



¿Cómo podemos agregar interacciones? Nuestro primer instinto quizás sería añadir términos cúbicos o más altos a la acción de Polyakov $S_p[X]$. Ellos serían interacciones en la teoría de campos en 2 dimensiones (que, como veremos más adelante, es lo que se tiene cuando el fondo en el que se propaga la cuerda es no trivial - p.ej. espaciotiempo curvo); pero en el espaciotiempo seguiríamos teniendo una sola cuerda que se propaga libremente.

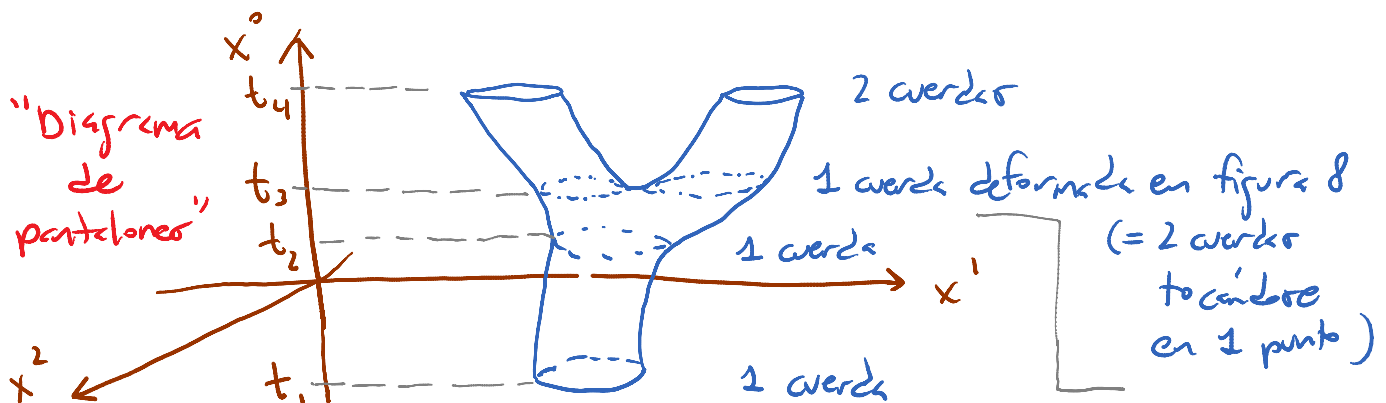
El punto importante aquí es que nuestra descripción es en primera, y no segunda, cuantización. La situación es completamente análoga en la primera cuantización de una partícula. Sabemos que en ese caso podemos incorporar interacciones perturbativamente, agregando a mano vertices de interacción (p. 112) de 3 o más patas, es decir, la posibilidad de que

1 partícula se convierta en 2, ,

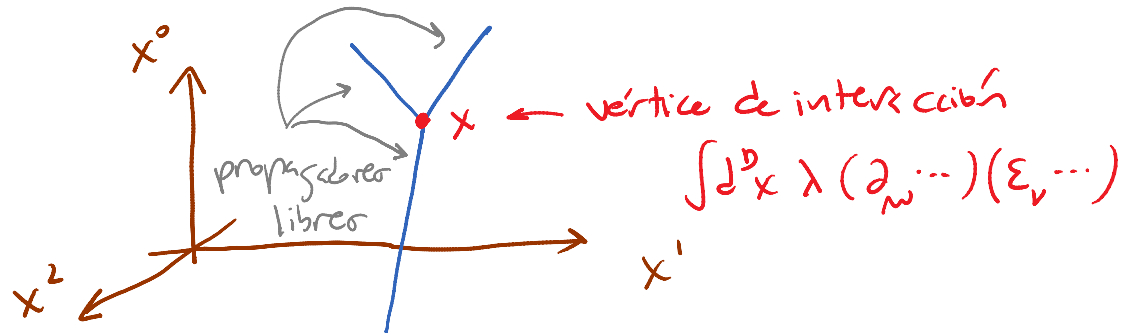
o 1 partícula se convierta en 3, , etc.

La libertad de elegir el tipo de vértices que añadimos, así como los factores que corresponden a cada uno de estos vértices en las reglas de Feynman (constantes de acoplamiento, dependencias del momento y/o polarización de las partículas involucradas, etc.) refleja la gran variedad de teorías de partículas (\leftrightarrow campos) interactuantes que es posible construir (aunque faltaría por supuesto analizar unitariedad, causalidad, renormalizabilidad, etc.).

Para agregar interacciones en cuerdas, seguimos entonces el mismo camino. Permitiremos, p.ej., que 1 cuerda se convierta en 2 (o viceversa):

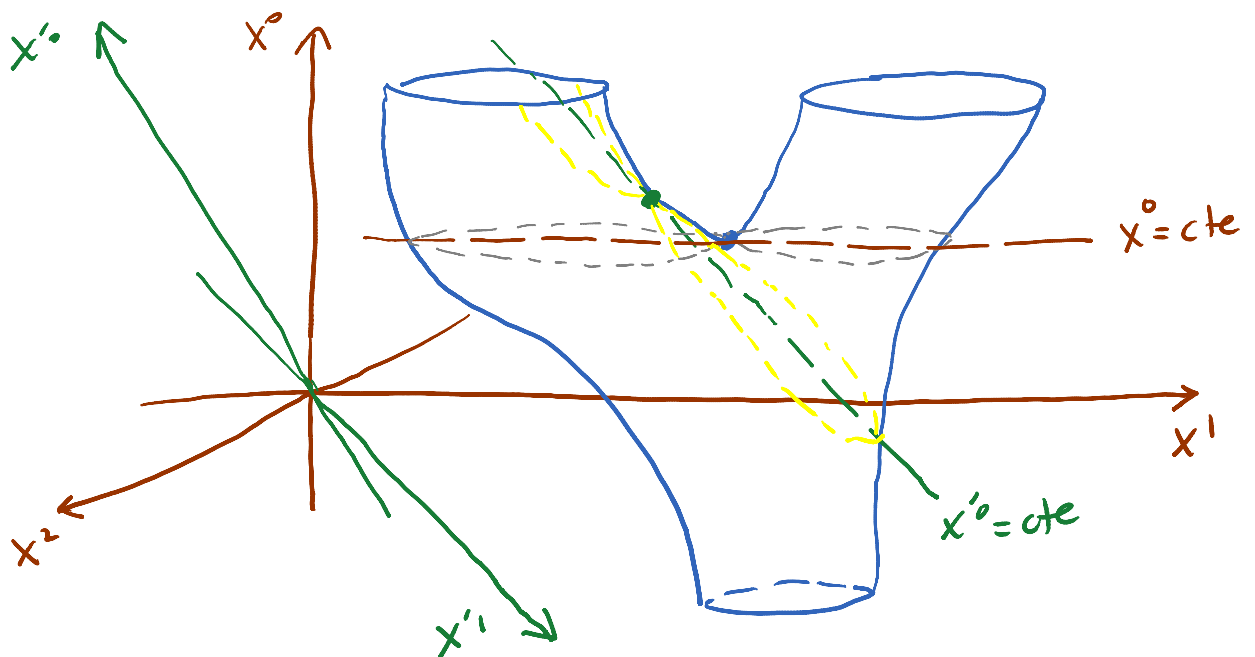


Es importante notar que existe una diferencia esencial entre esto y el vértice cúbico para partículas



En el caso de partículas, existe un punto bien definido en su trayectoria donde ocurre la interacción, y todos los observadores están de acuerdo en cuál es.

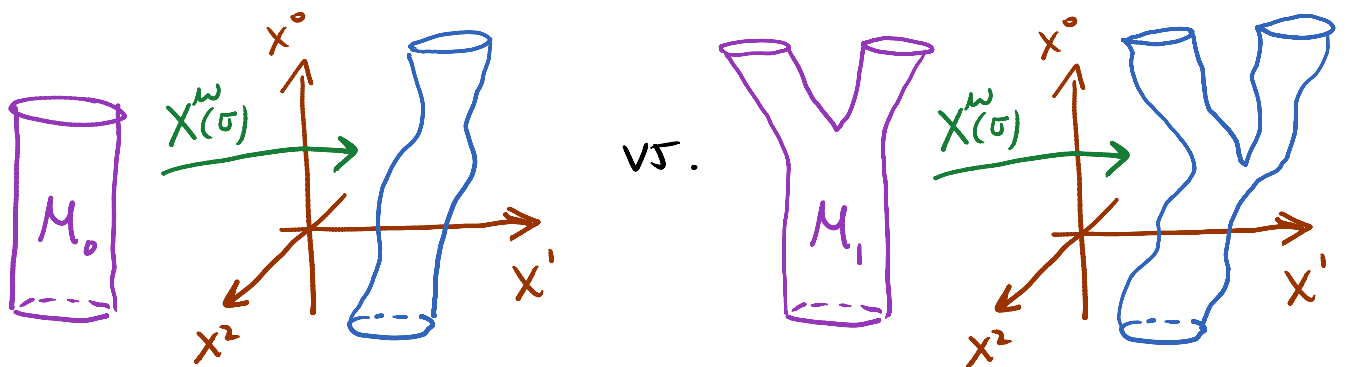
Pero en el caso de cuerdas, No es así: el punto en el espaciotiempo donde la cuerda se separa en 2 depende del marco de Lorentz:



Localmente, cualquier punto en la superficie barrida por la cuerda tiene el mismo aspecto.

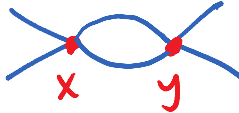
En la descripción de la evolución de la cuerda,
¡¡NO HAY ENTONCES VÉRTICES DE INTERACCIÓN!!

No tenemos opción más que pensar las nuevas trayectorias (donde 1 cuerda se divide en 2) con el mismo factor $e^{-S_p[X]}$ que las trayectorias libres. Lo único que las distingue es su topología, y por tanto, la topología de la hoja de mundo correspondiente:



$$\int_{M_0} \mathcal{D}X^\mu(\sigma) e^{-S_p[X]}$$

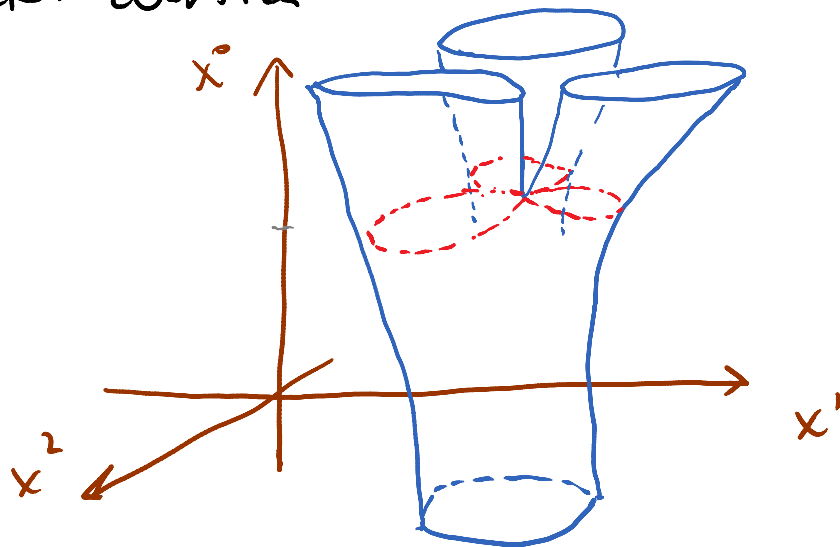
$$\int_{M_1} \mathcal{D}X^\mu(\sigma) e^{-S_p[X]}$$

Sabemos que las divergencias UV en teorías de partículas (\leftrightarrow campos) están relacionadas con los límites de integración en los diagramas de Feynman donde 2 o más vértices coinciden en el espaciotiempo (\leftrightarrow energía de partículas en lazo divergen). P.ej.  $= \lambda^2 \int d^D x d^D y \dots$

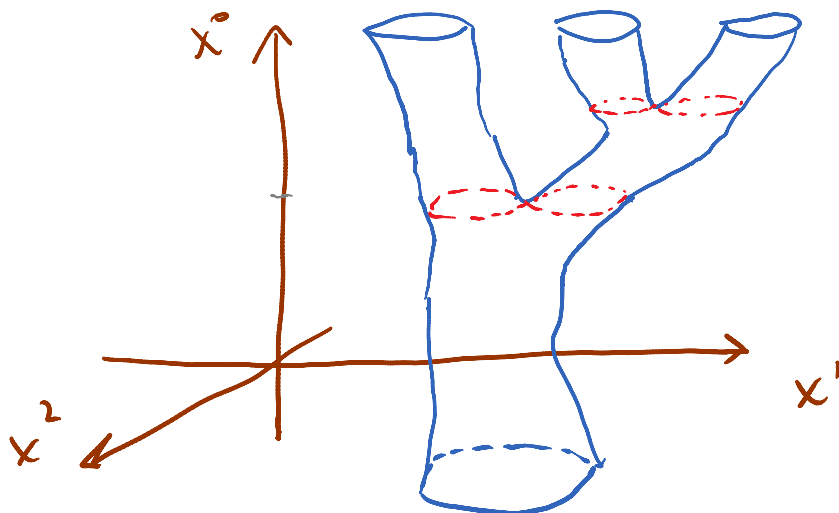
en el límite $x \rightarrow y$.

En cuerdas no existe tal posibilidad, y por esta razón el comportamiento UV se mejora drásticamente. (De hecho, ¡encontraremos que no existen ya divergencias UV!))

Ahora, ¿qué hay de la posibilidad de que 1 cuerda se convierta en 3 o más cuerdas? Aquí nos llevamos otra gran sorpresa: notamos que la trayectoria para una "interacción cuártica"



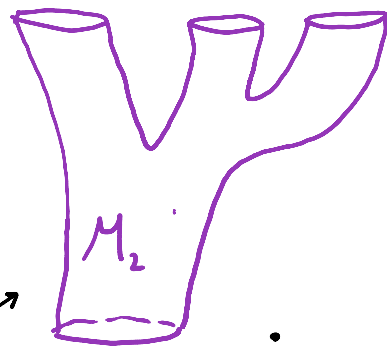
tiene exactamente la misma topología que la trayectoria con 2 "interacciones cúbicas"



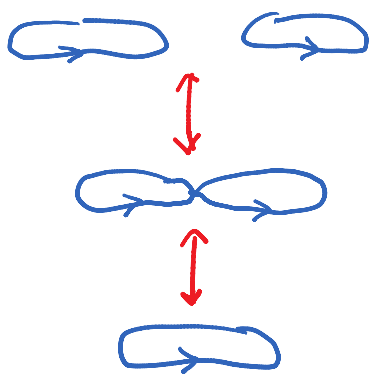
así que ambas posibilidades estén automáticamente incluidas en la integral funcional correspondiente,

$$\int_{M_2} DX^\mu(\sigma) e^{-S_p[X]}$$

en las funciones de encaje $X^\mu(\sigma)$ definidas sobre la hoja de mundo \rightarrow

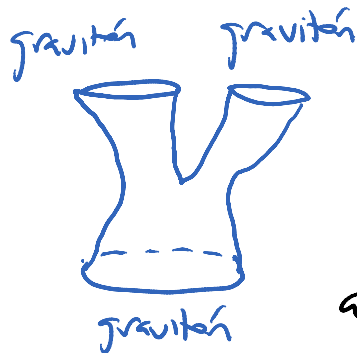


Más en general, la conclusión es que todos los posibles "vértices" se incorporan automáticamente e inevitablemente al postular el proceso de interacción "cúbico" básico:

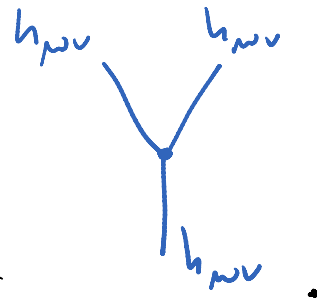


Sorprendentemente, dependiendo de los estados de oscilación

de las cuerdas inicial / final, este único proceso de interacción puede reproducir todas las interacciones en la teoría de campo correspondiente! Veremos, p.ej., que



reproduce el vértice
cúbico apropiado en la
acción de Einstein-Hilbert



Hemos visto entonces que **¡¡ NO HAY LIBERTAD ALGUNA EN EL TIPO DE INTERACCIONES QUE SE PUEDEN AÑADIR !!**

La incorporación de interacciones se logra simplemente sumando sobre hojas de mundo con distintas topologías

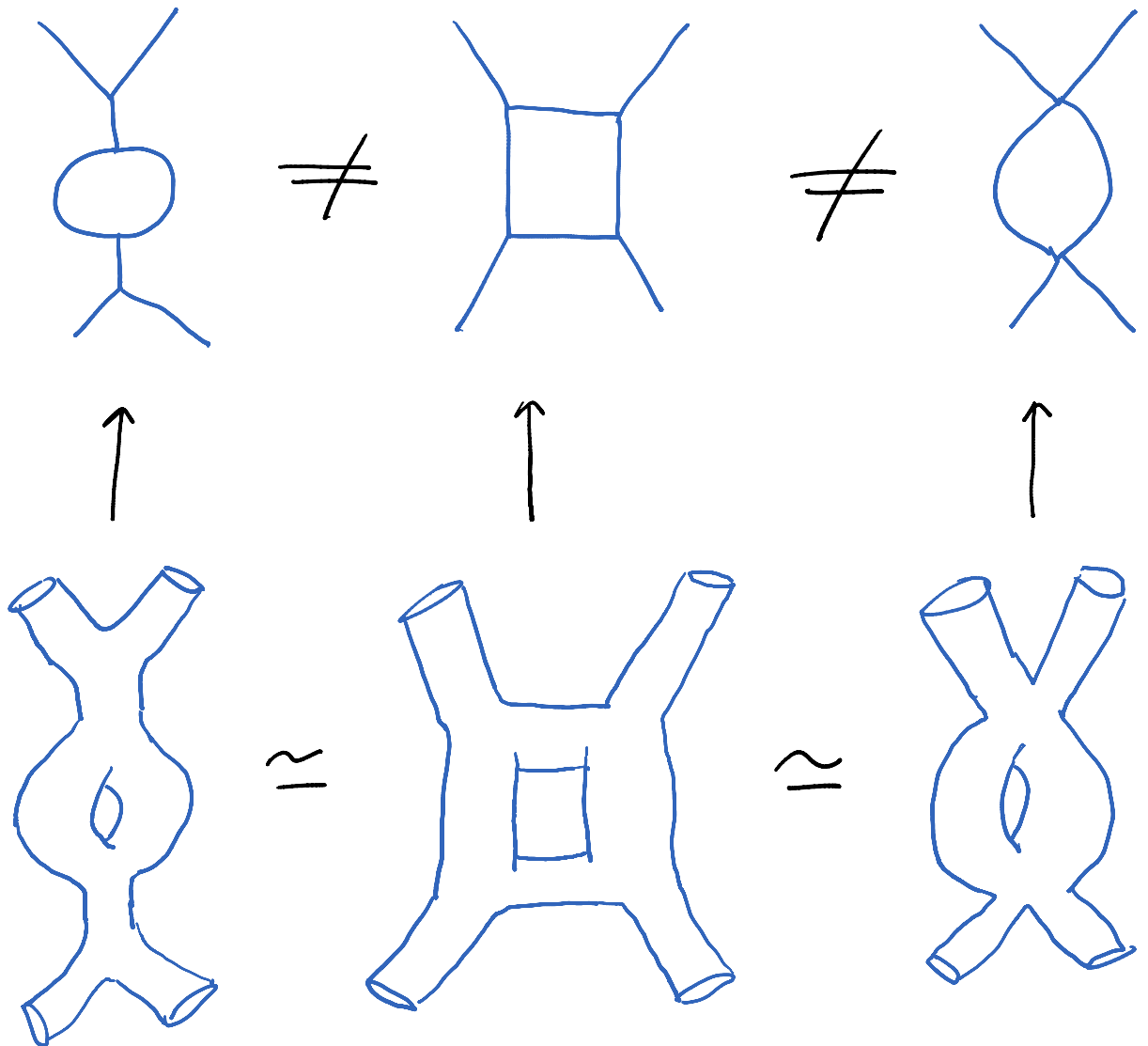
-no existe la posibilidad de inventar a mano distintos vértices asociados a reglas de Feynman arbitrarias.

(Es por esto que la primera cuantización en cuerdas es mucho más satisfactoria que en el caso de partículas.)

Para definir una teoría de cuerdas, basta con especificar los grados de libertad y las reglas de propagación libre. Esta es la razón por la cual existen pocos

teoría de cuerdas, en comparación con muchísimos teorías de partículas.

Podemos notar además que diagramas de Feynman que serían distintos al nivel de partículas puedan ser equivalentes (por tener idéntica topología) al nivel de cuerdas:



En el caso de cuerdas cerradas (y orientadas), la simplificación resulta ser tan drástica que existe ¡1 solo diagrama de Feynman en cada orden de la expansión perturbativa (vs. $\sim L!$ diagramas de partículas a $L \gg 1$ lazos)!

Ahora, para partículas, podemos calcular el propagador

$$\langle 0 | T \{ \varphi(x) \varphi(x') \} | 0 \rangle \sim \begin{array}{c} x' \\ \uparrow \\ | \\ x \end{array} + \begin{array}{c} x' \\ \uparrow \\ \circ \\ | \\ x \end{array} + \begin{array}{c} x' \\ \uparrow \\ \circ \\ \circ \\ | \\ x \end{array} + \dots + \begin{array}{c} x' \\ \uparrow \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ | \\ x \end{array} + \begin{array}{c} x' \\ \uparrow \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ | \\ x \end{array} + \dots,$$

o más en general, funciones de correlación, ya sea en espacio de posiciones,

$$\langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \} | 0 \rangle = \begin{array}{c} x_n \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ x_{n-1} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ x_1 \\ \uparrow \\ x_2 \end{array} \left(= \text{suma sobre diagramas conexos} \right. \\ \left. (= \text{sin "burbujas de vacío"}) \right)$$

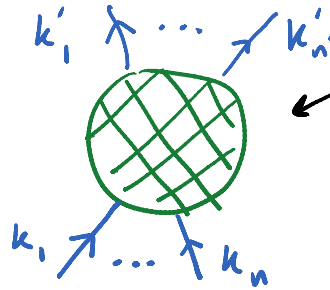
o en espacio de momentos,

$$\int d^D x_i e^{i k_i \cdot x_i} \dots \langle 0 | T \{ \varphi(x_1) \dots \} | 0 \rangle = \begin{array}{c} k_n \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ k_{n-1} \\ \uparrow \\ \text{---} \\ \uparrow \\ k_1 \\ \uparrow \\ k_2 \end{array} \delta^{(D)}(k_1 + \dots + k_n),$$

para después extraer (a través del procedimiento de "reducción LSZ") las amplitudes de dispersión

$$M(k_1, \dots, k_n \rightarrow k'_1, \dots, k'_n) =$$

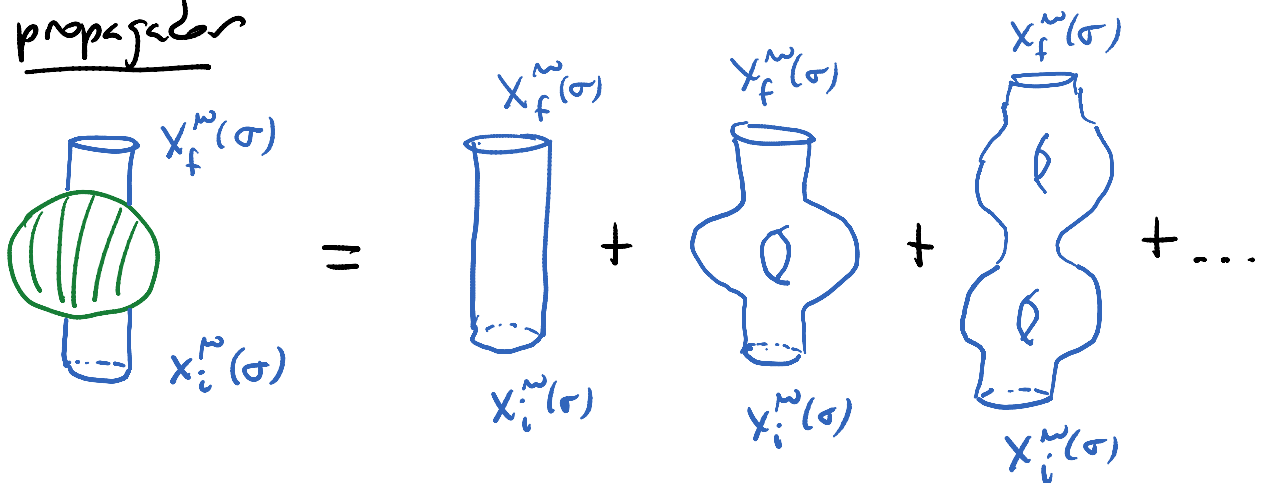
"elemento de matriz invariante"



suma sobre diagramas conexos y amputados, con patas externas en la capa de masa

(dato básico para calcular secciones eficaces o tasas de decaimiento).

En cualquier caso, podríamos también intentar calcular correladores fuera de la capa de masa, como p.ej. el propagador



$$= \sum_{\mathcal{M}} \int \mathcal{D}X^\mu(\sigma) \Big|_{\mathcal{M}} e^{-S_p[X]} \cdot X^\mu(\sigma', \sigma_i^2) = X_i^\mu(\sigma')$$

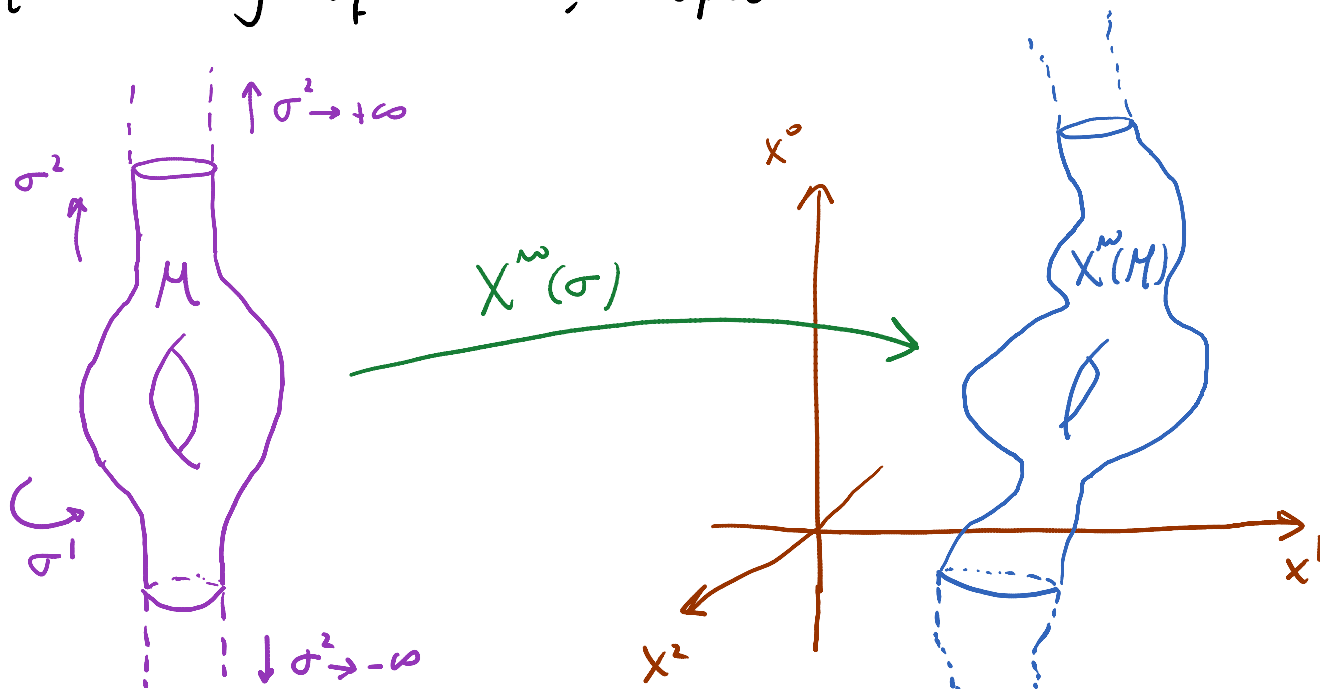
Pero resulta difícil definir estas cantidades locales de manera consistente con las simetrías. [Ver p.ej. artículos de Cohen, Moore, Nelson, Polchinski en '86 y '87.]

Curiosamente, se encuentra que preservar las simetrías en la hoja de mundo está relacionado con preservar las simetrías en el espaciotiempo, y debemos recordar que para las cuerdas estas últimas incluyen los difeos en el espaciotiempo. No es de extrañar entonces que sea difícil definir amplitudes entre puntos espaciotemporales específicos, porque en presencia de gravedad, las coordenadas con que etiquetamos a estos puntos NO tienen significado intrínseco.

Lo que sí podemos definir con relativa facilidad son cantidades globales de interés físico directo: las amplitudes de dispersión, que corresponden al caso particular donde las cuerdas se propagan desde el pasado remoto hasta el futuro remoto.

Las condiciones iniciales y finales para $\int \mathcal{P}X^{\mu}(\sigma)$ se

especifican entonces en $x_i^0 \rightarrow -\infty$ y $x_f^0 \rightarrow +\infty$, que podemos hacer corresponder en la hoja de mundo M con $\sigma_i^2 \rightarrow -\infty$ y $\sigma_f^2 \rightarrow +\infty$, respectivamente:



En general harán falta varios pedacitos de bordaderos para cubrir M

Necesitamos entonces calcular donde M es una hoja de mundo con 2 o más tubos semi-infinitos.

$$X^{\omega}(\sigma_i^0 + \infty) = X_f^{\omega}(\sigma^1)$$

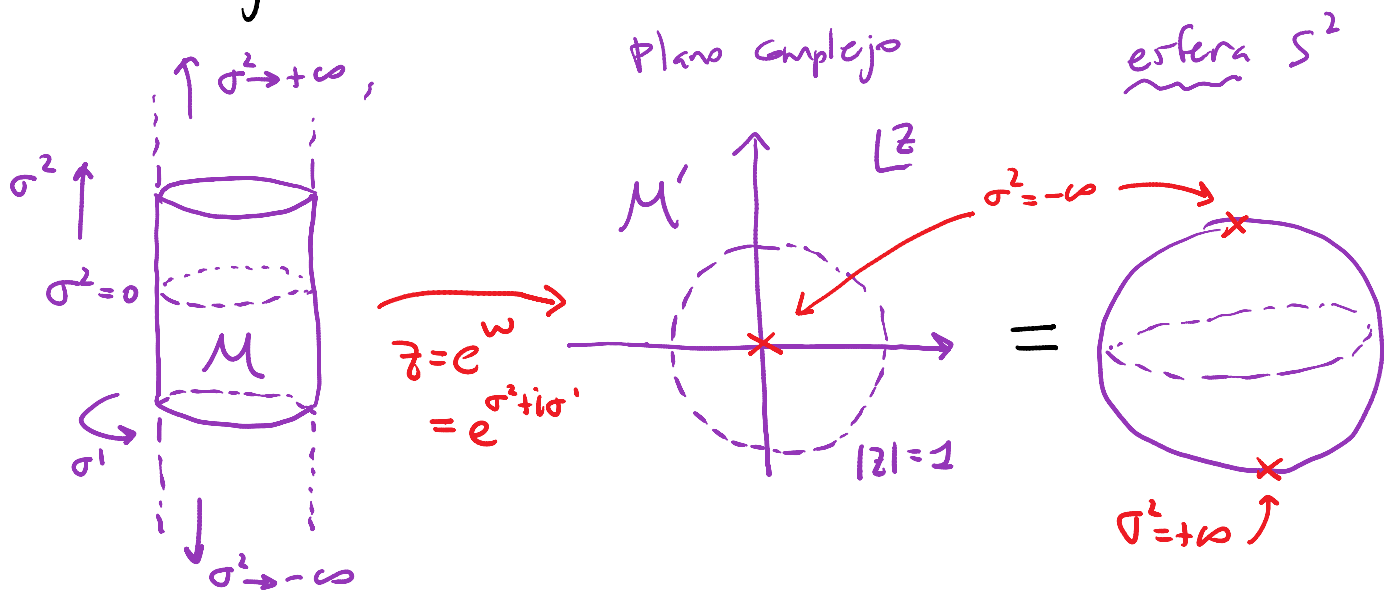
$$\int_{X^{\omega}(\sigma_i^0 - \infty) = X_i^{\omega}(\sigma^1)} DX^{\omega}(\sigma) \Big|_M e^{-S_p[X]}$$

11:16/04/13

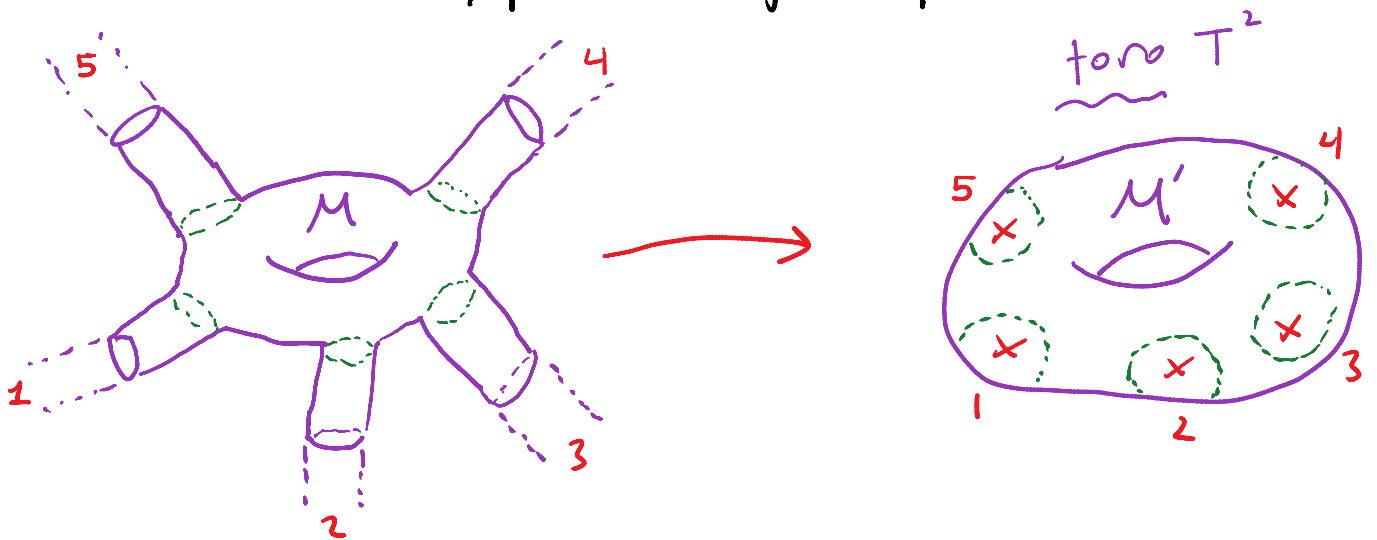
La invariancia conforme nos permite simplificar estas cuentas drásticamente: eligiendo una transformación conforme (\leftrightarrow de Weyl) apropiada, podemos convertir a M en una

nueva hoja de mundo M' que sea compacta, es decir, ¡donde los tubos semi-infinitos sean reemplazados por discos de área finita!

Conocemos ya el ejemplo más sencillo de semejante acto de magia:



De manera similar, podemos lograr que



(La forma explícita del mapeo requiere primero adaptar

coordenadas específicas en M ; pero es claro que tiene que existir una transformación conforme así, puesto que el convertir un tubo semi-infinito en un disco, como hicimos arriba, es una transformación local en M , así que podemos hacerlo por separado en distintos parches de coordenadas.)

Después de esta transformación, la información sobre los estados iniciales/finales se debe especificar en los puntos marcados (que antes correspondían a $\sigma^2 \rightarrow \pm\infty$), a través de la inserción de operadores locales $V_i(\bar{z}_i, \bar{\bar{z}}_i)$ $i=1, \dots, n$, que llamamos operadores de vértice. A pesar de su nombre, representan no vértices de interacción propiamente, sino estados asintóticos.

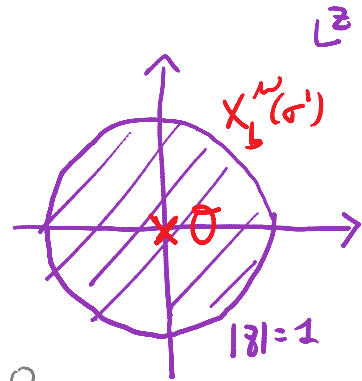
Debemos entonces ser capaces de construir uno de estos operadores por cada estado de vibración de la cuerda. Ésta es de hecho una idea más general, que no aplica solo para la teoría de cuerdas: en cualquier teoría de campos conforme, existe un isomorfismo entre estados y operadores,

que se conoce simplemente como el mapeo estado-operador.

Hemos visto ya cómo podemos pasar de un estado a un operador. La relación inversa se puede establecer asociando a un operador $\mathcal{O}(z, \bar{z})$ el funcional

$$\bar{\Psi}[X_b^w(\sigma')] \equiv \int_{|z| \leq 1} \mathcal{D}X_b^w(z, \bar{z}) \left| e^{-S_p[X]} \mathcal{O}(0,0), \right.$$

implemente evolución temporal de $\sigma^z = -\infty$ a 0



que se puede interpretar como la funcional de onda de un estado $|\bar{\Psi}\rangle$:

$$\bar{\Psi}[X_b^w(\sigma')] = \langle X_b^w(\sigma') | \bar{\Psi} \rangle$$

(análogo a $\psi(x) = \langle x | \Psi \rangle$).

Podemos notar que si $|\bar{\Psi}_0\rangle$ es el estado que corresponde al operador $\mathcal{O}(0,0)$, y $Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} j(z)$ es una carga conservada, entonces el estado $Q|\bar{\Psi}_0\rangle$, que representa el cambio en $|\bar{\Psi}_0\rangle$ bajo la transformación generada por Q , debe corresponder al operador

$$[Q, \sigma(0,0)] = \oint \frac{dz}{2\pi i} j(z) \sigma(0,0) \quad ,$$

que es precisamente el cambio en $\sigma(0,0)$ bajo la misma transformación. Con $Q=L_{-1}$ (\leftrightarrow traslación en z) esto sirve en particular para determinar el estado que corresponde a $\sigma(z, \bar{z})$ en lugar de $\sigma(0,0)$.

Podemos deducir la forma explícita del mapeo estado-operador en el caso de la teoría conforme $S_p[X]$ aplicando esta idea, con los cargos

$$\alpha_m^\mu = i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \partial X^\mu(z).$$

Determinemos primero cuál es el estado $|\Psi_1\rangle$ que corresponde al operador identidad $\sigma(0,0)=1$. Tenemos

$$\alpha_{m \geq 0}^\mu |\Psi_1\rangle \leftrightarrow i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint \frac{dz}{2\pi i} z^m \underbrace{\partial X^\mu(z)}_{\substack{:\partial X^\mu(z): \\ \partial X^\mu(0) + z \partial^2 X^\mu(0) + \dots}} \cdot 1 = 0$$

y similarmente

$$\alpha_{-m}^{\mu} |\Psi_1\rangle = 0, \quad m \geq 0$$

así que podemos inferir que

$$|\Psi_1\rangle = |0, 0; 0\rangle$$

vacío de $\alpha_{\tilde{r}}$ vacío de $\tilde{\alpha}_{\tilde{r}}$

eigenvalor

de $p^{\mu} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^{\mu} = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \tilde{\alpha}_0^{\mu}$

Por otro lado,

$$\alpha_{-m}^{\mu} |\Psi_1\rangle \leftrightarrow i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \oint_{2\pi i} \frac{dz}{z} z^{-m} \partial X^{\mu}(z) \cdot 1$$

$\leftarrow m \geq 0$

$$\partial X^{\mu}(0) + z \partial^2 X^{\mu}(0) + \dots + \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} \partial^m X^{\mu}(0) + \dots$$

es decir,

$$\alpha_{-m}^{\mu} |0, 0; 0\rangle \leftrightarrow i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{(m-1)!} \partial^m X^{\mu}(0)$$

Consideremos ahora

$$\alpha_{-n}^{\nu} (\alpha_{-m}^{\mu} |\Psi_1\rangle) \leftrightarrow \left(i \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \right)^2 \frac{1}{(m-1)!}$$

$$\times \oint_{2\pi i} \frac{dz}{z} z^{-n} \partial X^{\nu}(z) \partial^m X^{\mu}(0)$$

$$: \partial X^{\nu}(z) \partial^m X^{\mu}(0) : + \partial \partial^m \left[-\frac{\alpha'}{2} \eta^{\nu\mu} \ln|z-z'|^2 \right]_{z'=0}$$

\downarrow

No de polo simple

$$\partial X^{\nu}(0) + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \partial^n X^{\nu}(0) + \dots$$

es decir,

$$\alpha_{-n}^\nu \alpha_{-m}^\mu |0,0;0\rangle \leftrightarrow \left(i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\right)^2 \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{(m-1)!} : \partial^n X^\nu \partial^m X^\mu(0) :$$

Este mismo patrón claramente continúa si actuamos con otros adicionales, así que

$$\alpha_{-m_1}^{\mu_1} \dots \alpha_{-m_n}^{\mu_n} |0,0;0\rangle \leftrightarrow \left(i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}}\right)^n \frac{1}{(m_1-1)!} \dots \frac{1}{(m_n-1)!} : \partial^{m_1} X^{\mu_1} \dots \partial^{m_n} X^{\mu_n}(0) :$$

De manera similar, actuar con $\tilde{\alpha}_{-m}^\mu$ evidentemente corresponde a agregar $i\sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \frac{1}{(m-1)!} \bar{\partial}^m X^\mu(0)$ dentro del producto en orden normal.

Por último, \leftarrow operación de translación en momento

$$|0,0;k\rangle \equiv e^{ik \cdot \hat{x}} |0,0;0\rangle \leftrightarrow : e^{ik \cdot X(0,0)} :$$

Efectivamente, podemos comprobar que

$$k^\mu |0,0;k\rangle = p^\mu |0,0;k\rangle = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu |0,0;k\rangle$$

$$\longleftrightarrow \overset{?}{i} \frac{2}{\alpha'} \oint \frac{dz}{2\pi i} \partial X^\mu(z) : e^{ik \cdot X(0,0)} :$$

$$\underbrace{ik^\mu \partial \left[-\frac{\alpha'}{2} \ln|z|^2 \right]}_{-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{z}} : e^{ik \cdot X(0,0)} : + \underbrace{: \partial X^\mu(z) e^{ik \cdot X(0,0)} :}_{\text{No de polo}} :$$

$$= \cancel{i}^2 \frac{2}{\alpha'} \left(-\frac{\alpha'}{2} \right) k^\mu \oint \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z} : e^{ik \cdot X(0,0)} :$$

$$= k^\mu : e^{ik \cdot X(0,0)} : \quad \checkmark$$

Cualquier estado se puede obtener actuando con α_{-m}^μ 's, $\tilde{\alpha}_{-n}^\nu$'s y $e^{ik \cdot \hat{x}}$ sobre $|0,0;0\rangle$. Según hemos visto, el operador correspondiente es simplemente el producto de los operadores individuales, en orden normal conforme.

Así que, p.ej., el operador de vértice para el taquión es

$$|0,0;k\rangle \longleftrightarrow V_\Phi(z, \bar{z}; k) \equiv : e^{ik \cdot X(z, \bar{z})} :$$

y hereda las propiedades del estado físico,

$$\begin{aligned}
 & L_{n>0} |0,0;k\rangle = 0 \quad \leftarrow \text{vacío de osciladores} \quad \longleftrightarrow \quad [L_{n>0}, V_\phi(z, \bar{z}; k)] = 0 \\
 & \tilde{L}_{n>0} |0,0;k\rangle = 0 \quad \longleftrightarrow \quad [\tilde{L}_{n>0}, V_\phi(z, \bar{z}; k)] = 0 \\
 & (L_0 - 1) |0,0;k\rangle = 0 \quad \longleftrightarrow \quad [L_0, V_\phi(z, \bar{z}; k)] = V_\phi(z, \bar{z}; k) \\
 & (\tilde{L}_0 - 1) |0,0;k\rangle = 0 \quad \longleftrightarrow \quad [\tilde{L}_0, V_\phi(z, \bar{z}; k)] = V_\phi(z, \bar{z}; k)
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{p. 217} \\ \downarrow \\ V_\phi \text{ es} \\ \text{primario} \\ \\ \text{tiene} \\ \text{pesos} \\ \text{conformes} \\ \\ \text{p. 214} \rightarrow h=1, \tilde{h}=1 \end{array}$$

(esto último es consistente con lo que aprendimos en la Tarea 2: el operador $:\exp[ik \cdot X(z, \bar{z})]:$ tiene pesos conformes $(h, \tilde{h}) = \frac{\alpha'}{4} (k^2, k^2)$, que en efecto se reducen a $(1, 1)$ usando la condición de capa de masa para el taquión, $k^2 = 4/\alpha' \leftrightarrow m^2 = -4/\alpha'$).

Bajo una transformación conforme $z \rightarrow z'(z)$, tenemos entonces (p. 216)

$$V_\phi(z, \bar{z}) \rightarrow V'_\phi(z', \bar{z}') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{-1} V_\phi(z, \bar{z}),$$

y por tanto

$$V_\phi(k) \equiv N_\phi \int d^2z V_\phi(z, \bar{z}; k) \text{ es } \underline{\underline{\text{invariante conforme.}}}$$

\uparrow cte. de normalización