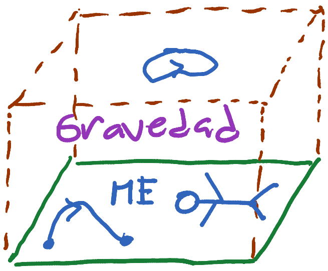
$$U(N) \to U(N-1)\times U(1).$$

Separando más D-branas podemos reducir aún más la simetría local, a $U(n_1)\times U(n_2)\times\ldots$ si dejamos bonches de $n_1, n_2, \ldots$ branas coincidentes (con $n_1+n_2+\ldots=N$), y a solo $U(1)^N$ en el caso más genérico.

Con esto vislumbramos ya cómo es que en la teoría de cuerdas podríamos aspirar a obtener todas las interacciones del Modelo Estándar + Gravedad. Y entendemos también la motivación de la propuesta de mundo brana (p.42), donde los campos del Modelo Estándar viven solo dentro de una brana.



Hasta ahora hemos visto que la eliminación de los estados con norma negativa en la cuantización covariante antigua requiere que $D\leq 26$, y el acuerdo con la cuantización en el cono de luz exige que $D=26$ (que es a su vez la condición para que la CCL resulte en un espectro covariante bajo Lorentz).

martes, 02 de abril de 2013
05:55 a.m.

En última instancia, la restricción a $D=26$ se debe a una sutileza: para $D\neq 26$ las transformaciones de Weyl <u>NO</u> son una simetría del sistema a nivel cuántico — existe una anomalía. Esto hace que $S_p[X,g]$ tenga $D-1$ en lugar de $D-2$ grados de libertad, y no empate por tanto con la acción original para la cuerda, $S_{NG}[X]$.

En más detalle, si bien la acción

$$S_p[X,g] = \frac{1}{4\pi\ell_c^2}\int d^2\sigma \sqrt{g}\, g^{ab}\,\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu}$$

es invariante bajo $g_{ab}(\sigma) \longrightarrow \Omega(\sigma) g_{ab}(\sigma)$, las medidas de integración $D_g X^\mu(\sigma) \propto \prod_\sigma dX^\mu_\sigma$ y $D_g\, g_{ab}(\sigma) \propto \prod_\sigma dg_{ab,\sigma}$, que para respetar la invariancia bajo difeos en la hoja de mundo se definen (como en las pp. 98–100) a partir de las normas

$$\|\delta X\|^2 \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g}\, \delta X^\mu \delta X^\nu \eta_{\mu\nu}\,,$$

$$\|\delta g\|^2 \equiv \int d^2\sigma \sqrt{g}\, g^{ab} g^{cd}\, \delta g_{ac}\, \delta g_{bd}\,,$$

<u>NO</u> son invariantes de Weyl.

(En otras palabras: el parámetro de corte UV invariante bajo difeos necesariamente viola Weyl.)

Para entender mejor este punto, analizaremos ahora la integral funcional en más detalle.

El punto de partida es que, de manera similar a lo que vimos en el caso de la partícula (p. 101),

$$\int \mathcal{D}_g g_{ab}(\sigma)\, \mathcal{D}_g X^\mu(\sigma)\, e^{-S_p[X,g]}$$

incluye cada trayectoria física un número infinito de veces,

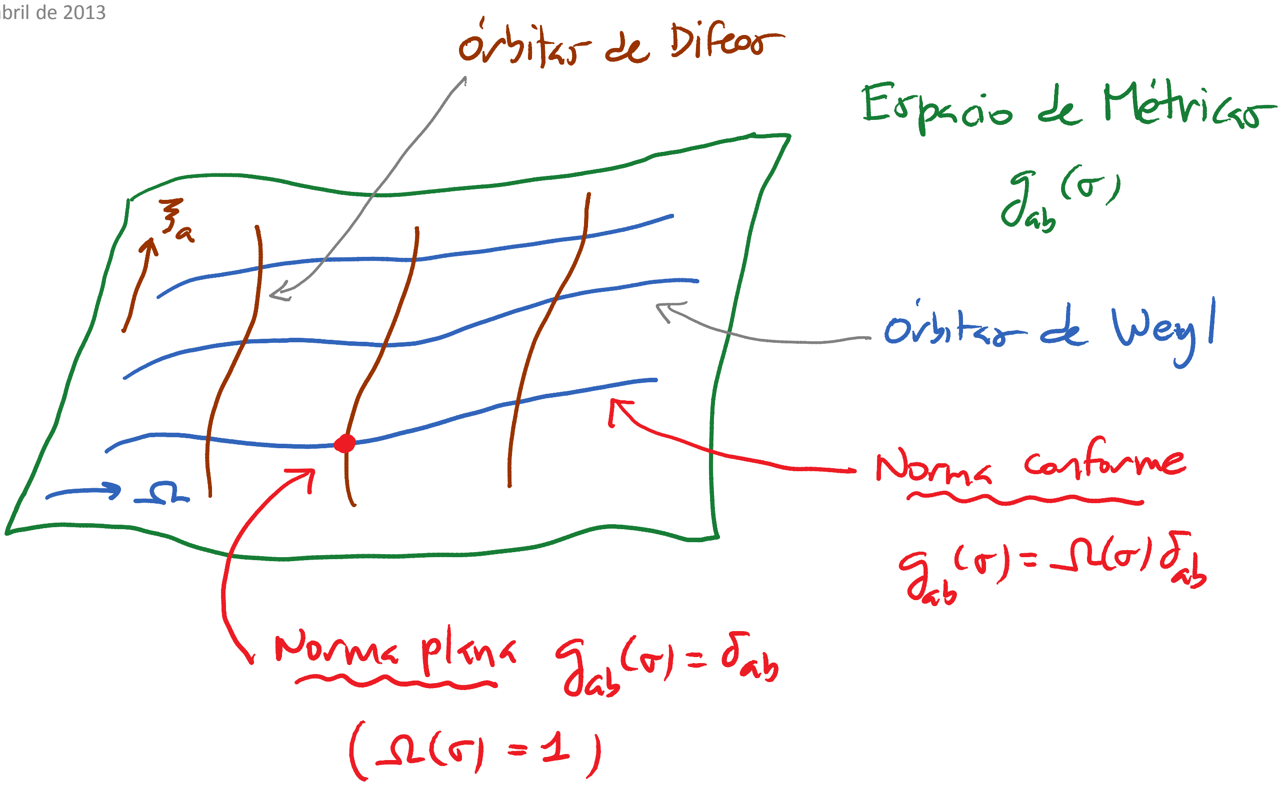
$$\left(X^\mu(\sigma), g_{ab}(\sigma)\right) \overset{\text{Dif}\times\text{Weyl}}{\longleftrightarrow} \left(\underline{X}^\mu(\sigma), \underline{g}_{ab}(\sigma)\right),$$

y no está por tanto bien definida.

Debemos eliminar la redundancia — fijar la norma. Nos interesa en realidad

$$Z \equiv \int \frac{\mathcal{D}_g g_{ab}(\sigma)\, \mathcal{D}_g X^\mu(\sigma)}{\text{Dif}\times\text{Weyl}}\, e^{-S_p[X,g]} ,$$

donde pretendemos fijar (localmente) la norma plana $g_{ab}(\sigma) = \delta_{ab}$. Esquemáticamente:



Hemos resaltado que $g_{ab}\to\Omega g_{ab}$ pudiera no ser en verdad una simetría dentro de la integral funcional, así que primero eliminaremos la redundancia por difeos, fijando la norma conforme ("conformalmente plana")

$$\boxed{g_{ab}(\sigma)=\Omega(\sigma)\,\delta_{ab}\equiv\check{g}_{ab}(\sigma)\longleftrightarrow\check{g}_{zz}=0=\check{g}_{\bar{z}\bar{z}}\,,\quad \check{g}_{z\bar{z}}=\frac{1}{2}\Omega(z,\bar{z})}$$

y después nos preguntaremos si el resultado es invariante de Weyl.

El primer paso es entonces reescribir

$$Z = \int \frac{D\Omega(\sigma)\, \cancel{D\xi_a(\sigma)}\, DX^\mu(\sigma)}{\text{Weyl} \times \cancel{\text{Dif}}} \times (\,?\,) \times e^{-S_p[X,\hat{g}]} .$$

¿ Jacobiano que debemos determinar

Para esto, utilizamos el **método de Faddeev-Popov** :

empleamos la generalización ∞-dimensional de la identidad

$$1 = \int \underbrace{\prod_{i=1}^{n} d\xi_i \;\det\left(\frac{\partial g_j(\xi)}{\partial \xi_i}\right)}_{\prod_{j=1}^{n} dg_j} \;\delta^{(n)}\left(g_j(\xi) - \hat{g}_j\right)$$

con $i \to (z,\bar{z})$,

$$g^{\xi}_{zz} \equiv g_{zz} + 2\nabla_z \xi_z$$

$$g^{\xi}_{\bar{z}\bar{z}} \equiv g_{\bar{z}\bar{z}} + 2\nabla_{\bar{z}} \xi_{\bar{z}}$$

$$1 = \int D\xi_z(z,\bar{z})\, D\xi_{\bar{z}}(z,\bar{z}) \;\text{Det}\left(\frac{\delta g^{\xi}_{zz}}{\delta \xi_z}\right) \text{Det}\left(\frac{\delta g^{\xi}_{\bar{z}\bar{z}}}{\delta \xi_{\bar{z}}}\right)$$

$$\times\, \underbrace{\delta^{(\infty)}\left(g^{\xi}_{zz}(z,\bar{z}) - \cancelto{0}{\hat{g}_{zz}(z,\bar{z})}\right)} \;\underbrace{\delta^{(\infty)}\left(g^{\xi}_{\bar{z}\bar{z}}(z,\bar{z}) - \cancelto{0}{\hat{g}_{\bar{z}\bar{z}}(z,\bar{z})}\right)} .$$

condiciones de norma conforme ($g^{\xi}_{z\bar{z}} = \frac{\Omega}{2}$ queda libre)

martes, 02 de abril de 2013
06:56 a.m.

Usando $\mathrm{Det}\left(\frac{\delta g^{\xi}_{zz}}{\delta \xi_z}\right)\Big|_{g=\check{g}} = \mathrm{Det}\left(\frac{\delta}{\delta \xi_z}\left(g_{zz}+2\nabla_z \xi_z\right)\right)\Big|_{g=\check{g}}$

$$= \mathrm{Det}(2\nabla_z)\Big|_{g=\check{g}} = \mathrm{Det}(2\check{\nabla}_z)$$

y $\mathrm{Det}\left(\frac{\delta g^{\xi}_{\bar{z}\bar{z}}}{\delta \xi_{\bar{z}}}\right)\Big|_{g=\check{g}} = \mathrm{Det}(2\check{\nabla}_{\bar{z}})$, esto es

$$1 = \int \mathcal{D}\xi_z \, \mathcal{D}\xi_{\bar{z}} \; \mathrm{Det}(2\check{\nabla}_z)\, \mathrm{Det}(2\check{\nabla}_{\bar{z}})\, \delta(g^{\xi}_{zz})\, \delta(g^{\xi}_{\bar{z}\bar{z}}) \, .$$

podemos ignorar: cte. de normalización

Insertando esta expresión en

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}g^{\xi}_{ab}(\sigma)\, \mathcal{D}X^{\mu}_{\xi}(\sigma)}{\mathrm{Weyl} \times \mathrm{Dif}} \; e^{-S_p[X_\xi, g^\xi]}$$

(que hemos reescrito usando la <u>invariancia</u> bajo $(X, g) \rightarrow (X_\xi, g^\xi)$), tenemos

martes, 02 de abril de 2013
07:11 a.m.

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}\xi_z \mathcal{D}\xi_{\bar z}}{\text{Dif}\times\text{Weyl}} \overbrace{\mathcal{D}g^{\xi}_{zz}\, \mathcal{D}g^{\xi}_{\bar z\bar z}\, \mathcal{D}g^{\xi}_{z\bar z}}^{\mathcal{D}g^{\xi}_{ab}}\, \mathcal{D}X^{\omega}_{\xi}$$

$$\times\, \delta(g^{\xi}_{zz})\, \delta(g^{\xi}_{\bar z\bar z})\, \text{Det}\,\overset{\vee}{\nabla}_z\, \text{Det}\,\overset{\vee}{\nabla}_{\bar z}\, e^{-S_p[X_\xi, g_\xi]} .$$

Si ahora renombramos las variables de integración mudas

$$(X_\xi, g^\xi) \to (X, g),$$

vemos que

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}\xi_z \mathcal{D}\xi_{\bar z}}{\text{Dif}\times\text{Weyl}} \cancel{\mathcal{D}g_{zz}}\, \mathcal{D}g_{\bar z\bar z}\, \overbrace{\mathcal{D}g_{z\bar z}}^{\mathcal{D}\Omega}\, \mathcal{D}X^{\omega}$$

$$\times\, \cancel{\delta(g_{zz})}\, \cancel{\delta(g_{\bar z\bar z})}\, \text{Det}\,\overset{\vee}{\nabla}_z\, \text{Det}\,\overset{\vee}{\nabla}_{\bar z}\, e^{-S_p[X,g]}$$

$$= \int \frac{\cancel{\mathcal{D}\xi_z \mathcal{D}\xi_{\bar z}}}{\cancel{\text{Dif}}\times\text{Weyl}} \underbrace{\mathcal{D}\Omega\, \mathcal{D}X^{\omega}\, \text{Det}\,\overset{\vee}{\nabla}_z\, \text{Det}\,\overset{\vee}{\nabla}_{\bar z}\, e^{-S_p[X,\overset{\vee}{g}]}}_{\text{Nada aquí depende ya de } \xi_a},$$

es decir,

martes, 02 de abril de 2013
07:27 a.m.

$$Z = \int \frac{\mathcal{D}\Omega}{\text{Weyl}} \underbrace{\text{Det}\,\check{\nabla}_z \,\text{Det}\,\check{\nabla}_{\bar{z}}}_{\equiv \Delta_{FP}(\check{g})} \mathcal{D}X^\mu \; e^{-S_p[X,\check{g}]} .$$

determinante de Faddeev-Popov

(Jacobiano que buscábamos)

Habiendo deducido esto, la pregunta clave ahora es si

$$Z[\check{g}_{ab} = \Omega\delta_{ab}] \equiv \int \mathcal{D}_{\check{g}} X^\mu \, \Delta_{FP}(\check{g}) \, e^{-S_p[X,\check{g}]}$$

es o no independiente de Ω, porque si lo es, tendríamos finalmente

$$Z = \int \cancel{\frac{\mathcal{D}\Omega}{\text{Weyl}}} \underbrace{Z[\Omega\delta_{ab}]}_{Z[\delta_{ab}]} = Z[\delta_{ab}] .$$

Z Norma plana

Para responder esta pregunta, conviene reexpresar a $\Delta_{FP}(\check{g})$ en términos de campos auxiliares b_{ab} y c^a conocidos como fantasmas de Faddeev-Popov :

$$\mathrm{Det}\,\overset{\vee}{\nabla}_z = \int \mathcal{D}b_{\bar z\bar z}\,\mathcal{D}c^{\bar z}\,\exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\, b_{\bar z\bar z}\overset{\vee}{\nabla}_z c^{\bar z}\right],$$

$$\mathrm{Det}\,\overset{\vee}{\nabla}_{\bar z} = \int \mathcal{D}b_{zz}\,\mathcal{D}c^{z}\,\exp\left[-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\, b_{zz}\overset{\vee}{\nabla}_{\bar z} c^{z}\right],$$

donde vector, como ξ^a

el fantasma $c^a(\sigma)$ es un campo vectorial anticonmutativo
el antifantasma $b_{ab}(\sigma)$ es un campo tensorial simétrico sin traza ($b_{z\bar z}=0$) anticonmutativo.

(Notar que esta es una acepción de "fantasma" muy distinta a la que habíamos usado antes: éstos son fantasmas amistosos, que ayudan en lugar de asustar. Se les utiliza también al cuantizar Yang-Mills covariantemente.)

Recordemos que para funciones ordinarias, conmutativas, tenemos (p.108)

$$\int \mathcal{D}\varphi\, e^{-\frac{1}{2}\int d^2\sigma\,\varphi\Delta_\sigma\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Det}\,\Delta_\sigma}}$$

en paralelo con la integral gaussiana usual

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{1}{2}ax^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}\,.$$

martes, 02 de abril de 2013
09:25 a.m.

Este es el tipo de funciones que usamos para cuantizar por integral de trayectoria a campos bosónicos, que en el formalismo canónico obedecen relaciones de conmutación (como el campo de Klein-Gordon, φ^4, Maxwell, Yang-Mills, Higgs, los X^μ de la partícula o la cuerda, etc.).

Pero para campos fermiónicos, que canónicamente obedecen relaciones de anticonmutación (como el campo de Dirac, b_{ab} y c^a) necesitamos usar en la integral funcional números anticonmutativos. Éstos se definen como un conjunto de objetos θ_i $i=1,\dots,n$, que son elementos de un espacio vectorial

$$c_0 + c_1\theta_1 + \cdots + c_n\theta_n \qquad c_i \in \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C}$$

$c_0 \cdot 1$

y pueden multiplicarse formalmente tomando en cuenta la propiedad básica

$$\boxed{\{\theta_i,\theta_j\} \equiv \theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0 \quad \forall\, i,j} \qquad \left(\Rightarrow \theta_i^2 = 0\right).$$

(Esto define lo que los matemáticos llaman un álgebra de Grassmann. Ver p.ej. mis apuntes de Campos II.)

La función más general de 1 número anticonmutativo θ es entonces $a+b\theta$.

La definición natural de "integral", conocida como integral de Berezin, es

$$\int d\theta\,(a+b\theta)=b \qquad (\text{¡coincide con derivada } \tfrac{d}{d\theta}!).$$

El análogo de una integral "gaussiana" es entonces

$$\int d\theta_1 d\theta_2\, e^{-\theta_1 c\theta_2} = \int d\theta_1 d\theta_2\,(1-\theta_1 c\theta_2) = c \,.$$

exponente aparece en el numerador en vez de denominador

Así que, dados 2 campos anticonmutativos

números anticonmutativos

$$\psi(\sigma)\equiv\sum_i \varphi_i(\sigma)\,\psi_i \quad , \quad \chi(\sigma)\equiv\sum_i \varphi_i(\sigma)\,\chi_i$$

base ortonormal para funciones ordinarias,

$$\text{con } \Delta_\sigma \varphi_i(\sigma)=\lambda_i\varphi_i(\sigma) \quad , \quad \int d^2\sigma\, \varphi_i(\sigma)\varphi_j(\sigma)=\delta_{ij}$$

operador diferencial que figura en acción de ψ,χ

martes, 02 de abril de 2013
10:02 a.m.

tenemos

$$\int \mathcal{D}\psi(\sigma)\mathcal{D}\chi(\sigma)\, e^{-\int d^2\sigma\, \chi \Delta_\sigma \psi}$$

$$= \int \prod_k (d\chi_k d\psi_k)\, e^{-\sum_{i,j} \chi_i \psi_j \underbrace{\int d^2\sigma\, \varphi_i \Delta_\sigma \varphi_j}_{\lambda_j \underbrace{\int d^2\sigma\, \varphi_i \varphi_j}_{\delta_{ij}}}}$$

$$= \int \prod_k (d\chi_k d\psi_k)\, e^{-\sum_i \lambda_i \chi_i \psi_i}$$

salvo posiblemente un signo

$$= \prod_i \lambda_i = \operatorname{Det} \Delta_\sigma ,$$

y esto es justo la propiedad que usamos al definir a los fantasmas de Faddeev-Popov en la p. 262.
(Notar que c^a y b_{ab} deben ser <u>fermiónicos</u> a pesar de tener espín <u>entero</u> en la hoja de mundo. Estos campos violan entonces, por construcción, el teorema de espín-estadística, lo cual no nos preocupa porque son solo campos auxiliares.)

Regresando a nuestro cálculo, hemos aprendido que el efecto neto de fijar la norma con respecto a difeos dentro de la integral funcional es agregar a nuestro sistema los 2 campos auxiliares c^a y b_{ab}, con acción

$$S_f[b,c,g] \equiv \frac{1}{2\pi}\int d^2\sigma \sqrt{g}\, g^{ab}\, b_{ca} \nabla_b c^c ,$$

de tal forma que ahora tenemos

$$Z[\check{g}] = \int D_{\check{g}} X^\mu D_{\check{g}} b_{ab} D_{\check{g}} c^a \, e^{-S_p[X,\check{g}]-S_f[b,c,\check{g}]} .$$

Usando $\check{g}_{ab} = \Omega\, \delta_{ab}$ la acción de los fantasmas toma la forma que anunciamos en la p. 262,

$$S_f[b,c,\check{g}] = \frac{1}{2\pi}\int d^2 z \left(b_{zz} \check{\nabla}_{\bar{z}} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \check{\nabla}_z c^{\bar{z}} \right).$$

En esta norma conforme, los únicos símbolos de Christoffel que no se anulan son

$$\Gamma^z_{zz} = \frac{\partial_z \Omega}{\Omega} \quad \text{y} \quad \Gamma^{\bar{z}}_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{\partial_{\bar{z}} \Omega}{\Omega} ,$$

así que

martes, 02 de abril de 2013
10:44 a.m.

$$\nabla_z c^{\bar z} = \partial_z c^{\bar z} \quad \text{y} \quad \nabla_{\bar z} c^z = \partial_{\bar z} c^z \; .$$

Usando la notación abreviada

$$c \equiv c^z \; , \quad b \equiv b_{zz} \; , \quad \tilde c \equiv c^{\bar z} \; , \quad \tilde b \equiv b_{\bar z \bar z} \; ,$$

podemos escribir entonces

$$\boxed{S_f[b, c, \tilde b, \tilde c, \check g] = \frac{1}{2\pi} \int d^2 z \, (b \bar\partial c + \tilde b \partial \tilde c) \; .}$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\bar\partial c = 0 = \bar\partial b \; , \qquad \partial \tilde c = 0 = \partial \tilde b \; ,$$

así que c, b son analíticos y $\tilde c, \tilde b$ antianalíticos.

$\frac{1}{2\pi}\int d^2 z \, b \bar\partial c$ y $\frac{1}{2\pi}\int d^2 z \, \tilde b \partial \tilde c$ son 2 nuevas teorías conformes, invariantes bajo $z \to z'(z)$ con

p. 216

$$b(z) \longrightarrow b'(z') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{-2} b(z) \quad \text{operador primario con } h_b = 2 \; (\tilde h_b = 0),$$

$$c(z) \longrightarrow c'(z') = \left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^{+1} c(z) \quad \text{primario con } h_c = -1 \; (\tilde h_c = 0),$$

$$\tilde b(\bar z) \to \tilde b'(\bar z') = \left(\frac{\partial \bar z'}{\partial \bar z}\right)^{-2} \tilde b(\bar z) \quad \text{primario con } \tilde h_{\tilde b} = 2 \; (h_{\tilde b} = 0),$$

$$\tilde c(\bar z) \to \tilde c'(\bar z') = \left(\frac{\partial \bar z'}{\partial \bar z}\right)^{+1} \tilde c(\bar z) \quad \text{primario con } \tilde h_{\tilde c} = -1 \; (h_{\tilde c} = 0).$$

(Esto equivale a decir que b_{ab}, c^a son neutros bajo transformaciones de Weyl, pero debemos notar que entonces $b^a{}_b$, b^{ab}, c_a no lo son.)

Estos campos claramente son libres. Dado que el término "cuadrático" en la acción conecta a b únicamente con c, y a $\tilde{b}$ únicamente con $\tilde{c}$, esperamos que las únicas funciones de 2 puntos distintas de cero sean $\langle b(z)\, c(z')\rangle$ y $\langle \tilde{b}(\bar{z})\, \tilde{c}(\bar{z}')\rangle$ (esto es análogo al campo de Dirac, donde $S = \int d^Dx\, \bar{\Psi}(i\not{\partial}-m)\Psi$ y por tanto $\langle \bar{\Psi}(x)\Psi(x')\rangle \neq 0$).

Para calcular estos propagadores, podemos proceder en analogía con lo que hicimos para X^μ en las pp. 192-3, notando que

derivada fermiónica

$$0 = \int \mathcal{D}b(z)\, \mathcal{D}c(z)\, \frac{\delta}{\delta b(z_1)} \left[e^{-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\, b\bar{\partial}c}\, b(z_2) \right]$$

$$= \int \mathcal{D}b\, \mathcal{D}c \left[-\frac{1}{2\pi}\bar{\partial}c(z_1)\, b(z_2) + \delta^{(2)}(z_1 - z_2) \right] e^{-\frac{1}{2\pi}\int d^2z\, b\bar{\partial}c},$$

es decir,

≡ integral funcional apropiada

$$\bar{\partial}_1 \langle c(z_1) b(z_2) \rangle = 2\pi\, \delta^{(2)}(z_1 - z_2) \quad .$$

Como de costumbre, el propagador es la función de Green del operador diferencial correspondiente.

Sabiendo ya (p. 194) que

$$\partial\bar{\partial} \ln|z|^2 = \partial\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = \bar{\partial}\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi\, \delta^{(2)}(z) \, ,$$

conocemos la solución a la anterior ecuación diferencial:

$$\boxed{\langle c(z_1) b(z_2) \rangle = \frac{1}{z_1 - z_2} \quad \longleftrightarrow \quad \langle b(z_1) c(z_2) \rangle = \frac{1}{z_1 - z_2}} \; .$$

¡Recordar que estos campos son anticonmutativos!

De manera similar, podemos mostrar que

$$\langle c(z_1) c(z_2) \rangle = 0 \quad , \quad \langle b(z_1) b(z_2) \rangle = 0 \; ,$$

y las 3 expresiones análogas para $\tilde{c}$, $\tilde{b}$.

Usando este propagador, definimos el orden normal conforme como hicimos para X^μ en la p. 195:

$$: b(z_1) c(z_2) : \; \equiv \; b(z_1) c(z_2) - \frac{1}{z_1 - z_2}$$

(teniendo cuidado con los signos por anticonmutatividad al hacer contracciones en productos de 3 o más campos).

Este producto es analítico ($\bar{\partial} : \cdots : = 0$) dentro de correladores, y permite por tanto expansiones de Taylor para obtener EPOs.

Desarrollamos los campos en modos de Laurent con la convención usual (p. 222)

$$\boxed{\begin{aligned} b(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{z^{n+2}} \quad \longleftrightarrow \quad b_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} b(z) = b_{-n}^{\dagger} \\ c(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n-1}} \quad \longleftrightarrow \quad c_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n-2} c(z) = c_{-n}^{\dagger} \end{aligned}}$$

h_b

h_c

(y análogamente para $\tilde{b}(\bar{z})$, $\tilde{c}(\bar{z})$.

En el caso de campos anticonmutativos, la definición natural de orden temporal/radial incluye un -1 adicional (como en el campo de Dirac):

$$\mathcal{R}(\hat{b}(z_1)\hat{c}(z_2)) = \begin{cases} \hat{b}(z_1)\hat{c}(z_2) & \text{si } |z_1| > |z_2| \\ -\hat{c}(z_2)\hat{b}(z_1) & \text{si } |z_1| < |z_2| \end{cases},$$

martes, 02 de abril de 2013
11:52 a.m.

y se puede mostrar que es justamente esto lo que calcula la integral de trayectoria fermiónica con inserciones.

Este signo menor hace que la fórmula que obtuvimos en la p.203 resulte en el anticonmutador en lugar del conmutador de cargas conservadas,

$$\{\hat{Q}_i, \hat{Q}_j\} = \oint \frac{dz_j}{2\pi i} \operatorname*{Res}_{z_i \to z_j} J_i(z_i) J_j(z_j) .$$

Con esta fórmula podemos calcular

$$\{b_m, c_n\} = \oint \frac{dz_2}{2\pi i} \operatorname*{Res}_{z_1 \to z_2} \underbrace{z_1^{m+1} b(z_1) z_2^{n-2} c(z_2)}_{z_1^{m+1} z_2^{n-2} \frac{1}{z_1 - z_2} + \dots}$$

$$z_2^{m+1} + \dots$$

$$= \oint \frac{dz_2}{2\pi i} z_2^{m+n-1} ,$$

es decir,

$$\boxed{\{b_m, c_n\} = \delta_{m,-n}} .$$

Podemos mostrar similarmente que

$$\{b_m, b_n\} = 0 = \{c_m, c_n\}$$

(y los 3 anticonmutadores análogos para $\tilde{b}_m, \tilde{c}_n$).

Así que, como era de esperarse, nuestros campos anticonmutativos libres equivalen a una colección infinita de osciladores armónicos fermiónicos.

Considerando a b_{-n}, c_{-n} $(n>0)$ como operadores de creación, es natural definir el estado base del sistema como aquel que satisface

$$b_n |vac\rangle = 0 \;, \quad c_n |vac\rangle = 0 \qquad \forall\, n>0 .$$

Pero, por la existencia de los modos cero b_0 y c_0, existen de hecho 2 estados así:

$|\downarrow\rangle$ tal que $b_0 |\downarrow\rangle = 0$, $\quad b_{n>0} |\downarrow\rangle = 0 = c_{n>0} |\downarrow\rangle$

y

$|\uparrow\rangle$ tal que $c_0 |\uparrow\rangle = 0$, $\quad b_{n>0} |\uparrow\rangle = 0 = c_{n>0} |\uparrow\rangle$.

(El enunciado análogo en el caso bosónico era que para los campos X^μ tenemos infinitos estados base $|0;k\rangle$.)

Usando $b_0^2=0$, $c_0^2=0$, nos queda claro que estos 2 estados están conectados por

$$|\uparrow\rangle = c_0|\downarrow\rangle \quad , \quad |\downarrow\rangle = b_0|\uparrow\rangle .$$

Será conveniente para nosotros considerar a b_0 como el operador de aniquilación (y c_0 de creación). Nuestro espacio de Hilbert se construye entonces actuando sobre $|\downarrow\rangle$ con los operadores de creación c_0, c_{-n}, b_{-n} (máximo 1 vez con cada uno).

El tensor de energía-momento para los fantasmas se puede determinar a partir de la definición usual

$$T^f_{ab} \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_f}{\delta g^{ab}} ,$$

o como la corriente de Noether asociada a las translaciones $\sigma^a \to \sigma^a + \epsilon^a$. En coordenadas complejas se encuentra que

$$T^f(z) \equiv T^f_{zz}(z) = -2:b\partial c: + :c\partial b: ,$$

con lo cual podemos calcular la EPO