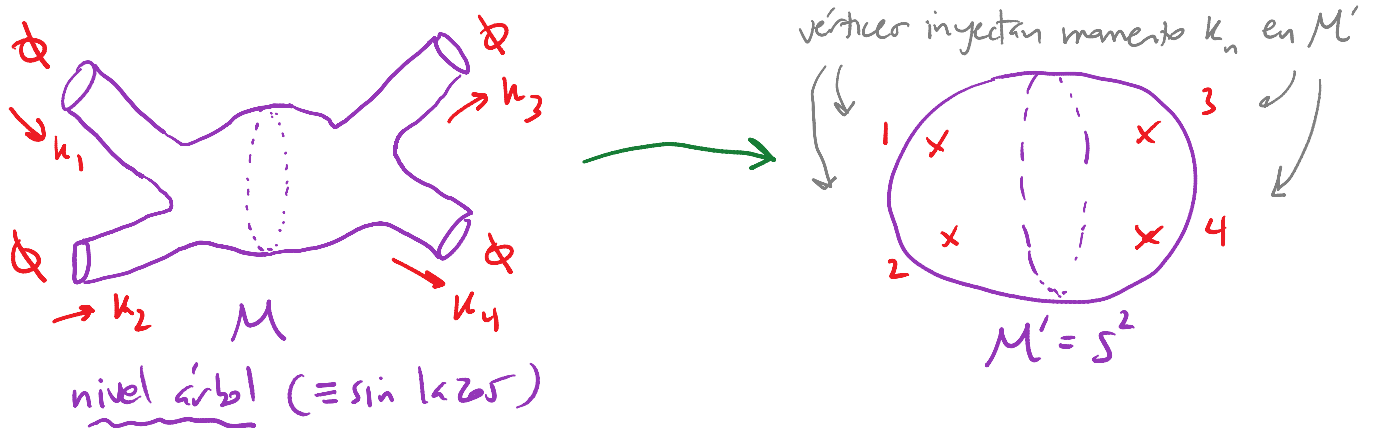


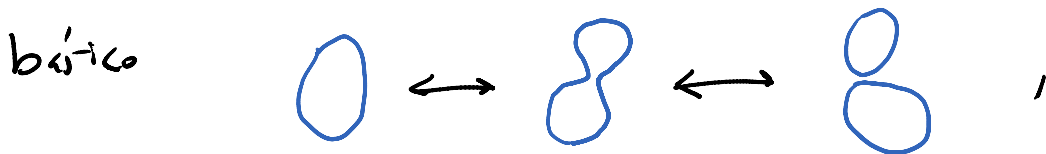
Esta versión integrada del vértice es entonces la que usaremos en el cálculo de amplitudes de dispersión, para respetar las simetrías locales en la hoja de mundo (y tenemos por tanto aquí otra manera de entender por qué $a=1=\tilde{a}$):



$$M^{(0)}(k_1, \dots, k_4) \sim \int_{S^2} DX^{\mu}(z, \bar{z}) \Big|_{S^2} e^{-S_p[X]} \prod_{\alpha} V_{\alpha}(k_{\alpha})$$

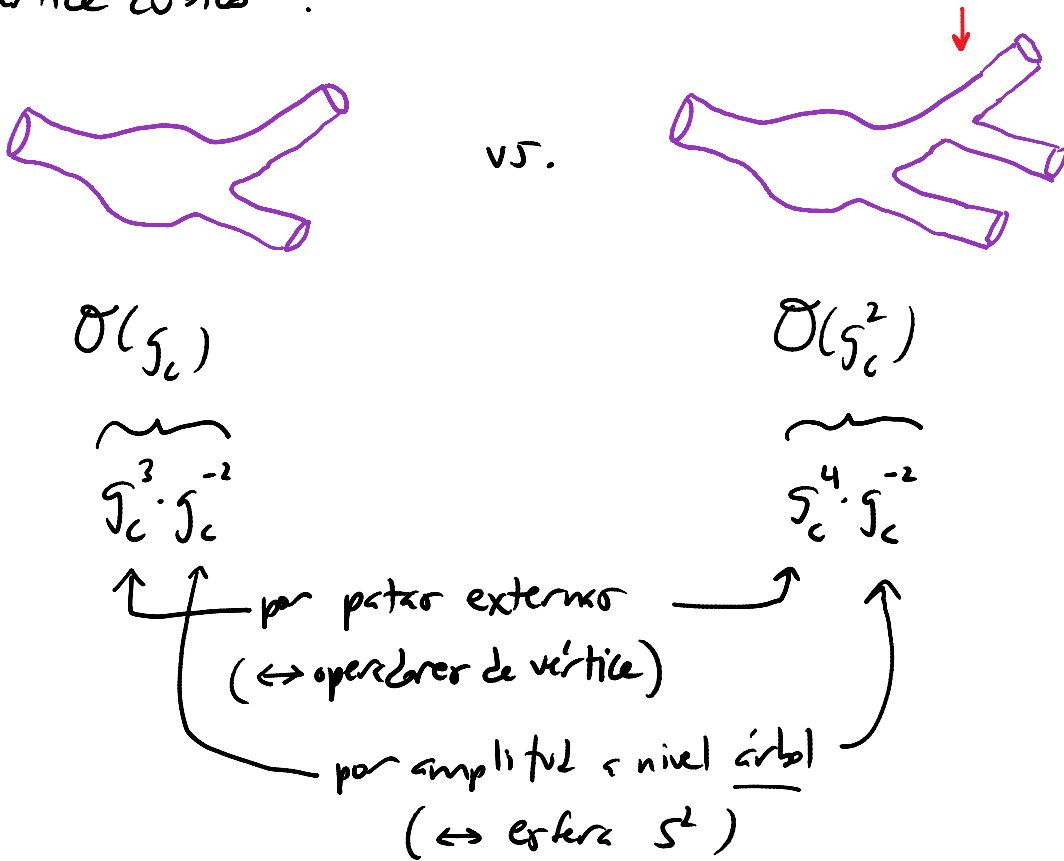
La integral $\int D^2 z_n$ contenida dentro de cada V_n es parte de la suma sobre todos los procesos posibles (salvo por una sutileza que veremos más adelante).

Notar que, si definimos la constante de acoplamiento de cuerdas g_c como el número adimensional que determina la amplitud de probabilidad del proceso de interacción



y controla por tanto la expansión perturbativa (de

modo que la teoría esté débilmente acoplada si $g_c \ll 1$, entonces debemos tener $N_d \propto g_c$, porque cada parte externa adicional en un diagrama requiere la presencia de un nuevo "vértice cúbico":



Fijaremos una convención precisa para N_d y demás constantes de normalización más adelante.

Otro ejemplo será el operador de vértice para el gravitón

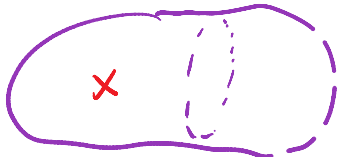
$$E_{\mu\nu} \propto \alpha_{-1}^{\mu} \alpha_{-1}^{\nu} |0,0;k\rangle \leftrightarrow V_h(\bar{z}, z; k, \epsilon) \equiv : \epsilon_{\mu\nu} \partial X^{\mu} \bar{\partial} X^{\nu} e^{ik \cdot X} :_{(\bar{z}, z)}$$

\uparrow simétrico

\uparrow dejar $(i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}})^2$ para N_h

$$V_h(k, \epsilon) \equiv N_h \int d^2z V_h(z, \bar{z}; k, \epsilon),$$

↑ también $\propto g_c$

que si insertarse en una hoja de mundo,  inyecta momento y la vibración apropiada.

De manera similar, podemos escribir el operador de vértice para cualquier estado de la cuerda (en lo que a las X^m respecta). En todo los casos, las condiciones de estado físico se traducen en que el operador de vértice correspondiente es primario y con pesos conformes $h=1=\tilde{h}$. P.ej., de la

Tarea 2 sabemos que $V_h(z, \bar{z}; k, \epsilon)$ efectivamente es primario solo si $k^\mu \epsilon_{\mu\nu} = 0$, y tiene pesos conformes

$$(h, \tilde{h}) = \left(\frac{\alpha' k^2}{4} + 1, \frac{\alpha' k^2}{4} + 1 \right) = (1, 1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{solo si } k^2 = 0. \\ \uparrow \end{array} \right.$$

Con un procedimiento análogo podemos determinar el mapeo estado-operador para los fonones: sabemos que

$$b_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} b(z) \quad \left(\leftrightarrow b(z) = \sum_m \frac{b_m}{z^{m+2}} \right)$$

$$c_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m-2} c(z) \quad \left(\leftrightarrow c(z) = \sum_m \frac{c_m}{z^{m-1}} \right),$$

así que

$$b_m |\Psi_1\rangle = 0 \quad \forall m \geq -1, \quad c_m |\Psi_1\rangle = 0 \quad \forall m \geq 2.$$

Inferimos entonces que

$$\boxed{|\Psi_1\rangle = b_{-1} |\downarrow\rangle} \quad (\text{recordar que } \{b_m, c_n\} = \delta_{m,-n}).$$

Podemos similarmente deducir que

$$\boxed{b_{-m} \leftrightarrow \frac{1}{(m-2)!} \partial^{m-2} b(0) \quad \forall m \geq 2, \quad c_{-m} \leftrightarrow \frac{1}{(m+1)!} \partial^{m+1} c(0)}$$

(y que, nuevamente, aplicaciones sucesivas de los modos de creación se traducen en el producto de los operadores correspondientes en orden normal (en forma)).

Así que, en particular,

$$|\downarrow\rangle = c_1 \underbrace{b_{-1}}_{\leftrightarrow 1} |\downarrow\rangle \longleftrightarrow c(0),$$

y por tanto, los representantes de las clases de equivalencia

$$|\Psi_{V_x}\rangle |\downarrow\downarrow\rangle \longleftrightarrow V_x(0,0) c(0) \tilde{c}(0).$$

↑ Construido solo en X^m

Conviene notar que si $V_x(z, \bar{z})$ corresponde a un estado

físico (primario en pesos conformes $(h, \tilde{h}) = (1, 1)$), entonces (dado que $c(z)$ tiene peso $(-1, 0)$ y $\tilde{c}(\bar{z})$ tiene pesos $(0, -1)$) la combinación $c(z)\tilde{c}(\bar{z})V_X(z, \bar{z})$ es invariante conforme (justo como $V_X \equiv \int d^2z V_X(z, \bar{z})$). Usaremos esto más adelante.

Resumiendo lo dicho hasta aquí, nuestra receta básica para calcular amplitudes de dispersión (más específicamente, el elemento de matriz invariante) es

$$M(k_1, k_2, \dots, k_N) = \sum_{\mathcal{M}} M_{\mathcal{M}}(k_1, k_2, \dots, k_N),$$

$$\text{con } M_{\mathcal{M}}(k_1, \dots, k_N) \equiv \underbrace{\int \frac{\mathcal{D}g_{ab}(\sigma) \mathcal{D}X^{\mu}(\sigma)}{\text{Dif} \times \text{Weyl}} \Big|_{\mathcal{M}} e^{-S_p[g, X]} V_1(k_1) \dots V_N(k_N)}_{\equiv \langle V_1(k_1) \dots V_N(k_N) \rangle_{\mathcal{M}}}$$

$$V_n(k) = N_n \int d^2\sigma \sqrt{g} V_i(\sigma; k)$$

Invariante bajo Dif x Weyl

(\Rightarrow invariante conforme en norma plana)

Hemos visto que esto requiere en particular $k^2 = -m^2$

O , en términos de diagramas,

$$\begin{aligned}
 &= \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \dots \\
 &= \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} + \dots \\
 &= \langle V_1 \dots V_N \rangle_{S^2} + \langle V_1 \dots V_N \rangle_{T^2} + \dots
 \end{aligned}$$

de esta forma, ¡¡calculando correladores en una teoría de campo libre 2-dimensional podremos determinar amplitudes de dispersión en una teoría interactuante D-dimensional que incluye a la gravedad !!

Hagamos aquí un par de pasos para resaltar una conexión interesante. Hasta ahora hemos identificado al gravitón libre (en $D=26$)

$$\epsilon_{\mu\nu} \propto \alpha_{-1}^{\mu} \tilde{\alpha}_{-1}^{\nu} |0,0;k\rangle$$

← incluye $\frac{2}{\alpha'}$

$$\leftrightarrow V_h(k, \epsilon) = N_h \int d^2z \epsilon_{\mu\nu} : \partial X^{\mu} \bar{\partial} X^{\nu} e^{ik \cdot X} (z, \bar{z}) :$$

con base en sus propiedades de transformación bajo Poincaré (masa cero, espín 2). Con la receta para amplitudes de dispersión, podremos próximamente verificar que estos 'gravitones' realmente interactúan como Einstein predice (salvo pequeñas correcciones, relevantes solo a altas energías).

Pero, aún así, lo que no queda del todo claro es en qué sentido este estado de oscilación de la cuerda tiene que ver con el gravitón entendido como una pequeña fluctuación de la geometría. Esto se aclara si notamos que cuando la métrica del espaciotiempo es

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x),$$

tenemos

$$\begin{aligned} S_p^g[X] &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu g_{\mu\nu}(X) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu \eta_{\mu\nu}}_{S_p[X]} + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu h_{\mu\nu}(X), \end{aligned}$$

por lo que la integral funcional relevante es

$$\int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_p^g[X]} = \int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_p[X]} \left(1 - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma h_{\mu\nu}(X) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu + \dots \right).$$

Tomando 1 solo modo de Fourier, $h_{\mu\nu}(X) = \epsilon_{\mu\nu}(k) e^{ik \cdot X}$,
 i vemos que lo que aparece en el integrando es precisamente
el vértice del gravitón $V_h(k, \epsilon)$!

Sabemos ya que insertar 1 vértice $V(k, \epsilon)$ corresponde a
 agregar 1 gravitón $\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0, 0; k\rangle$, así que insertar
 $e^{-V_h(k, \epsilon)}$ corresponde a agregar una especie de estado

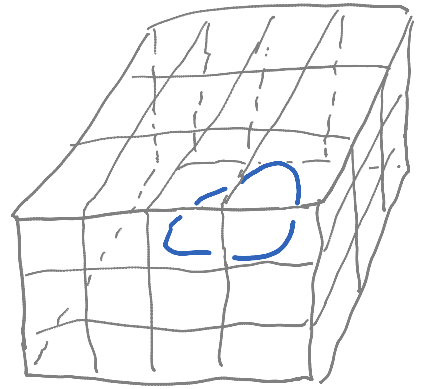
coherente de gravitones $\sim \exp(-\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu |0, 0; k\rangle)$

($\neq \exp(-\epsilon_{\mu\nu} \alpha_{-1}^\mu \tilde{\alpha}_{-1}^\nu) |0, 0; k\rangle$, que sería 1 único estado
 exacto en un estado coherente de oscilación, es decir,
 un estado coherente desde la perspectiva 2-dimensional).

Y, con lo que acabamos de ver, aprendemos entonces que
 un fondo con métrica $g_{\mu\nu}(x)$ no trivial en verdad puede
 entenderse como un estado coherente de gravitones.

De manera similar, la receta para describir cuerdas que

se propagan sobre un fondo no trivial de cualquier de los infinitos campos asociados a estados de vibración de las cuerdas ($\Phi(x), g_{\mu\nu}(x), B_{\mu\nu}(x), \varphi(x), \dots$) es excitaciones los operadores de vértice correspondientes. Verificamos entonces la interpretación ya enfatizada en varios puntos a lo largo del curso, donde entendemos a las cuerdas como pequeñas excitaciones de una estructura subyacente que representa una drástica generalización del espaciotiempo.



(No debe confundirse el hecho de que tenemos cuerdas propagándose sobre un fondo que a su vez está, en cierto sentido, "hecho" de cuerdas. Esta situación es exactamente análoga a la de fotones propagándose a través de, p.ej., el campo magnético terrestre. En ambos casos, estamos hablando de pequeñas fluctuaciones por encima de un valor de fondo no trivial para el campo correspondiente.)

Regresando a las amplitudes de dispersión, hemos visto que debemos sumar sobre superficies M compactas y conexas (para obtener la parte conexas de la amplitud); pero ¿exactamente de qué tipo?

En los viejos tiempos, antes de que se descubrieran las D-branas, la respuesta a esta pregunta habría dependido de y definido a exactamente cuál teoría de cuerdas bosónicas estamos considerando. Más concretamente, pensábamos que existían (al menos) 4 teorías de cuerdas bosónicas distintas:

1) Cuerdas Bosónicas Cerradas Orientadas

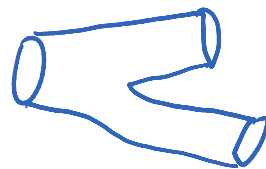


Espetro libre: ϕ ; ψ , $h_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$; ...

$$\underbrace{\quad}_{m^2 = -4/\alpha'} \quad \underbrace{\quad}_{m^2 = 0} \quad \underbrace{\quad}_{m^2 = 4/\alpha', \dots}$$

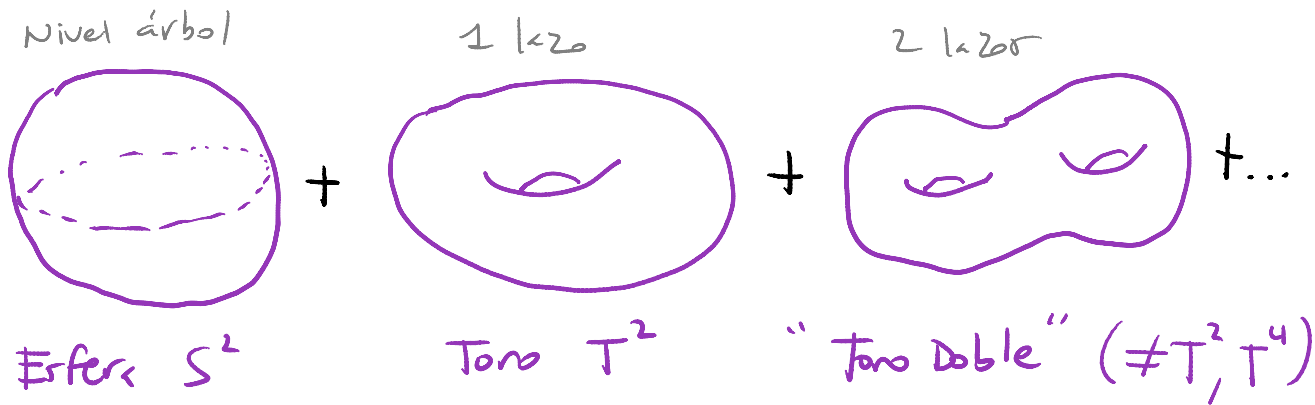
1 sola interacción: (ó)

Correspondiente al diagrama



Así que en este caso, la expansión perturbativa consiste

de una suma sobre superficies orientables y sin bordes:



género $m=0$ $m=1$ $m=2$

$\uparrow \equiv$ número de 'manijas'

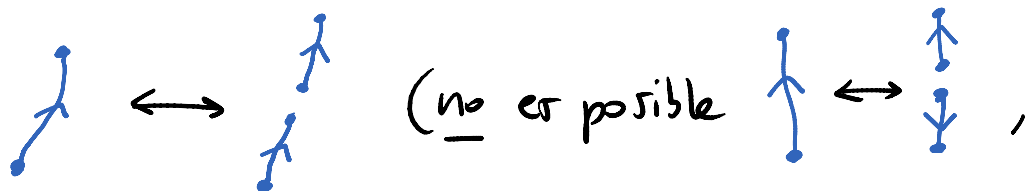
2) Cuerdas Bosónicas Abiertas y Corredor orientado

(donde en los viejos tiempos se consideraba solo el caso invariante de Poincaré, con las cuerdas abiertas libres de moverse en $D=26$).

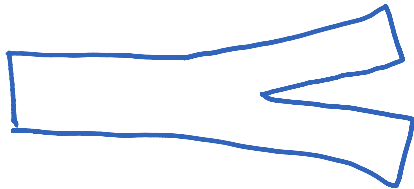
Espectro libre: $\Phi, \phi; A_\mu, \psi, h_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}; \dots$

$m^2 = -4/\alpha' \quad -1/\alpha' \quad 0 \quad 1/\alpha', 2/\alpha', \text{etc.}$

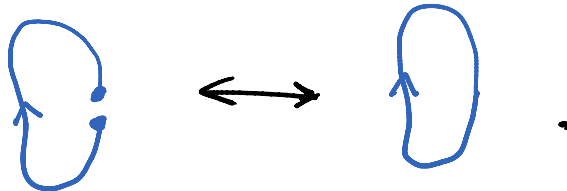
La interacción básica para las cuerdas abiertas es



así que los 2 extremos de la cuerda abierta NO son físicamente equivalentes), correspondiente al diagrama

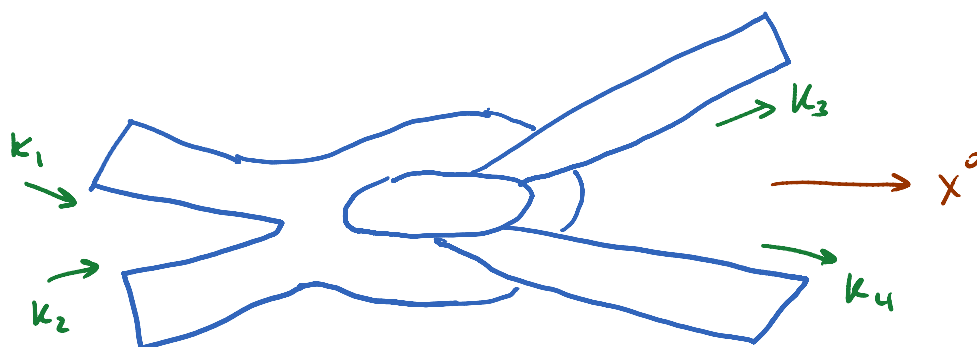


Importantemente, debido que la posibilidad de que 2 extremos se unan es un proceso puramente local, en automático queda incluido también el proceso

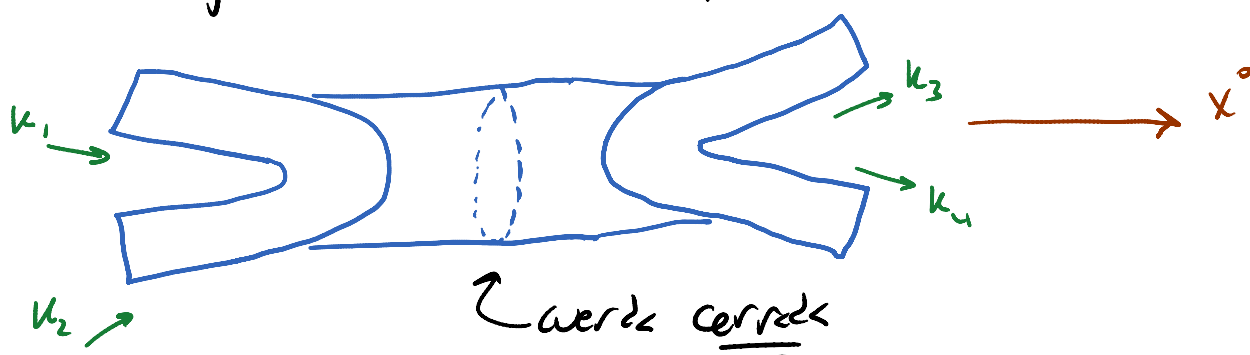


Descubrimos entonces que no puede existir una teoría de cuerdas abiertas (interactuantes) sin cerradas! Y esto implica en particular que cualquier teoría de cuerdas inevitablemente incluye a la gravedad.

Otra manera de decir esto mismo es que un proceso de dispersión "no planar" de dispersión a 1 lazo en cuerdas abiertas en el espaciotiempo, como p.ej.



tiene la misma topología, y por tanto es descrito con la misma hoja de mundo M que



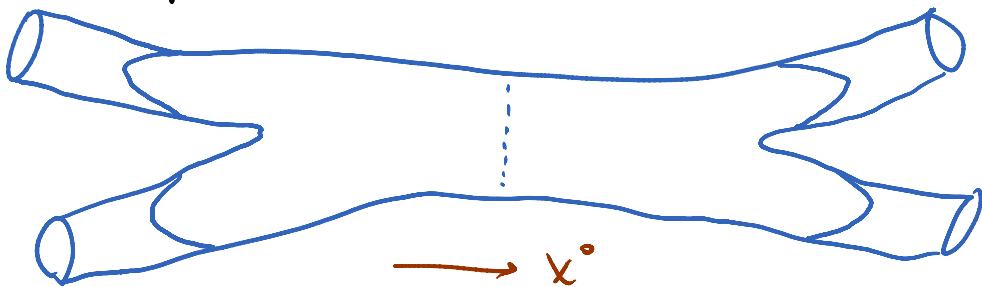
La integral $\int DX^\mu(\sigma) \Big|_M e^{-S_p[X]} V_1(k_1) \dots$ incluye inevitablemente ambos procesos, y por esta razón, al hacer el cálculo se encuentra que dicha amplitud de cuerdas abiertas tiene polos cuando la energía en el marco del centro de masa

$$s \equiv -(k_1 + k_2)^2 = -\frac{4}{\alpha'}, 0, \frac{4}{\alpha'}, \dots, \text{ que coinciden}$$

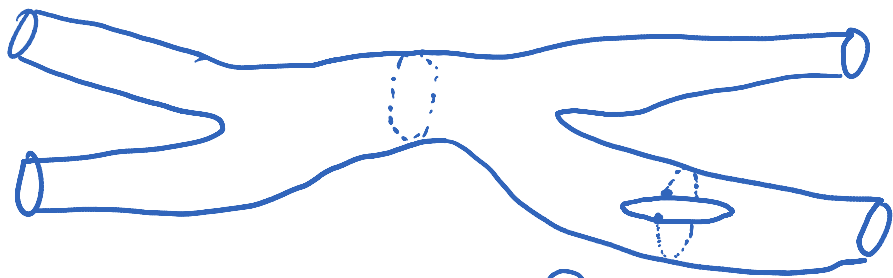
justamente con el espectro de cuerdas cerradas. Esto establece "experimentalmente" la existencia de las cuerdas cerradas, que deben entonces incluirse en la teoría como estados asintóticos (la conexión entre



valor y estados asintóticos de 1 partícula es bien conocido en teoría de campos: Källen-Lehmann). 112:23/04/13

Podemos notar además que estos cuerdas cerradas NO son libres, porque cuando menos pueden interactuar convirtiéndose primero en cuerdas abiertas:



Y de hecho, la integral $\int_{\mathcal{M}} DX^\mu(\sigma) e^{-S_p[x]} \mathcal{V}_1(k_1) \dots$ que describe este proceso incluye también p.ej.

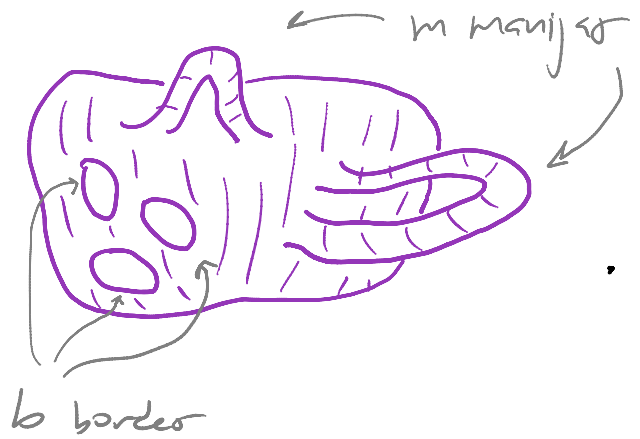


así que la interacción  \leftrightarrow  no es opcional.

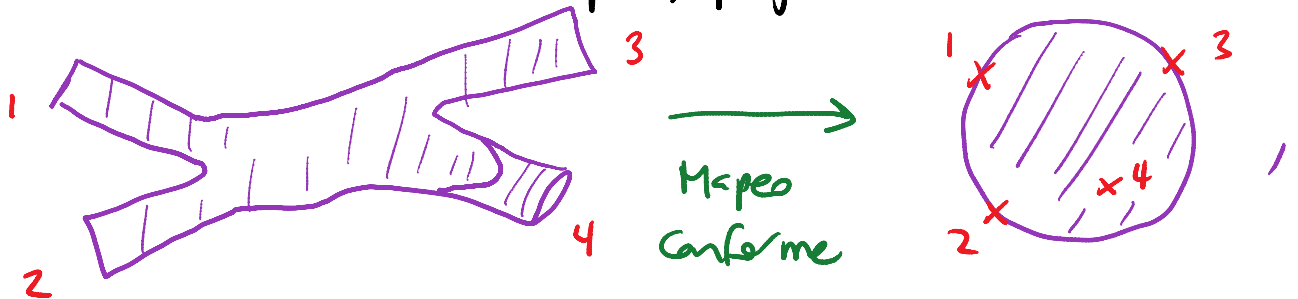
En esta teoría, entonces, la expansión perturbativa consiste de la suma sobre superficies orientables, con o sin bordes:



$$= \sum_{m,b=0}^{\infty}$$



Podemos notar además que, p.ej.



es decir, mientras que los vértices de cuerdas cerradas se insertan en el interior de la hoja de mundo M , los de

cuerdas abiertas se insertan en el borde. En ambos casos, integramos sobre sus posibles ubicaciones en M .

A partir de esto podemos entender por qué los 2 extremos de una cuerda abierta son físicamente distintos. Como verificaremos en la Tarea 4, en el caso de la cuerda abierta el mapeo estado-operador identifica al operador de vértice para el fotón

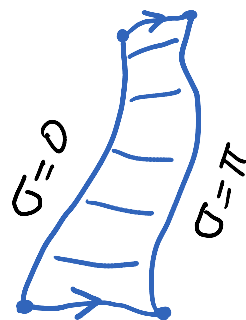
$$\varepsilon_{\mu}^{\nu} (0; k) \longleftrightarrow V_A(z, \bar{z}) = \varepsilon_{\mu}^{\nu} : \frac{1}{2} (\partial + \bar{\partial}) X^{\mu} e^{ik \cdot X} (z, \bar{z}) :$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow V_A(k; \varepsilon) &= N_A \int d^2z \varepsilon_{\mu}^{\nu} : \frac{1}{2} (\partial + \bar{\partial}) X^{\mu} e^{ik \cdot X} (z, \bar{z}) : \\ &= N_A \int d\tau \varepsilon_{\mu}^{\nu} : e^{ik \cdot X} \partial_{\tau} X^{\mu}(\tau) : \end{aligned}$$

Así que la receta para describir a la cuerda en un fondo no trivial del campo electromagnético $A_{\mu}(x)$ es agregar a la acción el término de borde

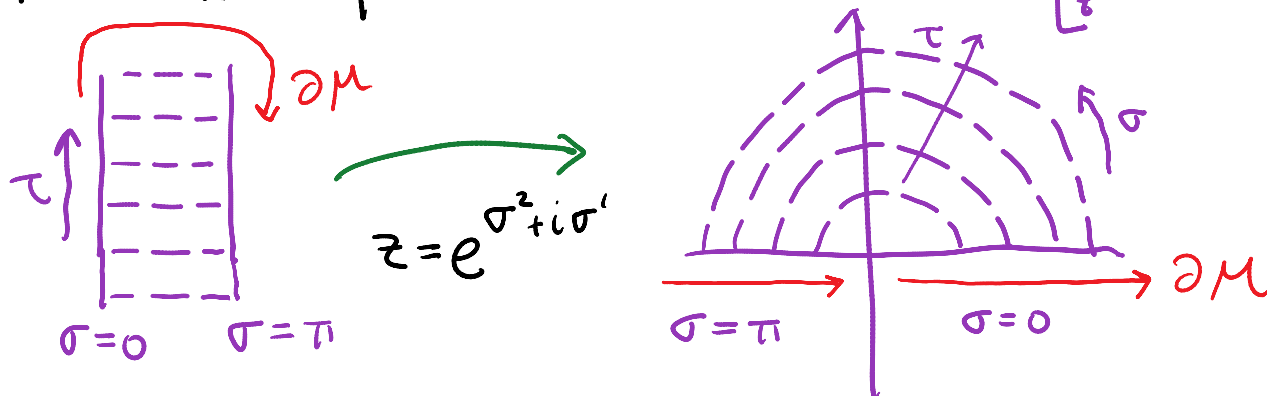
$$S_A = \int_{\partial M} d\tau A_{\mu}(X(\tau)) \partial_{\tau} X^{\mu}$$

Esto nos dice que los extremos de la



cuerdas son cargas puntuales bajo $A_\mu(x)$.

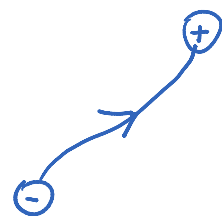
Recordando que la frontera ∂M es



Vemos que

$$\int_{\partial M} \tau A_\mu \partial_\tau X^\mu = + \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [A_\mu \partial_\tau X^\mu]_{\sigma=0} - \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [A_\mu \partial_\tau X^\mu]_{\sigma=\pi}$$

así que los extremos tienen cargas eléctricas opuestas (que se neutralizan entonces al juntarse).




Solo hay carga eléctrica de 1 tipo, como corresponde al grupo de norma abeliano $U(1)$.

Desde los 70s se conoció el modo de generalizar al caso no abeliano: basta con postular (a meno) la existencia de N tipos distintos de extremos finales ($\leftrightarrow N$ tipos de cargas; p.ej., con $N=3$ el extremo final sería análogo a un quark $\left(\begin{matrix} \text{rojo} \\ \text{verde} \\ \text{azul} \end{matrix} \right)$),

y los correspondientes N tipos distintos de extremos iniciales ($\leftrightarrow N$ 'anticargas'; en el ejemplo $N=3$, el extremo inicial sería

análogo a un antiquark $\begin{pmatrix} \text{antirrojo} \\ \text{antiverde} \\ \text{antiazul} \end{pmatrix}$).

Con esto agregamos nuevos grados de libertad a la cuerda, localizados en los extremos. Declaramos que estos grados de libertad son internos y no dinámicos, de manera que preservemos automáticamente la invariancia bajo Poincaré y la invariancia conforme.

Para especificar por completo el estado de una cuerda, debemos ahora elegir valores $1 \leq I, J \leq N$ para los extremos inicial y final:  I \rightarrow J

$$\left\langle \alpha_{-n_1}^{\mu_1} \alpha_{-n_2}^{\mu_2} \dots |0; k; I, J\rangle\right\rangle$$

La combinación lineal más general es entonces

$$|\dots; k; \lambda\rangle \equiv \sum_{I, J} \lambda_{IJ} |\dots; k; I, J\rangle$$

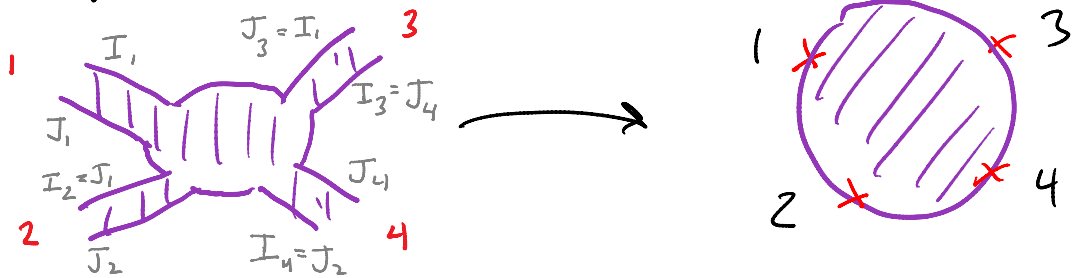
Factor de Chan-Paton

Los campos resultantes son por tanto matrices
 $N \times N$. P.ej.

$$\alpha_{-1}^{\mu} |0; k; IJ\rangle \leftrightarrow (A_{\mu}^{(x)})_{IJ}$$

(o, si preferimos, $A_{\mu}^{(x)} \equiv \sum_a A_{\mu}^a(x) T^a$, con las T^a una bases para matrices $N \times N$, p.ej., N^2 matrices hermiticas con $\text{Tr}(T^a T^b) = \delta^{ab}$).

Las amplitudes



incluirán factores $\sim \text{Tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$ Factores de Chan-Paton
y son entonces invariantes bajo

$$U(N): \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1' \\ z' \\ \vdots \\ N' \end{pmatrix}.$$

En el espaciotiempo tenemos al campo de norma
 $A_{\mu}(x)$ (que transforma en la rep. adjunta), así
que $U(N)$ figura en nuestra teoría como una

simetría local.

Desde la perspectiva antigua, entonces, basados en estos factores de Chen-Peterson abstractos, habríamos contabilizado infinitos teorías distintas de cuerdas abiertas y cerradas orientadas, con grupo de normas $U(N)$, $N=1,2,3,\dots$. Y el caso donde solo hay cuerdas cerradas puede añadirse a la lista como $N=0$.

Pero nosotros entendemos bien que éstas no son en realidad distintas teorías, sino distintos sectores de una misma teoría, donde tenemos N D25-branas presentes. Los índices de Chen-Peterson simplemente nos informan en cuál de los N D-branas inicia/termina la cuerda abierta en cuestión (p.256).

Y, de la mano de esto, entendemos también que existe un número infinito de sectores adicionales de la misma teoría, donde se tienen Dp-branas con distintos