qquad$ $u \equiv -\alpha'(k_1+k_4)^2$



Energía total en el marco del centro de masa



Transferencia de momento



Notar que $s+t+u = 4\alpha' m^2 = -16$, y además

$$s = -\alpha'(k_3^2 + 2k_3\cdot k_4 + k_4^2) = -2\alpha' k_3\cdot k_4 - 8 ,$$

$$t = -\alpha'(k_2^2 + 2k_2\cdot k_4 + k_4^2) = -2\alpha' k_2\cdot k_4 - 8 ,$$

así que en términos de $z_4 = re^{i\alpha}$ tenemos

$$\frac{1}{GKC} I = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} 2r\,dr\; r^{-\frac{s}{2}-4}\left(1 + r^2 - 2r\cos\alpha\right)^{-\frac{t}{4}-2}$$

Notar que en la región $r \to 0$ $(z_4 \to z_3)$ tenemos

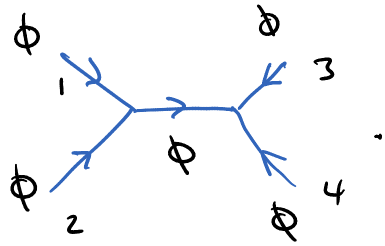
$$\int_0 dr\; r^{-\frac{s}{2}-3}\left(1 + \mathcal{O}(r^2)\right) = \left.\frac{r^{-\frac{s}{2}-2}}{-\frac{s}{2}-2}\right|_0 + \ldots ,$$

que es convergente solo si $s < -4$. Vemos entonces que

L14:07/05/13

$$\mathcal{M}^{\phi\phi\phi\phi}_{S^2}(s,t) \propto -\frac{2}{s+4} + \text{términos analíticos en } s=-4$$

polo simple en $s=-4$: taquión



La integral diverge $\forall\, s \geq -4$, pero la amplitud física tiene solo un polo simple en $s=-4$, $\therefore$ se puede definir por continuación analítica en la variable s.