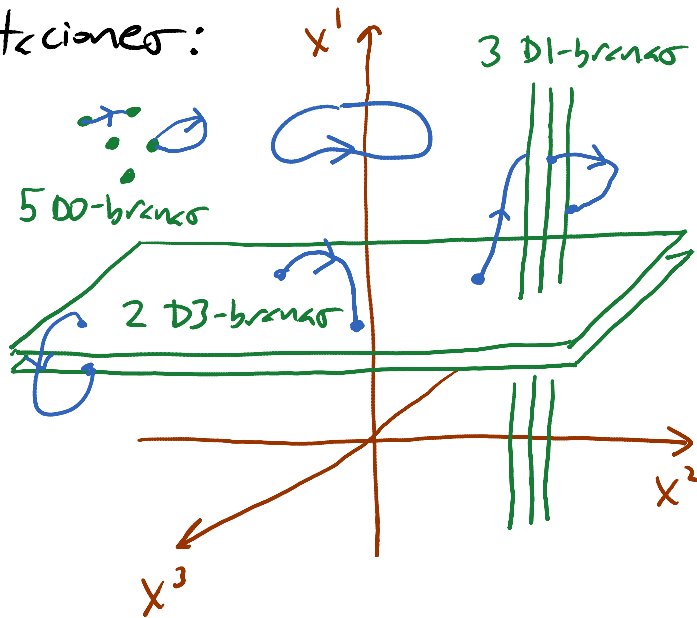


dimensionalidades y/u orientaciones:

(En la visión antigua, éstos habrían sido considerados teorías distintas — aunque no eran de interés por violar Poincaré.)



El hecho (p.332) de que las cuerdas abiertas se pueden convertir en cerradas y viceversa nos indica que las D-branas pueden interactuar con el espaciotiempo cerrado.

3) Cuerdas Bosónicas Cerradas No Orientadas

$S_p[X]$ y las 2 constricciones son invariantes bajo la transformación de período en la hoja de mundo,


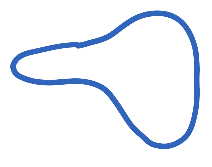
$$\Omega: \sigma \rightarrow 2\pi - \sigma, \text{ es decir, } \bar{z} \leftrightarrow \bar{z}$$

que es simplemente una reparametrización, pero invierte la orientación de la cuerda. Dado que $\Omega^2 = 1$, Ω tiene eigenvalores ± 1 .

$$\text{Si fijamos } \Omega |0,0;k\rangle = + |0,0;k\rangle,$$

entonces usando $\Omega : \alpha_n^\mu \leftrightarrow \tilde{\alpha}_n^\mu$ tenemos, p.ej.,
 $\Omega \varepsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle = \varepsilon_{\nu\mu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0,0;k\rangle$.

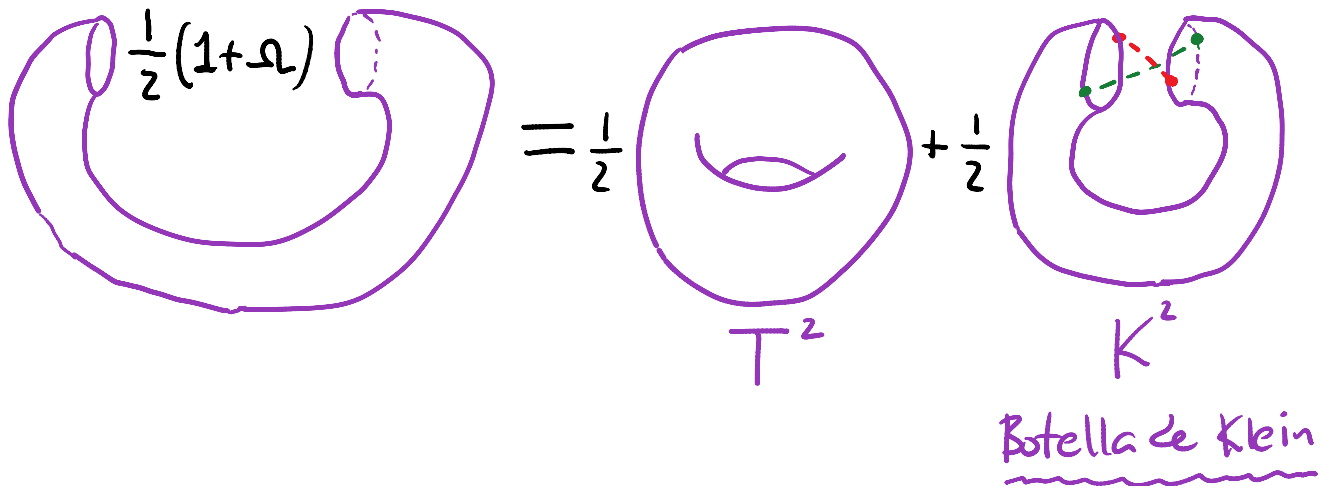
Obtenemos la teoría no orientada truncando la teoría original al subespacio de estados con $\Omega = +1$:
 $|fís\rangle \rightarrow \frac{1}{2}(1 + \Omega) |fís\rangle$

El espectro libre es entonces  \equiv 

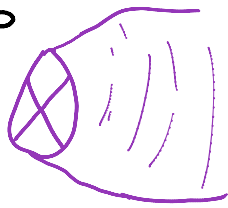
$$\underbrace{\alpha}_{m^2 = -4/\alpha'} ; \underbrace{h_{\mu\nu}, \cancel{B}_{\mu\nu}, \varphi}_{m^2 = 0} ; \dots$$

Esta proyección define una teoría consistente, gracias a que las interacciones conservan Ω .

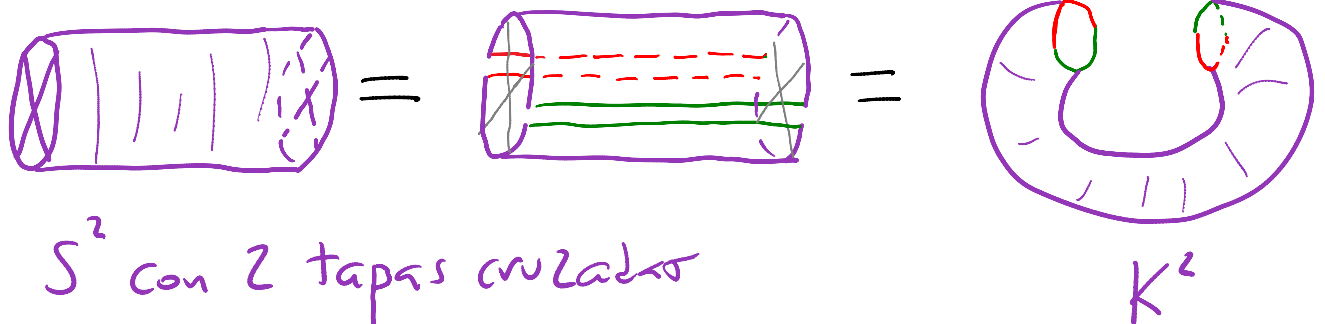
Para eliminar a los estados con $\Omega = -1$ en los lazos, debemos incluir superficies no orientables:



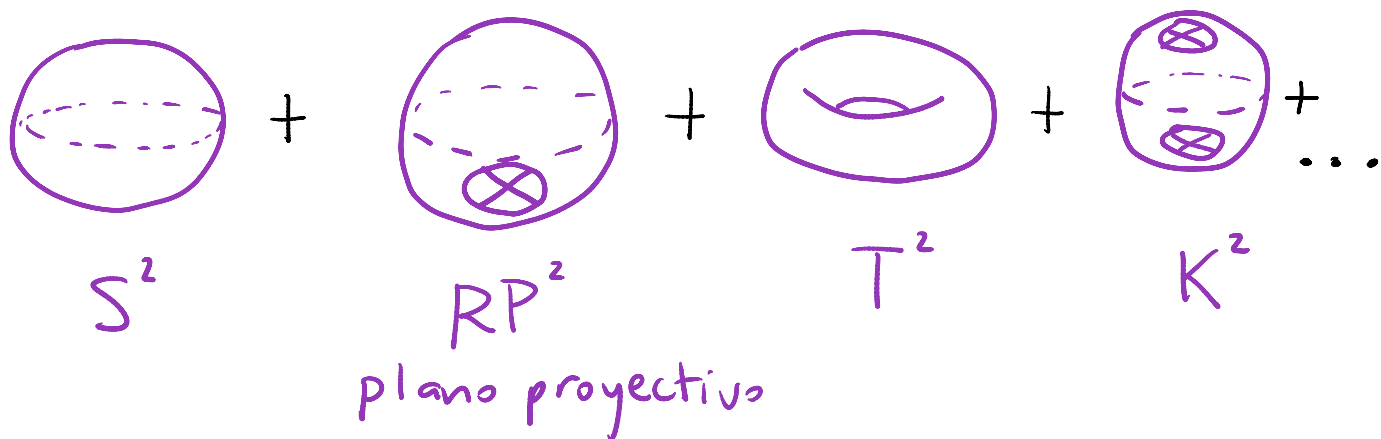
Para caracterizar superficies no orientables conviene definir una tapa cruzada ("crosscap") como un círculo en el cual se identifican los puntos diametralmente opuestos.



Tenemos p.ej.



La suma sobre superficies sin bordes, orientables o no, que necesitamos para la expansión perturbativa de esta teoría



Se puede expresar (usando $m=0, c=3 = m=1, c=1$) como

$$\sum_{m=0}^{\infty} \text{[Diagram of genus } m \text{ surface]} + \sum_{c=1}^{\infty} \text{[Diagram of genus } c \text{ surface with } c \text{ holes]} = \sum_{\substack{m=0 \\ c=0,1,2}}^{\infty} \text{[Diagram of genus } m \text{ surface with } c \text{ holes]}$$

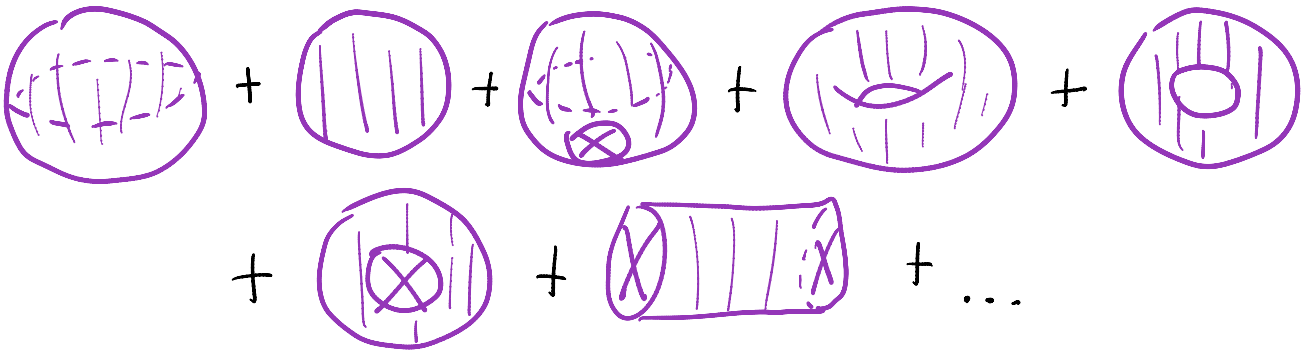
4) Cuerdas Abiertas y Cerradas No Orientadas

Para la cuerda abierta, $\Omega: \sigma \rightarrow \pi - \sigma$
 $z \leftrightarrow -\bar{z}$

$$X^{\mu} \sim \sum_n \frac{\alpha_n^{\mu}}{n} (z^{-n} + \bar{z}^{-n}) \Rightarrow \alpha_n^{\mu} \leftrightarrow (-1)^n \alpha_n^{\mu}$$

Espectro: $\alpha; \phi; \cancel{A_{\mu}}, h_{\mu\nu}, \cancel{B_{\mu\nu}}, \varphi; \dots$

La expansión perturbativa involucra suma sobre todas las superficies (con o sin bordes, orientables o no):



Cinta de Moebius M^2

$$\equiv \sum_{m,b=0}^{\infty} \text{Diagram}(m,b) + \sum_{c=1,b=0}^{\infty} \text{Diagram}(c,b)$$

Notar que A_M sobrevive si agregamos factores de Chan-Paton, es decir, D-branas: sabemos que

$$\Omega |N; k; I, J\rangle = (-1)^N |N; k; J, I\rangle$$

eigenvalor del "operador de número" (=1 para A_M)

$$\Rightarrow \Omega \sum_{I,J=1}^N \lambda_{IJ} \alpha_{-1}^M |0; k; I, J\rangle = - \sum_{I,J} \lambda_{JI} \alpha_{-1}^M |0; k; I, J\rangle,$$

estado que sobrevive si $\lambda_{IJ} = -\lambda_{JI}$. Así que el grupo de norma asociado a N D-branas en el caso de una teoría no orientada es $SO(N)$ en lugar de $U(N)$.

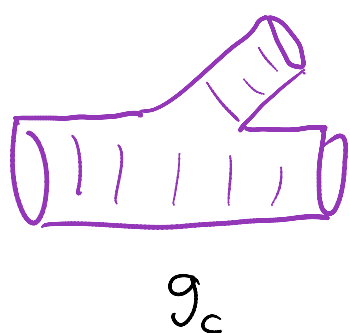
acción no trivial sobre extremos

(Proyectando con $\omega \equiv \Omega \begin{pmatrix} 0 & i\mathbb{1}_{N/2} \\ -i\mathbb{1}_{N/2} & 0 \end{pmatrix}$
se obtiene el grupo de norma $Sp(N/2)$.)

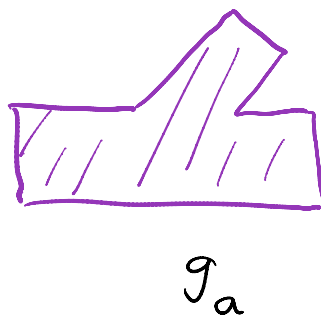
Justo como entendimos que los tipos 1) y 2) de teorías de cuerdas son simplemente distintos sectores de una misma teoría, que difieren por la presencia o ausencia de D25-branes, por qué claro que los tipos 3) y 4) están igualmente conectados.

A estas alturas podemos hablar entonces de que existen solo 2 tipos de teorías de cuerdas bosónicas: orientadas y no orientadas. Como entenderemos en más detalle el próximo semestre, éstas también son en realidad una misma teoría, que difieren por la ausencia o presencia de un objeto adicional (no dinámico) conocido como un 25-plano de orientidad ("orientifold"). Más en general, una orientidad es un espacio con hiperplanos p -dimensionales que funcionan como espejos, implementando Ω (y algunas simetrías discretas).

Ahora que hemos terminado con la enumeración de los
hojas de mundo M relevantes para cada una de las
"distintas" teorías de cuerdas básicas, consideremos
de nuevo al parámetro que controla la expansión
perturbativa. Parecería que debemos agregar
a mano constantes de acoplamiento



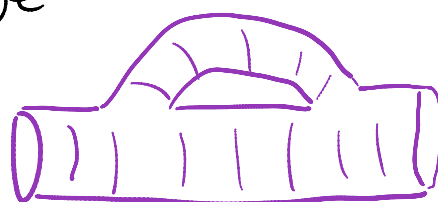
para la
interacción
de cuerdas
cerradas, y



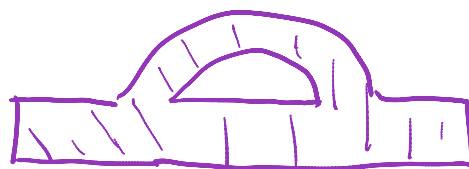
para la
interacción
de cuerdas
abiertas,

lo cual implicaría que

agregar una manija



y
agregar un borde



Pero de hecho, la teoría contiene ya su propia
receta. Recordemos de las pp. 133-35 que podemos

agregar a $S_p[g, X]$ la acción gravitacional usual

$$S_{\chi}[g] \equiv \Phi_0 \left(\underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{g} R}_{\text{Einstein-Hilbert}} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds \mathcal{K}}_{\text{Gibbons-Hawking (-York)}} \right)$$

cte. de normalización

Einstein-Hilbert

Gibbons-Hawking (-York)

necesario en un espacio con frontera, para que el principio variacional esté bien definido

(donde $ds \equiv d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}}$ es la distancia propia sobre ∂M

y $\mathcal{K} \equiv -t^a n_b \nabla_a t^b$ la curvatura extrínseca de ∂M

tangente unitaria \uparrow normal (hacia el exterior) unitaria \uparrow ,

SIN modificar la dinámica (y la equivalencia con $S_{NG}[X]$)

gracias a que

$$\frac{\delta S_{\chi}}{\delta g^{ab}} \propto \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) = 0 \quad \text{idénticamente en 2 dim.}$$

S_χ depende solo de la topología de M :

$$S_\chi = \Phi_0 \left(\underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_M d^2\sigma \sqrt{g} R}_{\text{M}} + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial M} ds \kappa \right)$$

Teorema de Gauss-Bonnet \downarrow $= \chi(M)$ Número (o características) de Euler

$$\chi(M) \equiv V - A + C$$

de vértices
de aristas
de caras
de poliedro homeomorfo a M

P.ej.,

$$\chi(S^2) = \chi(\text{cubo}) = 8 - 12 + 6 = 2$$

(\Leftrightarrow métrica usual $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta \Rightarrow R = \frac{2}{r^2}$ ✓)

$$\chi(T^2) = \chi(\text{toro}) = 16 - 32 + 16 = 0$$

(\Leftrightarrow sobre T^2 es posible definir métricas con $R=0$ ✓)

$$\chi(D^2) = \chi(\Delta) = 3 - 3 + 1 = 1 \quad (\Leftrightarrow R=0, \kappa=1 \quad \checkmark)$$

Resultado general:

$$\chi = 2 - 2m - b - c$$

manijas

bordes ↑ ↑ tapas cruzadas

Así que incorporando S_X , las amplitudes de dispersión están pesadas con

$$e^{-\Phi_0 \chi} = e^{-2\Phi_0} (e^{\Phi_0})^{2m} (e^{\Phi_0})^b (e^{\Phi_0})^c$$

Podemos entonces identificar

$$g_c = e^{\Phi_0} = g_a^2$$

La expansión perturbativa tiene sentido solo si

$$g_c = e^{\Phi_0} \ll 1$$

Como ya habíamos señalado antes, la constante de acoplamiento correspondiente debe aparecer

también en la normalización de los vértices:

$$V_i \equiv N_i \int d\sigma^2 \sqrt{g} V_i \quad N_i \propto \begin{cases} g_c & i = \phi, h, \varphi, \dots \\ g_a & i = \phi, A_\mu, \dots \end{cases}$$

Podemos comprobar que estas reglas son consistentes con la unitariedad. Recordar que

$$\left. \begin{array}{l} S^\dagger S = \mathbb{1} \\ S = \mathbb{1} + iT \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \text{Im} \left(\text{diagram} \right) = \sum_I \left(\text{diagram}_I \right) \left(\text{diagram}_I \right)$$

The diagrams are Feynman diagrams for scattering amplitudes. The first diagram shows a circle with a cross-hatch pattern and four external lines. The second diagram shows a circle with a cross-hatch pattern, four external lines, and an internal propagator labeled 'I'.

Teorema Óptico: ∃ parte cuando estados intermedios van a la capa de masa

En teoría de cuerdas debemos tener p.ej.

$$2 \text{Im} \left(\text{diagram} \right) = \sum_I \left(\text{diagram}_I \right) \left(\text{diagram}_I \right)$$

The diagrams are Feynman diagrams for scattering amplitudes. The first diagram shows a circle with a wavy line and four external lines marked with 'x'. The second diagram shows a circle with a wavy line, four external lines marked with 'x', and an internal propagator labeled 'I'.

$$\Rightarrow \left(e^{\Phi_0} \right)^{-2+2} g_c^5 \propto \left(e^{\Phi_0} \right)^{-2} g_c^4 \left(e^{\Phi_0} \right)^{-2} g_c^5$$

$$\text{i.e., } e^{\Phi_0} \propto g_c \quad \checkmark$$

(Más adelante: Φ_0 resulta NO ser un parámetro libre de la teoría, sino el valor de fondo del dilatón $\varphi(x) \dots$)

Habiendo exigido que los vértices V_i sean invariantes bajo $\text{Dif} \times \text{Weyl}$, esperaríamos poder fijar la norma en la integral de trayectoria para obtener

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{ab} \mathcal{D}X^\mu}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} e^{-S_p[X, g]} \prod_i V_i$$

$$= \int_{g=\check{g}} \mathcal{D}_{\check{g}}^a \mathcal{D}_{\check{g}}^b{}_{ab} \mathcal{D}_{\check{g}} X^\mu e^{-S_p[X, \check{g}] - S_f[b, c, \check{g}]} \prod_i V_i$$

Pero, como ya habíamos anticipado, al considerar la estructura global de la hoja de mundo (en lugar de solo examinar la situación localmente, en un parche de coordenadas a la vez, que es lo que habíamos hecho hasta ahora), nos topamos en este procedimiento con 2 sutilezas:

1) Pueden existir simetrías que no se eliminan con la elección de norma $g = \check{g}$, es decir, transf. conformes

Transformación = Weyl. (Reparametrización)
Conforme (Conforme)

que estén bien definidas globalmente en M ,

$\sigma^a \rightarrow \sigma'^a = \sigma^a + \delta\sigma^a(\sigma)$ tales que

$$\delta g_{ab} = \check{\nabla}_a \delta\sigma_b + \check{\nabla}_b \delta\sigma_a \propto \check{g}_{ab} \quad \text{Ec. de Killing Conforme}$$

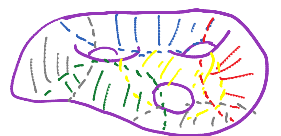
↑ para que el efecto sea Weyl

(ec. de Killing usual $\delta g_{ab} = \nabla_a \delta\sigma_b + \nabla_b \delta\sigma_a = 0 \leftrightarrow$ isometrías).

Definimos el grupo de Killing Conforme (GKC) como el grupo de transformaciones generadas por vectores (campo vectoriales) que satisfacen esta ecuación y están definidos globalmente.

El GKC es un subgrupo del "grupo" conforme local que habíamos discutido hasta ahora (y que tiene $\dim = \infty$).

Por la exigencia de una definición global, existen vectores de Killing conformes solo para superficies suficientemente sencillas: aquellas con $\chi \geq 0$.



La lista exhaustiva es como sigue (veremos en detalle los casos orientables más adelante):

$$\chi=2: \quad \text{S}^2 \quad \text{GKC} = \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

(generado por $L_0, L_{\pm 1}, \tilde{L}_0, \tilde{L}_{\pm 1}$)

$$K \equiv \dim \text{GKC} = 6$$

$$\chi=1: \quad \text{D}^2 \quad \text{GKC} = \text{SL}(2, \mathbb{R}), \quad K=3$$

$$\text{RP}^2 \quad \text{GKC} = \text{SU}(2), \quad K=3$$

$$\chi=0: \quad \text{T}^2 \quad \text{GKC} = \text{U}(1) \times \text{U}(1), \quad K=2$$

$$\text{C}^2 \quad \text{GKC} = \text{U}(1), \quad K=1$$

$$\text{M}^2 \quad \text{GKC} = \text{U}(1), \quad K=1$$

$$\text{K}^2 \quad \text{GKC} = \text{U}(1), \quad K=1$$

En estos casos tendremos (ignorando por ahora la segunda sutileza)

$$\int \frac{Dg_{ab} DX^{\omega}}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} e^{-S_p} \prod_i V_i = \int \frac{Dc^a Db_{ab} DX^{\omega}}{\text{GKC}} e^{-S_p - S_f} \prod_i V_i$$

$\underbrace{\prod_i V_i \int d^2 \sigma_i \sqrt{g} V_i(\sigma_i)}$

Dado que las transformaciones en GKC cambian las posiciones σ_i de los vértices V_i , es posible reinterpretar a K de las integrales $\int d^2 \sigma_i$ como $\int d(\text{GKC})$, para cancelar al GKC en el denominador.

En otras palabras, podemos fijar la norma por completo dejando algunos $V_i(\sigma_i)$ sin integrar. (Necesitaremos por supuesto determinar el jacobiano correspondiente.)

2) Pueden existir parámetros en la métrica
que no se eliminan con las simetrías.

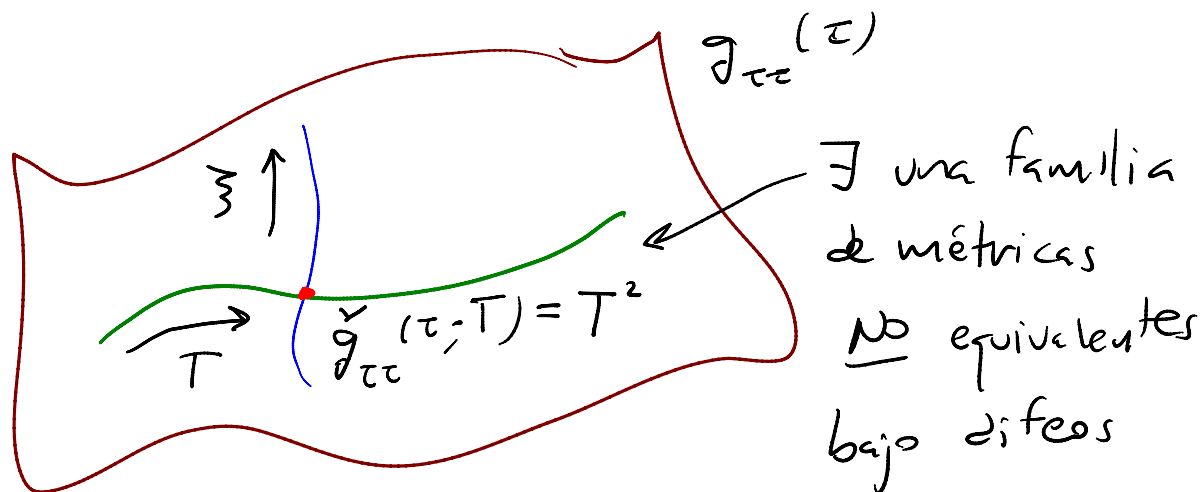
Esta posibilidad es completamente análoga a lo que sucedió en el caso de la partícula (pp. 102-3):

$$\left. \begin{array}{l} X^\mu(\tau) \\ g_{\tau\tau}(\tau) \end{array} \right\} \tau \in [0, 1]$$

podemos utilizar la invariancia bajo difeos para fijar la norma $\dot{g}_{\tau\tau}(\tau) = \text{cte.}$, pero dado que

$$T \equiv \int_0^1 d\tau \sqrt{g_{\tau\tau}(\tau)} \quad \text{es invariante bajo difeos,}$$

tenemos necesariamente $\text{cte.} = T^2$



Notar que, de hecho, podríamos transformar

$$\tau \rightarrow \tau'(\tau) = T\tau \quad \text{para obtener} \quad \int_{\tau'}^{\tau'} (\tau') = 1,$$

pero entonces $\tau' \in [0, T]$, $S[X] = \int_0^T d\tau' \dots$,

así que de cualquier manera hay que tomar en cuenta la existencia de distintos valores posibles para T :

$$\int \frac{\mathcal{D}g_{\tau\tau}(\tau)}{\text{Dif}} \dots = \int_0^\infty dT \mu(T) \dots$$

↑ Faddeev-Popov

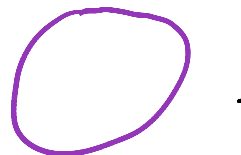
donde la medida $\mu(T)$ depende de la

topología de líneas de mundo:

$$\mu(T) = 1 \quad \text{para}$$



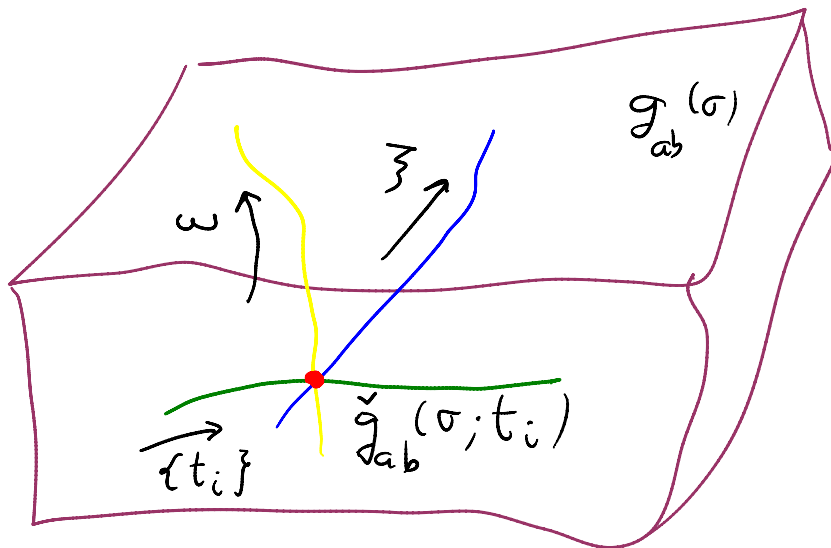
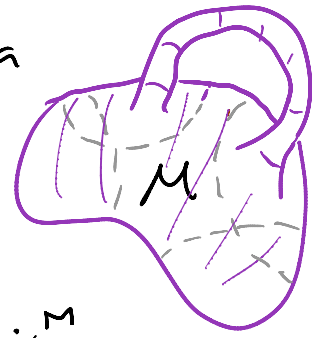
$$\mu(T) = \frac{1}{T} \quad \text{para}$$



Con la cuerda sucede lo mismo: para una hoja de mundo dada, podemos escribir

$$g_{ab}(\sigma) = e^{w(\sigma)} \check{g}_{ab}(\sigma; t_i) \quad i=1, \dots, M$$

← módulos (parámetros)



← En general, existen métricas NO equivalentes bajo $Dif \times Weyl$

y definir

$$M_M \equiv \frac{\text{Métricas}}{Dif \times Weyl}$$

Espacio de Módulos

(M - dimensional)

LIB: 30/04/13

Justo como en el caso de la partícula, si preferimos podemos asociar a los módulos no a la métrica sino a las coordenadas: en vez de una métrica definida globalmente $\check{g}_{ab}(\sigma; t_i)$,



podemos usar $\text{Dif} \times \text{Weyl}$ por separado en cada región de coordenadas $\alpha = 1, 2, \dots$, para llegar a la métrica plana $ds_{(\alpha)}^2 = dz_{(\alpha)} d\bar{z}_{(\alpha)}$.

Las funciones de transición serán entonces

reparametrizaciones conformes $z_{(\alpha)} = f_{(\alpha\beta)}(z_{(\beta)}; t_i)$,

que combinadas con Weyl pueden ser reinterpretadas como transformaciones conformes (la métrica no cambia).

En otras palabras, en 2 dimensiones


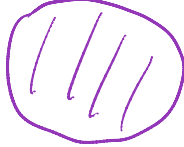

\rightarrow Variedades Riemannianas \simeq Variedades Complejas
 incluye $\underbrace{\hspace{10em}}$ Weyl \simeq $\underbrace{\hspace{10em}}$
 identificación por difeo \equiv Superficies de Riemann

Existe un teorema que relaciona el número de módulos M en una superficie dada con el número K de vectores de Killing conformes:

$$K - M = 3\chi$$

Teorema de Riemann-Roch

Tenemos entonces $M = K - 3\chi$, es decir (p. 354),

$\chi = 2$:		S^2	$K = 6$	\Rightarrow	$M = 0$	} Todas las g (o) dadas son equivalentes bajo $\text{Dif} \times \text{Weyl}$
$\chi = 1$:		D^2	$K = 3$	\Rightarrow	$M = 0$	
		$\mathbb{R}P^2$	$K = 3$	\Rightarrow	$M = 0$	