De aquí se puede ver que los modos de Fourier originales $T_{ww} \equiv \sum_n T_n e^{-nw}$ ($w = \sigma^2 + i\sigma^1$) y los de Laurent $T_{zz} \equiv \sum_n L_n / z^{n+2}$ se relacionan a través de

$$T_n = L_n - \frac{c}{24}\delta_{n,0} \quad ,$$

así que el Hamiltoniano original (generador de translaciones en σ^2) en realidad es

$$H \equiv \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{d\sigma^1}{2\pi} T_{22}}_{T_{ww}+T_{\bar{w}\bar{w}}} = T_0 + \tilde{T}_0 = \underbrace{L_0 + \tilde{L}_0}_{\text{Generador de Dilataciones } D} - \frac{c+\tilde{c}}{24} \quad .$$

OJO

Notar por cierto que, dado que

$$T_{\tau\tau} = -T_{ww} - T_{\bar{w}\bar{w}} = T_{\sigma\sigma} \quad \text{y} \quad T_{\sigma\tau} = -T_{ww} + T_{w\bar{w}} \quad \text{son}$$

hermíticos, sabemos que $T_{ww} = \sum_n T_n e^{-ni(\tau+\sigma)}$ es hermítico, y por tanto $T_n^\dagger = T_{-n} \longleftrightarrow L_n^\dagger = L_{-n}$.

En coordenadas complejas $z = e^{\sigma^2 + i\sigma^1}$, tenemos entonces

$$[T(z)]^\dagger = \sum_n \frac{L_n^\dagger}{\bar{z}^{n+2}} = \sum_n \frac{L_{-n}}{\bar{z}^{n+2}} \overset{n\to -n}{=} \sum_n \frac{L_n}{\bar{z}^{-n+2}} = \bar{z}^{-4} T(1/\bar{z}).$$

lunes, 18 de marzo de 2013
07:49 p.m.

Más en general, para un operador cuasiprimario ($\supset$primario) $\mathcal{O}(z,\bar{z})$, definimos

$$[\mathcal{O}(z,\bar{z})]^\dagger = \bar{z}^{-2h} z^{-2\tilde{h}} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\right) .$$

inversión $z \to 1/z$ necesaria para cambiar el signo enfrente de $\sigma^2 = i\tau$

En términos de la expansión en modos

$$\mathcal{O}(z,\bar{z}) \equiv \sum_{m,n} \frac{\mathcal{O}_{m,n}}{z^{m+h}\,\bar{z}^{n+\tilde{h}}} ,$$

esto equivale a $\mathcal{O}^\dagger_{m,n} = \mathcal{O}_{-m,-n}$. (Un operador analítico (antianalítico) $\mathcal{O}$ ($\tilde{\mathcal{O}}$) es un caso particular con sólo $n=0$ ($m=0$): $\mathcal{O}(z) = \sum_m \frac{\mathcal{O}_m}{z^{m+h}} \Rightarrow \mathcal{O}^\dagger_m = \mathcal{O}_{-m}$.)

usamos antes $h=1$ para $\partial X(z)$
$h=2$ para $T(z)$

A partir de la EPO

$$T(z_1)T(z_2) = \frac{c}{2(z_1-z_2)^4} + \frac{2}{(z_1-z_2)^2} T(z_2) + \frac{1}{z_1-z_2}\partial T(z_2) + \ldots$$

podemos deducir de inmediato el conmutador entre los modos de Virasoro,

lunes, 18 de marzo de 2013
08:01 p.m.

p.203

$$[L_m, L_n] = \oint \frac{dz_2}{2\pi i} \operatorname*{Res}_{z_1\to z_2} \; z_1^{m+1} T(z_1)\, z_2^{n+1} T(z_2)$$

$$\underbrace{\uparrow z_2^{m+1} + (m+1) z_2^{m}(z_1-z_2) + \frac{1}{2}(m+1)m\, z_2^{m-1}(z_1-z_2)^2 + \frac{1}{3!}(m+1)m(m-1) z_2^{m-2}(z_1-z_2)^3 + \dots}$$

$$\frac{c}{2}\frac{1}{3!}(m+1)m(m-1)\, z_2^{m+n-1} + 2(m+1) z_2^{m+n+1}\, T(z_2) + z_2^{m+n+2}\, \underbrace{\partial T(z_2)}_{\sum_k \frac{-(k+2)L_k}{z_2^{k+3}}}$$

$$= \frac{c}{12}(m^3-m)\,\delta_{m,-n} + 2(m+1)L_{m+n} - (m+n+2)L_{m+n},$$

es decir, obtenemos la llamada álgebra de Virasoro

$$\boxed{[L_m, L_n] = \underbrace{(m-n)L_{m+n}}_{\text{Álgebra de Witt}} + \underbrace{\frac{c}{12} m(m^2-1)\,\delta_{m,-n}}_{\text{"Extensión central"}}}$$

(Y análogamente para los $[\tilde{L}_m, \tilde{L}_n]$, usando $\tilde{c}$.)

Aquí podemos ver, en particular, que L_{-1}, L_0, L_{+1} efectivamente forman una subálgebra (sin extensión central) es decir, sus conmutadores cierran entre sí.

En la teoría que nos interesa,

$$L_m = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{m+1} \left(-\frac{1}{\alpha'}\right) \underbrace{:\partial X \cdot \partial X(z):}_{\left(-i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\right)^2 \sum_{n,k} \frac{1}{z^{n+k+2}} :\alpha_n \cdot \alpha_k:}$$

resulta en

$$\boxed{L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha_n \cdot \alpha_{m-n}:} \quad .$$

Hemos dicho ya que, para esta teoría y en el marco conforme z, el orden normal conforme $: \ :$ coincide con el orden normal de creación/aniquilación $\circ\ \circ$.

Podemos notar que, incluso si hubiera habido una diferencia entre $: \ :$ y $\circ\ \circ$ (como la hay, p.ej., en el marco conforme w), tenemos $[\alpha_n, \alpha_{m-n}] = 0 \ \forall n$ si $m \neq 0$, así que reemplazar $: \ :$ con $\circ\ \circ$ en la

martes, 19 de marzo de 2013
05:49 a.m.

definición de L_m sería válido si $m \neq 0$. Pero para $m=0$, en general, hubiera podido haber una constante de orden,

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha_n \cdot \alpha_{-n}: + A^X$$

resulta ser $=0$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\alpha_0^2}_{\frac{\alpha' p^2}{4}} + \underbrace{\sum_{n>0} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n}_{\equiv N} + A^X .$$

$\frac{\alpha' p^2}{4}$ en el caso de la cuerda cerrada ($\alpha' p^2$ abierta)

$\equiv N$ llamado convencionalmente el operador de número (aunque en realidad es el Hamiltoniano $N = \sum_{n<0} |n|\, a_n^\dagger \cdot a_n$)

$\varepsilon_n = |p'|$

Podemos verificar que $A^X = 0$ usando el conmutador $[L_1, L_{-1}] = 2L_0$ para notar que

$$A^X |0;0\rangle = L_0 |0;0\rangle = \frac{1}{2} \underbrace{L_1 L_{-1}}_{\frac{1}{2}\sum_n :\alpha_n \cdot \alpha_{-1-n}:} |0;0\rangle - \frac{1}{2} \underbrace{L_{-1} L_1}_{\frac{1}{2}\sum_n :\alpha_n \cdot \alpha_{1-n}:} |0;0\rangle$$

osciladores $\quad p^\mu$

$$= 0 - 0 .$$

L8: 19/03/13

martes, 19 de marzo de 2013
05:56 a.m.

Podemos por fin regresar a la pregunta de cómo imponer las constricciones a nivel cuántico. Dado que tenemos $c = D \neq 0$, NO podemos identificar a los estados físicos pidiendo simplemente que

$$T(z)\,|\text{fís}\rangle = 0 \quad \forall z \quad \longleftrightarrow \quad L_n|\text{fís}\rangle = 0 \quad \forall n,$$

porque esto contradiría el álgebra de Virasoro,

$$[L_n, L_{-n}] = 2nL_0 + \frac{c}{12}(n^3 - n).$$

Pero lo que en realidad nos interesa es asegurar que T_{ab} se anule dentro de los elementos de matriz,

$$\langle\text{fís}|\underbrace{T(z)}_{\sum_n L_n/z^{n+2}}|\text{fís}'\rangle = 0 \quad \forall z, \ \forall\ |\text{fís}\rangle, |\text{fís}'\rangle \text{ físicos},$$

NO sólo en valores esperados $|\text{fís}'\rangle = |\text{fís}\rangle$

y usando $L_n^\dagger = L_{-n}$, vemos que esto se logra si imponemos las condiciones de estado físico

$$\boxed{\begin{aligned} &L_n|\text{fís}\rangle = 0 \quad \forall\ n>0 \\ &(L_0 - a)|\text{fís}\rangle = 0 \end{aligned}}$$

$\Longrightarrow \langle\text{fís}|L_{-n} = 0$

(y similarmente, $\tilde{L}_{n>0}|\text{fís}\rangle = 0 = (\tilde{L}_0 - \tilde{a})|\text{fís}\rangle$), donde a (y $\tilde{a}$) es una posible constante de orden (necesaria por generalidad, después de que hemos elegido trabajar en el marco conforme z y definido $T(z)$ usando el orden normal $: \, : = \, \mathring{\circ} \, \mathring{\circ}$).

Como consecuencia de esta definición, el conjunto de estados físicos forma un subespacio vectorial del espacio de Hilbert completo, $\mathcal{H}_{fís} \subset \mathcal{H}$.

Podemos notar además que un estado del tipo

$$|\psi\rangle \equiv \underbrace{L_{-n}}_{n>0} \underbrace{|\chi\rangle}_{\text{cualquier estado}}$$

es en automático ortogonal a todos los estados físicos,

$$\langle fís|\psi\rangle = \langle fís|L_{-n}|\chi\rangle = 0 \quad \forall \, |fís\rangle \in \mathcal{H}_{fís} .$$

Esto es lo que se conoce como un estado espurio.

Si un estado es espurio y físico, entonces es ortogonal a sí mismo, es decir, tiene norma cero:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|L_{-n}|\chi\rangle = 0 .$$

Lo llamamos un estado nulo. Si existen en $\mathcal{H}_{fís}$

estados nulos, debemos tener presente que

$$|\text{fís}\rangle \quad \text{y} \quad |\text{fís}\rangle + |\text{nulo}\rangle$$

son físicamente equivalentes, puesto que dan el mismo resultado al tomar su producto interno con cualquier estado físico.

Para expresar esto, definimos formalmente una relación de equivalencia

$$\boxed{|\text{fís}\rangle \simeq |\text{fís}'\rangle \quad \text{si} \quad |\text{fís}\rangle - |\text{fís}'\rangle = \underbrace{\sum_i L_{-n_i} |\chi_i\rangle}_{|\text{nulo}\rangle}}$$

$n_i > 0$

o, usando las relaciones de conmutación,

$$\text{si} \quad |\text{fís}\rangle - |\text{fís}'\rangle = L_{-1}|\chi_1\rangle + L_{-2}|\chi_2\rangle .$$

El espacio de Hilbert que en realidad nos interesa en este procedimiento de cuantización covariante antigua (CCA) es entonces finalmente el conjunto de clases de equivalencia

$$\mathcal{H}_{CCA} \equiv \frac{\mathcal{H}_{\text{fís}}}{\mathcal{H}_{\text{nulo}}} = \{ |\text{fís}\rangle \text{ sujetos a } \simeq \} .$$

(Se tiene una historia muy similar al cuantizar el campo de Maxwell en la norma de Lorentz.)

Apliquemos ahora este procedimiento para obtener el espectro de la cuerda. Consideraremos primero el caso de la cuerda abierta ($\equiv$ excitación de una D-brana), que es más sencillo porque hay un solo conjunto de modos.

En efecto, sabemos ya (p. 167, 180) que las condiciones de Neumann y Dirichlet asociadas a una Dp-brana,

$$\partial X^\alpha = \bar\partial X^\alpha \quad \forall\ z=\bar z \qquad (\alpha=0,\dots,p)\,,$$

$$\partial X^i = -\bar\partial X^i \quad \forall\ z=\bar z \qquad (i=p+1,\dots,D-1)\,,$$

implican que

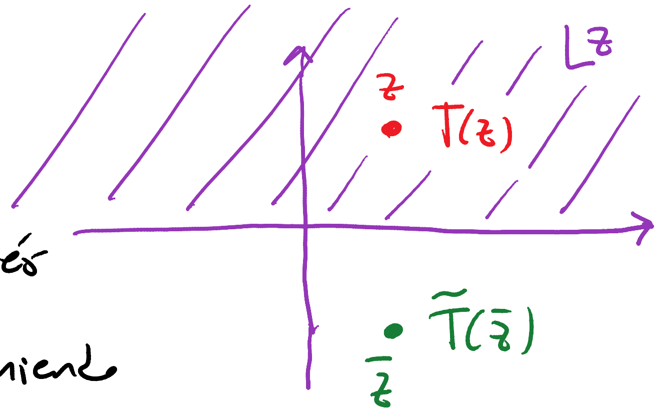
$$\alpha^\alpha_n = \tilde\alpha^\alpha_n\,, \qquad \alpha^i_n = -\tilde\alpha^i_n \quad \forall\ n\,.$$

Podemos notar además que estas mismas condiciones tienen como consecuencia que

$$T(z)\Big|_{z=\bar z} = -\frac{1}{\alpha'} :\partial X\cdot\partial X(z): = -\frac{1}{\alpha'} :\bar\partial X\cdot\bar\partial X(\bar z): = \tilde T(\bar z)\Big|_{z=\bar z}$$

es decir,

$$L_n = \tilde{L}_n \quad \forall\, n .$$



Esta conexión se puede implementar nuevamente a través del truco de duplicación, definiendo

$$T(\bar{z}) \equiv \tilde{T}(\bar{z}) ,$$

de modo que nos quedamos con una sola función $T(z)$ definida sobre todo el plano complejo, que es continua al cruzar el eje real $z = \bar{z}$.

De la mano de esto, tenemos un solo conjunto de modos de Virasoro,

$$L_n \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint \left(dz\, z^{n+1}\, T(z) - d\bar{z}\, \bar{z}^{n+1}\, \tilde{T}(\bar{z}) \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint dz\, z^{n+1}\, T(z)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} :\alpha_n \cdot \alpha_{m-n}: ,$$

que usaremos para imponer las condiciones de estado físico.

En particular,

$$L_0 = \underbrace{\frac{1}{2}\alpha_0^2}_{\alpha' p^2} + \underbrace{\sum_{n>0} \alpha_{-n}\cdot\alpha_n}_{\equiv N}$$

$p^\alpha p_\alpha$

$(p^i = 0)$

"operador de número" satisface

$$[N, \alpha^\mu_{-m}] = m\,\alpha^\mu_{-m}$$

(porque $\alpha_{-n}\cdot\alpha_n = n\, a^\dagger_{-n} a_n$),

así que la constricción

$$(L_0 - a)|\text{fís}\rangle = 0$$

no es otra cosa que la condición de capa de masa

$$\boxed{m^2 \equiv -p^2 = \frac{N-a}{\alpha'} \qquad N = 0, 1, 2, \ldots}$$

válida para los operadores y sus eigenvalores

(análogo a la partícula relativista, donde teníamos una sola constricción, que era justamente $(p^2+m^2)|\text{fís}\rangle = 0$).

Así que, dependiendo de la manera en que esté vibrando la cuerda (valor de N), tendrá una cierta masa m (de entre un conjunto infinito pero discreto de posibilidades), tal como si fuera una partícula relativista (es decir, su energía será $E_{\vec{p}} \equiv p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}$ $p^{\alpha \neq 0}$).

Para identificar en completo detalle a los estados físicos, nos falta todavía imponer las constricciones restantes, $L_{n>0}|fis\rangle = 0$. Analizaremos por separado los estados con distintos eigenvalores de N.

osciladores momento

- $\boxed{N = 0 \longleftrightarrow m^2 = -\frac{a}{\alpha'}}$: estados $|0;k\rangle$ con $k^2 = \frac{a}{\alpha'}$.

k^α

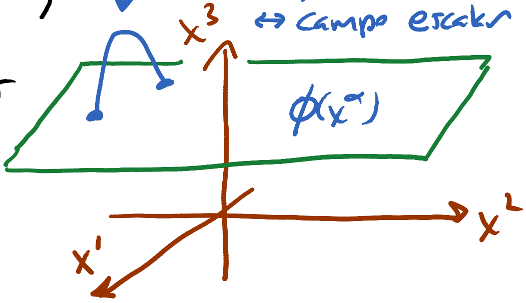
Es fácil ver que en este caso las constricciones se cumplen automáticamente,

$$L_{n>0}|0;k\rangle = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{\ell} :\alpha_{\ell}\cdot\alpha_{n-\ell}:}_{\frac{1}{2}(\alpha_0\cdot\alpha_n + \alpha_{n-1}\cdot\alpha_1 + \alpha_{n-2}\cdot\alpha_2 + \ldots + \alpha_{-1}\cdot\alpha_{n+1} + \alpha_{-2}\cdot\alpha_{n+2} + \ldots)}|0;k\rangle = 0,$$

así que todos los estados $|0;k\rangle$ son físicos. Felizmente, todos tienen norma positiva. ✓

Claramente son idénticos a los estados $|k^\alpha\rangle$ de una partícula sin espín (es decir, sin estados internos) con masa $m^2 = -a/\alpha'$ que se mueve en $p+1$ dimensiones, la cual a su vez reconocemos como una pequeña fluctuación en un campo escalar $\phi(x^\alpha)$ definido sobre la Dp-brana. En otras palabras, $\phi(x^\alpha)$ es uno de los modos en que la Dp-brana puede ser excitada. Es un escalar del grupo de Lorentz longitudinal, $SO(p,1)$.

cuerda SIN vibrar
= partícula sin espín
↔ campo escalar en Dp



- $\boxed{N=1 \leftrightarrow m^2 = \dfrac{1-a}{\alpha'}}$: estados $\alpha^\mu_{-1}|0;k\rangle$ con $k^2 = \dfrac{a-1}{\alpha'}$.

La combinación más general es $\varepsilon_\mu \alpha^\mu_{-1}|0;k\rangle \equiv |\varepsilon;k\rangle$.

Este estado tiene norma

constantes arbitrarias: vector de polarización

$$\langle\varepsilon;k|\varepsilon;k\rangle = \varepsilon^*_\mu \varepsilon_\nu \langle 0;k|\underbrace{\alpha^\mu_1 \alpha^\nu_{-1}}_{=[\alpha^\mu_1,\alpha^\nu_{-1}]=\eta^{\mu\nu}}|0;k\rangle = \varepsilon^*\cdot\varepsilon\,(2\pi)^D\delta^{(D)}(0),$$

que es negativa si $\varepsilon^*\cdot\varepsilon < 0$ (p.ej., para $\varepsilon_\mu = (1,0,0,\cdots)$).

Para tener una teoría sensata, necesitamos asegurarnos que los estados con norma negativa (= fantasmas) NO sean físicos. Podemos verificar que

$L_{n\geq 2}|\varepsilon;k\rangle = 0$ en automático, $\forall\ \varepsilon, k$; pero

$$L_1\,|\varepsilon;k\rangle = \left(\sqrt{2\alpha'}\,p\cdot\alpha_1 + \ldots\right)\varepsilon_\mu\alpha_{-1}^{\mu}|0;k\rangle$$

↑ términos que se anulan

$$= \sqrt{2\alpha'}\,\varepsilon_\mu k_\nu\,\underbrace{\alpha_1^\nu\alpha_{-1}^\mu}_{[\alpha_1^\nu,\alpha_{-1}^\mu]=\eta^{\mu\nu}}|0;k\rangle$$

$$= \sqrt{2\alpha'}\,\varepsilon\cdot k\,|0;k\rangle$$

$$= 0 \text{ solo si } \varepsilon\cdot k = 0.$$ polarización transversal

Además,

$$L_{-1}|0;k\rangle = \left(\sqrt{2\alpha'}\,p\cdot\alpha_{-1}+\ldots\right)|0;k\rangle = \sqrt{2\alpha'}\,k\cdot\alpha_{-1}|0;k\rangle,$$

así que $|\varepsilon;k\rangle$ con $\varepsilon_\mu = \lambda k_\mu$ es espurio.

Consideremos ahora las 3 distintas posibilidades para el valor de la constante de orden a.

i) Si $a<1$, entonces $m^2 = -k^2 > 0$.

El estado espurio $|\lambda k;k\rangle$ tiene $\varepsilon\cdot k = \lambda k^2 \neq 0$, y por tanto no es físico (es decir, no existen estados nulos).

Con un empujón adecuado, podemos ir al marco en reposo para la cuerda, donde $k^{\mu} = (m, 0, 0, \ldots)$. La condición de estado físico $\varepsilon \cdot k = \varepsilon_0 = 0$ elimina entonces a los estados con $\varepsilon_0 \neq 0$, de modo que el estado con norma negativa $\alpha_{-1}^{0}|0;k\rangle$ NO es físico. ✓

Nos quedamos entonces con $D-1$ estados de partícula en las $p+1$ dimensiones de la Dp-brana, que se dividen en 2 conjuntos con base en sus propiedades de transformación bajo el grupo de Lorentz longitudinal $SO(p,1)$,

$\varepsilon_{\alpha} \alpha_{-1}^{\alpha}|0;k\rangle \longleftrightarrow$ p estados de partícula masiva con espín 1 $\left(m^2 = \frac{1-a}{\alpha'}\right)$

con polarización transversal, $\varepsilon \cdot k = 0$

$\longleftrightarrow$ fluctuación de un campo vectorial masivo $A_{\alpha}(x^{\beta})$ sobre Dp

y

$\varepsilon_i \alpha_{-1}^{i}|0;k\rangle \longleftrightarrow$ $D-p-1$ partículas masivas sin espín $\left(m^2 = \frac{1-a}{\alpha'}\right)$

$\varepsilon \cdot k = 0$ es automático

$\longleftrightarrow$ fluctuación de $D-p-1$ campos escalares masivos $\Phi^i(x^\alpha)$ sobre Dp.

ii) Si $a=1$, entonces $m^2=-k^2=0$.

El estado espurio $|\lambda k;k\rangle$ tiene ahora $\varepsilon\cdot k=\lambda k^2=0$, y por lo tanto es nulo. Como resultado, tenemos la relación de equivalencia

$$|\varepsilon;k\rangle \simeq |\varepsilon';k\rangle \quad \text{si} \quad \varepsilon'_\mu=\varepsilon_\mu+\lambda k_\mu .$$

Con un empujón podemos ir al marco donde $k^\mu=(k,k,0,0,\cdots)$, y la condición de estado físico $\varepsilon\cdot k=0$ implica entonces $\varepsilon_1=-\varepsilon_0$.

Dado que el estado con

$$\varepsilon_\mu=(\varepsilon_0,-\varepsilon_0,0,0,\cdots)\propto k_\mu=(-k,k,0,0,\ldots)$$

es nulo, tenemos

$$(\varepsilon_0,-\varepsilon_0,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots)\simeq(0,0,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots),$$

es decir, cualquier estado físico es equivalente a una combinación lineal de estados $\alpha^\mu_{-1}|0;k\rangle$ con $\mu\neq 0,1$. No hay estados con norma negativa. ✓

martes, 19 de marzo de 2013
12:10 p.m.

Los estados físicos nuevamente son de 2 tipos con respecto a $SO(p,1)$,

$\varepsilon_\alpha \alpha_{-1}^{\alpha} |0;k\rangle \leftrightarrow$ p-1 estados de partícula no masiva con espín 1

$\uparrow$ con polarización transversal $\varepsilon \cdot k = 0$ y $\varepsilon_\alpha \simeq \varepsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$

$\leftrightarrow$ fluctuación de un campo vectorial no masivo $A_\alpha(x^\beta)$, es decir, un campo de norma, con $\varepsilon_\alpha \simeq \varepsilon'_\alpha = \varepsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$ la expresión de la invariancia de norma

$$A_\alpha(x) \to A'_\alpha(x) = A_\alpha(x) + \partial_\alpha \lambda(x),$$

y $k \cdot \varepsilon = 0$ es la condición de norma de Lorentz $\partial \cdot A = 0$;

$\varepsilon_i \alpha_{-1}^{i} |0;k\rangle \leftrightarrow$ D-p-1 partículas no masivas sin espín

$\uparrow$ $\varepsilon \cdot k = 0$ es automático

$\longleftrightarrow$ fluctuación de $D-p-1$ campos escalares no masivos $\Phi^i(x^\alpha)$ (sin invariancia de norma).

$\varepsilon_i \simeq \varepsilon_i + \lambda \cancel{k_i^0}$
no tiene ningún efecto

iii) Si $a > 1$, entonces $m^2 = -k^2 < 0$ (taquión)

El estado espurio $|\lambda k; k\rangle$ tiene $\varepsilon \cdot k = \lambda k^2 \neq 0$, y por tanto No es físico.

Yendo al marco donde $k^\mu = (0, m, 0, 0, \ldots)$, la condición de estado físico $\varepsilon \cdot k = 0$ elimina los estados con $\varepsilon_1 \neq 0$.

El estado con norma negativa $\alpha_{-1}^0 |0; k\rangle$ es entonces físico. ✗

Del análisis de este nivel, concluimos entonces que:

* Para que la teoría tenga sentido, debemos tener $\boxed{a \leq 1}$.
* En el caso límite $a = 1$ existen menos estados físicos no nulos ($D-2$ en lugar de $D-1$), lo cual está asociado a una invariancia de norma en el espaciotiempo ($A_\alpha \simeq A_\alpha + \partial_\alpha \lambda \longleftrightarrow \varepsilon_\alpha \simeq \varepsilon_\alpha + \lambda k_\alpha$).

- $\boxed{N \geq 2 \quad \longleftrightarrow \quad m^2 \geq \frac{2-a}{\alpha'} \overset{a \leq 1}{\geq} \frac{1}{\alpha'}}$:

N=2 N=2

P.ej. con $N=2$ se tienen $\alpha^{\mu}_{-1}\alpha^{\nu}_{-1}|0;k\rangle$ y $\alpha^{\mu}_{-2}|0;k\rangle$ con $k^2 = \frac{a-2}{\alpha'}$

La combinación lineal más general es entonces

$$\left(\varepsilon_{\mu\nu}\alpha^{\mu}_{-1}\alpha^{\nu}_{-1} + \varepsilon_{\mu}\alpha^{\mu}_{-2}\right)|0;k\rangle .$$

Los resultados para $N \geq 2$ dependen no sólo del valor de la constante de orden a, sino también de la dimensión espaciotemporal D ($\longleftrightarrow$ número de X^{μ}).

P.ej., tomando $a=1$, se puede verificar (Tarea 3) que

$$|\psi\rangle \equiv \left\{\alpha_{-1}\cdot\alpha_{-1} + \left(\frac{D-4}{5}\right)\alpha'(k\cdot\alpha_{-1})^2 + \left(\frac{D-1}{5}\right)\sqrt{2\alpha'}\,k\cdot\alpha_{-2}\right\}|0;k\rangle$$

(con $k^2 = -1/\alpha'$) es físico, y tiene norma

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{2}{25}(D-1)(26-D)(2\pi)^D\delta^{(D)}(0)$$

$$< 0 \quad \text{si} \quad D > 26 .$$

El resultado general ("teorema de no fantasmas") es que los estados con norma negativa se eliminan $\forall N$ con las condiciones de estado físico si $\boxed{a\leq 1 \text{ y } D\leq 26}$ [ver p.ej. GSW 2.3.3, Polchinski 4.4].

El caso límite $\boxed{a=1,\ D=26}$ es especial, puesto que da lugar a muchos más estados nulos, y contiene por tanto menos estados físicos (no nulos), como expresión de invariancia de norma en el espaciotiempo.

Tomando en cuenta todos los estados nulos, en el caso $\boxed{a=1,\ D=26}$ se encuentra que los estados físicos independientes son generados únicamente por $D-2$ osciladores transversales $\{\alpha^j_{-n}\}$ (como vimos explícitamente para el nivel $N=1$), que es justo lo que esperamos desde un principio, dado que sólo $D-2$ de los campos X^μ representan grados de libertad físicos.

Por esta razón, es sólo para $\boxed{a=1,\ D=26}$ que el espectro en CCA (donde primero cuantizamos, y después eliminamos la redundancia) resulta ser idéntico al obtenido por cuantización en el cono de luz (p.143, donde primero